本文已发表在 ***Physics Essays*** 上，请引用英文版：
**Zeng JQ**. Classical physics derivation of quantization of electron elliptical orbit in hydrogenlike atom. Physics Essays, 2022, 35: 147-151.

# 类氢原子中电子椭圆轨道量子化的经典物理学推导

曾纪晴
中国科学院华南植物园， 广州 510650
zengjq@scib.ac.cn

**摘要：**在前文对量子概念进行了修正以及对玻尔的氢原子结构模型重新进行了经典物理学解释的基础上，本文详细推导了类氢原子中电子的椭圆轨道能级公式。当电子跃迁时间取单位时间（1s）时，能级公式与玻尔-索末菲的原子结构理论结果完全一致。
**关键词：量子；电子跃迁功率；椭圆轨道；玻尔-索末菲原子结构理论**

**Classical physics derivation of quantization of electron elliptical orbit in hydrogen-like atom**

Jiqing Zeng
South China Botaical Garden, Chinese Academy of Sciences, Guangzhou 510650

**Abstract:** On the basis of revising the quantum concept and reinterpreting Bohr's hydrogen atom structure model in classical physics, this paper deduces the elliptical orbital energy level formula of electrons in hydrogen like atoms in detail. When the electron transition time is taken as unit time (1s), the energy level formula is completely consistent with Bohr Sommerfeld's atomic structure theory.
**Keywords:** Quantum; Electron transition power; Elliptical orbit; Bohr Sommerfeld atomic structure theory

## 1 引言

玻尔的氢原子结构模型认为电子绕核做圆周运动, 在定态假设、电子跃迁假设和电子轨道角动量量子化条件假设的基础上，得出了电子轨道能级及轨道半径量子化的结论[1]。索末菲在玻尔的基础上，将氢原子的结构推广到了椭圆轨道模型，但他在推导过程中采用了电子轨道角动量的“量子化通则”假设[2]。我们在对量子概念进行了修正，同时澄清了经典电磁学关于电子加速运动产生辐射的原理的基础上，论证了电子基态轨道的稳定性、氢原子光谱的不连续性、以及氢原子电子轨道能级的量子化[3]。基于我们修正的量子概念，在经典物理学基础上完全可以解释之前认为经典物理学无法解释的量子现象。在我们前文工作的基础上，本文对类氢原子中电子椭圆轨道量子化作经典物理学推导。

## 2 量子概念的修正与电子绕核运动轨道的定态解释

我们在前文[3]中分析了普朗克能量子与爱因斯坦光量子中的量子能量 $E=h\nu$ 与量子概念之间的内在逻辑矛盾，认为能量子应该是一个最小能量单元$\varepsilon$，其大小在数值上等于普朗克常数 $h$，单位是焦耳。为了解释电子绕核运动而能稳定存在的客观事实，我们对一个经典电

