MATEMÁTICA BÁSICA

Frida Esmeralda Fuentes Bernedo
Ana María Bernedo Fuentes

Eidec
EDITORIAL

ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

MATEMÁTICA BÁSICA

COLECCIÓN RESULTADO DE INVESTIGACIÓN

Primera Edición 2022 Vol. 1

Editorial EIDEC
Sello Editorial EIDEC (978-958-53018)
NIT 900583173-1

Autores
Frida Esmeralda Fuentes Bernedo
Ana María Bernedo Fuentes

ISBN: 978-958-53965-7-9
Formato: Digital PDF (Portable Document Format)
DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k
Publicación: Colombia
Fecha Publicación: 24/10/2022

Coordinación Editorial
Escuela Internacional de Negocios y Desarrollo Empresarial de Colombia – EIDEC
Centro de Investigación Científica, Empresarial y Tecnológica de Colombia – CEINCET
Red de Investigación en Educación, Empresa y Sociedad – REDIEES

Revisión y pares evaluadores
Centro de Investigación Científica, Empresarial y Tecnológica de Colombia – CEINCET
Red de Investigación en Educación, Empresa y Sociedad – REDIEES

Coordinadores editoriales

Roxana Pinilla Duarte
Editorial EIDEC

Dr. Cesar Augusto Silva Giraldo
Centro de Investigación Científica, Empresarial y Tecnológica de Colombia – CEINCET – Colombia.

Dr. David Andrés Suarez Suarez
Red de Investigación en Educación, Empresa y Sociedad – REDIEES – Colombia.

NOTA EDITORIAL: Las opiniones y los contenidos publicados en el libro **MATEMÁTICA BÁSICA** son de responsabilidad exclusiva de los autores; así mismo, éstos se responsabilizarán de obtener el permiso correspondiente para incluir material publicado por parte de la **Editorial EIDEC.**

ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

DEDICATORIA

A la memoria de mi querida madrecita, Flora Bernedo Paricahua,

que con su ejemplo me enseñó qué es la resiliencia.

A mis hijos Ana y Anthony, a mi nieta Gia; que son el motor de mi vida.

ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

MATEMÁTICA BÁSICA
BASIC MATHEMATICS

AUTORES

Frida Esmeralda Fuentes Bernedo[1]

Ana María Bernedo Fuentes[2]

Pares evaluadores: Red de Investigación en Educación, Empresa y Sociedad – REDIEES.[3]

[1] Universidad Nacional José María Arguedas-Andahuaylas
[2] Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa
[3] Red de Investigación en Educación, Empresa y Sociedad – REDIEES. www.rediees.org

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Contenido

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

MATEMÁTICA BÁSICA

BASIC MATHEMATICS

RESUMEN

Este texto universitario, Matemática Básica, está dirigido para estudiantes del primer ciclo de Ingeniería, curso que llevan los estudiantes ingresantes en la Universidad Nacional José María Arguedas - Andahuaylas. Donde centra su propósito en brindar al estudiante conocimientos matemáticos que consoliden sus habilidades y destrezas que le permitan de manera efectiva su formación profesional; Por lo que se está planteando este texto con una metodología de resolución de problemas matemáticos, el Método heurístico de Polya, planteado por el matemático y educador George Pólya (1887-1985), que propone en su libro "Como plantear y resolver problemas", una metodología en cuatro etapas para resolver problemas matemáticos: Comprensión del problema, Concepción de un plan, Ejecución del plan, Examinar el resultado.

Esta metodología coadyuvará al estudiante en su capacidad de enfrentarse y resolver un problema matemático, e incluso plantear modelos matemáticos con la recta, secciones cónicas, funciones en R. Como parte de la metodología de Polya en la primera etapa de la comprensión del problema, es trazar un esquema que ilustre el enunciado, si es posible, recomendamos para ello hacer uso del GeoGebra, sobre todo para el tema de Geometría Analítica y funciones en R.

PALABRAS CLAVE: Resolución de problemas, Método heurístico de Polya, Secciones Cónicas, Funciones en R.

ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

ABSTRACT

This university text, Basic Mathematics, is aimed at students in the first cycle of Engineering, a course taken by incoming students at the José María Arguedas University in Andahuaylas. Its purpose is to provide to students with mathematical knowledge and consolidate their abilities and skills allowing their professional training. Therefore, this text is considered a methodology for solving mathematical problems, the Polya heuristic method, proposed by the mathematician and educator George Pólya (1887-1985), who proposed in his book "How to Solve It?", a four-stage methodology for solving mathematical problems: Understanding the Problem, Conceiving a Plan, Executing the Plan, Examining the Result.

This methodology will help the student in his or her ability to face and solve a mathematical problem, and even propose mathematical models with the straight line, conic sections, functions in R. As part of the Polya methodology in the first stage of understanding the problem, it is to draw a scheme that illustrates the statement, if it is posible, We recommend using GeoGebra, especially for the topic of Analytical Geometry and functions in R.

KEYWORDS: Problem solving, Polya's heuristic method, Conic Sections, Functions in R.

INTRODUCCIÓN

El presente Texto Universitario, en su primera versión, pretende contribuir a la consolidación de las habilidades y destrezas que permitan desenvolverse de manera efectiva en su formación académica de los estudiantes universitarios del primer ciclo. Por lo que se plantea una estructura por capítulos con conceptos, definiciones, ejemplos, problemas y aplicaciones desarrollados, ejercicios y/o problemas planteados para los estudiantes. Además, para las gráficas se realizó con la ayuda de GeoGebra.

El presente trabajo cuenta con tres capítulos, los cuales se dividen de acuerdo a la siguiente estructura:

- Números Reales
- Geometría Analítica
- Funciones

En el primer capítulo se trata de los axiomas, teoremas y propiedades del sistema de números reales, ejemplos y problemas desarrollados, además ejercicio y problemas para los estudiantes. También, se presenta aplicaciones de ecuaciones lineales y cuadráticas que tiene que ver con la oferta y demanda, utilidad, costo, ingreso.

En el segundo capítulo se trata de la recta, la importancia del uso de la pendiente de una recta y secciones cónicas con ejemplos y problemas desarrollados, además ejercicios y problemas para los estudiantes.

En el tercer capítulo trata de funciones en R, funciones especiales, funciones trascendentes, funciones trigonométricas e hiperbólicas con ejemplos y problemas desarrollados, además ejercicios y problemas para los estudiantes.

Quedamos a disposición de los lectores para cualquier sugerencia que nos hagan llegar y mejorar este texto universitario.

- Los Autores

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

CAPÍTULO I: NÚMEROS REALES

Introducción a la Teoría de Números reales

En la teoría de los números se agrupa distintos conjuntos como los naturales, enteros, racionales, irracionales, reales. Los números son entes abstractos desarrollados por el hombre como modelo que permite contar y medir.

1.1 Clasificación de los Conjuntos Numéricos:

Números Naturales N

El conjunto de los números naturales es el conjunto de números que usamos para contar: Que se denota por N = {1, 2, 3, 4, 5, · · ·}

En sentido estricto, este conjunto no contiene al cero; si se quiere incluir este elemento en el conjunto, se denota por N* = {0, 1, 2, 3, 4...} (Llamados también enteros no negativos)

En este conjunto se puede definirse operaciones de suma, resta, multiplicación y división, así como relaciones de orden (mayor que, menor que).

Números Enteros Z

El conjunto de los números enteros se define como los números naturales, el cero, y los naturales dotados del signo negativo: Que se denota por

Z = {· · ·, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, · · ·}

El conjunto Z incluye como subconjunto al de los números naturales; es decir:

N ⊂ Z.

Los Números Racionales Q

Es el conjunto de todos los números que se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, donde el denominador es distinto de cero. Que se denota por $Q = \{x/x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\}$

Por ejemplo, tenemos $\frac{1}{5} = 0,2$

$$\frac{11}{3} = 3\frac{2}{3} = 3,66666666 \ldots = 3,\hat{6}$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Todos los números naturales y todos los números enteros también son números racionales. N ⊂ Z⊂ Q

Números Irracionales I (Q^c)

Es el conjunto de todos los números que no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, donde el denominador es distinto de cero. Que se denota por $I = Q^c = \{x/x \neq \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\}$

Ningún número racional es irracional y ningún número irracional es racional.

