REMARQUES SUR LES MOYENNES DES FONCTIONS DE PILTZ SUR LES ENTIERS FRIABLES

SARY DRAPPEAU

Abstract. We study the mean value of generalized divisor functions $\tau_\kappa(n)$ over integers without large prime factors (here $\kappa > 0$). We relate this problem to the computation of the ratio $\Psi(x^{1/\kappa}, y)^\kappa/\Psi(x, y)$, involving the y-smooth numbers counting function. We establish an inverse theorem, giving limitations on the range in (x, y) in which this ratio can be asymptotically estimated uniformly in κ.

1. Introduction

Un entier n est dit y-friable si son plus grand facteur premier $P(n)$ est inférieur ou égal à y, avec la convention $P(1) = 1$. On note

$$S(x, y) := \{n \le x : P(n) \le y\}, \quad \Psi(x, y) := |S(x, y)|.$$

Nous nous intéressons ici aux valeurs moyennes

$$\mathcal{M}_f(x, y) := \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x,y)} f(n) \tag{1.1}$$

d'une fonction multiplicative f sur les entiers friables. Ces moyennes ont été étudiées dans la série de travaux [TW03, HTW08, TW08a, TW08b] ainsi que dans [BT05b], et jouent un rôle important dans la compréhension du cas $y = x$, par le biais de la factorisation de chaque entier $n = ab$ avec $P(a) \le y$ et $p|b \Rightarrow p > y$ (voir par exemple [GS01]).

Notons $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n. Dans l'article [Dra15], faisant suite aux travaux de Fouvry–Tenenbaum [FT90], il est établi que

$$\frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ n>1}} \tau(n - 1) \sim \log x \qquad \Big(2 \le y \le x,\ \frac{\log\log x}{\log y} \to \infty\Big). \tag{1.2}$$

Bien sûr, la fonction $n \mapsto \tau(n - 1)$ n'est pas multiplicative ; ce problème est donc de nature très différente, et *a priori* plus délicate, que l'étude de

$$\mathcal{M}_\tau(x, y) = \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x,y)} \tau(n).$$

On pourrait donc naïvement s'étonner que le comportement asymptotique de $\mathcal{M}_\tau(x, y)$ n'est en revanche connu que dans un domaine du type

$$\exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \le y \le x, \tag{H_ε}$$

voir par exemple [Smi93][1]. Ce domaine est plus restreint que (1.2) ; l'objectif de la présente note est d'éclaircir les raisons de cette discrépance.

Étant donné $\kappa > 0$, nous considérons la fonction de Piltz τ_κ, définie par la série génératrice

$$\sum_{n \ge 1} \frac{\tau_\kappa(n)}{n^s} = \zeta(s)^\kappa \qquad (\mathfrak{Re}\, s > 1).$$

Date: 1st July 2016.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11N25; Secondary 11N37.

[1]L'estimation générale du Théorème 2.5 de [BT05b], appliquée au cas $f = \tau$, ne fournit pas un équivalent asymptotique.

C'est une fonction multiplicative, avec $\tau_\kappa(p) = \kappa$ pour p premier. Pour $\kappa = 2$, nous retrouvons $\tau_2 = \tau$. Nous avons également besoin de la notation suivante : lorsque $2 \le y \le x$, l'on note $\alpha(x, y)$ l'unique solution réelle positive à l'équation

$$\log x = \sum_{p \le y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1}. \tag{1.3}$$

Enfin, on pose

$$u := \frac{\log x}{\log y}, \qquad \phi_2(s, y) := \sum_{p \le y} \frac{(\log p)^2 p^s}{(p^s - 1)^2} \qquad (2 \le y \le x,\ \mathfrak{Re}(s) > 0). \tag{1.4}$$

Notre première observation est que dans le cas $f = \tau_k$, la valeur moyenne (1.1) peut être comparée de façon simple à $\Psi(x^{1/\kappa}, y)^\kappa$.

