# GARMONIK FUNKSIYA SATH CHIZIQLARINING ICHKI GEOMETRIYASI

**D. K. Hoshimova, M.F.Karamatova**

**(SHDPI)**

e-mail:hoshimova dilobar87@gmail.com

**Annotatsiya:** Maqolada kompleks sonlar tekisligida golomorf, garmonik funksiyalar aniqlandi. Ma`lumki, matematik analizdan bilamizki, garmonik funksiyalar bir qancha xossalarga ega. Bu xossalardan foydalangan holda garmonik funksiyalarning sath chiziqlari geometriyasini o'rganildi.

**Kalit so'zlar:** golomorf funksiya, garmonik funksiya, Gauss egrilik, o'rta egrilik, geodezik egrilik.

Аннотация: В статье определены голоморфные гармонические функции на плоскости комплексных чисел. Как мы знаем из математического анализа, гармонические функции обладают рядом свойств. Используя эти свойства, изучалась геометрия контурных линий гармонических функций.

Ключевые слова: голоморфная функция, гармоническая функция, гауссова кривизна, средняя кривизна, геодезическая кривизна.

Abstract: The article defines holomorphic harmonic functions on the plane of complex numbers. As we know from mathematical analysis, harmonic functions have a number of properties. Using these properties, the geometry of contour lines of harmonic functions was studied.

Keywords: holomorphic function, harmonic function, Gaussian curvature, mean curvature, geodesic curvature.

Kompleks sonlar tekisligida $\omega : E \rightarrow W$ akslantiruvchi $\omega(\mathrm{z}) = \mathrm{u}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + \mathrm{iv}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ golomorf funksiya berilgan bo'lsin.

**Ta'rif-1.** $u(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo'lib, $\Delta u = 0$ Laplas tenglamasini qanoatlantirsa, $u(\mathrm{x}, \mathrm{y})$) funksiya garmonik funksiya deyiladi.

**Teorema-1.** Agar $\omega(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ funksiya kompleks sonlar tekisligining barcha nuqtalarida differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $u(x,y)$ va $v(x,y)$ funksiyalarning o'zaro qo'shma garmonik funksiyalar bo'ladi.

Misollar. 1. Bizga $\omega(z) = z^3$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu yerda $z = x + iy$ bo'lib, $\omega(z)$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$,

$v(x,y) = (3yx^2 - y^3)$ funksiyalarning har biri garmonik funksiya bo'ladi.

2. $\omega(z) = x^2 - y^2 + i2xy$

3. $\omega(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$

4) $\omega(z) = \ln(x^2 + y^2) + i2arctg\dfrac{y}{x}$

**Ta'rif-2**. $f: R^n \to R^1$ funksiyaning sath sirti deb, $L_C = \{x \in R^n : f(x) = C\}$ to'plamga aytiladi.

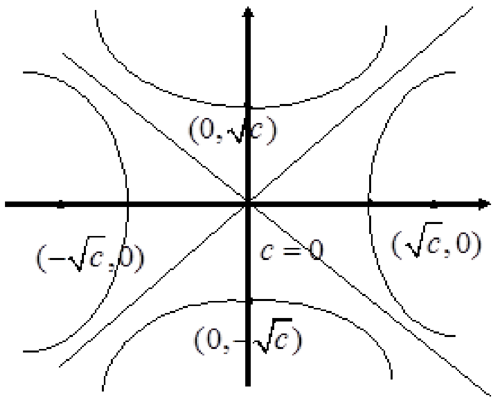
Bu yerda $n = 2$ bo'lgan holda, $f: R^2 \to R^1$ funksiyaning sath sirti o'niga $L_C = \{x \in R^2 : f(x) = C\}$ to'plam sath chizig'i deyiladi.

Misol. $u(x,y) = x^2 - y^2$ garmonik funksiyaning sath chizig'i $L_C = \{(x,y) \in R^2 : x^2 - y^2 = C\}$ bo'lib, $C$ ning qiymatiga qarab,quyidagi holatlar bo'lishi mumkin:

1) $C = 0$ da kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziq;

2) $C > 0$ da absissa o'qini $(\sqrt{C},0)$ va $(-\sqrt{C},0)$ nuqtalarda kesib o'tuvchi giperbolalar;

3) $C < 0$ da ordinata o'qini $(0,\sqrt{C})$ va $(0,-\sqrt{C})$ nuqtada kesuvchi giperbolalar;




1 1-rasm

Kompleks tekislikda $\Gamma(z_0)=\{z:\omega(z)=\omega(z_0)\}$ to'plam $\omega$, funksiyaning $z_0$ nuqta orqali o'tuvchi sath chizig'i bo'lib, $z_0$ nuqtada $\Gamma(z_0)$ chiziqning egriligini $K(z_0)$ orqali belgilaymiz.