La expresión decimal de los números irracionales es infinita no periódica y por lo tanto, los números decimales infinitos no periódicos no pueden expresarse en forma de fracción y por tanto son irracionales.

Hay muchos números irracionales, como: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$;...; π= 3,14159⋯,

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2{,}71828\ldots$$

Números Reales R

La unión de los números racionales y los irracionales conforma un conjunto denominado de los números reales. Así, este conjunto engloba como subconjuntos a los de los números racionales e irracionales.

$$R = Q \cup Q^C$$

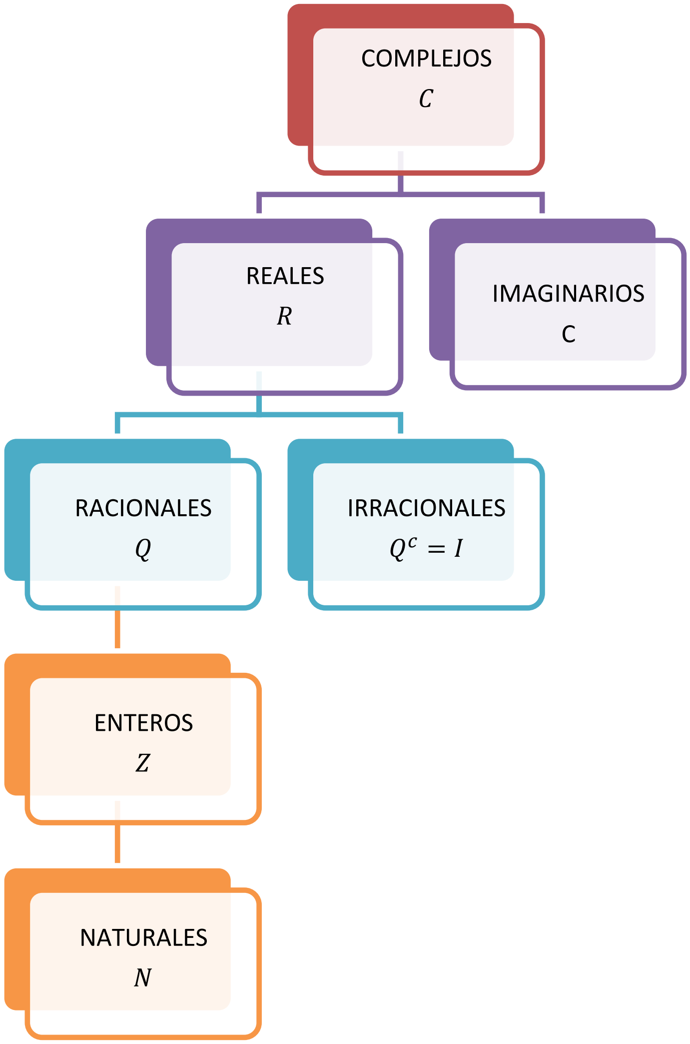
Números Complejos C

Son números que tienen una parte real y una parte imaginaria, que se denota como: $z = a + ib$, donde $i = \sqrt{-1}$, "a" es la parte real y "b" su parte imaginaria.

Por ejemplo, si $z = 2 - 3i$, 2 es la parte real de z y −3 su parte imaginaria.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Conjuntos Numéricos



1.2 Sistema de Números Reales

Es el conjunto de los números reales R, provisto de dos operaciones adición y multiplicación, denotada por:

$$(+): RxR \to R \qquad (a,b) \to a+b$$

$$(.): RxR \to R \qquad (a,b) \to a.b$$

la relación de igualdad "=" y de una relación de orden menor "<" o mayor ">", que satisface los axiomas siguientes:

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Axiomas de Adición y Multiplicación

Si $a, b, c \in R$ entonces:

