MATHEMATICAL SCIENCES

METHODİCAL SYSTEM OF TEACHİNG THESE TOPİCS FOR THE İMPLEMENTATİON OF SUBSTANDARDS FOR THE EDUCATİONAL PART "TRİGONOMETRİC FUNCTİONS OF ANY ANGLE" (GRADE X)

Ibragimov F.,
Sheki branch of ADPU, doctor of pedagogical sciences, professor
https://orcid.org/0000-0002-0775-1048
Shirinova K.
Sheki branch of ADPU, senior lecturer

МЕТОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ПРЕПОДАВАНИЯ УКАЗАННЫХ ТЕМ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПОДСТАНДАРТОВ ПО УЧЕБНОЙ ЧАСТИ "ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЛЮБОГО УГЛА" (X КЛАСС)

Ибрагимов Ф.Н.
Шекинский филиал АДПУ, доктор педагогических наук, профессор
https://orcid.org/0000-0002-0775-1048
Ширинова К.Ф.
Шекинский филиал АДПУ, старший преподаватель
https://doi.org/10.5281/zenodo.8199097

Abstract

In the article, the content of skills is intended to become the subject of study by students in the process of implementing materials for the educational section "Trigonometric functions of any angle", which is included in the content of the subject "Mathematics" in the 10th grade, general education schools are presented. In the educational block "Trigonometric functions of any angle", attention is directed to the place of the content elements that perform the "switching function" in the formation of the above skills, and to the technology of their transformation into action in the activities of students. knowledge. Radian and degree measure of an angle", "Arc length. Sector area. Linear velocity, angular velocity", "Trigonometric functions. Trigonometric functions of any angle", "Unit circle and trigonometric functions of any angle", "Transformation formulas", "Trigonometric identities", "Addition formulas", "Results from addition formulas" are considered to be a system. It should be noted that the task system, which serves as a means of organizing and management of the educational process for the development of the content elements presented by students, should contain verbs that are required to be completed in topics.Examples of tasks of this kind are included in the content of the work.

Аннотация

В статье содержание умений призвано стать предметом изучения учащихся в процессе реализации материалов к учебному разделу «Тригонометрические функции любого угла», который входит в содержание предмета «Математика» в X классе представлены общеобразовательные школы. В учебном блоке «Тригонометрические функции любого угла» внимание направлено на место элементов содержания, выполняющих «включающую функцию» в формировании вышеназванных умений, и на технологию их превращения в действие в деятельности учащихся. познание. «Радиан и градусная мера угла», «Длина дуги». «Площадь сектора. Линейная скорость, угловая скорость», «Тригонометрические функции. Тригонометрические функции любого угла", "Единичная окружность и тригонометрические функции любого угла", "Формулы преобразования", "Тригонометрические тождества", "Формулы сложения", "Результаты из формул сложения" считаются системой. Следует отметить, что система заданий, служащая средством организации и управления учебным процессом по освоению представляемых учащимися элементов содержания, должна содержать глаголы, обязательные для выполнения в темах. Примеры заданий такого рода включены в содержание работы.

Keywords: trigonometric function; addition formula; sameness; sector; arc; conversion formula; angle of rotation; angular velocity; linear speed; uniform circle; educational block; content elements; appointment; educational process; methodical system.

Ключевые слова: Тригонометрическая функция; формула сложения; одинаковость; сектор; дуга; формула преобразования; угол поворота; угловая скорость; линейная скорость; равномерный круг; учебный блок; элементы контента; назначение; учебный процесс; методическая система.

Актуальность предмета. В комплексе учебников и различной учебной литературы по учебным единицам, базовым стандартам, подстандартам и определенным темам по предмету математики имеется много полезных рекомендаций, которые следует взять на вооружение в деятельности учителя.

Это очень полезно с точки зрения реализации процесса обучения математике по модели учебной программы. Не отрицается, что постоянное совершенствование учебного процесса по предмету логично, в целом проблемы дидактики носят вечный характер. Безусловно, по мере формирования опыта использования учебной программы адекватная ему методическая система учебного процесса должна совершенствоваться. Исходя из этой логики, утверждаем актуальность изучения темы «Методическая система обучения указанным темам для реализации подстандартов учебного блока «Тригонометрические функции любого угла» (X класс).

Анализ материалов, полученных из научных источников, дает основание для такого обобщения, что в содержании математических предметов, преподаваемых в общеобразовательных школах, материалы, связанные с понятиями числа, функции и пространства, имели высшую «способности функций» и по линии развития этих понятий (от простого к сложному)) сблизились в диалектическом единстве. Даже многие педагоги (дидакты, методисты), получившие имидж «классического статуса», поддерживали мысль о том, что общее математическое образование прямо (в ряде случаев прямо) соотносится с направлением развития и уровнем существующей математической науки, а также с логика развития понятий числа и функции должна быть адекватной [5-8; 13]. Содержательные линии предмета «Математика», основанные на модели учебного плана, применяемой в настоящее время в общеобразовательных школах, как раз и являются модернизацией этой идеи[2; 57]

Наше обобщение, вытекающее из собранных нами исследовательских материалов по предметной программе по математике, заключается в том, что в процессе преподавания тем, охватываемых учебной частью «Тригонометрические функции любого угла», предполагается, что учащиеся становятся субъектами следующих умений и навыков:

⋄моделирует угол как поворот луча вокруг вершины;

⋄знает, равен ли один полный оборот 2π или 360^0, и представляет отрицательные и положительные углы любого размера геометрически и аналитически;

⋄понимает значение угла в радианах;

⋄ применяет взаимосвязь между градусами и радианами угла;

⋄применяет формулу расчета длины дуги к решению задач;

⋄ применяет формулу расчета площади сектора к решению задач;

⋄обеспечивает определение тригонометрических функций для любого угла поворота;

⋄определяет знак тригонометрических соотношений в разных четвертях;

⋄выражает тригонометрические функции любого угла по единичной окружности с координатами точки;

