

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЗИЧЕСКОГО И КАНАЛЬНОГО УРОВНЕЙ
СЕТИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

У.Б. Амирсаидов

<https://doi.org/10.5281/zenodo.7856861>

Аннотация. Рассматриваются процессы передачи данных, возникновение ошибок битов и повторение ошибочно принятых кадров. Предлагается модель физического и канального уровней сети, определены вероятностно-временные характеристики обслуживания кадров данных при модели Гильберта канала связи.

Ключевые слова: протокол передачи данных, модель потока ошибок, вероятности ошибок битов и кадров, среднее время и коэффициент вариации времени обслуживания кадров.

Введение. В сетях телекоммуникации на канальном уровне реализуются протоколы передачи данных с обратной связью (HDLC, LAPM, LLC, ARQ), а на физическом уровне реализуются методы помехоустойчивого кодирования. Характеристики канала определяются с помощью моделей потока ошибок. Установление факта группирования ошибок практически во всех реальных каналах стимулировало создание большого числа моделей (Гильберта, простая цепь Маркова, Мюллера, Беннета-Фройлиха, Попова и др.) [1,2]. Экспериментальные данные показывают, что модель Гильберта адекватно описывает группирование ошибок в канале связи [2].

Математическая модель. В соответствии с моделью Гильберта канал связи с вероятностью P_g находится в хорошем состоянии, а с вероятностью P_b - в плохом состоянии. Ошибки возникают только в плохом состоянии с вероятностью p (обычно $p = 0.5$). Если канал находится в хорошем состоянии, то в следующем шаге с вероятностью P_{gg} останется в хорошем состоянии, а с вероятностью P_{gb} переходит в плохое состояние ($P_{gg} + P_{gb} = 1$). Если канал находится в плохом состоянии, то в следующем шаге с вероятностью P_{bb} останется в плохом состоянии, а с вероятностью P_{bg} переходит в хорошее состояние ($P_{bb} + P_{bg} = 1$). Вероятности состояний определяются по формулам [1]:

$$P_b = \frac{P_{gb}}{P_{bg} + P_{gb}}, \quad P_g = \frac{P_{bg}}{P_{bg} + P_{gb}}. \quad (1)$$

Коэффициент группирования ошибок: $K_{gr} = 1 - P_{gb} - P_{bg}$.

Вероятность i - кратных ошибок в слове длиной n_f определяется по формуле [1]:

$$P_{if} = \sum_{j=0}^{n_f} B(j, n_f) p(i, j), \quad (2)$$

где $B(j, n_f)$ - вероятность того, что из n_f элементов слова j элементов были переданы в плохом состоянии канала; $p(i, j)$ - вероятность i -кратной ошибки, если число элементов в плохом состоянии равно j .

Кодовые слова по каналу связи поступают на физический уровень принимающей стороны. Здесь производится декодирование и исправление ошибок в слове. Ошибка с кратностью (весом) t_{is} может быть исправлена при $d_0 \geq 2t_{is} + 1$, где d_0 - минимальное кодовое расстояние Хэмминга. Если при декодировании слова исправляются все ошибки кратностью t_{is} , то вероятность ошибочного приема слова равна:

$$P_{of} = \sum_{i=t_{is}+1}^{n_f} P_{if} . \quad (3)$$

Среднее (эквивалентное) значение вероятности ошибки в слове, отнесенное к биту помехоустойчивого кода можно определить в виде: $p_{\text{э}} = P_{of}/n_f$.

На канальном уровне из информационных разрядов слов формируется кадр данных с длиной n_k . Вероятность возникновения i - кратных ошибок в кадре данных определяется в виде:

$$P_{ik} = C_{n_k}^i p_{\text{э}}^i (1 - p_{\text{э}})^{n_k - i} . \quad (4)$$

Вероятность правильного приема кадра данных равна:
 $P_{nn} = (1 - p_{\text{э}})^{n_k} .$

Вероятность необнаруженной ошибки в кадре данных определяется по приближенной формуле [3]:

$$P_{no} \approx \frac{1}{2^{r_k}} \sum_{i=d_0}^{n_k} C_{n_k}^i p_{\text{э}}^i (1 - p_{\text{э}})^{n_k - i} , \quad (5)$$

где r_k - количество разрядов CRC. В стандартных протоколах передачи $r_k = 16$ или $r_k = 32$.

