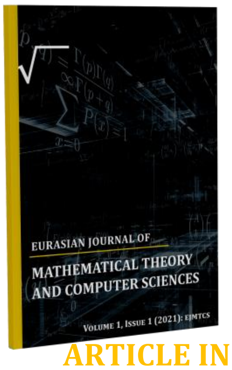
EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz



ОБ ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Тожиев Илхом Ибраимович
кандидат физико-математических наук, НГГТУ,
email: adamjon-2015@umail.uz
Жумакулова Зилола Шухрат кизи
магистрант, НГГИ
https://www.doi.org/10.5281/zenodo.7800298

ARTICLE INFO

Received: 26th March 2023
Accepted: 03rd April 2023
Online: 04th April 2023

KEY WORDS

Вероятностная мера, идемпотентная вероятностная мера, полуполе, диадический компакт, верхняя оценка веса.

ABSTRACT

В этом работе даётся верхняя оценка веса компакта X, *когда пространство* $I(X)$ *идемпотентных вероятностных мер диадично.*

Пусть S – множество, снабженное двумя алгебраическими операциями: сложением $\oplus$ и умножением e. Множество S называется полукольцом, если выполнены следующие условия:

(i) сложение $\oplus$ и умножение ассоциативны;

(ii) сложение $\oplus$ коммутативно;

(iii) умножение дистрибутивно относительно сложения $\oplus$.

Полукольцо S называется коммутативным, если умножение e коммутативно. Единица полукольца S – это элемент $\mathbf{1} \in S$, такой, что $\mathbf{1}$ e $x = x$ e $\mathbf{1} = x$ для всех $x \in S$. Нулем полукольца S называется элемент $\mathbf{0} \in S$, такой, что $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ и $\mathbf{0} \oplus x = x$, $\mathbf{0}$ e $x = x$ e $\mathbf{0} = \mathbf{0}$ для всех $x \in S$. Полукольцо S называется идемпотентным, если $x \oplus x = x$ всех $x \in S$. Полукольцо S с нулем $\mathbf{0}$ и единицей $\mathbf{1}$ называется полуполем, если всякий ненулевой элемент $x \in S$ обратим.

Пусть $(S, \mathrm{E}, \mathrm{e}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ – идемпотентное полукольцо. На S естественным образом возникает частичный порядок $\prec$: для элементов $a, b \in S$ по определению $a \prec b$ тогда и только тогда, когда $a \oplus b = b$. Таким образом, все элементы полукольца S неотрицательны: $\mathbf{0} \prec x$ для всех $x \in S$.

Идемпотентным аналогом числовых функций являются отображения $X \to S$, где X – произвольное множество, S – идемпотентное полукольцо. S-значные функции можно складывать, перемножать, и умножать на элементы S.

Идемпотентным аналогом линейного пространства функций является множество S^X S-значных функций, замкнутое относительно сложения функций и умножения функций на элементы S (которое является S-полумодулем). По определению функционал $f : S^X \to S$ называется идемпотентным линейным функционалом, если

$$f\left(l_1 \mathrm{e}\, j_1 \mathrm{E}\, l_2 \mathrm{e}\, j_2\right) = l_1 \mathrm{e}\ f\left(j_1\right) \mathrm{E}\, l_2 \mathrm{e}\ f\left(j_2\right)$$

для всех $l_1, l_2 \in S$ и $j_1, j_2 \in S^X$. Множество всех идемпотентных линейных функционалов $f : S^X \to S$ обозначают через $B(X, S)$; это множество замкнуто относительно сложения функционалов и умножения функционалов на элементы S.