⋄определяет тригонометрические функции по координатам заданной точки на единичной окружности;

⋄определяет тригонометрические функции для заданного угла поворота на единичной окружности;

⋄представляет вывод формул преобразования геометрически;

⋄ представляет собой алгебраический вывод формул преобразования;

⋄ применяет формулы преобразования для решения задач;

⋄ представляет геометрический вывод основных тригонометрических тождеств;

⋄ представляет получение основных тригонометрических тождеств алгебраически;

⋄ применяет основные тригонометрические тождества для решения задач;

⋄выполняет доказательство формул суммирования;

⋄упрощает выражения, применяя формулу суммирования, доказывает тождества;

⋄ применяет формулы сложения для решения задач;

⋄обосновывает формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение;

⋄применяет формулы преобразования суммы и разности для решения задач;

⋄пишет формулы двойного аргумента и полуаргумента, используя формулы суммирования;

⋄ применяет формулы двойного аргумента и полуаргумента для решения задач.[3-4]

Овладение материалами данной учебной единицы пополнит активный математический словарь учащихся следующими понятиями: угол поворота, конец угла, отрицательный угол, положительный угол, градус, радиан, дуга, сектор, длина дуги, площадь сектор, линейная скорость, угловая скорость, секанс, косеканс, один круг и позволяет обогатить его соображениями, связанными с ними. Справедливости ради следует сказать, что получить примеры заданий речевого характера можно из научных источников, произведенных учеными-педагогами Азербайджана и других национальностей (представленный список литературы можно выбрать в качестве адреса для этого цель).

Теперь дадим интерпретацию обобщений по представленным выше темам. На наш взгляд, «Углы поворота. Достаточно потратить 2 часа на преподавание темы «радиан и градусная мера угла». Сначала учащимся разъясняется определение угла поворота на словах, например, вращение луча вокруг начальной точки, геометрически , по реальной ситуации. Важно обеспечить, чтобы каждый ученик в классе участвовал в этом моделировании. Учащийся представляет и моделирует угол поворота в виде луча, одна сторона которого зафиксирована в направлении оси x, а другая вращается по часовой или против часовой стрелки вокруг начала координат. Важно обратить внимание на геометрическое описание углов, последняя сторона которых пересекается.

Ученик должен уметь представить совпадение сторон положительного знака угла 120^0 и угла -240^0 геометрическим представлением, он должен «увидеть», что сумма абсолютных значений . Градусная мера этих двух углов равна 360^0. Он должен знать, что существует бесконечное число углов поворота, конечная сторона которых совпадает с данным острым углом.

На данном этапе учебного процесса внимание уделяется определению, в какой четверти находится последняя сторона по знаку углов. В качестве примера приводится геометрическое представление, в какой четверти находится последняя сторона углов $-75^0, 114^0, -240^0$. Учащийся должен знать, что конец угла 380^0 находится в первой четверти и совпадает с концом угла 20^0. Показать пример углов, расположенных в второй четверти " - учащийся может сказать: «В этом четверти находится любой угол с величиной в градусах от 450^0 до 540^0».

Радианная мера угла объясняется учащимся на втором уроке, посвященном изучению предмета. Обращается внимание учащихся на то, что при повороте последней стороны угла рисуется дуга определенного размера. Им объясняют, что, кроме меры в градусах, угол имеет меру, связанную с длиной дуги, проведенной последней стороной. Подчеркивается, что если мы описываем дуга движущегося угла на окружности радиусом r, то размер центрального угла, соответствующего дуге, длина которой равна радиусу r, принимается равной 1 радиану. Уточняется, что согласно определению радиана, если центральный угол, соответствующий дуге длины l в окружности с радиусом r, равен радианам, то , $\frac{l}{r} = \alpha$.

В процессе преподавания предмета учащимся объясняется взаимосвязь между радианной мерой угла и градусной мерой: Полный круг равен 2π радиан. Длина окружности равна 2πr. Так как длина дуги, соответствующей 1 радиану, равна r, полный оборот равен $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ радианам, 2π радианам=360^0; π радиан=180^0; Поскольку 1 радиан≈57^0 $180^0 = \pi$; радиан, $1^0 = \frac{\pi}{180}$ радиан. [12;241]

Учащимся сообщают, что удобно применять такое правило: при переводе градусов в радианы умножать на $\frac{\pi}{180}$, при переводе радианов в градусы умножать на $\frac{180}{\pi}$. [9; 47]

Продолжается работа по усвоению понятий углов поворота, угловых радианов и градусов с организацией деятельности учащихся по соответствующим заданиям. Примеры таких задач включают в себя:

1. Угол α является углом какой четверти? Нарисуй, покажи.

a) $\alpha = 170^0$ b) $\alpha = -100^0$ c) $\alpha = 320^0$ d) $\alpha = -10^0$

2. В диапазоне $0^0 - 360^0$ задайте угол поворота α так, чтобы последняя сторона совпадала с заданным углом.

a)420^0 b)-210^0 c)-330^0 d)700^0 e)-200^0

3. Выразите угол, заданный в градусах, в радианах, найдите его приблизительное значение, округлив до сотых долей.

a)60^0 b)120^0 c)-45^0 d)450^0 f)$15{,}5^0$

4. Найдите градусную меру данного угла в радианах.

a)$\frac{\pi}{6}$ b)$\frac{2\pi}{3}$ c)$-\frac{3\pi}{8}$ d) $-\frac{5\pi}{2}$ f) 1 e) 3 и так далее. [3; 68-70]

По нашему мнению «Длина дуги. Площадь сектора. Достаточно посвятить 3 часа преподаванию темы «Линейная скорость, угловая скорость». Информация о длине дуги и площади сектора дается учащимся с использованием объяснительно-иллюстративных и репродуктивных методов в превосходной форме. Содержание информации может быть выбрано следующим образом:

Формула длины дуги, соответствующей центральному углу m^0 в окружности радиусом r, выглядит следующим образом: $l = \frac{\pi m}{180} \cdot r$ (формулу поясняет учитель). Учитель обращает внимание учащихся на возможность изменения формы формулы. Он утверждает, что длину дуги можно записать проще, используя радианную меру угла. Поскольку $\frac{l}{r} = \alpha$ по определению радиана, длина дуги равна произведению радианной меры угла и радиана: $l = \alpha r$. Длина дуги прямо пропорциональна радиусу окружности.

