Sección: Óptica Física / Section: Physical Optics

Generalización de la relación de Snell del ángulo de refracción

Generalized Snell's refraction angle relationship

M. Fernández Guasti(*), R. Diamant

Laboratorio de Óptica Cuántica, Depto. de Física, Universidad A. Metropolitana - Iztapalapa, 09340 México D.F., Ap. postal. 55-534, México.

(*) Email: mfg@xanum.uam.mx

Recibido / Received: 04/06/2012. Revisado / Revised: 21/07/2012. Aceptado / Accepted: 27/07/2012.

DOI: http://dx.doi.org/10.7149/OPA.45.3.377

RESUMEN:

La representación de amplitud y fase permite obtener ecuaciones diferenciales para la amplitud y el vector de onda. Éstas ecuaciones pueden desacoplarse utilizando el invariante de Ermakov. Para medios estratificados transparentes, se muestra que la componente del vector de onda en la dirección de estratificación k_z, cumple con la relación $k_z \tan(\theta) =$ constante, donde θ es el ángulo de inclinación de propagación. Dicha componente satisface la ecuación diferencial no lineal $k_z \ddot{k}_z - \frac{3}{2}\dot{k}_z^2 + 2[k_z^2 - (n^2 - \alpha^2)k_0^2]k_z^2 = 0$, donde n es el índice de refracción, α es una constante y k_0 la magnitud del vector de onda en el vacío. Para variaciones suaves del índice de refracción comparadas con la longitud de onda, la relación anterior deviene en la relación de Snell generalizada $n^2(z)\sin^2\theta(z) = \alpha^2$. En el caso de interfase abrupta entre dos medios homogéneos, se recupera la relación usual de Snell $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$.

Palabras clave: Propagación en Medios Inhomogéneos, Medios Estratificados, Invariante de Campos Complementarios.

ABSTRACT:

The representation of waves in amplitude and phase variables can be decoupled using the Ermakov invariant. The wave vector component in the direction of stratification kz, satisfies the relationship $k_z \tan(\theta) =$ constant, where θ is the angle of propagation. This component must fulfill the nonlinear differential equation $k_z \ddot{k}_z - \frac{3}{2}\dot{k}_z^2 + 2[k_z^2 - (n^2 - \alpha^2)k_0^2]k_z^2 = 0$, where n is the refractive index, α is a constant and k_0 the wave vector magnitude in vacuum. For soft variations of the refractive index compared with the wavelength, this relationship becomes the so called generalized Snell relationship $n^2(z)\sin^2\theta(z) = \alpha^2$. For an abrupt interface, the usual Snell equation $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ is recovered.

Key words: Propagation in Stratified Media, Ermakov Invariant.

REFERENCIAS Y ENLACES / REFERENCES AND LINKS

[1]. M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*. CUP, 7*th* edition (2005).

[2]. H. Moya-Cessa, M. Fernández-Guasti, S. Chávez Cerda, V. Arrizon, "Optical realization of quantum mechanical invariant", *Opt. Lett.* **34**, 1459–1461 (2009).

[3]. H. Moya-Cessa, M. Fernández-Guasti, "Time dependent quantum harmonic oscillator subject to a sudden change of mass: continuous solution", *Rev. Mex. Fís.* **53**, 42–46 (2007).

[4]. R. S. Kaushal, "Quantum analogue of Ermakov systems and the phase of the quantum wave function", *Int. J. Theor. Phys.* **40**, 835-847 (2001).

[5]. M. Fernández-Guasti, A. Gil-Villegas, "Orthogonal functions invariant for the time dependent harmonic oscillator", *Phys. Lett. A* **292**, 243–245 (2002).

[6]. M. Fernández-Guasti, A. Gil-Villegas, R. Diamant, "Ermakov equation arising from electromagnetic fields propagating in 1D", *Rev. Mex. Fís.* **46**, 530–535, 2000.

[7]. R. Diamant, M. Fernández-Guasti, "Light propagation in 1D inhomogeneous deterministic media: the effect of discontinuities", *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **11**, 045712 (2009).

[8]. J. M. Goard, P. Broadbridge, "Nonlinear superposition principles obtained by Lie symmetry methods", *J. Math. Anal. Appl.* **214**, 633-657 (1997).

[9]. S. A. Levin, "Principles of nonlinear superposition", *J. Math. Anal. Appl.* **30**, 197-205 (1970).

[10]. J. L. Reid, J. R. Ray, "Ermakov systems, nonlinear superposition and solutions of nonlinear equations of motion", *J. Math. Phys.* **21**, 1583–1587 (1980).