Пусть $\mathbf{R}$ – поле вещественных чисел и $\mathbf{R}_+$ – полуполе неотрицательных вещественных чисел (относительно обычных операций). Замена переменных $x \mapsto u = h \ln x$, $h > 0$, определяет отображение $\Phi_h : \mathbf{R}_+ \to S = \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Пусть операции сложения и умножения на S являются образами обычных операций на $\mathbf{R}$ при отображении Φ_h, т. е. $u \oplus_h v = h \ln\left(\exp(u/h) + \exp(v/h)\right)$, $u \mathrm{e}\ v = u + v$, $\mathbf{0} = -\infty = \Phi_h(0)$, $\mathbf{1} = 0 = \Phi_h(1)$. Легко видеть, что при $h \to 0$ имеем $u \oplus_h v \to \max\{u, v\}$. Следовательно, множество S образует полуполе относительно операций $u \oplus v = \max\{u, v\}$ и $u \mathrm{e}\ v = u + v$, нуля $\mathbf{0} = -\infty$ и единицы $\mathbf{1} = 0$. Полученное коммутативное полуполе принято обозначать через $\mathbf{R}_{\max}$. Оно идемпотентно. Изложенная конструкция восходит к работе [1] В. П. Маслова. Она называется деквантизацией Маслова.

Пусть X – компакт, $C(X)$ – алгебра непрерывных функций на X. На $C(X)$ можно определить операции $\oplus$ и e следующим образом: $j\ \mathrm{E}\, y = \max\{j, y\}$ и $j\ \mathrm{e}\ y = j + y$, $j, y\ \mathrm{O} C(X)$. Для $l \in \mathbf{R}$ через l_X обозначим постоянную функцию, везде на X принимающую значение l.

Определение 1 [2;3]. Функционал $m : C(X) ® \ \mathbf{R} \left(\subset \mathbf{R}_{\max}\right)$ называется идемпотентной вероятностной мерой, если он обладает следующими свойствами:

(a) $m\left(l_X\right) = l$ для всех $l\ \mathrm{O}\mathbf{R}$ (нормированность функционала m);

(b) $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ для всех $\lambda \in \mathbf{R}$ и $\varphi \in C(X)$ (однородность функционала μ относительно $\odot$);

(c) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$ (аддитивность функционала μ относительно $\oplus$).

Для компакта X множество всех идемпотентных вероятностных мер $\mu: C(X) \to \mathbf{R}$ обозначается через $I(X)$. Ясно, что $I(X) \subset \mathbf{R}^{C(X)}$. Множество $I(X)$ снабжается топологией, индуцированной топологией тихоновского произведения $\mathbf{R}^{C(X)}$. Предбазу окрестностей идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ образуют множества вида

$$\langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon \rangle = \left\{ \nu \in I(X): \left| \nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i) \right| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, n \right\},$$

где $\mu \in I(X)$, $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, \dots, n$ и $\varepsilon > 0$.

Здесь уместно привести пример идемпотентной меры. Пусть $x_1, \dots, x_1 \in X$ и числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}_{\max}$ удовлетворяют условию $\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = 0$. Определим $\mu: C(X) \to \mathbf{R}$ следующим образом: $\mu(\varphi) = \max\{\varphi(x_i) + \lambda_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Как обычно, для каждого $x \in X$ через δ_x (или $\delta(x)$) обозначаем функционал на $C(X)$, определенный формулой $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(X)$ (вероятностная мера Дирака, сосредоточенная в точке x). Тогда можно записать $\mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}$.

На множестве $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ определим метрику ρ по формуле

$$\rho(x, y) = \left| e^x - e^y \right|, \quad x, y \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}.$$

Метрическое пространство $(\mathbf{R} \cup \{-\infty\}, \rho)$ обозначим через $\mathbf{R}_{\max}$.

Предложение 1 [2;3]. Множество $I_\omega(X)$ (т.е. множество идемпотентных мер с конечными носителями) всюду плотно в пространстве $I(X)$.

Пусть $\varphi \leq \psi$ для пары $\varphi, \psi \in C(X)$. Тогда, если μ – идемпотентная вероятностная мера, то $\mu(\varphi) \leq \max\{\mu(\varphi), \mu(\psi)\} = \mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\psi)$, т.е. всякая идемпотентная вероятностная мера сохраняет порядок. Следовательно, всякая идемпотентная мера неотрицательна, т.е. $m(j)$i 0 для всякой $j \in C(X)$, $j \geq 0$.