Учитель сообщает учащимся, что площадь сектора, соответствующего центральному углу m°, $S = \frac{\pi m}{360} \cdot r^2$ (преподаватель вовлекает учащихся в обсуждение формулы) и принимая во внимание, что m° является мерой центрального угла в радианах, если дробь $\frac{\pi m}{180}$ обозначить через α, формула площади соответствующего сектора будет $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$[3; 72]

Процесс усвоения этой информации учащимися продолжается с помощью учебных заданий.

Целесообразно предоставить учащимся следующую информацию о понятиях линейной скорости и угловой скорости:

При круговом движении, например, когда колесо вращается вокруг точки O, скорость взятой на нем точки P можно оценить двояко. Одним из них является скорость точки, которая определяется расстоянием, которое она проходит при вращении колеса. Это называется линейной скоростью. Другая – скорость по углу поворота (центральному углу), то есть она называется угловой скоростью.

Линейная скорость= $\frac{gedilən\ yol}{zaman}$($v_x = \frac{\alpha r}{t}$) - если объект движется по кругу, линейная скорость равна отношению пройденного пути (соответствующей длины дуги) ко времени.

Угловая скорость $= \frac{dönmə\ bucağı}{zaman}$($\omega = \frac{\alpha}{t}$ - если объект движется по окружности, то угловая скорость равна отношению угла поворота ко времени.

Связь между линейной скоростью и угловой скоростью может быть выражена как:

линейная скорость= $r \cdot$ угловая скорость :$v_x = r \cdot \omega$

Процесс усвоения понятий длины дуги, площади сектора, линейной скорости, угловой скорости продолжается путем организации деятельности учащихся по соответствующим заданиям. Примеры таких задач включают в себя:

1. Найдите длину дуги, соответствующую заданному центральному углу и площади сектора.

а)$r = 30\ sm; \alpha = \frac{\pi}{3}$. b) $r = 12\ m; \alpha = 90^{\circ}$. c) $r = 1{,}8\ dm; \alpha = \frac{5\pi}{3}$.

2. Длина секундной стрелки часов 10 см.

а) Найдите угловую скорость секундной стрелки в рад/сек.

б) Как далеко пройдет кончик руки за 2 минуты 15 секунд?

в) Найдите линейную скорость (см/сек) секундной стрелки.

3. Велосипедное колесо диаметром 65 см поворачивается на 45° за 0,05 с. Какое расстояние проезжает велосипед за 30 с? И так далее. [8; 245]

«Тригонометрические функции. «Тригонометрические функции любого угла». На изучение темы рекомендуется отводить 3 часа. Прежде чем преподавать эту тему, учащиеся знают, как определять функции для тригонометрических острых и тупых углов. Здесь внимание сосредоточено на определении тригонометрических функций по координате любой точки на координатной плоскости. Для этого учащимся обычно показывают знаки координат в разных четвертях координатной плоскости, отмеченные закономерности точек и угол поворота.

Учащимся еще раз демонстрируется возможность записи тригонометрического отношения угла с помощью прямоугольного треугольника. Им объясняют, что стороны прямоугольного треугольника, образованного любым углом поворота, всегда определяются координатами x и y любой точки, взятой на стороне конца угла поворота, и расстоянием от начала координат до точка (или радиус окружности).

На данный момент рассматриваемая информация представлена следующим образом:

Обозначается как координаты (x; y) точки, взятой в конечной точке любого угла поворота α, чтобы дать определение тригонометрической функции угла. Расстояние от начала координат до любой точки P находится по формуле расстояния между двумя точками (O(0;0) и P(x;y)):

$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (поскольку r - расстояние, оно всегда положительно). В системе координат на треугольнике написано: $sin\alpha = \frac{y}{r}; cos\alpha = \frac{x}{r};\ tg\alpha = \frac{y}{x} x \neq 0; ctg\alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{tg\alpha}, y \neq 0;$

$sec\alpha = \frac{r}{x} = \frac{1}{cos\alpha}, x \neq 0;\ cosec\alpha = \frac{r}{y} = \frac{1}{sin\alpha}, y\ \neq 0$ [8; 245-247]

Примечание.Специально подчеркивается, что значения тригонометрических функций не зависят от того, какая точка взята на стороне угла.

На втором занятии учащимся разъясняется, что знаки тригонометрических функций в разных четверти определяются по соотношениям, и на основе объяснения производится обобщение. После этого исследуются интервалы значений функции. Определены значения граничных углов и тригонометрические функции углов поворота, соответствующие разным четвертям. Учащиеся понимают, что значения тригонометрических функций являются действительными числами и изучают интервал изменения каждой. Они делают вывод, что значения функции синуса изменяются как $-1 \leq sin\alpha \leq 1$. Аналогично значения функции косинуса изменяются как $-1 \leq cos\alpha \leq 1$.Функции тангенса и котангенса могут принимать любые вещественные значения: $-\infty < tgx < +\infty; :-\infty < ctgx < +\infty$.. Поскольку значения функций секанса и косеканса являются обратными функциям косинуса и синуса, они принимают значения cosec$\alpha \geq 1$ или $cosec\alpha \leq -1$, sec$\alpha \geq 1$ или $sec\alpha \leq -1$.