Theorème 1. *Pour $\kappa > 0$ et $2 \le y \le x$, on a*

$$\sum_{n \in S(x,y)} \tau_\kappa(n) = A_\kappa(x, y) \Psi(x^{1/\kappa}, y)^\kappa \Big\{1 + O_\kappa\Big(\frac{1}{u} + \frac{\log y}{y}\Big)\Big\} \tag{1.5}$$

avec

$$A_\kappa(x, y) = \kappa^{-\frac{1}{2}} (\beta \sqrt{2\pi \phi_2(\beta, y)})^{\kappa - 1} \qquad (\beta = \alpha(x^{1/\kappa}, y)).$$

Lorsque $\min\{y, u\} \to \infty$*, on a l'approximation explicite*

$$A_\kappa(x, y) \sim \kappa^{\kappa/2 - 1} \Big(2\pi u \Big(1 + \frac{\log x}{\kappa y}\Big)\Big)^{(1-\kappa)/2} \Big(\log\Big(1 + \frac{\kappa y}{\log x}\Big)\Big)^{1-\kappa}. \tag{1.6}$$

Dans le cas $\kappa = 2$, le problème s'interprète comme le comptage des points $(n, m) \in \mathbf{N}^2$, à coordonnées y-friables, situés sous l'hyperbole $mn = x$. Le résultat précédent met en valeur la pertinence de comparer le nombre total au nombre de points dans le carré $\max\{m, n\} \le x^{\frac{1}{2}}$, plutôt qu'au nombre de points sur la droite $n = 1$.

L'estimation (1.5), dont la preuve est très simple, permet d'ouvrir la voie à des estimations semi-asymptotiques [BT05b, Théorème 2.4], c'est-à-dire des estimations uniformes du rapport $\mathcal{M}_{\tau_k}(x/d, y)/\mathcal{M}_{\tau_k}(x, y)$ pour $1 \le d \le x$. Nous nous contentons d'illustrer cela par l'exemple

$$\mathcal{M}_{\tau_k}(x/2, y) \sim 2^{-\beta} \mathcal{M}_{\tau_k}(x, y) \qquad (\beta = \alpha(x^{1/\kappa}, y),\ x \to \infty),$$

qui découle immédiatement des formules (1.5), (1.6) et du Théorème III.5.22 de [Ten15]. Il est utile de noter que

$$\beta = o(1) \Leftrightarrow y \le (\log x)^{1+o(1)}, \qquad \beta = 1 + o(1) \Leftrightarrow \log y / \log_2 x \to \infty.$$

Dans le cas d'une fonction multiplicative f plus générale, il est connu [BT05a, p.542] que les valeurs $f(p^2)$ (resp. $f(p^\nu)$) influent de façon essentielle sur l'ordre de grandeur de la valeur moyenne (1.1) dès lors que $y \le (\log x)^{2+o(1)}$ (resp. $y \le (\log x)^{\nu/(\nu-1)+o(1)}$). De plus, dans les cas les plus favorables, une méthode de convolution permet facilement de se ramener à $f = \tau_\kappa$. Ce sont les raisons pour lesquelles nous ne tentons pas ici d'énoncer un résultat pour une fonction multiplicative générique f.

Notre second résultat concerne l'évaluation du rapport

$$\frac{\Psi(x^{1/\kappa}, y)^\kappa}{\Psi(x, y)}. \tag{1.7}$$

Nous posons

$$\phi_0(s, y) := \log \zeta(s, y) = -\sum_{p \le y} \log(1 - p^{-s}) \qquad (\mathfrak{Re}(s) > 0).$$

Notons que $\phi_0(\alpha(x, y), y) \sim u + \log\log y$ lorsque $\min\{\frac{y}{\log x}, u\} \to \infty$.

Theorème 2. *Soit* $\kappa > 0$. *Alors on a*

$$\frac{\Psi(x^{1/\kappa}, y)^\kappa}{\Psi(x, y)} = B_\kappa(x, y) \exp\Big\{ \int_1^\kappa \phi_0(\alpha(x^{1/\lambda}, y), y)\, \mathrm{d}\lambda \Big\}\Big\{1 + O_\kappa\Big(\frac{1}{u} + \frac{\log y}{y}\Big)\Big\},$$

avec

$$B_\kappa(x, y) = \frac{\alpha\sqrt{2\pi\phi_2(\alpha, y)}}{(\beta\sqrt{2\pi\phi_2(\beta, y)})^\kappa} \qquad (\beta = \alpha(x^{1/\kappa}, y)).$$

En particulier, on a

$$B_\kappa(x, y) \sim \begin{cases} (2\pi u)^{(1-\kappa)/2}\kappa^{\kappa/2}, & (y/\log x \to \infty), \\ (2\pi y/\log y)^{(1-\kappa)/2}, & (y/\log x \to 0). \end{cases} \tag{1.8}$$

