

Ευκλείδειος Μιγαδική Σχετικιστική Μηχανική I: Ο Πί- νακας

Ηλίας Βώσσος¹, Σπυρίδων Βώσσος²

¹Φυσικός, ²Χημικός, Σχολή Θετικών Επιστημών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα, Ελλάς

Λέξεις κλειδιά: Γραμμικός Μετασχηματισμός Χωροχρόνου, Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, Ευκλείδειο Αίτημα, Μετασχηματισμός Lorentz

Δεκτή για δημοσίευση (Τελική μορφή): 25 Μαΐου 2013

Π ε ρ ί λ η ψ η. Η θεωρία της Σχετικότητας ήταν η εκκίνηση για την ανάπτυξη της Κβαντομηχανικής. Οι δύο αυτοί κλάδοι της Φυσικής επιστήμης βρίσκουν εφαρμογή σε τομείς, όπως η Χημεία, η Βιολογία, η Φαρμακολογία και η Ιατρική. Συνεπώς, μια σημαντική αλλαγή στο οικοδόμημα της Σχετικότητας, θα οδηγήσει σε αλλαγές και στους παραπάνω επιστημονικούς τομείς. Η Ειδική Σχετικότητα, όπως εφαρμόζεται μέχρι σήμερα, καταργεί τη μεταβατική ιδιότητα της παραλληλίας, όταν συσχετίζονται τρεις παρατηρητές, αφού η προώθηση Lorentz δεν είναι κλειστός μετασχηματισμός. Στην εργασία αυτή θεωρούμε τους γενικούς γραμμικούς μετασχηματισμούς και αξιώνουμε να διατηρείται αναλλοίωτη η χωροχρονική απόσταση S^2 . Επιπρόσθετα, αξιώνουμε να μην επέρχεται στροφή των αξόνων, όταν συσχετίζουμε τρεις παρατηρητές, ώστε ο μετασχηματισμός να είναι κλειστός. Η λύση του προβλήματος συνοψίζεται σε πίνακα που περιέχει πραγματικούς και φανταστικούς αριθμούς. Συνεπώς, ο χώρος καθίσταται μιγαδικός, ενώ ο χρόνος παραμένει πραγματικός. Έτσι, εξακολουθεί να ισχύει η μεταβατική ιδιότητα της παραλληλίας ευθειών, που είναι ισοδύναμη με το Ευκλείδειο Αίτημα και για κινούμενους παρατηρητές.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Θεωρία της Σχετικότητας είναι ένας από τους θεμέλιους λίθους της σύγχρονης Φυσικής. Ο αντικτυπός της σε τομείς, εκτός της Φυσικής Επιστήμης ήταν τόσο μεγάλος, ώστε φυσιολόγοι, ψυχολόγοι και βιολόγοι είδαν ότι επιδρά στους δι-

κούς τους επιστημονικούς τομείς (1). Επί παραδείγματι, ο Joseph Petzoldt σύνδεσε τη σχετικότητα με τη φυσιολογία των αισθήσεων (2), ο C.S Meyers πρότεινε το φαινόμενο της εξαύλωσης ως μέσο για την καλύτερη κατανόηση των πνευματικών λειτουργιών (3), ενώ ο C. L. Morgan συσχέτισε το χωροχρονικό φορμαλισμό με τις εικόνες στον ανθρώπινο αμφιβληστροειδή χιτώνα (4). Ακόμα, η εξάρτηση της σχετικιστικής ορμής από την ταχύτητα των κινούμενων σωματιδίων βρίσκει εφαρμογή στους ιατρικούς επιταχυντές που χρησιμοποιούνται κατά του καρκίνου (5).

Επιπρόσθετα, η θεωρία της σχετικότητας, σε συνδυασμό με την κβαντική μηχανική, οδηγεί στην ιδιοστροφορμή των στοιχειωδών σωματιδίων που αξιοποιείται σε τομείς, όπως η ιατρική απεικόνιση MRI (6), αλλά και στη Σχετικιστική Κβαντική Χημεία, που εξηγεί τη δομή και τις ιδιότητες των στοιχείων του περιοδικού πίνακα και των μορίων που δημιουργούνται, όταν αυτά ενώνονται (7), που είναι βασικές για τη Φαρμακολογία. Είναι, λοιπόν, φανερό πως μια σημαντική αλλαγή στο οικοδόμημα της Ειδικής Σχετικότητας, όπως αυτή που γίνεται με την παρούσα σειρά εργασιών, θα οδηγήσει σε αλλαγές και στο εποικοδόμημά της.