В третьем упражнении внимание учащихся сосредоточено на определении тригонометрических функций любого угла по острому углу. В этом процессе повторяется, что можно найти значения тригонометрических функций специальных углов, таких как $30^0, 60^0$на равностороннем треугольнике. Рассмотрено удобство нахождения тригонометрических функций угла 45^0 из равностороннего прямоугольного треугольника. Далее подчеркивается, что тригонометрическими функциями любого угла являются соответствующий острый угол можно найти с помощью тригонометрических функций. Соответствующий острый угол — это угол, образованный концом данного угла с прямой, совпадающей с осью x. Подчеркивается, что этот угол в научных источниках называется опорным углом. Здесь опорный угол специально доводится до сведения учащихся, что конец угла поворота представляет собой острый угол, образованный прямой линией, удерживающей ось x.

Задания, связанные с нахождением опорных углов, рекомендуется давать как в градусах, так и в радианах. Учащиеся должны знать, что острые углы, соответствующие отрицательным углам, находятся по положительному углу, конец которого совпадает с данным углом. Например, угол -210^0 градусов и угол, сторона которого совпадает, равен $-210^0+360^0 = 120^0$. Соответствующий острый угол $180^0-120^0 = 60^0$. Так как -210^0 — угол второго четверта, учитываются знаки тригонометрических функций в этом четверте. Острый угол, соответствующий этому углу, равен $360^0-315^0 = 45^0$. Например, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ и $\cos(-240^0) = -\frac{1}{2}\cos$, так как косинус принимает отрицательное значение во II четверте.

В этом уроке также объясняется периодическое изменение значений тригонометрических функций. [11; 68]

Для освоения темы «Тригонометрические функции. Тригонометрические функции любого угла» учащимся естественно организовать свою деятельность по соответствующим задачам. В этом случае целесообразно использовать рабочие листы. Предлагаются примеры таких рабочих листов:

Рабочий лист. [4]

Имя........................Фамилия....................

Число ....

1) Данные точки обозначают координаты точки на крайней стороне угла поворота. Напишите

6 тригонометрических функций для каждой точки. Нарисуйте соответствующие картинки.

A) (3;4) B) (-5;12) C) (2;-2) D) (-3;-40)

....

2) Определите четверть данного угла, начертите соответствующий острый угол и запишите значения тригонометрических функций.

a)210^0 b)-210^0 c)330^0

....

На преподавание темы «Тригонометрические функции единичной окружности и любого угла» достаточно уделить 2 часа.Вначале учащимся сообщается, что любой угол поворота и соответствующий ему острый угол (опорный угол) легче всего описать геометрически на единице окружность, а каждую тригонометрическую функцию можно представить вещественными числами, это проще выразить. Поскольку r=1, а угол выражен в радианах, длина соответствующей дуги равна величине угла. Тригонометрическая функция любого угла может быть выражена как функция длины дуги. Единичный круг создает связь между тригонометрическими функциями и координатами точки.

На основе этой информации учащийся понимает, что можно выразить координаты точки с помощью тригонометрических функций. Он понимает, что поскольку $cos\alpha = x, sin\alpha = y$, это можно записать как Р$(x; y) = P(cos\alpha; sin\alpha)$. Это справедливо для любой точки единичной окружности.

Точки, соответствующие наиболее часто используемым углам $30^0, 45^0, 60^0$, отмечены на единичной окружности (эти углы также являются наиболее часто используемыми опорными углами). Учащийся знает, что каждый острый угол является опорным для 4-х углов (при ($0^0 < \alpha < 360^0$ и что координаты отсчетного угла для этих углов отмечены с учетом значений координат и знак тригонометрической функции в соответствующем четверте. Отметка поворотов и соответствующих им координат на одной окружности позволяет учащемуся наглядно представить наиболее часто используемые углы в интервале $0^0 - 360^0$, увидеть их наибольшие и наименьшие значения, проследить их периодичность, нечетность и четность.

Учащийся может найти координаты точки на окружности при повороте, соответствующем острому углу, как по тригонометрическим соотношениям из прямоугольного треугольника, так и следующим образом.

Координаты точки, соответствующей углу 45^0 на окружности, должны удовлетворять уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Кроме того, эта точка находится на прямой $y = x$. Если мы напишем $x^2 + x^2 = 1$; $2x^2 = 1$; $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ вместо $y = x$. Поскольку угол находится в первой четверти, x должен быть положительным. Учитывая значение $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, координаты точки, соответствующей вращению $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\pi}{4}$, будут$(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$. Симметричное преобразование этой точки может определить координаты 4-х точек вообще, иначе говоря, числовые данные о тригонометрических функциях 4-х точек. С помощью прямоугольных треугольников с острыми углами $30^0, 45^0, 60^0$ и их симметричных преобразований на окружность нанесены точки, соответствующие углам поворота. Также выполняются задания на приблизительное размещение или приблизительное определение чисел, соответствующих заданным точкам и в промежутке -2π и 2π. [8; 248]

Учащийся должны быть в состоянии выполнить шаги для нахождения тригонометрического соотношения любого угла, а именно:

Шаг 1. Определяется наименьший положительный угол, сторона которого совпадает с заданным углом.

- если угол $0^0 < \alpha < 360^0$, переходим к шагу 2.

-если угол $\alpha < 0^0$, к углу α прибавляется 360^0 пока значение угла не станет $0^0 < \alpha' < 360^0$.

- если угол $\alpha > 360^0$, то из значения угла α вычитается 360^0 до тех пор, пока его значение не станет $0^0 < \alpha' < 360^0$.

Шаг 2. Определяется, в каком четверте находится последняя сторона угла, найденного на шаге 1.

Шаг 3. Определяют опорный угол, соответствующий углу, найденному на шаге 1.

Шаг 4. Тригонометрические соотношения определяются для опорного угла.

Шаг 5. По 2-му шагу определяются знаки значений тригонометрических функций.

Шаг 6. Записывают тригонометрические отношения угла α, заданные значением, найденным на шаге 4, и знаком, определенным на шаге 2.

«Тригонометрические функции. Для освоения темы «тригонометрические функции любого угла» учащимся естественно организовать свою деятельность по соответствующим задачам. В этом случае целесообразно использовать рабочие листы. Примеры задач включают следующее.