Lorsque $(\log x)^{1+\varepsilon} \le y \le x$, une forme forte de la formule de Mertens (*cf.* [HT86, p.289]) permet d'écrire

$$\begin{aligned} &\int_1^\kappa \phi_0(\alpha(x^{\frac{1}{\lambda}}, y), y)\, \mathrm{d}\lambda \\ &\quad = (\kappa - 1)\log(\mathrm{e}^\gamma \log y) + \int_1^\kappa \Xi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)\, \mathrm{d}\lambda + O_{\kappa,\varepsilon}\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{u}{\mathrm{e}^{(\log y)^{3/5-\varepsilon}}}\Big). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Ici, $\xi(t)$ dénote l'unique solution non nulle de $\mathrm{e}^\xi = 1 + t\xi$ lorsque $t \ne 1$, avec $\xi(1) = 0$, tandis que

$$\Xi(u) := \int_1^u t\xi'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Le second terme d'erreur dans (1.9) provient de la région sans zéros de ζ due à Korobov et Vinogradov [IK04, Corollary 8.30]. Il n'est uniformément borné que dans un domaine essentiellement du type (H_ε). Cela suggère une limitation à l'estimation du rapport (1.7) en dehors du domaine (H_ε) et constitue la motivation à ce qui suit.

Notre troisième résultat concerne un théorème inverse. Hildebrand [Hil84] a démontré que la validité, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, de l'estimation

$$\Psi(x, y) = x\rho(u)\mathrm{e}^{O_\varepsilon(y^\varepsilon)} \qquad (y \ge (\log x)^{2+\varepsilon}),$$

est équivalente à l'hypothèse de Riemann. Ici, $\rho(u)$ est la fonction de Dickman (*cf.* [Ten15, Section III.5.3]). Sa méthode repose de façon essentielle sur une certaine équation fonctionnelle vérifiée par $\Psi(x, y)$ (voir également [Hil86]).

Compte tenu du Théorème 2, il est naturel de s'attendre à ce qu'un phénomène analogue se produise dans le cas du rapport (1.7).

Conjecture 1. *Soit* $\kappa \ne 1$ *fixé. Supposons que pour tout* $\varepsilon > 0$, *l'on ait*

$$\frac{\Psi(x^{1/\kappa}, y)^\kappa}{\Psi(x, y)} = \frac{\rho(u/\kappa)^\kappa}{\rho(u)} \exp\{O_\varepsilon(y^\varepsilon)\} \qquad ((\log x)^{2+\varepsilon} \le y \le x). \tag{1.10}$$

Alors l'hypothèse de Riemann est vraie.

La quantité au membre de gauche de (1.10) ne semble pas être facilement abordable par la méthode de Hildebrand [Hil84]. Si l'on autorise κ à varier sur un intervalle non vide sans que cela n'altère la constante implicite dans (1.10), nous obtenons par une autre méthode le résultat suivant.

Theorème 3. *Soit* $\mathcal{I} \subset \mathbf{R}_+^\times$ *un ouvert non vide. Si l'estimation* (1.10) *est vraie uniformément pour* $\kappa \in \mathcal{I}$, *alors* $\zeta(s) \ne 0$ *lorsque* $\mathfrak{Re}(s) > \frac{3}{4}$.

Nous précisons que notre approche est différente de celle de [Hil84], et consiste à raisonner directement à partir de l'estimation du Théorème 2. En particulier, nous n'utilisons pas l'identité de Hildebrand [Hil86].

Nous concluons en remarquant que le Théorème 3 fournit une autre démonstration de la version affaiblie suivante de [Hil84, Theorem 1] :

$$\begin{aligned}&(\forall\varepsilon>0,\quad \Psi(x,y)=x\rho(u)\mathrm{e}^{O_\varepsilon(y^\varepsilon)}\quad\text{pour } (\log x)^{2+\varepsilon}\le y)\\ \Longrightarrow\quad &\zeta(s)\neq 0\quad (\mathfrak{Re}(s)>\tfrac34).\end{aligned}$$

Remerciements. L'auteur remercie R. de la Bretèche et le rapporteur anonyme pour des remarques sur une version préliminaire.