磁学原理——拉莫尔公式进行了重新解读。拉莫尔公式告诉我们，电荷的加速运动会产生电磁辐射。人们据此想当然地认为，因为做匀速圆周运动的电子存在向心加速度，因此电子就是在做加速运动，从而将不断辐射能量，最后电子将坠入原子核。但事实上绕核运动的电子不会不停地辐射而坠入原子核导致原子崩塌。量子力学因此认为电子绕原子核运动的轨道不可能是经典轨道。但依据同样的事实我们则认为电子绕核运动的轨道是经典轨道，人们误用了拉莫尔公式。首先，人们通常把电子绕核做匀速圆周运动当作电子做加速运动，这是将向心加速度误作线性加速度。物体做圆周运动时的确存在向心加速度，但在向心加速度方向上并不产生任何位移，因此向心力不做功，也就不会消耗能量。可见，电子做匀速圆周运动并不消耗能量，自然就不会产生任何辐射。事实上，在一个动能和势能相互转化的系统中，不论物体做圆周运动还是椭圆运动，只要其运动周期不变，系统的总能量就保持不变，反之亦然，如地球绕太阳运转的周期不变一样。其次，拉莫尔公式涉及的电荷是孤立电荷。对于绕原子核运动的电子，它是在原子核形成的保守势场中运动，我们不能把它从整个原子系统中分离出来把它当做孤立电荷来看待。由于电子与原子核之间存在库仑力的作用，电子绕核运动的总能量是其动能与势能之和。根据位力定理，电子能量增加时，电子绕核运动的半径增大，势能增加而动能减少；反之，电子能量减少时电子绕核运动的半径减小，势能减小而动能增加。也就是说，电子的能量增加时电子绕核做减速圆周运动，而电子能量减小时电子绕核做加速圆周运动。显然，电子能量维持稳定状态时，电子绕核做匀速圆周或椭圆运动。拉莫尔公式认为只要孤立电荷的运动存在加速度，不管是加速运动或减速运动都将辐射能量。然而在保守势场的原子体系中，电子的减速圆周运动则说明它吸收了能量，因此拉莫尔公式并不适用于电子绕核运动的情形。当电子做加速圆周运动时，说明电子的运动半径减小了，势能减小了，虽然动能增加了但总能量减少了，这个减少的能量就是电子辐射的能量。因此，如果电子绕核做匀速圆周运动或椭圆轨道运动，其运转周期不变，说明电子的总能量不变，电子不吸收也不辐射能量，此时电子绕核运动轨道就是所谓的定态轨道。假设电子绕核做加速或减速圆周运动，电子吸收或辐射能量$\Delta E$，电子绕核运动频率变化为$\Delta f$，那么$\Delta E/\Delta f$就可以认为是一个振动周期的电磁波（一个频率或一个波长）的能量等于电子每增加一个圆周运动频率所辐射或吸收的平均能量。或者说，电子绕核运动每增加或减少一个频率恰好对应辐射或吸收一个振动周期的电磁波能量。由于一个电子的电荷是最小的电荷（即单位电荷），因此一个电子辐射或吸收一个振动周期的电磁波能量就是**一个“最小能量单元”**。显然，这个最小的能量单元就是一个能量子或光量子，我们把它标记为$\boldsymbol{\varepsilon}$。这就是修正后的量子概念，它真正代表了一份最小的能量单元，符合了普朗克最早对量子概念的定义。

假设一个电子在$\Delta t$时间内吸收或辐射的总能量是$\Delta E$，总共吸收或辐射的“最小能量单元”$\boldsymbol{\varepsilon}$的数量是 $k$ 个，则：

$$\Delta E = k\varepsilon \tag{1}$$

电子吸收或辐射的功率为：

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{k\varepsilon}{\Delta t} \tag{2}$$

设$v=k/\Delta t$，则$v$代表单位时间内电子吸收或辐射的量子数。根据我们的修正的量子定义，一个能量子或光量子就是一个完整电磁交替振荡周期的电磁波。单位时间内吸收或辐射$v$个数量的光量子，相当于单位时间内吸收或辐射了频率为 $v$ 的电磁波。因此

$$P = \frac{k\varepsilon}{\Delta t} = \varepsilon v \tag{3}$$

由（2）（3）式，得

$$\Delta E = (\varepsilon \Delta t)v \tag{4}$$

$\varepsilon\Delta t$ 是作用量的单位（能量×时间），表示最小能量单元$\varepsilon$的时间积累。普朗克常数 $h$ 的单位是焦耳·秒（$J{\cdot}S$），它表示单位时间（1s）内最小能量的作用量，被称为作用量子。可见，当$\Delta t$ 取单位时间（1s）时，$\varepsilon\Delta t$ 就表示单位时间（1s）内最小能量$\varepsilon$的作用量，即$\varepsilon\Delta t=h$。此时（4）与旧量子 $E=h\nu$完全一致。因此，$\boldsymbol{\varepsilon}$与普朗克常数 $\boldsymbol{h}$ 在数值上相等，即$\boldsymbol{\varepsilon}$=6.62607015×$10^{-34}$（$J$）。可见，普朗克常数 $h$ 是作用量子，而$\boldsymbol{\varepsilon}$才是真正的能量子（光量子）。不难看出，旧量子概念的能量 $E=h\nu$实际上表示的是电子在单位时间内吸收或辐射的能量，包含了$\nu$个光量子$\boldsymbol{\varepsilon}$的能量。