Η Ειδική Σχετικότητα, όπως εφαρμόζεται μέχρι σήμερα, αξιοποιεί την προώθηση του Lorentz. Όμως, είναι γνωστό ότι η προώθηση Lorentz δεν είναι κλειστός μετασχηματισμός. Αντίθετα, ο μετασχηματισμός Lorentz (γινόμενο ενός πίνακα στροφής με τον πίνακα προώθησης Lorentz) είναι κλειστός (8). Η επιλογή αυτή οδηγεί σε επιτυχή

Send reprint requests to: Elias Vossos and Spyridon Vossos, Epidavrou 39, Halandri GR-15233, Athens, Hellas, e-mail: spyrolia@hotmail.com, Tel. +30210-6810432

αποτελέσματα, όπως η μετάπτωση Thomas, που εξηγεί τη λεπτή υφή των ατομικών φασμάτων. Όμως, δεν εξηγεί γιατί κάποιοι παρατηρητές σχετίζονται με προώθηση Lorentz, ενώ κάποιοι άλλοι με μετασχηματισμό Lorentz. Επιπρόσθετα, αυτό οδηγεί σε κατάργηση της μεταβατικής ιδιότητας της παραλληλίας ευθειών, όταν συσχετίζονται με παραπάνω από δυο παρατηρητές.

Με την εργασία αυτή αποδεικνύουμε ότι υπάρχει κλειστός γραμμικός μετασχηματισμός, που διατηρεί αναλλοίωτη τη χωροχρονική απόσταση ενός γεγονότος, για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές. Έτσι, διατηρείται η μεταβατική ιδιότητα της παραλληλίας και η στροφή των αξόνων, όταν συσχετίζονται περισσότεροι από δυο παρατηρητές, είναι μόνο ένα ισοδύναμο φαινόμενο.

ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΟΝ ΑΞΟΝΑ $x'x$

Θεωρούμε έναν ακίνητο παρατηρητή, που παρατηρεί πραγματικό χωρόχρονο και έναν τυποποιημένο παρατηρητή που κινείται προς τα δεξιά πάνω στον άξονα $x'x$ με ταχύτητα

$$u = \beta c$$

όπου c το μέτρο της ταχύτητας του φωτός στο κενό, ως προς τον ακίνητο παρατηρητή. Έστω ότι ισχύουν οι παρακάτω γραμμικοί μετασχηματισμοί

$$ct' = bct + ax$$

$$x' = gct + fx + \delta y + \theta z$$

$$y' = g_1ct + f_1x + hy + lz$$

$$z' = g_2ct + f_2x + \xi y + \mu z$$

Προσδιορίζουμε τους συντελεστές ως εξής:

1) Αφού για

$$x' = 0$$

είναι

$$x = \beta ct \Rightarrow 0 = gct + f\beta ct + \delta y + \theta z \Rightarrow$$

$$g = -\beta f, \delta = 0, \theta = 0$$

Έτσι οι μετασχηματισμοί γίνονται

$$ct' = bct + ax \quad (1)$$

$$x' = -\beta fct + fx \quad (2)$$

$$y' = g_1ct + f_1x + hy + lz \quad (3)$$

$$z' = g_2ct + f_2x + \xi y + \mu z \quad (4)$$

2) Περιστρέφοντας το σύστημα συντεταγμένων, περί τον άξονα $x'x$, κατά μια ορθή γωνιά προς τα αριστερά, προκύπτει η εξής αντιστοίχιση των νέων αξόνων στους αρχικούς