[11]. W. Sarlet, F. Cantrijn, "A generalization of the nonlinear superposition idea for Ermakov systems", *Phys. Lett. A* **88**, 383-387 (1982).

[12]. M. Fernández-Guasti, J. L. Jiménez, F. Granados-Agustín, A. Cornejo-Rodríguez, "Amplitude and phase representation of monochromatic fields in physical optics", *J. Opt. Soc. Am. A* **20**, 1629–1634 (2003).

[13]. V. Ermakov, "Second order differential equations. Conditions of complete integrability", Univ. Izvestia Kiev Ser. III, 9 (1880).

[14]. M. Fernández-Guasti, "The Wronskian and the Ermakov - Lewis invariant", *Int. Math. Forum* **4**, 795–804 (2009).

[15]. M. Fernández-Guasti, R. Diamant, "Stratified media: Nonlinear ODE is better", *Proc. SPIE* **8011**, 80116D (2011).

1. Introducción

La relación entre el ángulo de incidencia medido desde la normal a la superficie y el ángulo de refracción de un rayo de luz que se propaga entre dos medios con distinto índice de refracción e interfase abrupta plana se conoce como la relación de Snell. Si el ángulo de incidencia es θ_1 y el índice de refracción del primer medio es n_1 mientras que el ángulo del haz transmitido es θ_2 con índice de refracción n_2,

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2. \quad (1)$$

Esta expresión también se conoce como relación de los senos.

En el caso de medios estratificados el índice de refracción no necesariamente cambia de manera abrupta, sin embargo, se mantiene la condición de que el índice de refracción varíe solamente en una dirección, por ejemplo, la dirección z. Se ha establecido una generalización de la relación de Snell para medios estratificados [1, p.58] cuando la onda es homogénea

$$n(z)\sin[\theta(z)] = \text{constante}. \quad (2)$$

Recordemos que una onda es homogénea si los planos de equi-fase coinciden con los planos de igual amplitud [1] (p.639).

En este trabajo se obtiene la relación más general para el ángulo de refracción y de ésta expresión se derivan la relación de Snell generalizada y la relación de Snell convencional entre dos medios homogéneos. El formalismo de amplitud y fase (AmF) permite abordar otros casos como la relación entre planos de equi-fase y equi-amplitud para medios estratificados.

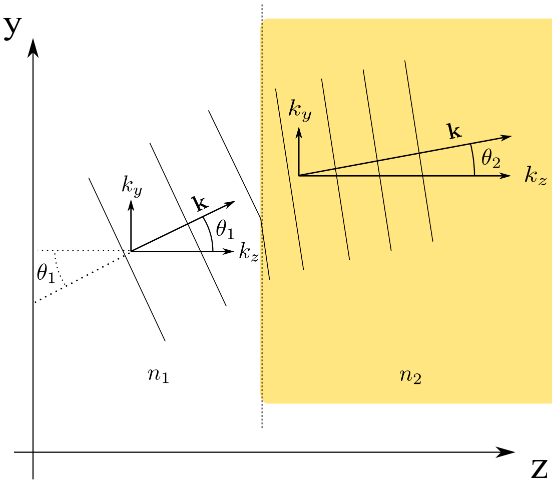

Fig. 1: Evolución del frente de onda y su correspondiente vector de onda a medida que se propaga entre dos medios con interfase abrupta. k_y es constante en toda la propagación mientras que $k_z = n_1 k_0$ en el medio 1 y cambia a $k_z = n_2 k_0$ en el medio 2 (amarillo en la figura).

2. Propagación en medios estratificados

Un medio estratificado es un medio con propiedades constantes en cada plano perpendicular a una dirección fija [1] (p.54). Las multicapas con índice de refracción constante o variable (*rugate*) son medios estratificados utilizados en una miríada de dispositivos como son los espejos dieléctricos para láseres. En un medio inhomogéneo la permitividad ε y la permeabilidad μ son funciones dependientes de la posición. La dependencia espacial está restringida a una dirección en el caso estratificado.

La ecuación para el campo eléctrico $\mathbf{E}$ en un medio isotrópico lineal pero inhomogéneo es [1] (p. 11)

$$\nabla^2\mathbf{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}= \\ =-\nabla(\mathbf{E}\cdot\nabla\ln\varepsilon)-\nabla\ln\mu\times\nabla\times\mathbf{E}, \qquad (3)$$

donde μ,ε son las permeabilidad y permitividad respectivamente[1] (independientes del tiempo pero con dependencia espacial arbitraria). De ésta expresión se obtiene la ecuación diferencial del campo eléctrico transverso para una onda electro-magnética armónica linealmente polarizada $\mathbf{E}\rightarrow E_x(y,z)e^{-i\omega t}\hat{\mathbf{e}}_x$ propagándose en el plano $y-z$ en un medio estratificado en la dirección z [1] (p.55)