Notations et rappels. Nous rappelons quelques définitions de [HT86]. La série de Dirichlet associée aux entiers y-friables est notée

$$\zeta(s,y) := \sum_{P(n)\le y} n^{-s} = \prod_{p\le y}(1-p^{-s})^{-1}\qquad (\mathfrak{Re}(s)>0).$$

Nous rappelons la définition (1.3) du *point-selle* $\alpha(x,y)$. Nous définissons également

$$\phi_1(s,y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\phi_0(s,y)=-\sum_{p\le y}\frac{\log p}{p^s-1}\qquad(\mathfrak{Re}(s)>0).$$

Nous rappelons que $\phi_2(s,y)$, la dérivée seconde de $\phi_0(s,y)$, est définie en (1.4). Avec l'abbréviation $\alpha=\alpha(x,y)$, le résultat principal de [HT86] est l'estimation

$$\Psi(x,y)=\frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y)}{\alpha\sqrt{2\pi\phi_2(\alpha,y)}}\Big\{1+O\Big(\frac1u+\frac{\log y}{y}\Big)\Big\}\qquad(2\le y\le x). \tag{1.11}$$

Nous rappelons enfin l'estimation [HT86, Lemma 4]

$$(-1)^j\phi_j(\alpha,y)\asymp u(\log y)^j,\qquad(\log x\ll y\le x,\ j\in\{1,2\}).$$

2. Démonstration des résultats

2.1. Démonstration du Théorème 1.

Le Théorème 1 découle aisément des calculs de [HT86], une fois la remarque faite que

$$x^s\zeta(s,y)^\kappa=(x^{s/\kappa}\zeta(s,y))^\kappa\qquad(x,y\ge 2,\mathfrak{Re}(s)>0).$$

Ainsi, le rôle du point-selle est joué par la quantité $\beta(x,y)=\alpha(x^{1/\kappa},y)$. Des calculs semblables à ceux de [HT86] fournissent alors

$$\sum_{n\in S(x,y)}\tau_\kappa(n)=\Big\{1+O_\kappa\Big(\frac1u+\frac{\log y}{y}\Big)\Big\}\frac{x^\beta\zeta(\beta,y)^\kappa}{\beta\sqrt{2\kappa\pi\phi_2(\beta,y)}}.$$

La comparaison de cette estimation avec (1.11) fournit le résultat annoncé (1.5). L'approximation (1.6) est déduite en utilisant [HT86, Corollary 1].

2.2. Démonstration du Théorème 2.

Notons temporairement $\beta(\kappa)=\beta_{x,y}(\kappa)=\alpha(x^{1/\kappa},y)$. C'est une fonction dérivable de $\kappa>0$. Nous avons de plus

$$\kappa\phi_0(\beta(\kappa),y)+\beta(\kappa)\log x-\phi_0(\beta(1),y)-\beta(1)\log x=\int_1^\kappa\phi_0(\beta(\lambda),y)\,\mathrm{d}\lambda\qquad(\kappa>0). \tag{2.1}$$

Cette identité est aisément vérifiable en dérivant par rapport à κ, puis en utilisant la définition du point-selle (1.3). Le résultat annoncé est alors une conséquence simple de (2.1) et de [HT86, Theorem 1]. L'estimation (1.8) est une conséquence de [HT86, Corollary 1].

2.3. **Démonstration du Théorème 3.** Dans cette section, il sera utile d'abréger

$$\alpha_y(u) := \alpha(y^u, y).$$

C'est une fonction dérivable de u ; on note que pour $y \gg \log x$,

$$\alpha_y'(u) = -\frac{\log y}{\phi_2(\alpha_y(u), y)} \ll \frac{1}{u \log y}.$$

En utilisant le Théorème 2, l'hypothèse (1.10) est réécrite sous la forme

$$\int_1^\kappa \phi_0(\alpha_y(u/\lambda), y), y)\,\mathrm{d}\lambda = \int_1^\kappa \Xi(u/\lambda)\,\mathrm{d}\lambda + O(y^\varepsilon) \qquad (1 \le u \le y^{\frac12 - \varepsilon},\ \kappa \in \mathcal{I}). \tag{2.2}$$

Nous voyons ceci comme une majoration de la différence $\phi_0(\alpha_y(u/\lambda), y) - \Xi(u/\lambda)$ en moyenne sur λ. La première étape est d'en déduire une majoration valable pour λ fixé, autrement dit, retirer la moyenne sur λ. Cela utilise l'hypothèse supplémentaire sur $\mathcal{I}$, et c'est la raison pour laquelle nous obtenons *in fine* la valeur $\frac34$ (plutôt que $\frac12$). Nous montrons dans un premier temps que le Théorème 3 découle de la proposition suivante.