**3 类氢原子中电子椭圆轨道量子化解释与公式推导**

假设电子绕原子核做椭圆运动，原子核在椭圆的一个焦点上，如图 1 所示：

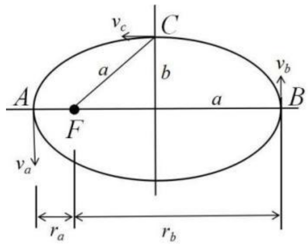


**图 1.电子的椭圆轨道**

原子核外的一个电子 e 受到的库伦引力为：

$$F=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} \qquad (5)$$

式中，$\varepsilon_0$是真空的电容率、Z 是原子序数、-e 是电子的电量、+Ze 是原子核的电量，r 是电子与核的距离。电子的势能为：

$$E_p=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} \qquad (6)$$

电子的总能量为

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} \qquad (7)$$

电子绕核做周期恒定的椭圆运动，因此它不吸收也不辐射能量，满足动量守恒与角动量守恒。电子在 A、B 点的角动量和能量分别为：

$$L=mv_ar_a=mv_br_b \qquad (8)$$

$$E=\frac{1}{2}m{v_a}^2-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r_a}=\frac{1}{2}m{v_b}^2-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r_b} \qquad (9)$$

（9）式可改写为

$$E=\frac{L^2}{2m{r_a}^2}-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0r_a}=\frac{L^2}{2m{r_b}^2}-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0r_b} \qquad (10)$$

于是得到了关于 $r_a$ 、$r_b$ 的形式上完全相同的二次方程

$$2mEr^2{}_{a,b}+2m\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}r_{a,b}-L^2=0 \qquad (11)$$

因为 $r_b>r_a$，所以方程的解是：

$$r_a=\frac{-Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 2E}-\sqrt{\frac{Z^2e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 4E^2}+\frac{L^2}{2mE}} \qquad (12)$$

$$r_b=\frac{-Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 2E}+\sqrt{\frac{Z^2e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 4E^2}+\frac{L^2}{2mE}} \qquad (13)$$

由于长轴为

$$2a=r_a+r_b=-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E} \qquad (14)$$

所以

$$E=-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 2a} \qquad (15)$$

据行星椭圆运动轨道周期公式，可算出电子绕核运转的频率为

$$f=\frac{1}{T}=\frac{4\varepsilon_0}{Ze^2}\sqrt{\frac{2|E|^3}{m}}=\frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{Z}{4\pi\varepsilon_0 ma^3}} \qquad (16)$$

### 3.1 原子光谱的不连续性解释

假设电子在定态能级轨道 $n$ 以频率 $f_n$ 绕核做周期恒定的匀速椭圆运动，跃迁到定态能级轨道 m 以频率 $f_m$ 绕核做匀速椭圆运动，用时 $\boldsymbol{\Delta t}$ 秒，则频率改变的平均加速度为：

$$a=\frac{f_m-f_n}{\Delta t}=\frac{\Delta f}{\Delta t}$$

**$\Delta t$ 时间内增加的绕核运转圈数 $k$** 为

$$k=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\frac{\Delta f}{\Delta t}(\Delta t)^2=\frac{1}{2}\Delta f\Delta t \qquad (17)$$

根据我们修正的量子概念，$\Delta t$ 时间内电子辐射的光量子数为 $k$，电子吸收或辐射光量子的功率为：

$$P=\frac{\Delta E}{\Delta t}=\frac{k\varepsilon}{\Delta t}=\frac{1}{2}\varepsilon\Delta f=\varepsilon\nu \qquad (18)$$