Из предложение 1 вытекает, что если X состоит из n точек, то пространство $I(X)$ гомеоморфно $(n-1)$-мерному симплексу в $\mathbf{R}^n_{\max}$. С другой стороны, известно [4], что пространство $P(X)$ всех вероятностных мер на X гомеоморфно $(n-1)$-мерному симплексу в $\mathbf{R}^n$, когда X состоит из n точек. Но, тем не менее, имеет место следующее

Предложение 2. Пространство $P(X)$ всех вероятностных мер на X и $I(X)$ всех идемпотентных вероятностных мер на X не совпадают для любого компакта X, содержащего более двух точек.

Доказательство этого утверждения заключается в следующем примере.

Пример 1. Пусть X – произвольный компакт, содержащий более двух точек. Фиксируем различные точки x, $y \in X$. Возьмем функции j, $y \in C(X)$, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$j(x)=0, \qquad j(y)=1,$$

$$y(x)=1, \qquad y(y)=0.$$

Рассмотрим вероятностную меру $\mu = \frac{1}{2}d_x + \frac{1}{2}d_y$, где d_x, d_y – меры Дирака. Тогда $m(j) = m(y) = \frac{1}{2}$. Следовательно, $m(j) \oplus m(y) = \frac{1}{2}$. С другой стороны, имеем $(j \oplus y)(x) = (j \oplus y)(y) = 1$, и поэтому $m(j \oplus y) = 1$. Значит, $1 = m(j \oplus y) \neq m(j) \oplus m(y) = \frac{1}{2}$, т.е. μ не является идемпотентной вероятностной мерой.

Теперь возьмем идемпотентную вероятностную меру

$$n = 0 \odot d_x \oplus 0 \odot d_y, \qquad (1)$$

которая очевидно не является линейной, т.е. n не является вероятностной мерой. Таким образом, $P(X) \neq I(X)$. Предложение 2 доказано.

Легко видеть, что если X состоит из одной точки x, то $I(X) = P(X) = \{d_x\}$, т.е. предложение 2 не верно для одноточечного пространства X.

EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz

Отметим, что всякая вероятностная мера удовлетворяет условиям нормированности и однородности в определении 1. Что касается третьего условия, то для всякой вероятностной меры $\mu \in P(X)$ верно неравенство

$$m(j \oplus y) \geq m(j) \oplus m(y) \text{ для всех } j, y \in C(X).$$

Пример 1 показывает, что обратное неравенство не всегда верно. Из построения функционала n по правилу (1) вытекает, что идемпотентная вероятностная мера не обязана быть линейной.

В работе [5] установлено, что если $P(X)$ – диадический компакт, то $w(X) \leq \omega_1$, где ω_1 – первый несчетный ординал. Напомним, что диадический компакт – это компакт, являющийся непрерывным образом канторова куба D^{τ} веса τ, где $D = \{0,1\}$ –двухточечное пространство с дискретной топологией, τ – бесконечный кардинал; здесь для пространства X через wX обозначен вес пространства X, т.е. наименьшее из кардинальных чисел, являющихся мощностями каких-либо баз пространство X. Идемпотентный вариант этого результата выражается как следующая

Теорема 1. Если $I(X)$ – диадический компакт, то $wX \leq \omega_1$.

Приведем понятия и факты, необходимые для доказательства этой теоремы.

Пусть $m \in I(X)$. Для замкнутого подмножества F компакта X и произвольной $j \in C(X)$ положим

$$m(j \mid F) = \inf\{m(y) : y \in C(X), y \geq j\,\chi_F\},$$

где χ_F – характеристическая функция множества F.

Аналогично работе [5] введем следующее понятие.

Определение 2. Идемпотентную вероятностную меру m на компакте X назовем недиадической, если существует единственная точка $x_0 \in \operatorname{supp} m$, такая, что для каждой окрестности Ux_0 в X можно выбрать семейство пар замкнутых множеств $\{(F_\alpha^0; F_\alpha^1) : \alpha < \omega_1\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $|\operatorname{supp} m| \geq c$;
2. $F_\alpha^0 \cap F_\alpha^1 = \varnothing$, $F_\alpha^0 \cap Ux_0 = \varnothing$, $F_\alpha^1 \cap Ux_0 = \varnothing$;
3. $F_\alpha^0 \cup F_\alpha^1 \cup [Ux_0] = \operatorname{supp} m$;
4. $m(\chi_{F_\alpha^0}) < 1$, $m(\chi_{F_\alpha^1}) < 1$;

5. $F_\alpha^i \bigcap F_\beta^j \neq \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$, и i, $j \in \{0,1\}$, $i \neq j$.