1.Найти значения тригонометрических функций угла $-\frac{7\pi}{6}$ с помощью единичной окружности.

2. $A(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5})$ — точка пересечения стороны угла φ с единичной окружностью. Нарисуйте соответствующую фигуру, найдите значения тригонометрических функций угла φ.

3. Если $\alpha = 30^0$, вычислить значение выражения:

a)$3sin\alpha$ b)$sin3\alpha$ c)$2cos\alpha$ ç)$cos2\alpha$

4. Верно ли неравенство?

$a)\ sin45^0 + cos60^0 > 1$ b)$cos\frac{\pi}{4} + sin\frac{\pi}{3} > 1$

5. Укажите точки, соответствующие углу поворота α, удовлетворяющие заданному условию на единичной окружности.

$a)\ sin\alpha = \frac{1}{2}$; b)$cos\alpha = -\frac{1}{2}$; c)$sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Использование единичного круга в интервале $[0; 2\pi]$ укажите углы поворота, удовлетворяющие уравнению $sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

И так далее.

Достаточно посвятить 2 часа преподаванию темы «Формулы преобразования». Учебный процесс рекомендуется начинать с вовлечения студентов в практическую работу.

Практическая работа

1) Отметьте точку P(3;4) на окружности радиусом 5.

2) Укажите координаты точки P', через которую точка P переходит в отражение относительно оси абсцисс.

3) Какой точкой становится точка P' при отражении вдоль оси y?

4) Сравните координаты точек P и P''.

5) Симметричны ли точки P'' и P относительно начала координат?

6) Если точка P соответствует углу поворота α, то каким углам поворота соответствуют точки P' и P''?

Заканчивая практическую работу, преподаватель обращает внимание учащихся на отображение координат любой точки по оси абсцисс и оси y. Учащиеся понимают, что отражение по оси y совпадает с поворотом на 180^0отражения по оси x . При отражении к оси x меняется только знак координаты y. Отсюда учащиеся могут сделать вывод, что косинус не меняется, поскольку зависит от координаты x, а синус меняет знак. Таким образом, связь между тригонометрическими функциями углов α и $-\alpha$ следующая:

$\sin(-\alpha) = -sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = cos\alpha$; $\mathrm{tg}(-\alpha) = -tg\alpha$; $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -ctg\alpha$.

То есть функции синуса, тангенса, котангенса нечетны, а косинус четна.

В продолжении учебного процесса внимание учащихся акцентируется на тригонометрических соотношениях для острых углов α и $90^0 - \alpha$ в прямоугольном треугольнике с острым углом α:

$sin\alpha = \frac{y}{r} \sin(90^0 - \alpha) = \frac{x}{r}$; $cos\alpha = \frac{x}{r} \cos(90^0 - \alpha) = \frac{y}{r}$; $tg\alpha = \frac{y}{x} tg(90^0 - \alpha) = \frac{x}{y}$

$ctg\alpha = \frac{x}{y} \mathrm{ctg}(90^0 - \alpha) = \frac{y}{x}$

Из примирение равенств видно:

$\sin(90^0 - \alpha) = cos\alpha \cos(90^0 - \alpha) = sin\alpha$; $\mathrm{tg}(90^0 - \alpha) = ctg\alpha\, \mathrm{ctg}(90^0 - \alpha) = tg\alpha$.

Учащимся предлагается повернуть последнюю сторону заданного угла поворота α еще на 90^0. В это время точка $P(x;y)$ на нем становится точкой $P'(-y;x)$. Согласно определению тригонометрических функций:

$\sin(\alpha + 90^0)= \frac{x}{r} = cos\alpha$; $\cos(\alpha + 90^0)= -\frac{y}{r} = -sin\alpha$; $\mathrm{tg}(\alpha + 90^0)= -\frac{x}{y} = -ctg\alpha$;

$\mathrm{ctg}(\alpha + 90^0)= -\frac{x}{r} = -tg\alpha$.

Упомянутые формулы таковы: $\sin(\alpha + 90^0)= cos\alpha$; $\cos(\alpha + 90^0)= -sin\alpha$; $\mathrm{tg}(\alpha + 90^0)= -ctg\alpha$; $\mathrm{ctg}(\alpha + 90^0)= -tg\alpha$.

Учащиеся определяют другие формулы с аналогичными суждениями, и это не вызывает у них затруднений. [12; 247-248]

Необходимо постараться, чтобы учащиеся также смогли найти следующие закономерности для формул преобразования:

1. Если аргумент имеет вид $90^0 \pm \alpha$ или $270^0 \pm \alpha$, то тригонометрическая функция этого аргумента становится «сопряженной» тригонометрической функцией аргумента α (т. е. синус к косинусу, тангенс к котангенсу и наоборот).

2. Если аргумент равен $180^0 \pm \alpha$ или $360^0 \pm \alpha$, то тригонометрическая функция этого аргумента становится одноименной функцией аргумента α.

В обоих случаях знак полученной функции совпадает со знаком функции в данной четверти, которая преобразуется путем принятия угла α за острый угол. [11; 152-160]

Для освоения темы «Формулы преобразования» естественно организовать деятельность учащихся по соответствующим задачам. В этом случае целесообразно использовать рабочие листы. Примеры задач включают следующее.

Сторона конца угла $\alpha = 32^0$ равна:

а) по оси абсцисс; б) по оси y;

в) Найдите наименьший положительный угол, полученный при отражении от начала координат.

2. Выполнить те же задачи для $\alpha = 220^0$.

3. Докажите истинность тождества sin$\sin(90^0 + \alpha) = cos\alpha$ для случая, когда угол α расположен в втором четверте.

4. Найдите в интервале $[0^0;\ 360^0]$ все углы, синус которых равен заданному числу.

$$sin\alpha = \frac{1}{2}\ sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

5. Упростите выражение:

a)$\frac{sin80^0}{cos10^0}$ b)$tg40^0 \cdot ctg50^0$ c)$sin72^0 - cos18^0$

6. Упростить:

$\sin(90^0 - \alpha) - \cos(180^0 - \alpha) + \mathrm{tg}(180^0 - \alpha) + \mathrm{ctg}(270^0 - \alpha)$. [4]

На преподавание темы «Тригонометрические тождества» достаточно уделить 2 часа. Процесс обучения предмету рекомендуется начинать с вовлечения учащихся в практическую деятельность следующим образом.