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -z, \quad z \rightarrow y$$

Έτσι,

$$(3) \Rightarrow -z' = g_1ct + f_1x - hz + ly$$

$$\Rightarrow z' = -g_1ct - f_1x + hz - ly \quad (5)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (4) και (5) έχουμε

$$g_2 = -g_1, \quad f_2 = -f_1, \quad \xi = -\lambda, \quad \mu = h$$

Επίσης

$$(4) \Rightarrow y' = g_2ct + f_2x - \xi z + \mu y \quad (6)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (3) και (6) έχουμε

$$g_2 = g_1, \quad f_2 = f_1, \quad \xi = -\lambda, \quad \mu = h.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει

$$g_2 = g_1 = 0, \quad f_2 = f_1 = 0, \quad \xi = -\lambda, \quad \mu = h.$$

Έτσι οι μετασχηματισμοί γίνονται

$$ct' = bct + ax \quad (7)$$

$$x' = -\beta cft + fx \quad (8)$$

$$y' = hy + lz \quad (9)$$

$$z' = -\lambda y + hz \quad (10)$$

3) Αξιωνουμε να διατηρείται αναλλοίωτη η χωροχρονική απόσταση. Έτσι

$$S'^2 = S^2$$

$$\Rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

$$\Rightarrow (-\beta cft + fx)^2 + (hy + lz)^2 + (-\lambda y + hz)^2 -$$

$$(bct + ax)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

Οπότε προκύπτουν οι ισότητες

$$\text{από το } x^2: f^2 - a^2 = 1 \quad (11)$$

$$\text{από το } y^2: h^2 + \lambda^2 = 1 \quad (12)$$

$$\text{από το } z^2: h^2 + \lambda^2 = 1$$

$$\text{από το } c^2 t^2: \beta^2 f^2 - b^2 = -1 \quad (13)$$

$$\text{από το } ct: -\beta f^2 - ab = 0 \quad (14)$$

$$(11) \Rightarrow f^2 = a^2 + 1 \quad (15)$$

(15)

$$(14) \Rightarrow -\beta a^2 - \beta - ab = 0 \Rightarrow b = \frac{-\beta a^2 - \beta}{a} \quad (16)$$

(15)

$$(13) \Rightarrow a = \pm \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (17)$$

(16)

(17)

$$(16) \Rightarrow b = \mp \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Είναι

$$b > 0$$

ώστε σε μικρές ταχύτητες να είναι

$$b = 1.$$

Συνεπώς σωστό είναι το κάτω πρόσημο. Έτσι

$$b = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \quad (18)$$

$$(17) \Rightarrow a = -\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -\beta\gamma \quad (19)$$

$$(15) \Rightarrow f = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \quad (20)$$

διότι είναι

$$f > 0$$

ώστε σε μικρές ταχύτητες να είναι

$$f = 1$$

Έτσι οι μετασχηματισμοί γίνονται

$$ct' = \gamma (ct - \beta x) \quad (21)$$

$$x' = \gamma (-\beta ct + x) \quad (22)$$

$$y' = hy + lz \quad (23)$$

$$z' = -\lambda y + hz \quad (24)$$

με

$$h^2 + \lambda^2 = 1.$$

Σε μορφή πινάκων έχουμε

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ή

$$X' = \Lambda_{\text{Lorentz}} X$$

Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς έχουμε τα διαφορικά

$$cdt' = \gamma(cdt - \beta dx) \quad (25)$$

$$dx' = \gamma(-\beta cdt + dx) \quad (26)$$

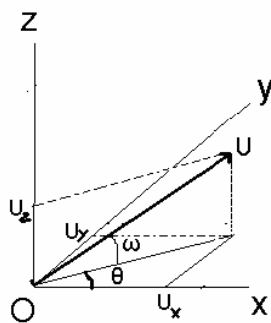
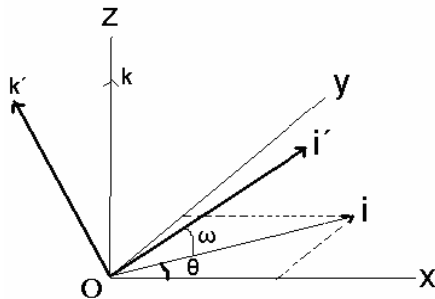
$$dy' = hdy + ldz \quad (27)$$

$$dz' = -\lambda dy + hdz \quad (28)$$

Οπότε οι ταχύτητες συσχετίζονται ως εξής:

$$u_x' = \frac{-\beta c + u_x}{c - \beta u_x} c, \quad u_y' = \frac{hu_y + \lambda u_z}{\gamma(c - \beta u_x)} c,$$

$$u_z' = \frac{-\lambda u_y + hu_z}{\gamma(c - \beta u_x)} c \quad (29)$$



Εικόνα 1. Περιστροφή του αρχικού συστήματος αξόνων Oxyz, ώστε το i' να γίνει παράλληλο στην ταχύτητα του κινουμένου παρατηρητή $\Sigma i'j'k'$.

ΓΕΝΙΚΟΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Περιστρέφουμε το αρχικό σύστημα αξόνων Oxyz, με σκοπό ένα μοναδιαίο διάνυσμα να γίνει παράλληλο στην ταχύτητα του κινουμένου παρατηρητή $\Sigma i'j'k'$ (9). Αυτό γίνεται διαδοχικά ως εξής: Πρώτα περιστρέφουμε το σύστημα αξόνων Oxyz περί τον άξονα z, κατά γωνία θ . [$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \rightarrow (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$]. Εν συνεχεία περιστρέφουμε το σύστημα αξόνων $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ περί το \hat{j} , κατά γωνία ω . [$(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) \rightarrow (\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$] (Εικόνα 1).

Έτσι προκύπτει ο μετασχηματισμός (10):

$$\begin{bmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega \cos\theta & \cos\omega \sin\theta & \sin\omega \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\omega \cos\theta & -\sin\omega \sin\theta & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

όπου

$$\sin\theta = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}, \quad \cos\theta = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}},$$

$$\sin\omega = \frac{v_z}{|v|}, \quad \cos\omega = \frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{|v|}.$$

Συνεπώς ο παραπάνω 3x3 πίνακας γίνεται

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\beta_x}{|\beta|} & \frac{\beta_y}{|\beta|} & \frac{\beta_z}{|\beta|} \\ -\frac{\beta_y}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & \frac{\beta_x}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & 0 \\ \frac{\beta_x \beta_z}{|\beta| \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & -\frac{\beta_y \beta_z}{|\beta| \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & \frac{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}}{|\beta|} \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

Επιπλέον έχουμε τους κινούμενους παρατηρητές $O'x'y'z'$ και $\Sigma' i'j'k'$. Ισχύουν τα εξής:

$$X'_{\Sigma} = \Lambda_{\text{Lorentz}} X_{\Sigma} \quad (30)$$

$$X_{\Sigma} = \tilde{R} X \quad (31)$$

$$(30)$$

$$X'_{\Sigma} = \tilde{R} X' \Rightarrow X' = \tilde{R}^T X'_{\Sigma} \Rightarrow X' = \tilde{R}^T \Lambda_{\text{Lorentz}} X_{\Sigma}$$

(31)

$$\Rightarrow X' = \tilde{R}^T \Lambda_{\text{Lorentz}} \tilde{R} X \quad (32)$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τον πίνακα

$$\tilde{R}^T \Lambda_{\tau\nu\pi} \tilde{R} = \tilde{R}^T \begin{bmatrix} \gamma & -|\beta|\gamma & 0 & 0 \\ -|\beta|\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_x}{|\beta|} & \frac{\beta_y}{|\beta|} & \frac{\beta_z}{|\beta|} \\ 0 & -\frac{\beta_y}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & \frac{\beta_x}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_x\beta_z}{|\beta|\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & -\frac{\beta_y\beta_z}{|\beta|\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & \frac{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}}{|\beta|} \end{bmatrix} =$$