电子吸收或辐射光量子的功率，反映了电子在不同能级之间跃迁能力的大小，因此我们也可称之为**电子跃迁功率**。从（6）式可得电子跃迁的能级差：

$$\Delta E=\frac{1}{2}\varepsilon\Delta f\Delta t=\frac{1}{2}\varepsilon(f_m-f_n)\Delta t=\frac{1}{2}\varepsilon f_m\Delta t-\frac{1}{2}\varepsilon f_n\Delta t \qquad (19)$$

电子产生的辐射频率为：

$$\nu=\frac{1}{2}\Delta f \qquad (20)$$

可见，电子跃迁产生的辐射频率是电子在两个定态能级轨道运转的频率之差的一半，不是从 $f_n$ 到 $f_m$ 的连续频率谱。因而，用我们修正的量子概念就解释了电子跃迁产生光量子的频率是线状光谱而不是连续光谱。

## 3.2 玻尔半径

我们假设电子在某**定态轨道**绕核作周期恒定的匀速椭圆运动，其能量为$E_0$，其椭圆轨道长半轴为 $a_0$，其绕核运转频率为 $f_0$。**电子吸收能量$\Delta E$ 后**，其运行轨道半径不断增大，运行速度不断降低。能量达到最大值 $E_n$=0 时，其运动速度为零，其运转频率 $f_n$=0，即电子达到最大运行轨道时，电子实际上恰好脱离了原子核的束缚而成为自由电子。据（15）（19）式，得：

$$\Delta E = E_n - E_0 = 0 - E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2a_0} = \frac{1}{2}\varepsilon f_0 \Delta t$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{a_0} = (\varepsilon\Delta t) f_0 \qquad (21)$$

由（16）(21)式，得

$$a_0 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon\Delta t)^2}{\pi m Z e^2} \qquad \textbf{(22)}$$

代入（15）式，得

$$E_0 = -\frac{mZ^2e^4}{8{\varepsilon_0}^2(\varepsilon\Delta t)^2} \qquad (23)$$

**由（16）（22）式，得**

$$f_0 = \frac{Z^2 m(\varepsilon\Delta t)^3}{4{\varepsilon_0}^2} \qquad \textbf{(24)}$$

**当 $\Delta t$=1$s$ 时，$\varepsilon\Delta t=h$，则**

$$a_0 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m Z e^2} = 0.529\times10^{-10}/\mathrm{Z(m)},$$

$$E_0 = -\frac{mZe^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = -2.1787\times10^{-18}Z(J) = -13.6Z(eV)$$

**当 Z=1 时**，$a_0$=0.529×$10^{-10}$m，$E_0$=-13.6eV。这就是氢原子的玻尔轨道半径与玻尔轨道能级，与玻尔-索末菲的氢原子结构模型完全一致。

## 3.3 电子跃迁功率

根据里德伯公式：

$$\frac{1}{\lambda} = R_A Z^2(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}) \qquad \textbf{(25)}$$

（$R_A$ 为该种元素的里德伯常量，Z 是该种元素的核电荷数）

乘以光速 c，得

$$\nu = R_A c Z^2(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}) \qquad (26)$$

代入（3）式，可得电子跃迁功率：

$$P = \varepsilon R_A c Z^2(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}) \qquad (27)$$

当 $m$=1，$n$=∞时， 得到**电子的最大跃迁功率**：

$$P = \varepsilon R_A c Z^2 \tag{28}$$

$$\Delta E = (\varepsilon \Delta t) R_A c Z^2 \tag{29}$$

当$\Delta t$=1s 时，$\Delta E = (\varepsilon \Delta t) Rc = hR_A c Z^2$，因此，**电子的最大跃迁功率**就是电子在**玻尔半径轨道与最高能级轨道之间的跃迁功率，则**$\Delta E=E_n-E_0=-E_0$。对比（23）式，可得

$$hR_A c Z^2 = \frac{mZe^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$$

$$R_A = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 cZ} = 1.097373157 \times 10^7 / \mathrm{Z\ m^{-1}} \tag{30}$$