Axioma	Adición	Multiplicación	Qué dice	Ejemplo
Cerradura	$a + b \in R$	$a.b \in R$	La suma o el producto de dos números reales es una operación cerrada.	$2 + 7 = 9 \in R$ $(-5)(-6) = 30 \in R$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a.b = b.a$	El orden al sumar o multiplicar reales no afecta el resultado.	$\frac{1}{2} + 7 = 7 + \frac{1}{2}$ $(-3)(6) = (6)(-3)$
Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a(b.c) = (a.b)c$	Se puede hacer diferentes asociaciones al sumar o multiplicar reales y no afecta el resultado.	$\sqrt{2} + (2/3 + 5) = (\sqrt{2} + 2/3) + 5$ $7(3.5) = (7.3)5$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a.1 = a$	Todo real sumado 0 se queda igual. Todo real multiplicado por 1 se queda igual.	$\pi + 0 = \pi$ $\sqrt{3}.1 = \sqrt{3}$
Inverso	$a + (-a) = 0$	$a.\frac{1}{a} = 1;\ a \neq 0$	La suma de opuestos es cero. El producto de recíprocos es 1.	$3 + (-3) = 0$ $5.\frac{1}{5} = 1$
Distributiva	$a(b + c) = a.b + a.c$		El factor se distribuye a cada sumando.	$7(\sqrt{2} + 8) = 7\sqrt{2} + 7.8$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Axiomas de igualdad

Si $a, b, c \in R$ entonces:

Axioma	Igualdad	Qué dice	Ejemplo
Dicotomía	$a = b$ o $a \neq b$	Si se tiene dos números, estos son iguales o son diferentes.	*3=3* *3≠5*
Reflexividad	$a = a$	Un número es igual al mismo número.	$\sqrt{6} = \sqrt{6}$
Simetría	$Si\ a = b \ \rightarrow \ b = a$		$a = 7 \ \rightarrow \ 7 = a$
Transitividad	Si $a = b \ \wedge \ b = c$ $\rightarrow a = c$		$a = b \ \wedge \ b = 7 \rightarrow a = 7$
Unicidad de la adición	$Si \quad a = b \rightarrow a + c = b + c$	Si se tiene una igualdad, esta se mantiene si se suma a ambos miembros un mismo número.	$a = 6 \rightarrow a + 3 = 6 + 3$
Unicidad de la multiplicación	$Si \quad a = b \ \rightarrow a.c = b.c$	Si se tiene una igualdad, esta se mantiene si se multiplica a ambos miembros un mismo número.	$a = 5 \rightarrow a.4 = 5.4$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Axiomas de Orden

Si $a, b, c \ \in R$ entonces:

Axioma	Orden	ejemplo
Tricotomía	Uno y solo uno de los siguientes enunciados es verdadero $a < b$ $a = b$ $a > b$	$\sqrt{3} < 2$
Transitiva	Si $a < b \ \wedge \ b < c$ $\rightarrow a < c$	$a < 5 \ \wedge 5 < 7 \rightarrow a < 7$
Monotonía	Consistencia aditiva $Si \ a < b \rightarrow \forall c \in R, a + c < b + c$	$7 < 8 \rightarrow \forall c \in R,$ $7 + c < 8 + c$
	Consistencia multiplicativa $Si \ a < b \ , \ c > 0 \rightarrow ac < bc$ $Si \ a < b, \ c < 0 \rightarrow ac > bc$	$3 < 5, c = 4 \rightarrow 3.4 < 5.4$ $12 < 20$
		$3 < 5, c = -4$ $\rightarrow 3(-4) > 5(-4)$ $-12 > -20$

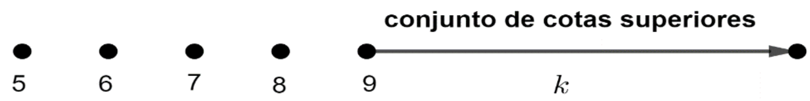
Axioma del Supremo

Si M es un conjunto no vacio de elementos de R superiormente acotado, entonces M tiene un supremo en R.

Ejemplo: El conjunto $A = \{x \in N \ / \ 4 < x < 10\}$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ es un sub conjunto de números reales.



Podemos observar que todos los elementos de A son menores o iguales a los números reales: $9{,}10{,}11{,}12, \ldots$.