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}+\mu\varepsilon\omega^2E_x=\frac{\partial\ln\mu}{\partial z}\frac{\partial E_x}{\partial z}, \qquad (4)$$

donde $\mu\varepsilon\omega^2=\frac{n^2}{c^2}\omega^2=n^2k_0^2$. La permeabilidad y permitividad dependen solamente de la dirección z. El término $\nabla(\mathbf{E}\cdot\nabla\ln\varepsilon)$ es cero para ondas TE. Sin embargo, si la polarización del campo eléctrico está en el plano de reflexión $\mathbf{E}\rightarrow\left(E_y(y,z)\hat{\mathbf{e}}_y+E_z(y,z)\hat{\mathbf{e}}_z\right)e^{-i\omega t}$ las ecuaciones para E_y y E_z contienen términos extra provenientes de $\nabla(\mathbf{E}\cdot\nabla\ln\varepsilon)=\frac{\partial E_z(y,z)}{\partial y}\frac{\partial\ln\varepsilon(z)}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_y+\frac{\partial}{\partial z}\left(E_z(y,z)\frac{\partial\ln\varepsilon(z)}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{e}}_z$ y de $\nabla\ln\mu\times\nabla\times\mathbf{E}=\frac{\partial\ln\varepsilon(z)}{\partial z}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{e}}_y$. Es entonces preferible calcular el campo transverso magnético que satisface la ecuación

$$\nabla^2\mathbf{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}= \\ =-\nabla(\mathbf{H}\cdot\nabla\ln\mu)-\nabla\ln\varepsilon\times(\nabla\times\mathbf{H}). \qquad (5)$$

Para $\mathbf{H}=H_x(y,z)\hat{\mathbf{e}}_x$:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}+\mu\varepsilon\omega^2H_x=\frac{\partial\ln\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial H_x}{\partial z}. \qquad (6)$$

Esta ecuación es formalmente idéntica a la Ec. (4). El campo eléctrico con polarización en el plano de reflexión se calcula entonces a partir de la solución de ésta ecuación $\mathbf{E}=\frac{i}{\varepsilon\omega}\nabla\times\mathbf{H}_x$.

Por separación de las variables espaciales $E_x(y,z)=Y(y)U(z)$ en la Ec. (4), se generan ecuaciones diferenciales para cada coordenada. La ecuación para la variable y,

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{\partial y^2}=-\alpha^2k_0^2, \qquad (7)$$

puede integrarse inmediatamente

$$Y(y)=Y_0\exp(i\alpha k_0y), \qquad (8)$$

donde la constante $\alpha^2k_0^2$ proviene de la separación de variables. La solución general en la dirección y es entonces

$$Y(y)=Y_0\exp(i\alpha k_0y)+Y_{0-}\exp(-i\alpha k_0y). \qquad (9)$$

Las amplitudes Y_0 y Y_{0-} representan vectores de onda contra-propagantes en la dirección y. Si se considera una sola onda incidente, solamente sobrevive uno de los dos términos, digamos Y_0. La ecuación en la dirección de estratificación es:

$$\frac{d^2U}{\partial z^2}-\frac{\partial\ln\mu}{\partial z}\frac{dU}{dz}+(n^2-\alpha^2)k_0^2U=0. \qquad (10)$$

Este formalismo tiene aplicabilidad en muy diversos ámbitos de la óptica, por ejemplo, elipsometría, efectos no especulares, montaje cónico (fuera del plano de polarización normal), medios GRIN, etc. En éste último caso, se ha considerado la propagación entre dos medios GRIN con interfase abrupta [2].

3. Gradiente de la fase

La separación de variables implica que las componentes del vector de onda sólo dependen de la coordenada correspondiente:

$$\mathbf{k}=k_x(x)\hat{\mathbf{e}}_x+k_y(y)\hat{\mathbf{e}}_y+k_z(z)\hat{\mathbf{e}}_z. \qquad (11)$$

Estas dos expresiones son consistentes puesto que el vector de onda es irrotacional;

[1] Se utilizan unidades de sistema internacional (SI) en vez del sistema Gaussiano empleado en la referencia antes citada.