Вероятность обнаружения ошибки в кадре данных определяется в виде:
 $P_{oo} = 1 - (P_{nn} + P_{no}) .$

Таким образом, после проверки достоверности кадра данных методом сопоставления контрольных сумм с вероятностью P_{oo} обнаруживается наличие ошибки и передается кадр с отрицательной квитанцией длиной $n_{кв}$ передающую сторону. В противном случае $(P_{nn} + P_{no})$ передается кадр с положительной квитанцией.

Вероятность (распределения) количества повторов передачи кадра данных определяется в виде:

$$P(k_n) = (1 - P_{oo}) P_{oo}^{k_n - 1} , \quad k_n = \overline{1, N_n} , \quad (6)$$

где N_n - максимальное количество повторов.

Процедура повтора увеличивает общее время обслуживания кадров данных. Производящая функция времени обслуживания кадров с учетом повторов определяется в виде:

$$F_{обс}(z) = \sum_{k_n=1}^{N_n} P(k_n) [f_k(z) f_{кв}(z)], \quad (7)$$

где $f_k(z)$ и $f_{кв}(z)$ - производящие функции времени передачи кадра данных и кадра с квитанцией соответственно, и определяются в виде:

$$f_k(z) = z^{m_k n_f}, \quad (8)$$

$$f_{кв}(z) = z^{m_{кв} m_f}, \quad (9)$$

где $m_k = \lfloor n_k / n_f \rfloor$, $m_{кв} = \lfloor n_{кв} / n_f \rfloor$.

Подставив (13) и (14) в (12), находим:

$$F_{обс}(z) = \frac{(1 - P_{oo}) f_k(z) f_{кв}(z) [1 - (P_{oo} f_k(z) f_{кв}(z))^{N_n}]}{1 - P_{oo} f_k(z) f_{кв}(z)}. \quad (10)$$

Среднее значение и дисперсия времени обслуживания кадров определяются в виде:

$$\bar{T}_{обс} = \frac{dF_{обс}(z)}{dz}, \quad \text{при } z = 1, \quad (11)$$

$$D_{обс} = \frac{d^2 F_{обс}(z)}{dz^2} + \frac{dF_{обс}(z)}{dz} - \left(\frac{dF_{обс}(z)}{dz} \right)^2, \quad \text{при } z = 1. \quad (12)$$

Среднеквадратичное отклонение $\sigma_{обс}$ и коэффициент вариации времени обслуживания $\nu_{обс}$ кадров определяются по формулам:

$$\sigma_{обс} = \sqrt{D_{обс}}, \quad \nu_{обс} = \frac{\sigma_{обс}}{\bar{T}_{обс}}. \quad (13)$$

Взяв производное от $F_{обс}(z)$ и подставив $z = 1$, находим среднее время обслуживания кадров при $N_n = \infty$:

$$\bar{T}_{обс} = \frac{n_f (m_k + m_{кв}) T_o}{1 - P_{oo}}, \quad (14)$$

$T_o = 1/C$ - длительность передачи единичного элемента, C - скорость передачи данных.

Численный анализ. Исходными данными для расчета среднего времени и коэффициента вариации времени обслуживания кадров являются: длина кадра данных 2000 бит, длина кадра с квитанцией 40 битов и скорость передачи 64 Кбит /с, различные длины кодовых слов и параметры модели Гильберта.

На рисунке 1 приведен график зависимости среднего времени обслуживания кадров от длины кода при различных коэффициентах группирования ошибок.

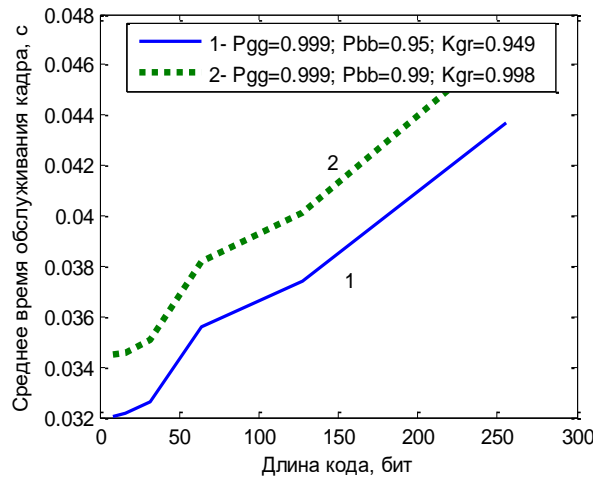


Рис.1. Зависимость среднего времени обслуживания кадров от длины кода при различных параметрах модели канала связи Гильберта

Из рисунка 1 следует, что с увеличением длины кода и коэффициента группирования ошибок среднее время обслуживания кадров повышается.