Ясно, что мера $m = \bigoplus_{x\in F} 0 \odot d_x$, где F – замкнутое в некотором компакте X подмножество, содержащее не менее двух точек, не является недиадической идемпотентной вероятностной мерой. Примером недиадической идемпотентной вероятностной меры является $m = \bigoplus_{x\in X} l_x \odot d_x$ на несчетном компакте X, где $l_{x_0} = 0$ для некоторой фиксированной точки $x_0 \in X$, и $l_x = -1$ при $x \in X \setminus \{x_0\}$.

Если $f : X \to Y$ – непрерывное отображение, m – недиадическая идемпотентная мера на Y и $I(f)(n) = m$, то n – недиадическая мера на X.

Лемма 1. Пусть X – компакт, $\pi : D \times X \to X$ – проектирование параллельно двоеточию и $m \in I(X)$ – недиадическая идемпотентная мера. Тогда $(I(\pi)^{-1}(m))$ – недиадический компакт.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{supp} m = X$. Для любого $\alpha < \omega_1$ рассмотрим $\nu_\alpha \in I(D \times X)$, где $\operatorname{supp} n_\alpha = (\{0\} \times \operatorname{supp} j_\alpha^0) \cup (\{1\} \times \operatorname{supp} j_\alpha^1)$ и $I(\pi)(n_\alpha) = m$. Этими условиями n_α определяется однозначно. Кроме того, $\chi(\nu_\alpha, I(\pi)^{-1}(m)) \leq \omega_0$, где ω_0 – ординал, соответствующий счетному кардиналу. Покажем, что подпространство $M = \{n_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset (I(\pi)^{-1}(m))$ несепарабельно. Действительно, пусть $S = \{\nu_{\alpha i} : i < \omega_0\}$ – счетное всюду плотное в M подмножество. Возьмем точку $\nu_\beta \in M$ такую, что $\beta \neq \alpha_i$ при $i < \omega_0$, и открытое в $I(D \times X)$ множество $V = \{n \in I(D \times X) : n(y) > 1/4$, где $\operatorname{supp} y = \{0\} \times \operatorname{supp} j_\alpha^0$ и $y(0,x) = j_\alpha^0(x)$ для всех $(0,x) \in \operatorname{supp} y\}$. Имеем $n_b \in V$, поскольку $n_\beta(y) = n_\beta(j_\beta^0 \circ \pi) = I(\pi)(n_\beta)(j_\beta^0) = \mu(j_\beta^0) \geq 1/2 > 1/4$. С другой стороны,

$$n_{ai}(y) = n_{ai}(y \mid \operatorname{supp} n_{ai}) = n_{ai}\left(y \mid \left(\left(\{0\} \times \operatorname{supp} n_{ai}^0\right) \cup \left(\{1\} \times \operatorname{supp} n_{ai}^1\right)\right)\right) =$$

$$= n_{ai}\left(y \mid \left(\{0\} \times \operatorname{supp} n_{ai}^0\right)\right) = n_{ai}\left(\left(j_\beta^0 \circ \pi\right) \mid \left(\{0\} \times \operatorname{supp} n_{ai}^0\right)\right) =$$

$$= I(\pi)(n_\beta)\left(j_\beta^0 \mid \operatorname{supp} j_{\alpha i}^0\right) = \mu\left(j_\beta^0 \mid \operatorname{supp} j_{\alpha i}^0\right) \leq 1/4,$$

т.е. $n_{ai} \in V$. Откуда M несепаребельно. Тогда M, и, следовательно $\left(I(\pi)^{-1}(m)\right)$ не удовлетворяет второй аксиоме счетности. Но в диадическом компакте множество точек с первой аксиомой счетности имеет счетнқй вес. Таким образом, $\left(I(\pi)^{-1}(m)\right)$ – недиадический компакт. Лемма 1 доказана.