$\mathbf{k} = \nabla\phi \Longrightarrow \nabla \times \mathbf{k} = 0$, entonces $\frac{\partial k_z}{\partial y} - \frac{\partial k_y}{\partial z} = 0$, es decir que k_z no tiene variaciones en la dirección y. Para propagación en 2 dimensiones en el plano $y - z$:

$$\mathbf{k} = k_y(y)\hat{\mathbf{e}}_y + k_z(z)\hat{\mathbf{e}}_z = \\ = |\mathbf{k}|\sin\theta\ \hat{\mathbf{e}}_y + |\mathbf{k}|\cos\theta\ \hat{\mathbf{e}}_z, \tag{12}$$

donde θ representa el ángulo de propagación con respecto al eje z y la magnitud del vector de onda es $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$. La separación de variables (8) impone la condición:

$$\int k_y\, dy = \alpha k_0 y, \tag{13}$$

de manera que la componente del vector de onda en la dirección y es constante e igual a

$$k_y = \alpha k_0. \tag{14}$$

Esta ecuación, que proviene de la separación de variables, establece que: *El vector de onda en la dirección perpendicular al gradiente del índice de refracción es constante para cualquier posición del campo en el medio estratificado*. Esta aseveración es una forma de expresar la relación de Snell más general para medios inhomogéneos.

Puesto que el ángulo de inclinación del vector de onda es $\tan\theta = k_y/k_z$,

$$k_z\tan\theta = \alpha k_0. \tag{15}$$

La magnitud del vector de onda $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = \left(1 + \frac{1}{\tan^2\theta}\right)^{1/2} \alpha k_0$, puede entonces escribirse como

$$|\mathbf{k}| = \frac{\alpha k_0}{\sin\theta}. \tag{16}$$

Esta expresión permite formular de manera alternativa la relación general de Snell: *La magnitud del vector de onda por el seno del ángulo que forman la dirección del vector de onda y el gradiente de estratificación es constante*. Este resultado puede ser engañoso pues debe reconocerse que la magnitud del vector de onda no es igual a $\omega n/c$ sino para variaciones suaves del índice de refracción.

El vector de onda se define como el gradiente de la fase

$$\mathbf{k} \equiv \nabla\phi. \tag{17}$$

La fase es entonces:

$$\phi = \int k_y\, dy + \int k_z\, dz = \alpha k_0 y + \int k_z\, dz. \tag{18}$$

Los planos de equi-fase se establecen para una fase arbitraria constante $\phi \to \phi_c$.

4. Ecuación diferencial que satisface el vector de onda

Considere un medio no magnético de manera que $\partial(\ln\mu)/\partial z = 0$, la Ec. (10) no contiene entonces términos en primera derivada. Esta suposición es común para materiales ópticos transparentes, aunque de ser necesario puede evitarse [3]. Si se realiza la transformación:

$$U \to k_z^{-1/2} e^{i\int k_z dz}, \tag{19}$$

la ecuación diferencial para U, como se muestra en el Apéndice A, se transforma en:

$$k_z \frac{d^2 k_z}{\partial z^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{dk_z}{dz}\right)^2 + \\ +2[k_z^2 - (n^2 - \alpha^2)k_0^2]k_z^2 = 0. \tag{20}$$

La representación de amplitud y fase (AmF) permite desacoplar las ecuaciones para cada una de éstas dos variables. Este procedimiento se ha utilizado tanto en mecánica cuántica [4] como en problemas del oscilador armónico con parámetro dependiente del tiempo [5]. En electromagnetismo, la AmF se ha utilizado para analizar la propagación de una capa con variación de tangente hiperbólica en el índice de refracción [6] y la reflectividad de distintas funciones a incidencia normal. Con este formalismo se ha predicho la reflectividad aumentada debido a las discontinuidades en las derivadas en el índice de refracción (aunque n sea constante) [7].

5. Forma general de la relación de refracción en medios estratificados

La forma más general de la relación de Snell es entonces: *La tangente del ángulo θ que forma el vector de onda respecto al gradiente del medio estratificado por la componente del vector de onda en esa misma dirección de estratificación k_z es constante*

$$k_z\tan\theta = \alpha k_0, \tag{21}$$

donde dicho vector de onda satisface la ecuación diferencial

$$k_z\ddot{k}_z - \frac{3}{2}\dot{k}_z^2 + \\ +2[k_z^2 - (n^2-\alpha^2)k_0^2]k_z^2 = 0, \qquad (22)$$