Практическая работа. Покажите, что $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$ для острого угла α в прямоугольном треугольнике, выполнив следующие действия.

1. Запишите теорему Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$;

2. Разделите обе части уравнения на c^2 и $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$

3. Применить свойства силы: $(\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2$;

4. Заметим, что $\frac{a}{c} = cos\alpha$, $\frac{b}{c} = sin\alpha$: $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$..

В заключение к заданию учитель констатирует, что для любого угла α: $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$ тождество можно объяснить по координатам точек, взятых на одной окружности. Обращаем внимание студентов, что при замене координат x и y тригонометрическими функциями для любого угла α, $\cos\alpha \neq 0$ удовлетворяющего условию $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, для любого угла α, $\sin\alpha \neq 0$ удовлетворяющего условию $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$-. Из этих уравнений получается, что одновременно тождество $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ верно для углов α, удовлетворяющих условию $\cos\alpha \neq 0$ и $\sin\alpha \neq 0$. Если мы разделим обе части уравнения $cos^2\alpha$, получим:

$\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$, так как $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$.

Разделив обе части уравнения $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$ на α, получим:

$\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha} + 1 = \frac{1}{sin^2\alpha}$ так как $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$

Учитель подчеркивает, что эти уравнения называются основными тригонометрическими тождествами. С помощью основных тригонометрических тождеств можно упростить данное тригонометрическое выражение и вычислить значения других при заданном значении одной из тригонометрических функций.

Для освоения предмета «Тригонометрические тождества» естественно организовать деятельность учащихся по соответствующим задачам. В этом случае целесообразно использовать рабочие листы. Примеры учебных задач включают следующее.

1. Упрощайте.

a)$tg\alpha \cdot ctg\alpha - cos^2\alpha$ b)$cos^4\alpha + cos^2\alpha \cdot sin^2\alpha + sin^2\alpha$..

2. Найти $cos\alpha$ и $tg\alpha$, если $sin\alpha = 0{,}6, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

3. Если $tg\alpha = 2$, найти значение данного выражения:

$\frac{sin\alpha + 3cos\alpha}{cos\alpha}$.

4. Докажите равенство:. $\frac{1-(sinx-cosx)^2}{sinx} = 2cosx$.

5. Докажите, что значение выражения при возможных значениях β не зависит от β.

$a)(sin\beta + cos\beta)^2 + (sin\beta - cos\beta)^2; b)(tg\beta + ctg\beta)^2 - (tg\beta - ctg\beta)^2$.

На преподавание темы «Формулы сложения» рекомендуется уделить 3 часа. В процессе обучения предмету сначала доказывается тождество $\cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$. Под руководством преподавателя и при активном участии учащихся доказательство проводится по следующим этапам:

1. Координаты точки, соответствующей углу α на однородной окружности, обозначены как $P_1(cos\alpha; sin\alpha)$.

2. На одной окружности проведен угол β, образующий угол $\alpha - \beta$ с торцом α. Соответствующая точка $P_2(cos\beta; sin\beta)$ отмечена.

3. Точки P_1 и P_2 соединены отрезком P_1P_2.

4. Вращает его по часовой стрелке до тех пор, пока начальная сторона угла $\alpha - \beta$ не упадет на ось абсцисс, пока не достигнет стандартного положения у гла поворота, угол доводится до нового положения. Координаты точек на окружности конечной и начальной стороны угла будут $P_3(\cos(\alpha - \beta); \sin(\alpha - \beta))$ и $P_4(1; 0)$ соответственно. Расстояние между точками P_1 и P_2, то есть длина отрезка P_1P_2, и расстояние между точками P_3 и P_4, то есть длина отрезка P_3P_4, равны, $P_1P_2 = P_3P_4$. Расстояние между двумя точками записывается по формуле:

$$P_1P_2 = \sqrt{(cos\alpha - cos\beta)^2 + (sin\alpha - sin\beta)^2};$$

$$P_3P_4 = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2}.$$

По свойству равенства

$$(cos\alpha - cos\beta)^2 + (sin\alpha - sin\beta)^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2$$

По формулам сокращенного умножения:

$$cos^2\alpha - 2cos\alpha \cdot cos\beta + cos^2\beta + sin^2\alpha - 2sin\alpha \cdot sin\beta + sin^2\beta = cos^2(\alpha - \beta) - -2cos(\alpha - \beta) + 1 + sin^2(\alpha - \beta)$$

$$(cos^2\alpha + sin^2\alpha) - 2(cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta) + (cos^2\beta + sin^2\beta) = = cos^2(\alpha - \beta) + sin^2(\alpha - \beta) - 2\,cos(\alpha - \beta) + 1$$

$$2 - 2(cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta) = 2 - 2\,cos(\alpha - \beta)$$

$$2(cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta) = 2\,cos(\alpha - \beta)$$

$$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta .$$

Это тождество и свойства тригонометрических функций используются при доказательстве других формул суммирования. Руководствуясь учащимися, можно доказать упомянутые тождества. Эти формулы суммирования выглядят следующим образом:

$$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta ;$$

$$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta$$

$$sin(\alpha - \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sin\beta$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta} ; tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Для освоения темы «Формулы сложения» следует считать естественным организовать деятельность учащихся по соответствующим задачам. В этом случае целесообразно использовать рабочие листы. Примеры учебных задач включают следующее.

1. Вычислите значение выражения.

a) $sin75^0$ b) $cos75^0$ c)$\sin(-15)^0$ d)$\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})$ e) $cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})$.