Proposition 1. *Soit $\delta \in [0, \frac12[$. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, l'on ait*

$$\phi_0(\alpha_y(u), y) = \Xi(u) + O(y^{\delta+\varepsilon}) \qquad ((\log x)^{2+\varepsilon} \le y \le x). \tag{2.3}$$

Alors on a $\zeta(s) \neq 0$ pour $\mathfrak{Re}(s) > \frac12 + \delta$.

Démonstration que la Proposition 1 implique le Théorème 3. Soit $\kappa \in \mathcal{I}$, et $(\eta, \eta_0) \in \mathbf{R}^2$ des paramètres vérifiant $0 < |\eta| < \eta_0$. Lorsque η_0 est suffisamment petit, on peut appliquer l'hypothèse (2.2) avec x remplacé par $x^{1/(1+\eta)}$ et κ remplacé par $\kappa/(1+\eta)$, ce qui fournit par soustraction

$$\int_1^{1+\eta} \phi_0(\alpha_y(u/\lambda), y)\,\mathrm{d}\lambda = \int_1^{1+\eta} \Xi(u/\lambda)\,\mathrm{d}\lambda + O(y^\varepsilon).$$

Soit $F(\eta)$ l'intégrale du membre de gauche. C'est une fonction $\mathcal{C}^2$ de η, qui vérifie de plus

$$F'(0) = \phi_0(\alpha_y(u), y), \quad F''(\eta) = -\frac{u}{(1+\eta)^2}\alpha_y'\Big(\frac{u}{1+\eta}\Big)\phi_1\Big(\alpha_y\Big(\frac{u}{1+\eta}\Big), y\Big) \ll u.$$

Les propriétés analogues sont vraies pour l'intégrale du membre de droite. En prenant les taux d'accroissement entre $\eta = 0$ et $\eta = \eta_0 u^{-\frac12}$, nous obtenons, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\phi_0(\alpha_y(u), y) = \Xi(u) + O(u^{\frac12} y^\varepsilon) \qquad (1 \le u \le y^{\frac12 - \varepsilon}).$$

Nous sommes donc en mesure d'appliquer la Proposition 1 avec $\delta = \frac14$, ce qui fournit la conclusion annoncée. □

La seconde étape consiste à extraire de l'hypothèse implicite (2.3) une estimation asymptotique de $\phi_0(\beta, y)$ pour chaque $\beta \in]\frac12, 1[$. Nous montrons dans un deuxième temps que la Proposition 1 est une conséquence du lemme suivant, qui fait intervenir la fonction

$$L(w) := \mathrm{li}(w) - \frac{w}{\log w} \qquad (w > 1)$$

avec $\mathrm{li}(w) := \int_2^w \mathrm{d}t/(\log t)$.

Lemme 1. *Soit $(\vartheta, \delta) \in \mathbf{R}^2$ avec $0 < \delta < \vartheta < 1$, et $F : [2, +\infty[\to]1, +\infty[$ une fonction satisfaisant les conditions suivantes :*

(i) F est continue par morceaux, continue à droite, et $F(y) \asymp y^\vartheta$,

(ii) on a

$$L(F(y)) = \int_2^y \frac{F(z)}{\log F(z)} \frac{\mathrm{d}z}{z \log z} + O(y^\delta) \qquad (y \ge 2). \tag{2.4}$$

Alors on a

$$F(y) = y^\vartheta + O(y^\delta (\log y)^2) \qquad (y \ge 2). \tag{2.5}$$

Démonstration que le Lemme 1 implique la Proposition 1. Soit $\beta \in]\frac{1}{2}, 1-\delta[$ fixé. On définit

$$F(y) := \exp\Big\{\xi\Big(\frac{-\phi_1(\beta, y)}{\log y}\Big)\Big\} \qquad (y \geq 2).$$