5.1 Forma particular para diversos medios estratificados: Índice *n* con variación suave

Si el índice de refracción varía suavemente y no hay ondas contrapropagantes inicialmente, se pueden entonces ignorar las derivadas del vector de onda en (22):

$$k_z^2(z) \approx (n^2(z)-\alpha^2)k_0^2. \qquad (23)$$

Si se multiplica ésta expresión por $\tan^2\theta(z)$, la expresión más general para la relación de Snell (21), considerando la estratificación en la dirección z deviene en

$$(n^2(z)-\alpha^2)k_0^2\tan^2\theta(z) = k_y^2 = \alpha^2k_0^2, \qquad (24)$$

de manera que $n^2k_0^2\tan^2\theta = \alpha^2k_0^2(1+\tan^2\theta)$; pero por la identidad trigonométrica $\tan^2\theta + 1 = 1/\cos^2\theta$,

$$n^2(z)\sin^2\theta(z) = \alpha^2, \qquad (25)$$

que es la relación generalizada de Snell que establecen M. Born y E. Wolf [1] (p.58). Vemos ahora que ésta expresión es válida solamente si el índice de refracción varía suavemente. El texto antes citado menciona que dicha expresión es válida en el caso especial de una onda plana homogénea. Sin embargo, como veremos más adelante en la sección 6, en un medio estratificado la onda no es homogénea ni plana.

La magnitud del vector de onda en ésta aproximación de índice de refracción suave es entonces:

$$|\mathbf{k}| = n(z)k_0. \qquad (26)$$

El vector de onda en la dirección de estratificación para una variación suave del índice de refracción puede escribirse como:

$$k_z(z) \approx \sqrt{n^2(z) - n_1^2\sin^2\theta_1}\, k_0. \qquad (27)$$

5.2 Interfases

5.2.1 Índice n constante

Para regiones donde el índice de refracción es constante, es posible aunque no necesario, que las derivadas del vector de onda sean cero, entonces la Ec. (22) deviene en:

$$k_z^2 - (n^2-\alpha^2)k_0^2 = 0. \qquad (28)$$

El vector de onda en la dirección normal a una interfase es entonces:

$$k_z^2 = (n^2-\alpha^2)k_0^2. \qquad (29)$$

Si se substituye (21), $k_z^2 = (n^2k_0^2 - k_z^2\tan^2\theta)$, que puede reescribirse como:

$$k_z = nk_0\cos\theta. \qquad (30)$$

De (25), se obtiene el valor de la constante de separación α:

$$\alpha = n\sin\theta, \qquad (31)$$

y

$$k_y = nk_0\sin\theta, \qquad (32)$$

donde k_y es la componente del vector de onda perpendicular al gradiente de estratificación.

Como se muestra en el Apéndice B, la solución general para el vector de onda en regiones con índice de refracción constante es:

$$k_{z\leftrightarrow} = \frac{(A^2-B^2)(n^2-\alpha^2)k_0^2}{A^2+B^2+2AB\cos(2(n^2-\alpha^2)k_0^2z)} \qquad (33)$$

Esta expresión corresponde a ondas contra-propagantes y establece la forma del principio de superposición no lineal [8-11] para la ecuación del vector de onda.

5.2.2 Interfase abrupta

Considere dos regiones, digamos 1 y 2, donde el índice de refracción sea prácticamente constante. Los ángulos de propagación, de (31), están relacionados por:

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2, \qquad (34)$$

aún cuando en regiones entre 1 y 2 el cambio del índice de refracción sea muy severo. Este resultado se sustenta en que la constante α sólo depende de la separación de variables. En la región de variaciones abruptas, solo podemos aseverar que $k_z\tan\alpha = k_0$, donde k_z satisface la ecuación diferencial (20). Puesto que α es una constante, para establecerla basta conocerla en un punto. Si las condiciones de frontera lo permiten, se puede conocer el ángulo de incidencia en una región 1 donde el índice de refracción sea constante

$$\alpha = n_1 \sin\theta_1. \tag{35}$$

La ecuación que satisface el vector de onda es entonces (22). Si el índice de refracción aumenta como función de la distancia, $n > n_1 \sin\theta_1$ y el término $(n^2 - n_1^2 \sin^2\theta_1)$ es siempre positivo. Este caso corresponde a la propagación de un medio ópticamente menos denso hacia uno más denso.

Sin embargo, si el índice de refracción disminuye, es posible que los dos términos sean iguales a $n = n_1 \sin\theta_1$, esto depende del valor al que disminuya n y del ángulo de incidencia inicial θ_1. En ese caso, para la región transmitida con refracción constante

$$k_z^2 = (n^2 - n_1^2 \sin^2\theta_1)\, k_0^2 = 0. \tag{36}$$

Es decir no hay onda transmitida. Esta es la condición usual para el ángulo crítico $\sin\theta_1 = n/n_1$ cuando la luz se propaga de un medio más denso hacia otro ópticamente menos denso.