Нам требуется следующие два утверждения

Предложение 3 [2;3]. Если $S=\left\{X_\alpha;\ p_{\beta,\alpha}\right\}$ – обратный спектр из компактов с проекциями «на», то $I(\lim S)=\lim I(S)$.

Лемма 2 [5]. Пусть τ – несчетный регулярный кардинал; X и Y – компакты веса τ, являющиеся пределами непрерывных спектров $S_1=\left\{X_\alpha;\ p_{\beta,\alpha}:\alpha<\beta<\omega(\tau)\right\}$ и $S_2=\left\{X_\alpha;\ \pi_{\beta,\alpha}:\alpha<\beta<\omega(\tau)\right\}$ из компактов веса меньшего чем τ; $f:X\to Y$ – непрерывное отображение «на». Тогда для любой точки $y_\alpha\in Y$ существуют ординал $\beta>\alpha$ и точки $y_\beta\in Y_\beta$, $x_\beta\in X_\beta$ такие, что $\pi_{\beta,\alpha}(y_\beta)=y_\alpha$ и $f\left(p_\beta^{-1}(x_\beta)\right)=\pi_\beta^{-1}(y_\beta)$.

Теперь мы можем доказать, что $I\left(D^{\omega^2}\right)$ не является диадическим компактом. Предположим обратное. Тогда существует непрерывное «на» отображение $f:D^{\omega^2}\to I\left(D^{\omega^2}\right)$. Представим D^{ω^2} как предел естественного обратного спектра $S=\left\{D^\alpha;\ \pi_{\beta,\alpha}:\alpha\le\beta<\omega_2\right\}$. Тогда $I\left(D^{\omega^2}\right)=\lim I(S)$. Пусть $m\in I\left(D^{\omega^2}\right)$ – недиадическая идемпотентная мера. Тогда в силу леммы 2 существует ординал $\beta>\omega_1$ и точки $x\in D^\beta$, $n\in I\left(D^\beta\right)$ такие, что $I\left(\pi_{\beta,\omega_1}\right)(n)=m$ и

$$f\left(\pi_\beta^{-1}(x)\right)=I\left(\pi_\beta\right)^{-1}(n).$$

Так как $I\left(\pi_{\beta,\omega_1}\right)(n)=m$, то ν – недиадическая мера. В силу леммы 1 $I\left(\pi_\beta\right)^{-1}(n)$ – недиадический компакт, но $f\left(\pi_\beta^{-1}(x)\right)$ диадический компакт. Это противоречие показывает, что $I\left(D^{\omega^2}\right)$ не является диадическом компактом.

Так как $I\left(D^{\omega^2}\right)$ – ретракт $I\left([0;1]^{\omega^2}\right)$, то $I\left([0;1]^{\omega^2}\right)$ также недиадический компакт.

Напомним следующее утверждение из [5]: если в компакте X существует замкнутое подмножество F такое, что $\pi\chi(x;F)\geq\tau$ для любой $x\in F$, то X отображается на I^{τ}.

Пусть $I(X)$ – диадический компакт. Если $wX\leq\omega_2$, то $X\neq\left[\left\{x\in X:\pi\chi(x;X)\leq\omega_1\right\}\right]$ [5]. Следовательно, X отображается на $[0;1]^{\omega^2}$, и значит, $I(X)$ отображается на $I\left([0;1]^{\omega^2}\right)$, которое невозможно.

Таким образом, если $I(X)$ – диадический компакт, то $wX\leq\omega_1$. Теорема 1 доказана.

References:

1. Маслов В.П. Методы операторов. – М.: «Мир». 1987.
2. Заричный М.М. Пространства и отображения идемпотентных мер.// Изв. РАН. Серия математическая. Т. 74. № 3. 2010. С. 45-64.
3. Zarichniy M. Idempotent probability measures, I// arXiv:math.GN/0608754. V. 1. 30 Aug. 2006.
4. Litvinov G.L. “The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: a very brief introduction”// Idempotent mathematics and mathematical physics (Vienna, 2003), Contemp. Math., 377, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 1-17; arXiv: abs/math/0501038.
5. Шапиро Л.Б. О пространствах вероятностных мер.// УМН. Т. 34, вып. 2 (206). 1979. С. 219-220.