Cela signifie que par définition,

$$\frac{F(y)-1}{\log F(y)} = -\frac{\phi_1(\beta,y)}{\log y}.$$

On remarque que l'on a

$$F(y) \sim \frac{-\phi_1(\beta,y)}{\log y} \log\Big(\frac{-\phi_1(\beta,y)}{\log y}\Big) \asymp y^{1-\beta}$$

lorsque $y \to \infty$. Cela valide l'hypothèse (i) avec $\vartheta = 1-\beta$. L'hypothèse (ii), quant à elle, découle de la relation (2.3). En effet, on a d'une part

$$\Xi(u) = \mathrm{li}(\mathrm{e}^{\xi(u)}) + O(\xi(u)) \qquad (u \geq 2).$$

D'autre part, une intégration par parties fournit

$$\phi_0(\beta, y) = O_\beta(1) - \frac{\phi_1(\beta,y)}{\log y} - \int_2^y \frac{\phi_1(\beta,t)}{\log t}\frac{\mathrm{d}t}{t\log t} \qquad (y \geq 2).$$

Les hypothèses du Lemme 1 étant vérifiées, on obtient pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,

$$F(y) = y^{1-\beta} + O(y^{\delta+\varepsilon}). \tag{2.6}$$

D'autre part, par définition de F, on a

$$\frac{F(y)-1}{\log F(y)} = \frac{1}{\log y}\sum_{p\leq y}\frac{\log p}{p^\beta - 1} = \frac{1}{\log y}\Big(\sum_{p\leq y}\frac{\log p}{p^\beta} + O_\beta(1)\Big).$$

Ainsi la relation (2.6) implique

$$\sum_{p\leq y}\frac{\log p}{p^\beta} = \frac{y^{1-\beta}}{1-\beta} + O_{\beta,\varepsilon}(y^{\delta+\varepsilon}) \qquad (y \geq 2).$$

Le choix $\beta = \frac{1}{2} + \varepsilon$ implique alors $\sum_{p\leq y}\log p = y + O(y^{\frac{1}{2}+\delta+\varepsilon})$, ce qui est classiquement équivalent à l'assertion que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\mathfrak{Re}(s) > \frac{1}{2} + \delta$. $\square$

Démonstration du Lemme 1. Soient $(y_1, y_2) \in \mathbf{R}$ avec $10 \leq y_1 \leq y_2 \leq 2y_1$. On note que $y_1 \asymp y_2$. Pour $w \geq F(y_1)$, on pose

$$A_{y_1}(w) := \int_{F(y_1)}^w \frac{\mathrm{d}t}{(\log t)^2} = L(w) - L(F(y_1)).$$

On calcule de deux façons la quantité

$$\mathcal{B}(y_1,y_2) := \frac{A_{y_1}(F(y_2))\log F(y_2)}{F(y_2)} + \int_{F(y_1)}^{F(y_2)} \frac{\log w - 1}{w^2} A_{y_1}(w)\,\mathrm{d}w. \tag{2.7}$$

D'une part, une intégration par parties fournit immédiatement

$$\mathcal{B}(y_1,y_2) = \log\log F(y_2) - \log\log F(y_1).$$

D'autre part, notre hypothèse (2.4) implique, pour tout $y' \in [y_1, y_2]$,

$$A_{y_1}(F(y')) = \int_{y_1}^{y'} \frac{F(z)}{\log F(z)}\frac{\mathrm{d}z}{z\log z} + O(y_2^\delta). \tag{2.8}$$

Pour $w \in [F(y_1), F(y_2)]$, on définit $y_w := \inf\{y \geq 2 : F(y) \geq w\}$. Notre hypothèse (i) implique ainsi $F(y_w) \geq w$, et $F(y_w - 1) < w$. On en déduit que $|F(y_w) - w| \ll (\log y_2)^2 y_2^\delta$, ce qui implique

$$A_{y_1}(w) = \int_{y_1}^{y_w} \frac{F(z)}{\log F(z)}\frac{\mathrm{d}z}{z\log z} + O(y_2^\delta)$$

d'après (2.8). Nous reportons cette estimation dans l'intégrale du membre de droite de (2.7). La contribution du terme d'erreur est encore une fois $O(y_2^{\delta-\vartheta}\log y_2)$. Par ailleurs, notre hypothèse (2.8) implique, pour tout $z \in [y_1, y_2]$,

$$\begin{cases} F(z) > w \Longrightarrow z \geq y_w + O(y_2^{\delta+1-\vartheta}(\log y_2)^2), \\ F(z) \leq w \Longrightarrow z \leq y_w + O(y_2^{\delta+1-\vartheta}(\log y_2)^2). \end{cases}$$