Differensial geometriyada sirtlar sirt ustida yotuvchi egri chiziqlar yordamida o'rganiladi. Bunda regulyar chiziqlar muhim o'rin tutadi. Bizga $u(x,y)=c$ funksiya yordamida berilgan chiziq bo'lib, $|grad u|\neq 0$ shart bajarilsa, regulyar chiziq deyiladi.

Sirtning ichki geometriyasini o'rganishda geodezik chiziqlar muhim o'rin tutadi.Geodezik chiziqni geodezik egrilik xarakterlaydi. Regulyar $\Phi$ sirtning $P$ nuqtasidan o'tuvchi $\gamma$ egri chiziqning $P$ nuqta atrofidagi qismini $P$ nuqtadan o'tuvchi urinma tekislikka proeksiyasini $\gamma_0$ bilan belgilaymiz. $\gamma_0$ chiziqning $P$ nuqtadagi egriligini $\gamma$ egri chiziqning $P$ nuqtadagi geodezik egriligi deb ataymiz.

**Teorema-2.** Sirt ustida yotuvchi egri chiziqning geodezik chiziq bo'lishi uchun, uning barcha nuqtalaridagi geodezik egriligi 0 bo'lishi zarur va yetarlidir.

Endi bizga $\omega(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ (1)

funksiya $W$ sohada golomorf, $u(x,y)$, $v(x,y)$ funksiyalar o'zaro qo'shma garmo-nik funksiya berilgan bo'lib, $u(x,y)$ va $v(x,y)$ funksiyalarning sath chiziqlari mos ravishda $L_{C_1}$ va $L_{C_2}$ bo'lsin. Endi $u(x,y)$ funksiyaning sath chizig'i egriligini $k_u$, $K_u$ va $M_u$ orqali Gauss va o'rta egrilik, $k_{gu}$ bilan geodezik egriliklarni belgilaylik. Xuddi shunday $v(x,y)$ funksiya uchun $k_v$, $K_v$, $M_v$, $k_{gv}$ belgilashlarni kiritamiz. $L_{C_1}=\{u:R^2\to R^1,\ u(x,y)=C_1\}$, sath chizig'ining $|grad u| \neq 0$ bo'lganda, egriligini hisoblash formulasini keltiramiz. Agar chiziq $\{x = x(t), y = y(t)\}$ parametrik tenglama bilan berilgan bo'lib, $x'^2 + y'^2 \neq 0$ bo'lsa, egriligi

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (2)$$

formula yordamida hisoblanadi. $u(x, y) = C_1$ funksiyani hosilasi $u_x x' + u_y y' = 0$ bo'ladi.

Endi $x' = -\frac{u_y}{u_x} y'$ dan ikkinchi tartibli hosila olamiz:

$x'' = -\left[\frac{(u_{yx}x' + u_{yy}y')u_x - (u_{xx}x' + u_{xy}y')u_y}{u_x^2} y' + \frac{u_y}{u_x} y''\right]$.topilgan $x'$ va $x''$ ni (2) tenglikka qo'ysak, $L_{C_1}$ sath chizig'i uchun egrilikni hisoblash formulasiga ega bo'lamiz

$$k_u = \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{(u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (3)$$

$v(x, y)$ qo'shma garmonik funksiya ekanligidan, $k_u = -\frac{u_{xx}(u_x^2 - v_x^2) + 2u_x v_x v_{xx}}{(u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Bizga $\frac{d\omega}{dz} = \omega' = u_x + iv_x$ ekanligi ma'lum. U holda

$$k_u = -\frac{\mathrm{Re}\left[(u_{xx} + iv_{xx})(u_x^2 - v_x^2 - 2iu_x v_x)\right]}{|\omega'|^3} = \frac{-\mathrm{Re}\left[\frac{\omega''}{\omega'^2}\right]}{|\omega'|^3}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.Bu tengliklardan quyidagi lemma kelib chiqadi:

**Lemma-1.**Agar $N = (1 + |\omega'|^2)^{\frac{1}{2}}$ bo'lsa,u holda

$$-k_u + ik_v = \frac{|\omega'|\omega''}{\omega'^2} \qquad (4)$$

$$-M_u + iM_v = \frac{|\omega'|^4 \omega''}{N^3 \omega'^2} \quad (5)$$

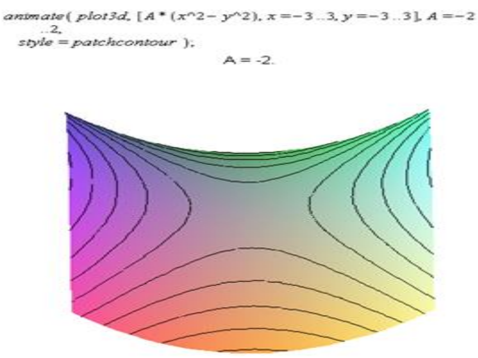
$$K_u = K_v = -\frac{|\omega''|^2}{N^4} \quad (6)$$