2. Упростите и вычислите значение.

a)$sin\frac{\pi}{4} \cdot cos\frac{\pi}{12} + cos\frac{\pi}{4} \cdot sin\frac{\pi}{12}$ b) $sin\frac{\pi}{4} \cdot cos\frac{\pi}{12} - cos\frac{\pi}{4} \cdot sin\frac{\pi}{12}$.

3. Проверить правильность уравнений, применяя формулы сложения.

a)$\sin(90^0 - \alpha) = cos\alpha$ b)$\cos(270^0 - \alpha) = -sin\alpha$

4. Если $sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, cos\beta$, α угол III четверта, β угол IV четверта, найти .

a)$\sin(\alpha + \beta)$ b)$\cos(\alpha - \beta)$

5. Упростить: $\frac{tg(45^0+\alpha) - tg\alpha}{1 + tg(45^0+\alpha)tg\alpha}$

6. Найдите t $tg2\alpha$, если $ctg(\alpha + \beta) = 2, ctg(\alpha - \beta) = 1$.

На преподавание темы «Результаты, полученные из формул суммирования» достаточно выделить 3 часа. При преподавании данной темы студенты знакомятся с формулами, связанными с преобразованием произведения в сумму, тригонометрическими функциями двойных и половинных аргументов, обращают их внимание на то, что для преобразования произведения в сумму используются формулы сложения.

$$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta;$$

$$sin(\alpha-\beta)=sin\cdot cos\beta-cos\alpha\cdot sin\beta$$

суммируя их сходство бок о бок , получаем формулу

$$sin\alpha\cdot cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)),$$

$$cos(\alpha-\beta)=cos\alpha\cdot cos\beta+sin\alpha\cdot sin\beta\ .$$

$$cos(\alpha+\beta)=cos\alpha\cdot cos\beta-sin\alpha\cdot sin\beta$$

суммируя их сходство бок о бок , получаем формулу

$$cos\alpha\cdot cos\beta=\frac{1}{2}(cos(\alpha+\beta)-\ cos(\alpha-\beta))$$

Целесообразно предложить вывод формулы $sin\ \alpha\cdot sin\beta=\frac{1}{2}(cos(\alpha-\beta)-\ cos(\alpha+\beta))$ в качестве самостоятельной работы студентам, которые будут применять аналогичный подход.

Сообщается, что формулы суммирования позволяют выразить $sin2\alpha, cos2\alpha, tg2\alpha$ как тригонометрические функции угла α:

$$in2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=sin\alpha\cdot cos\alpha+cos\alpha\cdot sin\alpha=2sin\alpha\cdot cos\alpha$$

$$cos2\alpha=cos(\alpha+\alpha)=cos\alpha\cdot cos\alpha-sin\alpha\cdot sin\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha$$

$$tg2\alpha=tg(\alpha+\alpha)=\frac{tg\alpha+tg\alpha}{1-tg\alpha tg\alpha}=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}.$$

Таким образом, получаются так называемые формулы двойного угла:

$sin2\alpha=2sin\alpha\cdot cos\alpha;\ cos2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha;\ tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$.

$$cos2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha=cos^2\alpha-(1-cos^2\alpha)=2cos^2\alpha-1,$$

$$cos2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha=1-sin^2\alpha-sin^2\alpha=1-2sin^2\alpha$$

Отсюда

$cos^2\alpha=\frac{1+cos2\alpha}{2};\quad sin^2\alpha=\frac{1-cos2\alpha}{2}\quad;\quad tg^2\alpha=\frac{1-cos2\alpha}{1+cos2\alpha}$.

Обращаем внимание учащихся на то, что, записывая в этих формулах $\frac{\alpha}{2}$ вместо α, получаем:

$$cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+cos\alpha}{2};\ sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-cos\alpha}{2};\ tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}$$

Тригонометрические тождества для половинных углов:

$sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}};\quad cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}};\quad tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}$.

В этих уравнениях учащимся объясняется, что знак правой части зависит от того, в какой четверти расположен угол $\frac{\alpha}{2}$.

На основе результатов, полученных по формулам сложения, формирование у учащихся необходимых умений осуществляется их деятельностью по систематизированным заданиям, продолжается этот процесс с привлечением их к работе по упрощению тригонометрических выражений. Рабочий лист имеет свое место в комплекте учебника «Математика-10», который подготовлен как методическое пособие и задание в учебнике «Математика-10», что будет способствовать эффективной организации этого процесса.[3] . Будущему учителю, желающему освоить предмет PTM, рекомендуется ознакомиться с указанным учебником и методическими материалами. Следует отметить, что существуют и другие методические средства, способствующие деятельности учителей, работающих в общеобразовательных школах, и подготовке студентов (обучающихся на уровне бакалавриата с целью в будущем стать учителями), которые были разработаны видными учеными. которые долгое время работали в вузах [11 ; 258-279].

Примеры рабочих листов включают автономный рабочий лист ниже:

Рабочий лист

Имя .... Фамилия........................

Число..........

Докажите тождества:

$$\frac{sin\alpha+sin\beta}{cos\alpha+cos\beta}=tg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right);$$

....

$\frac{cos\alpha-sin\beta}{sin\alpha-sin\beta}=-tg(\frac{\alpha+\beta}{2});\ sin2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha};$

$cos2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$;

$$sin\alpha=\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})+\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$$

....

Для суммативной оценки учебного блока «Тригонометрические функции любого угла» рекомендуется применять следующий критерий.

1. Выполняет обратное преобразование между радианами и градусами измерения угла.
2. Геометрически описывает углы поворота.
3. Определяет углы поворота, перекрывающие торцевую сторону с заданным углом.
4. Решает задачи, связанные с нахождением длины дуги и площади сектора.
5. Связывает линейную скорость и угловую скорость, чтобы найти длину дуги и угол поворота.
6. Связывает тригонометрические функции и их определение с координатами точки, расположенной на конце стороны угла.
7. Определяет координаты точки на конечной точке различных квадрантов углов с помощью прямоугольного треугольника.
8. Определяет, какой четверти угла является заданный угол.
9. Определяет тригонометрические функции любого угла с помощью подходящего острого угла.
10. Устанавливает связь между координатами точки на одиночной окружности и значениями тригонометрических функций угла поворота.
11. Находит значение тригонометрической функции любого угла, используя острые углы на единичной окружности.
12. Применять основные тригонометрические тождества для упрощения тригонометрических выражений.
13. Применяет формулы сложения.
14. Использует формулы преобразования суммы тригонометрических функций двух углов в произведение.
15. Применяет формулы половинного угла и двойного угла [3-4].