$$= \tilde{R}^T \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma|\beta| & \gamma\frac{\beta_x}{|\beta|} & \gamma\frac{\beta_y}{|\beta|} & \gamma\frac{\beta_z}{|\beta|} \\ 0 & -\frac{\beta_y h}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} - \frac{\beta_x\beta_z\lambda}{|\beta|\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & \frac{\beta_x h}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} - \frac{\beta_y\beta_z\lambda}{|\beta|\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & \frac{\lambda\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}}{|\beta|} \\ 0 & \frac{\beta_y\lambda}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} - \frac{\beta_x\beta_z h}{|\beta|\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & -\frac{\beta_x\lambda}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} - \frac{\beta_y\beta_z h}{|\beta|\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & \frac{h\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}}{|\beta|} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{R}^T \Lambda_{\tau\nu\pi} \tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_x}{|\beta|} & -\frac{\beta_y}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & -\frac{\beta_x\beta_z}{|\beta|\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} \\ 0 & \frac{\beta_y}{|\beta|} & \frac{\beta_x}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & -\frac{\beta_y\beta_z}{|\beta|\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} \\ 0 & \frac{\beta_z}{|\beta|} & 0 & \frac{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}}{|\beta|} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma|\beta| & \gamma\frac{\beta_x}{|\beta|} & \gamma\frac{\beta_y}{|\beta|} & \gamma\frac{\beta_z}{|\beta|} \\ 0 & -\frac{\beta_y h}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} - \frac{\beta_x\beta_z\lambda}{|\beta|\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & \frac{\beta_x h}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} - \frac{\beta_y\beta_z\lambda}{|\beta|\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & \frac{\lambda\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}}{|\beta|} \\ 0 & \frac{\beta_y\lambda}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} - \frac{\beta_x\beta_z h}{|\beta|\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & -\frac{\beta_x\lambda}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} - \frac{\beta_y\beta_z h}{|\beta|\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}} & \frac{h\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}}{|\beta|} \end{bmatrix}$$

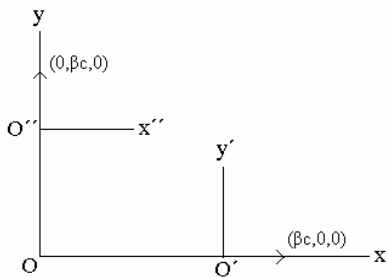
$$\Rightarrow \tilde{R}^T \Lambda_{\tau\nu\pi} \tilde{R} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & (\gamma-h)\frac{\beta_x^2}{|\beta|^2} + h & (\gamma-h)\frac{\beta_x\beta_y}{|\beta|^2} + \frac{\beta_z\lambda}{|\beta|} & (\gamma-h)\frac{\beta_x\beta_z}{|\beta|^2} - \frac{\beta_y\lambda}{|\beta|} \\ -\gamma\beta_y & (\gamma-h)\frac{\beta_x\beta_y}{|\beta|^2} - \frac{\beta_z\lambda}{|\beta|} & (\gamma-h)\frac{\beta_y^2}{|\beta|^2} + h & (\gamma-h)\frac{\beta_y\beta_z}{|\beta|^2} + \frac{\beta_x\lambda}{|\beta|} \\ -\gamma\beta_z & (\gamma-h)\frac{\beta_x\beta_z}{|\beta|^2} + \frac{\beta_y\lambda}{|\beta|} & (\gamma-h)\frac{\beta_y\beta_z}{|\beta|^2} - \frac{\beta_x\lambda}{|\beta|} & (\gamma-h)\frac{\beta_z^2}{|\beta|^2} + h \end{bmatrix} \quad (33)$$

Έχουμε λοιπόν τον μετασχηματισμό

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & (\gamma-h)\frac{\beta_x^2}{|\beta|^2} + h & (\gamma-h)\frac{\beta_x\beta_y}{|\beta|^2} + \frac{\beta_z\lambda}{|\beta|} & (\gamma-h)\frac{\beta_x\beta_z}{|\beta|^2} - \frac{\beta_y\lambda}{|\beta|} \\ -\gamma\beta_y & (\gamma-h)\frac{\beta_x\beta_y}{|\beta|^2} - \frac{\beta_z\lambda}{|\beta|} & (\gamma-h)\frac{\beta_y^2}{|\beta|^2} + h & (\gamma-h)\frac{\beta_y\beta_z}{|\beta|^2} + \frac{\beta_x\lambda}{|\beta|} \\ -\gamma\beta_z & (\gamma-h)\frac{\beta_x\beta_z}{|\beta|^2} + \frac{\beta_y\lambda}{|\beta|} & (\gamma-h)\frac{\beta_y\beta_z}{|\beta|^2} - \frac{\beta_x\lambda}{|\beta|} & (\gamma-h)\frac{\beta_z^2}{|\beta|^2} + h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (34)$$

ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΟΣ ΔΥΟ ΚΑΘΕΤΑ ΚΙΝΟΥΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΩΝ - ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΩΣΣΟΣ

Θεωρούμε έναν ακίνητο παρατηρητή (Ο), έναν παρατηρητή (Ο') κινούμενο προς τα δεξιά με ταχύτητα $(\beta c, 0, 0)$ ως προς τον ακίνητο και έναν παρατηρητή (Ο'') κινούμενο προς τα πάνω με ταχύτητα $(0, \beta c, 0)$ ως προς τον (Ο) (Εικόνα 2).



Εικόνα 2. Δυο συστήματα αξόνων $O'x'y'z'$, $O''x''y''z''$ κινούμενα με ταχύτητες $(\beta c, 0, 0)$, $(0, \beta c, 0)$ ως προς το $Oxyz$.

Είναι

$$\beta > 0 \Rightarrow \beta = |\vec{\beta}|$$

Για τον παρατηρητή Ο' αντιστοιχεί ο πίνακας $\Lambda_{1(x)}$ και για τον παρατηρητή Ο'' αντιστοιχεί ο πίνακας $\Lambda_{2(y)}$. Έτσι είναι

$$X' = \Lambda_{1(x)} X \quad X'' = \Lambda_{2(y)} X$$

, οπότε

$$X'' = \Lambda_{2(y)} \Lambda_{1(x)}^{-1} X'$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (34) είναι

$$\Lambda_{1(x)} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & h \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{2(y)} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & h & 0 & -\lambda \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & h \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος του $\Lambda_{1(x)}$ είναι

$$\Lambda_{1(x)}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & h \end{bmatrix}$$

Οπότε

$$\Lambda_{2(y)} \Lambda_{1(x)}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & h & 0 & -\lambda \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^2 & \beta\gamma^2 & -\beta\gamma h & \beta\gamma\lambda \\ \beta\gamma h & \gamma h & -\lambda^2 & -h\lambda \\ -\beta\gamma^2 & -\beta^2\gamma^2 & \gamma h & -\gamma\lambda \\ \beta\gamma\lambda & \gamma\lambda & h\lambda & h^2 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την ταχύτητα $\vec{\beta}'_4$ του Ο'' ως προς τον Ο'. Επειδή ο Ο' είναι τυποποιημένος παρατηρητής ισχύουν οι τύποι (29).

Αν θεωρήσουμε ως μελετώμενο σώμα τον Ο'' έχουμε

$$\beta'_{4x} = \frac{-\beta c + 0}{c - 0} \Rightarrow \beta'_{4x} = -\beta$$

$$\beta'_{4y} = \frac{h\beta c + \lambda \cdot 0}{\gamma(c-0)} \Rightarrow \beta'_{4y} = \frac{h\beta}{\gamma} \quad (35)$$

$$\beta'_{4z} = \frac{-\lambda\beta c + 0}{\gamma(c-0)} \Rightarrow \beta'_{4z} = -\frac{\lambda\beta}{\gamma} \quad (36)$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \beta_4'^2 &= \beta^2 + \beta^2 h^2 \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\beta^2 \lambda^2}{\gamma^2} \\ \Rightarrow \beta_4'^2 &= \frac{\beta^2 \gamma^2 + \beta^2 h^2 + \beta^2 \lambda^2}{\gamma^2} \\ \Rightarrow \beta_4'^2 &= \beta^2 \frac{\gamma^2 + h^2 + \lambda^2}{\gamma^2} = \beta^2 \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2} \\ \Rightarrow |\beta_4'| &= \beta \frac{\sqrt{\gamma^2 + 1}}{\gamma} \end{aligned}$$