6. Invariante y tipos de onda

El invariante para la intensidad por la derivada de la fase en z

$$Q_z = A^2 \frac{d\phi}{dz} = A^2 k_z, \tag{37}$$

proviene de la representación AmF que se esboza en el Apéndice A. Dicho invariante está relacionado con el promedio del vector de Poynting para ondas monocromáticas [12]. Este tipo de cantidades conservadas son frecuentemente referidos como invariantes de Ermakov en ecuaciones diferenciales en el contexto del oscilador armónico con parámetros dependientes del tiempo [13,14]. Existe un segundo invariante para la derivada de la fase en y

$$k_0 \alpha = \frac{d\phi}{dy}, \tag{38}$$

que proviene de la separación de variables. Recordemos que dicha separación también impone la condición de que la amplitud sea constante como función de y. En general, para una onda incidente plana, los planos de amplitud constante son entonces planos perpendiculares al gradiente de estratificación. Es decir, del invariante de amplitud y fase (37), A es constante si el vector de onda es constante. En la descripción previa, las superficies de equi-amplitud son planos con z constante.

6.1 Ondas planas en medio homogéneo

La fase es

$$\phi = k_0 \alpha y + \int k_z\, dz = k_0 \alpha y + \int \frac{Q_z}{A^2} dz. \tag{39}$$

Los planos de equi-fase se establecen para una fase determinada $\phi \to \phi_C$. Para ondas planas en un medio homogéneo el vector de onda en la dirección z es constante, la amplitud también es constante, y los planos de equi-fase son:

$$\phi_C = k_0 \alpha y + k_z z = k_0 \alpha y + \frac{Q_z}{A^2} z. \tag{40}$$

La ecuación para y es una recta

$$y = \frac{\phi_C}{k_0 \alpha} - \frac{k_z}{k_y} z, \tag{41}$$

con inclinación

$$\tan\beta = -\frac{k_z}{k_y}. \tag{42}$$

La inclinación de los planos de equi-fase medidos con respecto a la normal de dichos planos es $\tan\theta = \tan(\beta + \pi/2) = -1/\tan\beta$ que corresponde a la dirección del vector de onda (15). En este caso, puesto que la amplitud es constante en todo el medio, el plano de equi-fase coincide con el plano de equi-amplitud. Las ondas son entonces homogéneas.

6.2 Ondas inicialmente planas en medio estratificado lineal suave

Supongamos que el medio aumenta su índice de refracción suave y linealmente en la dirección de estratificación $n(z) = n_1 + n_p z$ en el semi-espacio $z > 0$. Para $z < 0$, el índice de refracción es constante e igual a n_1. El vector de onda k_z en el medio estratificado de (27) es entonces

$$k_z(z) = \sqrt{\left(n_1 + n_p z\right)^2 - n_1^2 \sin^2\theta_1}\, k_0, \tag{43}$$

que simplifica a

$$k_z = \sqrt{n_1^2\cos^2\theta_1 + 2n_1 n_p z + \left(n_p z\right)^2}\, k_0. \tag{44}$$

Si se realiza una expansión binomial

$$k_z \approx n_1\cos\theta_1 \times$$
$$\times \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2n_p z}{n_1^2\cos^2\theta_1} + \frac{n_p^2 z^2}{n_1^2\cos^2\theta_1}\right)\right] k_0 + \cdots. \tag{45}$$

a primer orden en n_p

$$k_z \approx k_0 n_1\cos\theta_1 + \frac{k_0 n_p z}{n_1\cos\theta_1}. \tag{46}$$

La dependencia en z de la fase es entonces

$$\phi(z) = \int k_z\, dz =$$
$$= \int \left(k_0 n_1 \cos\theta_1 + \frac{k_0 n_p z}{n_1\cos\theta_1}\right) dz, \tag{47}$$

que integra a

$$\phi(z) = k_0 n_1 \cos\theta_1 z + \frac{k_0 n_p z^2}{2n_1\cos\theta_1}. \tag{48}$$

La ecuación de equi-fase es

$$\phi_C = \phi(y) + \phi(z) =$$
$$= k_0 n_1 \sin\theta_1 y + k_0 n_1 \sin\theta_1 z + \frac{k_0 n_p z^2}{2n_1\cos\theta_1}. \tag{49}$$

y la ecuación para y es por lo tanto

$$y = -\frac{n_p}{n_1^2 \sin 2\theta_1} z^2 - \cot\theta_1 z + \frac{\phi_C}{k_0 n_1 \sin\theta_1}. \tag{50}$$