На рисунке 2 приведен график зависимости коэффициента вариации времени обслуживания кадров от длин кода при различных параметрах модели Гильберта.

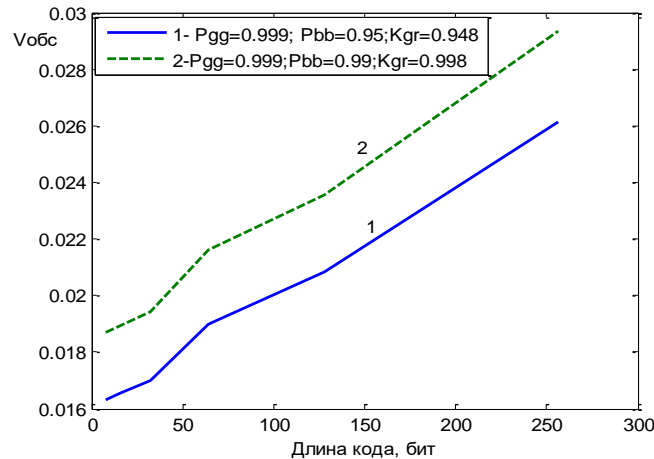


Рис. 2. Зависимости коэффициента вариации времени обслуживания кадров от длины кода

Из рисунка 2 следует, что закон распределения времени обслуживания кадров не является экспоненциальным, так как коэффициент вариации времени обслуживания кадров меньше 1. Поэтому процесс передачи кадров описывается с помощью модели системы массового обслуживания с произвольным (G) распределением времени обслуживания M/G/1 [4]. При этом среднее время ожидания кадров в буфере определяется по формуле Полячека-Хинчина [5]:

$$W = \frac{\lambda \bar{T}_{обс}^2 (1 + v_{обс}^2)}{2(1 - \rho)}, \quad (15)$$

где $\rho = \lambda / \mu = \lambda \bar{T}_{обс} < 1$ – загрузка системы.

Среднее время задержки (пребывания) кадров в звене передачи определяется в виде:

$$T_{\text{зад}} = W + \bar{T}_{\text{обс}} = \frac{\lambda \bar{T}_{\text{обс}}^2 (1 + \nu^2)}{2(1 - \rho)} + \bar{T}_{\text{обс}} \cdot \quad (16)$$

На рисунке 3 приведен график зависимости среднего времени задержки кадров от загрузки системы.

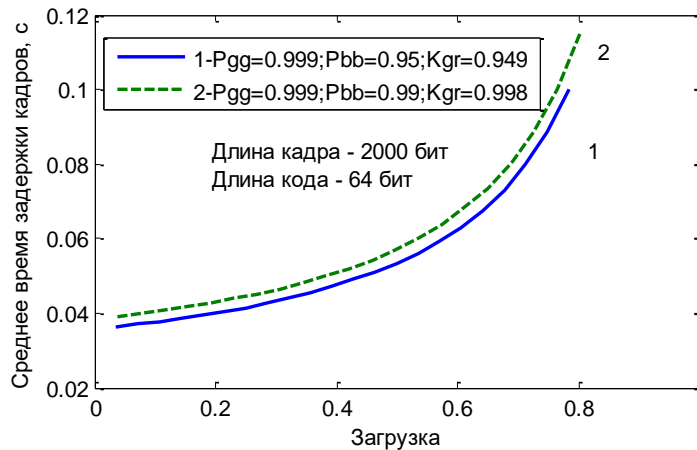


Рис. 3. Зависимость среднего времени задержки кадров от загрузки системы при различных параметрах модели канала связи Гильберта

Из рисунка 3 следует, что с увеличением загрузки системы и коэффициента группирования ошибок среднее время задержки кадров повышается.

Заключение. Полученные аналитические выражения служат для решения задач выбора оптимальных параметров физического и канального уровней, обеспечивающих эффективность функционирования звена передачи данных сети телекоммуникации при заданных параметрах канала связи.

REFERENCES

1. Мелентьев О.Г. Теоретические аспекты передачи данных по каналам с группирующимися ошибками / Под ред. проф. В.П.Шувалова.- М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 232 с.
2. Сущенко С.П. Математические модели компьютерных сетей.- Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2017.- 272 с.
3. Зелигер Н.Б., Чугреев О.С., Яновский Г.Г. Проектирование сетей и систем передачи дискретных сообщений: Учебное пособие для вузов.- Радио и связь, 1984.-176 с.
4. Ложковский А.Г. Теория массового обслуживания в телекоммуникациях.- Одесса: ОНАС им. А.С. Попова, 2012. – 112 с.
5. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. - СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. - 363с.