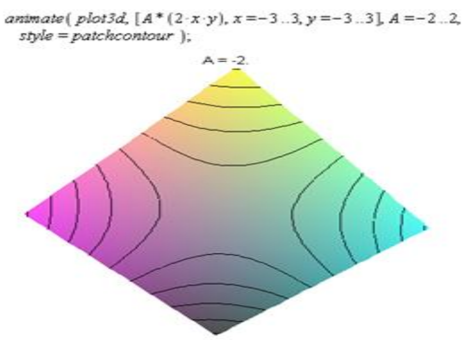
$$\begin{cases} k_{gu} = \sigma_s \left[ -v_\sigma u_{\sigma\sigma} v_s^2 + k_0 \right] / \mathrm{N}, \\ \mathrm{k}_{gv} = \sigma_t \left[ u_\sigma v_{\sigma\sigma} \sigma_t^2 + k_0 \right] / N \end{cases}. \quad (7)$$

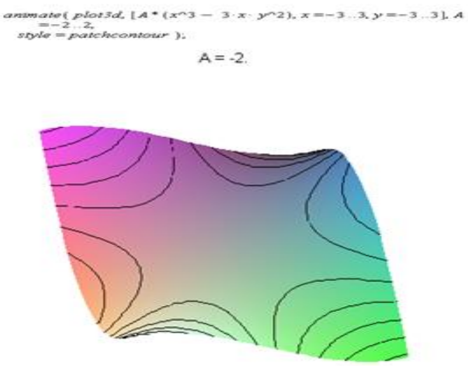
Bu lemma [4] ishda keltirilgan , (7) formulada biz kompleks tekislikdagi $\{x = x(\sigma), \mathrm{y} = \mathrm{y}(\sigma)\}$ chiziqning $\sigma$ parametrga bog'liq tenglamasi bo'lib, ichki koordinatasi $L_{c1}$va $L_{c2}$ chiziqlar $s$ va $t$ parametrga bog'liq.

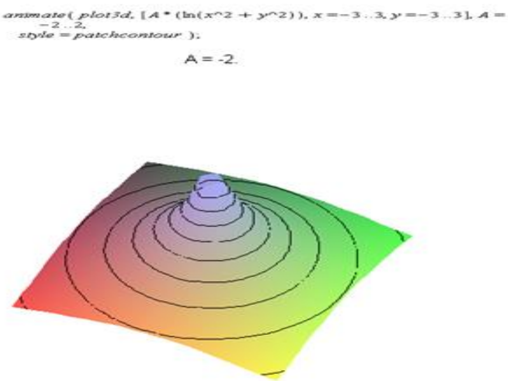
Bu formulalardan foydalanib, bu chiziqlar egriliklari orasidagi bog'lanishni topish mumkin.$\alpha$ -$L_{c1}$ va $L_{c2}$ chiziqlar normallari orasidagi burchak bo'lsa, $\sin\alpha = \frac{|\omega'|}{N}$ , $\cos\alpha = \frac{1}{N}$ va $-M_u + iM_v = \sin^3\alpha(-\mathrm{k}_u + \mathrm{ik}_v)$ , Gauss egriligi $K_u = K_v = K_\omega$ bo'ladi.

Quyida Maple dasturi yordamida $L_{c1}$va $L_{c2}$ sath chiziqlari chizilgan:



Bulardan har xil $\omega$ va $f$ golomorf funksiyalar to'liq egrigi orasidagi bog'lanishni topish mumkin.

**Lemma 2.** Har biri golomorf bo'lgan $\omega$ va $f$ funksiyalar $\omega' = \frac{1}{f'}$ shartni qanoatlantirsa, Gauss egriliklari $K_\omega(\mathrm{z}) = \mathrm{K}_f(\mathrm{z})$ bo'ladi.

Bunga quyidagi funksiyalarning grafigi egriliklari $(\omega(\mathrm{z}) = \frac{z^2}{2}, \mathrm{f(z)} = \ln \mathrm{z})$, $(\omega(\mathrm{z}) = \frac{z^n}{n}, \mathrm{f(z)} = \frac{z^{2-n}}{2-n})$, $(\omega(\mathrm{z}) = \mathrm{e}^z, \mathrm{f(z)} = -\mathrm{e}^{-z})$ misol bo'ladi.

**ADABIYOT**

1.Нарманов А.Я. Дифференциал геометрия. Т. Университет, 2004.

2.Мищенко А. С, Фоменко А. Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: физматлит, 2004. 304 с.

3. Шабат Б.В Введение в комплексный анализ Т.1. М. Наука, 1985

4. R. P Jerrard. Curvatures of surfaces associated with holomorphic functions. Proceedings of the Colloqium Mathematicum Society, Vol. 21, No. 1. (1970), pp. 127-132.