Έτσι

$$\gamma_4' = \gamma^2.$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (33), ο πίνακας που αντιστοιχεί στην ταχύτητα β'_4 είναι ο

$$\Lambda_4 = \begin{bmatrix} \gamma^2 & \beta\gamma^2 & -\beta\gamma h & \beta\gamma\lambda \\ \beta\gamma^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\beta\gamma h & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta\gamma\lambda & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Για να είναι κλειστός ο μετασχηματισμός πρέπει

$$\Lambda_{2(y)} \Lambda_{1(x)}^{-1} = \Lambda_4$$

Συγκρίνοντας τους πίνακες, στοιχείο προς στοιχείο έχουμε

$$(\Lambda_2 \Lambda_1^{-1})_{10} = (\Lambda_4)_{10} \Rightarrow h = \gamma \quad (37)$$

$$(12) \Rightarrow \lambda = \pm i\beta\gamma \quad (38)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\beta^2 \gamma^2 \quad (39)$$

Έτσι πρέπει

$$h_4' = \gamma_4' = \gamma^2$$

και

$$\lambda_4' = \pm i|\beta'_4|\gamma'_4 = \pm i\beta \frac{\sqrt{\gamma^2 + 1}}{\gamma} \gamma^2$$

$$\Rightarrow \lambda_4' = \pm i\beta\gamma\sqrt{\gamma^2 + 1} = \lambda\sqrt{\gamma^2 + 1}$$

Συνεπώς είναι

$$\beta'_{4x} = -\beta$$

$$(35) \Rightarrow \beta'_{4y} = \beta h \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \beta'_{4y} = \beta$$

$$\beta'_{4z} = -\frac{\beta\lambda}{\gamma}$$

Υπολογίζουμε τα παρακάτω πηλικά που περιέχονται στον πίνακα Λ_4

$$\frac{\beta'_{4x}}{|\beta'_4|} = -\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}$$

$$\frac{\beta'_{4y}}{|\beta'_4|} = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}$$

$$\frac{\beta'_{4z}}{|\beta'_4|} = -\frac{\lambda}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}$$

Έτσι ο πίνακας Λ_4 γίνεται

$$\Lambda_4 = \begin{bmatrix} \gamma^2 & \beta\gamma^2 & -\beta\gamma^2 & \beta\gamma\lambda \\ \beta\gamma^2 & \gamma^2 & -\lambda^2 & -\gamma\lambda \\ -\beta\gamma^2 & \lambda^2 & \gamma^2 & -\gamma\lambda \\ \beta\gamma\lambda & \gamma\lambda & \gamma\lambda & \gamma^2 \end{bmatrix}$$

ενώ είναι

$$\Lambda_{2(y)} \Lambda_{1(x)}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma^2 & \beta\gamma^2 & -\beta\gamma h & \beta\gamma\lambda \\ \beta\gamma h & \gamma h & -\lambda^2 & -h\lambda \\ -\beta\gamma^2 & -\beta^2 \gamma^2 & \gamma h & -\gamma\lambda \\ \beta\gamma\lambda & \gamma\lambda & h\lambda & h^2 \end{bmatrix}$$

Λόγω των εξισώσεων (37) και (39) επαληθεύεται πλέον η ισότητα

$$\Lambda_{2(y)} \Lambda_{1(x)}^{-1} = \Lambda_4.$$

Έτσι ο γενικός κλειστός μετασχηματισμός (34) γίνεται

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\beta_x & -\beta_y & -\beta_z \\ -\beta_x & 1 & \pm i\beta_z & \mp i\beta_y \\ -\beta_y & \mp i\beta_z & 1 & \pm i\beta_x \\ -\beta_z & \pm i\beta_y & \mp i\beta_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (40)$$

οπότε δυο οποιοδήποτε αδρανειακοί παρατηρητές Ο και Ο' συσχετίζονται μέσω του Πίνακα Βύσσης.

$$\Lambda_{B(\beta)} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\beta_x & -\beta_y & -\beta_z \\ -\beta_x & 1 & \pm i\beta_z & \mp i\beta_y \\ -\beta_y & \mp i\beta_z & 1 & \pm i\beta_x \\ -\beta_z & \pm i\beta_y & \mp i\beta_x & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο γενικός γραμμικός μετασχηματισμός που διατηρεί αναλλοίωτη τη χωροχρονική απόσταση S^2 και επιπρόσθετα είναι κλειστός, συνοψίζεται σε πίνακα που περιέχει πραγματικούς και φανταστικούς αριθμούς. Έτσι, ενώ ο χωροχρονος του ακινήτου παρατηρητή είναι πραγματικός, ο χώρος του κινουμένου παρατηρητή καθίσταται μιγαδικός και ο χρόνος παραμένει πραγματικός. Συνακόλουθα, αποφεύγεται η στροφή των αξόνων που είναι υποχρεωτική, όταν συσχετίζουμε