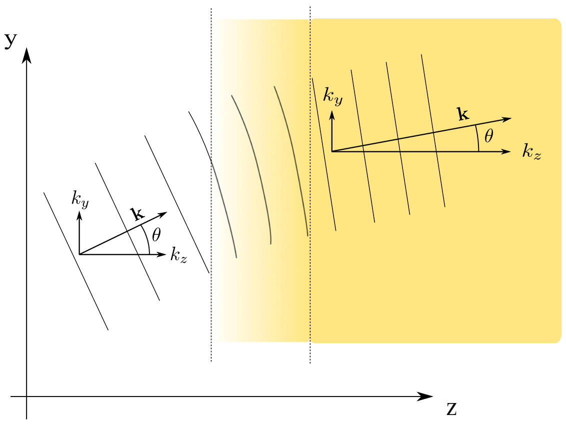

Fig. 2: Evolución del frente de onda y su correspondiente vector de onda a medida que se propaga en un medio estratificado en la dirección z. El frente de onda no es plano donde varía el índice de refracción. k_y es constante en toda la propagación mientras que $k_z = n(z)k_0$ aumenta si n aumenta con z.

Es decir, las superficies de equi-fase satisfacen una ecuación cuadrática. En la región donde varía el índice de refracción linealmente la onda no es plana como se muestra en la Fig. 2. Sin embargo, como se ilustra en la misma figura, una onda incidente plana que se curva en la región estratificada recupera los frentes de onda planos al pasar a otra región de índice de refracción constante.

El invariante de amplitud y fase en este caso es

$$Q_z = A^2\sqrt{n^2(z) - n_1^2\sin^2\theta_1}\, k_0. \tag{51}$$

En $z \ll 0$ se puede establecer el valor a la frontera

$$Q_z = A_1^2 k_z = A_1^2\sqrt{n_1^2 - n_1^2\sin^2\theta_1}\, k_0$$
$$= A_1^2 k_0 n_1 \cos\theta_1. \tag{52}$$

El cuadrado de la amplitud para una z arbitraria es entonces

$$A^2 = \frac{A_1^2 k_0 n_1 \cos\theta_1}{\sqrt{n^2(z) - n_1^2\sin^2\theta_1}\, k_0}. \tag{53}$$

Puesto que la amplitud en la dirección y no varía (8), la amplitud es constante para z constante. Los planos de equi-amplitud, como mencionamos previamente, son entonces siempre perpendiculares al gradiente del medio estratificado. En este caso, son planos en $x - y$ perpendiculares a z.

Los planos de equi-amplitud no coinciden con los planos de equi-fase en la región donde el índice de refracción del medio varía (inclusive suavemente). Para un índice de refracción que varía linealmente en la dirección z, los planos de equi-fase son cuadráticos y están inclinados $-\cot\theta_1$, mientras que los planos de equi-amplitud son rectos y paralelos al eje y. La onda no es homogénea en la región estratificada, excepto si la incidencia es normal.

7. Conclusiones

La relación más general para el ángulo de propagación es $k_z\tan\theta = \alpha k_0$, donde el vector de onda en la dirección del gradiente de estratificación k_z satisface la Ec. (22). Dicha relación es válida en todo el espacio, inclusive en regiones donde el índice de refracción varíe abruptamente. El formalismo que se presenta permite abordar la propagación en medios estratificados con variaciones abruptas, suaves o intermedias del índice de refracción. El problema se reduce a encontrar las soluciones de la ecuación diferencial para $k_{\|}$. Dichas soluciones pueden evaluarse numéricamente para perfiles cuya estratificación no permita soluciones analíticas de la ecuación diferencial.

En las regiones donde el índice de refracción es constante se recupera la relación de Snell convencional (34). Mientras que para variaciones suaves del índice de refracción con respecto a la longitud de onda, se satisface la relación de Snell generalizada $n(z)\sin\theta(z) = \alpha$ (25). En el medio estratificado transparente los planos de equi-amplitud son siempre perpendiculares al gradiente del medio estratificado. En contraste, las superficies de equi-fase para una onda incidente plana dejan de ser planas excepto si la incidencia es normal a la estratificación. Por lo tanto, la onda es inhomogénea en cualquier medio estratificado no trivial contrario a lo que se asevera en [1] (pp.57-58). Abordar el problema de medios estratificados con el procedimiento de AmF es más sencillo que hacerlo con el formalismo tradicional de matrices [15].

Como ejemplo se ha descrito un medio con índice de refracción que aumenta linealmente de manera suave. En este caso, las superficies de equi-fase son cuadráticas mientras que las superficies de equi-amplitud son planos paralelos a la estratificación.