## 3.4 电子能级轨道量子化

由（27）式，得

$$\Delta E = \varepsilon \nu \Delta t = \varepsilon R_A c Z^2 (\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}) \Delta t = \varepsilon R_A c Z^2 \Delta t \frac{1}{m^2} - \varepsilon R_A c Z^2 \Delta t \frac{1}{n^2} \tag{31}$$

**若电子能级取**

$$E_n = -\varepsilon R_A c Z^2 \Delta t \frac{1}{n^2} \tag{32}$$

的形式，Balmer 系光谱就可以理解为原子在不同能级之间跃迁的结果，即

$$\Delta E = \frac{\varepsilon R_A c Z^2}{m^2} \Delta t - \frac{\varepsilon R_A c Z^2}{n^2} \Delta t = E_n - E_m \tag{33}$$

$$\Delta t = \frac{1}{\varepsilon R_A c Z^2} \frac{m^2 n^2}{(n+m)(n-m)} (E_n - E_m) \tag{34}$$

代入（32）式，得

$$E_n = \frac{m^2}{(n+m)(n-m)} (E_m - E_n) \tag{35}$$

**当 $m$=1 时，**

$$E_n = \frac{1}{n^2 - 1} (E_1 - E_n)$$

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \tag{36}$$

由（15）式，得

$$E_n = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2a_n} = -\frac{1}{n^2} \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2a_1}$$

$$a_n = n^2 a_1 \tag{37}$$

**由（22）（37）式，得**

$$a_n=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon\Delta t)^2 n^2}{\pi m Z e^2} \quad \textbf{(38)}$$

将（38）式代入（15）式，得

$$E_n=-\frac{Z^2 m e^4}{8\varepsilon_0^2(\varepsilon\Delta t)^2 n^2} \quad (39)$$

由（16）（38）式，得

$$f_1=\frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{Z}{4\pi\varepsilon_0 m a_1{}^3}}$$

$$f_n=\frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{Z}{4\pi\varepsilon_0 m a_1{}^3}}=\frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{Z}{4\pi\varepsilon_0 m(n^2 a_1)^3}}$$

$$f_n=\frac{1}{n^3}f_1 \quad (40)$$

将（24）代入上式，得

$$f_n=\frac{1}{n^3}\frac{Z^2 m(\varepsilon\Delta t)^3}{4\varepsilon_0{}^2} \quad (41)$$

当 $\Delta t$=1s 时，$\varepsilon\Delta t=h$，（38）（39）和（41）式与玻尔-索末菲原子结构理论所得结果完全一致。

## 4 结论

基于我们修正的量子概念和经典物理学基本理论，在不采用玻尔的电子轨道角动量量子化假设，不采用索末菲量子化通则假设，也不关心所谓角量子数与径量子数之间的关系的情况下，我们得到了与玻尔-索末菲原子结构量子化能级与能级轨道一致的结果。这充分说明基于我们修正的量子概念和经典物理学完全可以解释所谓的量子现象。电子绕核做圆形或椭圆形运动，只要椭圆形的长半轴与圆形的半径相等，它们的轨道能级就完全一致。因此，能级一定的电子绕核运动时，它可以选择做圆形运动或椭圆形运动。

**参考文献**

[1]Bohr N. On the Constitution of Atoms and Molecules. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1913,26:1-25.
[2]Sommerfeld A. Zur quantentheorie der spektrallinien. Annalen Der Physik，1916，5( 18) : 5-9
[3]Zeng JQ. Classical physical mechanism of quantum production and its explanation for hydrogen atom structure and photoelectric effect. Physics Essays, 2021, 34(4):529-537