On a donc

$$\int_{F(y_1)}^{F(y_2)} \Big(\int_{y_1}^{y_w} \mathbf{1}_{F(z)>w}\,\mathrm{d}z + \int_{y_w}^{y_1} \mathbf{1}_{F(z)\leq w}\,\mathrm{d}z \Big)\,\mathrm{d}w \ll y_2^{1+\delta}(\log y_2)^2.$$

Cela permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{F(y_1)}^{F(y_2)} \frac{\log w - 1}{w^2} \int_{y_1}^{y_w} \frac{F(z)}{\log F(z)} \frac{\mathrm{d}z}{z\log z}\,\mathrm{d}w& \\ = \int_{y_1}^{y_2} \frac{F(z)}{\log F(z)} \int_{F(z)}^{F(y_2)} \frac{\log w - 1}{w^2}\,\mathrm{d}w \frac{\mathrm{d}z}{z\log z} &+ O(y_2^{\delta-\vartheta}\log y_2). \end{aligned}$$

Enfin, on remarque que

$$\begin{aligned} \frac{\log F(y_2)}{F(y_2)} \int_{y_1}^{y_2} \frac{F(z)}{\log F(z)} \frac{\mathrm{d}z}{z\log z} + \int_{y_1}^{y_2} \frac{F(z)}{\log F(z)} \int_{F(z)}^{F(y_2)} \frac{\log w - 1}{w^2}\,\mathrm{d}w \frac{\mathrm{d}z}{z\log z}& \\ = \log\log y_2 - \log\log y_1.& \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(y_1,y_2) &= \log\log F(y_2) - \log\log F(y_1) \\ &= \log\log y_2 - \log\log y_1 + O(y_2^{\delta-\vartheta}\log y_2) \end{aligned} \qquad (10 \leq y_1 \leq y_2 \leq 2y_1).$$

En sommant cela convenablement et par l'hypothèse (i), nous obtenons l'estimation

$$\log\log F(y) = \log\log y + \log\vartheta + O(y^{\delta-\vartheta}\log y) \qquad (y \geq 10)$$

dont la relation annoncée (2.5) est une conséquence. □

References

[BT05a] R. de la Bretèche and G. Tenenbaum, *Entiers friables: inégalité de Turán-Kubilius et applications*, Invent. Math. **159** (2005), no. 3, 531–588.

[BT05b] ———, *Propriétés statistiques des entiers friables*, Ramanujan J. **9** (2005), no. 1-2, 139–202.

[Dra15] S. Drappeau, *Théorèmes de type Fouvry-Iwaniec pour les entiers friables*, Compos. Math. **151** (2015), no. 5, 828–862.

[FT90] É. Fouvry and G. Tenenbaum, *Diviseurs de Titchmarsh des entiers sans grand facteur premier*, Analytic number theory (Tokyo, 1988), Lecture Notes in Math., vol. 1434, Springer, Berlin, 1990, pp. 86–102.

[GS01] A. Granville and K. Soundararajan, *The spectrum of multiplicative functions*, Ann. of Math. (2) **153** (2001), no. 2, 407–470.

[Hil84] A. Hildebrand, *Integers free of large prime factors and the Riemann hypothesis*, Mathematika **31** (1984), no. 2, 258–271 (1985).

[Hil86] ———, *On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$*, J. Number Theory **22** (1986), no. 3, 289–307.

[HT86] A. Hildebrand and G. Tenenbaum, *On integers free of large prime factors*, Trans. Amer. Math. Soc. **296** (1986), no. 1, 265–290.

[HTW08] G. Hanrot, G. Tenenbaum, and J. Wu, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. II*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **96** (2008), no. 1, 107–135.

[IK04] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[Smi93] H. Smida, *Valeur moyenne des fonctions de Piltz sur les entiers sans grand facteur premier*, Acta Arith. **63** (1993), no. 1, 21–50.

[Ten15] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 4e ed., Échelles, Belin, 2015, (English translation: Graduate Studies in Mathematics 163, Amer. Math. Soc. 2015).

[TW03] G. Tenenbaum and J. Wu, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables*, J. Reine Angew. Math. **564** (2003), 119–166.

[TW08a] ______, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. III*, Compos. Math. **144** (2008), no. 2, 339–376.

[TW08b] ______, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. IV*, Anatomy of integers, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 129–141.

Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M UMR 7373, 13453 Marseille, France
E-mail address: `sary-aurelien.drappeau@univ-amu.fr`