τρεις παρατηρητές, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς του Lorentz. Έτσι, η μεταβατική ιδιότητα της παραλληλίας, που είναι ισοδύναμη με το Ευκλείδειο Αίτημα, εξακολουθεί να ισχύει και για κινούμενους παρατηρητές. Επίσης, για άλλη μια φορά επαληθεύεται η ρήση του J. Hadamard (11): *Ο συντομότερος δρόμος ανάμεσα σε δυο αλήθειες στο πεδίο των πραγματικών αριθμών, περνά μέσα από το πεδίο των μιγαδικών.*

Euclidean Complex Relativistic Mechanics I: The Matrix

Elias Vossos¹ and Spyridon Vossos²

¹Physicist, ²Chemist, School of Science, University of Athens, Athens, Hellas

Key words: Linear space-time transformation, special relativity theory, Euclidean request, Lorentz Transformation

SUMMARY. Relativity Theory was fundamental for the development of Quantum Physics. These parts of Physics are applied to sections, such as Chemistry, Biology, Pharmacology and Medicine. As a result, a significant change on Relativity will lead to changes on the above scientific sections. Special Relativity, as is applied until now, cancels the transitive attribute in parallelism, when three observers are related, because Lorentz Transformation is not closed. In this paper, considering Linear Space-time Transformation, we demand the maintenance of Space-time distance S^2 . In addition, we demand this Transformation to be closed, so there is no need for axis rotation. The solution is a matrix containing complex numbers. As a result, space

becomes complex, but time remains real. Thus, the transitive attribute in parallelism, which is equivalent to the Euclidean Request, is also valid for moving observers.

REFERENCES

1. Raman V.V.: Relativity in the Early Twenties: Many-Sided Reactions to a Great Theory. *Indian Journal of History of Science* 7: 133 (1972)
http://www.dli.gov.in/rawdataupload/upload/insa/INSA_1/20006186_119.pdf
2. Petzoldt J.: Die Stellung der Relativitätstheorie in der geistigen Entwicklung der Menschheit. Sybillen Verl., Dresden, 1921
3. Meyers C.S.: On Consciousness. *Proc. R. Soc. Med.* 18: 9-13 (1925)
4. Morgan C. L.: Optical Records and Relativity. *Nature* 114: 577-579 (1924)
5. Cole F.T.: Medical Accelerators. In Proceedings of the 9th Fermilab Industrial Affiliates Roundtable on Applications of Accelerators, Batavia, Illinois, 1989, eConf C8905261 (1989) 003, p.42
<http://www.slac.stanford.edu/econf/C8905261/pdf/003.pdf>
6. http://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_resonance_imaging
7. http://en.wikipedia.org/wiki/Relativistic_quantum_chemistry
8. Χριστοδουλάκης Θ., Κορφιάτης Ε.: Σημειώσεις Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Πανεπιστήμιο Αθήνας, 2002, p. 37.
<http://users.uoa.gr/~thapostol/SPREL/LectureNotes.pdf>
9. Χριστοδουλάκης Θ., Κορφιάτης Ε.: Σημειώσεις Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, Πανεπιστήμιο Αθήνας, 2002, p. 28.
<http://users.uoa.gr/~thapostol/SPREL/LectureNotes.pdf>
10. Χατζηδημητρίου Ι.: Θεωρητική Μηχανική Α. Εκδόσεις Γιαχούδη-Γιαπούλη Θεσσαλονίκη, 1983, p. Π6
11. Αδαμόπουλος Λ., Βισκαδουράκης Β., Γαβαλάς Δ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α.: Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης, Β' Τάξη Ενιαίου Λυκείου, ΟΕΔΒ Αθήνα, 1998, p. 186.