Рекомендуется воспользоваться следующими примерами заданий на суммативное оценивание:

1. 60^0 ; -60^0 ; 300^0 ; -405^0; - Проиллюстрируйте каждый из углов поворота нарисовав отдельную координатную плоскость.

2.$a)\ 172^0\ ;\ b) - 315^0\ ;\ c) - \frac{5\pi}{6}\ ;\ d) - 415^0$

Определить, в каком четверте находится последняя сторона углов поворота.

3. Выразите 105^0 в радианах.

4. Выразите $\frac{11\pi}{6}$ в градусной мере.

5. Выразите угол, левые стороны которого пересекаются с данными углами и который находится в интервале (0;2π).

$$a) - 60^0\ ;\ b) - \frac{7\pi}{5}$$

6. Выразите центральный угол, соответствующий дуге окружности длиной 15 см и радиусом 3 см, в радианах и градусах.

7. Вычислить значения выражений $\sin \sin\frac{\pi}{9}$ и $\sin\frac{8\pi}{9}\sin$, зная, что $\cos\ \frac{7\pi}{18} \approx 0{,}3420$.

8. Докажите, что $2\cos x\cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$.

9. Покажите, что $\cos 2x + \sin 2y = 2\sin(x + y)\cos(x - y)$ не является тождеством, приведя контраргумент.

10. Докажите, что $a)\ \sin 16^0 = \cos 74^0\ ;\ b)\ tg\ 63^0 = ctg\ 27^0$

11. Найдите значения выражений.

$a)\ \sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4} b)\ \cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}$.

12. Найдите площадь сектора, соответствующего центральному углу $\pi/6$ окружности радиусом 4 см. Какова площадь этого круга?

13. Объект, движущийся по кругу, совершает один полный оборот за 9 минут. Найдите, на сколько градусов этот объект поворачивается за 1,5 минуты и сколько метров он проходит. Нарисуйте схематический рисунок. Радиус окружности $R = 6\ m$.

14. еслиsin $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\ , 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\ , \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\ , \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$,

Найдите $\sin(\alpha - \beta)$. [8; 256-257]

Результат. 1) В процессе обучения темам, освещаемым в учебном блоке «Тригонометрические функции любого угла», следует ориентироваться на подбор и применение адекватных типов заданий, чтобы учащиеся стали субъектами глаголов исходя из ожидаемых результатов. ;

2) В процессе учебно-методических работ по учебной части «Тригонометрические функции любого угла» важным дидактическим требованием следует считать включение необходимых терминов в содержание активного математического словаря обучающихся;

3) Рекомендуется использовать виртуальные инструменты (важные ссылки для преподавания курса) и различные рабочие листы в качестве дополнительного ресурса в методических материалах к учебному блоку «Тригонометрические функции любого угла»;

4) Поскольку материалы учебного блока «Тригонометрические функции любого угла» относятся к содержательной линии «Алгебра и функции», в реальном педагогическом процессе они используются как в полном объеме (с содержанием, охватываемым предметом «Математика», так и в целом) и в частях, принадлежащих каждой содержательной линии (остальные четыре содержательные линии). Следует ожидать диалектического единства между элементами подсистем) (подход «система-структура»-отношения «целое-часть»);

5) Ожидание парадигмы «возможность-движение-качество» при выборе заданий и построении их в систему положительно влияет на эффективность образовательного процесса.

Список литературы:

1. Адыгозалов А.С. Теоретические основы математического образования в школе (Учебник). Баку: Типография ADPU, 2018.

2. Учебные программы по предметам для I-IV классов общеобразовательных школ. Баку: «Образование, 2008.

3. Кахраманова Н.М. Каримов М.А., Гусейнов И.Х. «Математика-10» (Учебник). Баку: Радиус, 2017.

4. Кахраманова Н.М., Каримов М.А., Гусейнов И.Х. «Математика-10» (Методическое пособие для учителя). Баку: Радиус, 2017.

5. Ибрагимов Ф. Н. Методика преподавания математики в общеобразовательных школах (Учебно-методические материалы). Баку: «Мутерцим», 2015.

6. Ибрагимов Ф. Н. Технология обучения математике на основе модели учебного плана в общеобразовательной школе (Учебно-методические материалы). Баку: «Мутерцим», 2016.

7. Ибрагимов Ф. Н. Философия, дидактика, технология реализации математического образования в общеобразовательной школе (Учебно-методический материал). Баку: «Мутерцим», 2018.

8. Ибрагимов Ф. Н. Лекции по методике преподавания математики в общеобразовательных школах (Учебно-методические материалы). Баку: «Мутерцим», 2019.

9. Марданов М.С., Ягубов М.Х., Мирзаев С.С. и другие. Введение в алгебру и анализ (учебник для 10 класса общеобразовательной школы). Баку: «Чашиоглу», 2007.

10. Мамедов Р. Высшая математика (учебник для вузов). Баку: «Туран Хаус», 2013.

11. Насибов М.Х. Элементы математического анализа в школьном курсе (Методические материалы).Баку: «Маариф», 1991.

12. Кочетков Ю.С., Кочеткова Ю.Ч. Алгебра и элементарные функции. Часть I (Учебно-методическое пособие для учащихся 9 классов общеобразовательных школ). Баку: "Маариф", 1973.

13. Колягин Ю.В. М., Луканкин Г.Л. Основные понятия школьного курса математики. М., «Просвещение», 1974.