Apéndice A: Representación AmF

La representación polar compleja del campo eléctrico es $E_z(z) = U(z) = Ae^{i\phi}$ donde A y ϕ son funciones reales dependientes de z. Si se substituye en la ecuación diferencial

$$\frac{d^2U}{dz^2} + (n^2 - \alpha^2)k_0^2 U = 0, \tag{A1}$$

se obtienen dos ecuaciones diferenciales para las partes real e imaginaria

$$\frac{d^2A}{dz^2} - A\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 = (n^2 - \alpha^2)k_0^2 A, \tag{A2}$$

$$2i\frac{dA}{dz}\frac{d\phi}{dz} + iA\frac{d^2\phi}{dz^2} = 0. \tag{A3}$$

Esta última ecuación puede integrarse para obtener el invariante:

$$Q = A^2\frac{d\phi}{dz}. \tag{A4}$$

Si se sustituye la amplitud de la expresión del invariante (A4) en (A2), se obtiene una ecuación no lineal para la fase:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\sqrt{\frac{Q}{\partial\phi/\partial z}} - \sqrt{\frac{Q}{\partial\phi/\partial z}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 &= \\ = -(n^2 - \alpha^2)k_0^2\sqrt{\frac{Q}{\partial\phi/\partial z}}\end{aligned} \tag{A5}$$

que al evaluar la segunda derivada se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\frac{\partial^3\phi}{\partial z^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^4 - \\ -2(n^2 - \alpha^2)k_0^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 = 0.\end{aligned} \tag{A6}$$

Puesto que la componente z del vector de onda es igual a la derivada de la fase en esa misma dirección $k_z = \partial\phi/\partial z$, la ecuación diferencial para la componente z del vector de onda es entonces:

$$\begin{aligned}k_z\frac{d^2k_z}{dz^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{dk_z}{dz}\right)^2 + \\ +2[k_z^2(n^2 - \alpha^2)k_0^2]k_z^2 = 0.\end{aligned} \tag{A7}$$

Apéndice B: Superposición no lineal de la fase

k_z constante es solución de la ecuación (A7) si n es constante, esto es, la fase es lineal. La suma de ondas contra-propagantes son también solución de (A1) para n constante. La suma de dos ondas contra-propagantes $Ae^{ik_z z}$, $Be^{-ik_z z}$ en coordenadas polares es $G_z e^{i\gamma_z} = Ae^{ik_z z} + Be^{-ik_z z}$

$$\begin{aligned}G_z e^{i\gamma_z} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(2k_z)} \times \\ \times \exp\left[i\arctan\left(\frac{A - B}{A + B}\tan(k_z z)\right)\right].\end{aligned} \tag{B1}$$

La onda con la dependencia en $(z - y)$ es

$$
\begin{aligned}
Ge^{i\gamma} &= G_z e^{i\gamma_z} Y_0 e^{i\alpha k_0 y} = \\
&= Y_0\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(2k_z)}\times \\
&\quad \exp\left[i\arctan\left(\frac{A-B}{A+B}\tan(k_z z)\right)+i\alpha k_0 y\right]
\end{aligned} \qquad \text{(B2)}
$$

Si la fase es constante

$$
\phi_C = \arctan\left(\frac{A-B}{A+B}\tan(k_z z)\right)+\alpha k_0 y, \qquad \text{(B3)}
$$

se despeja entonces para la coordenada y

$$
y = \frac{1}{\alpha k_0}\left[\phi_C - \arctan\left(\frac{A-B}{A+B}\tan(k_z z)\right)\right]. \qquad \text{(B4)}
$$

Expresado en términos de la magnitud del vector de onda

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{|\mathbf{k}|\sin\theta}\times \\
&\times\left[\phi_C - \arctan\left(\frac{A-B}{A+B}\tan(|\mathbf{k}|\cos\theta)\right)\right].
\end{aligned} \qquad \text{(B5)}
$$

El vector de onda $k_{z\leftrightarrow}$ para dichas ondas contra-propagantes es igual a la derivada de la fase

$$
k_{z\leftrightarrow} = \frac{d}{dz}\left[\arctan\left(\frac{A-B}{A+B}\tan(k_z z)\right)\right]. \qquad \text{(B6)}
$$

de manera que

$$
k_{z\leftrightarrow} = \frac{(A^2-B^2)k_z}{A^2+B^2+2AB\cos(2k_z z)}. \qquad \text{(B7)}
$$

es también una solución de (A7) si $k_z^2 = (n^2-\alpha^2)k_0^2$, es decir, se satisface

$$
k_{z\leftrightarrow}\ddot{k}_{z\leftrightarrow} - \frac{3}{2}\dot{k}_{z\leftrightarrow}^2 + 2[k_{z\leftrightarrow}^2 - k_z^2] = 0. \qquad \text{(B8)}
$$

Reconocimientos

Este trabajo fue parcialmente financiado con el proyecto CONACYT 151137 "*Conservación, invariantes y propagación de ondas en sistemas inhomogéneos deterministas*".