Es decir, existen números reales k, tales que, todos los elementos de A son menores o iguales que k. Que se denota de esta manera $\exists k \in R: x \leq k, \forall x \in A$

$$\exists\ k = 9, x \leq 9, \forall x \in A$$

$$\exists\ k = 9.2, x \leq 9.2, \forall x \in A$$

$$\exists\ k = 9.3, x \leq 9.3, \forall x \in A$$

$$\exists\ k = 9.9, x \leq 9.9, \forall x \in A$$

$$\exists\ k = 10, x \leq 10, \forall x \in A$$

$$\exists\ k = 11, x \leq 11, \forall x \in A$$

.

.

.

Los números reales $k \geq 9$, se llaman COTAS superiores del conjunto A.

Como Podemos observar que el conjunto A es acotado superiormente entonces A tiene un supremo en R; 9 es el supremo del conjunto A, que se denota $SupA = 9$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Diferencia y división de dos números reales

Si $a, b \in R$ entonces*:*

Operación	Definición	Qué dice	Ejemplo
Diferencia	$a - b = a + (-b)$	La diferencia es la suma del opuesto del sustraendo.	$15 - 12 = 15 + (-12)$
División	$a \div b = \frac{a}{b} = a * \frac{1}{b}, b \neq 0$	La división es la multiplicación por el recíproco del divisor.	$80 \div 12 = 80 * \frac{1}{12}$

Algunas propiedades de los números reales

Si $a, b, c, d \in R$ entonces*:*

1) $-(-a) = a$
2) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$
3) $(-a)(-b) = ab$
4) $Si\ ab = ac \Longrightarrow b = c,\ a \neq 0$
5) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc;\ \ b \neq 0, d \neq 0$
6) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd};\ \ b \neq 0, d \neq 0$
7) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-1} = \frac{a}{b}; a \neq 0, b \neq 0$
8) $\forall a \in R, a \neq 0\ se\ cumple\ a^{-1} = \frac{1}{a} \neq 0$
9) $ab = 0\ si\ y\ solo\ si\ \ a = 0\ \vee\ b = 0$
10) $\frac{a}{b} = 0\ \ si\ y\ solo\ si\ a = 0, b \neq 0$
11) $a < b\ \Longrightarrow\ -a > -b$
12) $a < b\ \Leftrightarrow a - b < 0$
13) Si $a > 0\ \ y\ \ b > 0\ \Longrightarrow a + b > 0$
14) Si $a > 0\ y\ b > 0\ \Longrightarrow ab > 0$
15) Si $a > 0\ \Longrightarrow\ a^{-1} = \frac{1}{a} > 0$

ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

16) Si $a < 0 \implies a^{-1} = \frac{1}{a} < 0$

17) Si $a \neq 0 \implies a^2 > 0$

18) $\forall a \in R \Rightarrow a^2 \geq 0$

19) $a^2 = 0 \iff a = 0$

20) Si $(a < b) \wedge (c < d) \Rightarrow a + c < b + d$

21) $0 \leq a < b \wedge 0 \leq c < d \Rightarrow ac < bd$

22) Si $a > 0, b > 0; a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

23) $ab > 0 \Leftrightarrow [a > 0 \wedge b > 0] \vee [a < 0 \wedge b < 0]$

24) $ab < 0 \Leftrightarrow [a > 0 \wedge b < 0] \vee [a < 0 \wedge b > 0]$

25) $\frac{a}{b} > 0, b \neq 0 \Leftrightarrow [a > 0 \wedge b > 0] \vee [a < 0 \wedge b < 0]$

26) $\frac{a}{b} < 0, b \neq 0 \Leftrightarrow [a > 0 \wedge b < 0] \vee [a < 0 \wedge b > 0]$

27) $a^2 = b \Leftrightarrow a = \sqrt{b} \vee a = -\sqrt{b}$ donde $b \geq 0$

28) $a^2 > b \Leftrightarrow (b \geq 0) \wedge \left(a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b}\right)$

29) $a^2 < b \Leftrightarrow (b \geq 0) \wedge \left(-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}\right)$

30) $a^2 \leq b^2 \iff a \leq b, si\ a \geq 0 \wedge b > 0$

31) $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \iff a \leq b, si\ a \geq 0 \wedge b \geq 0$

Ejercicios Desarrollados

1. Demostrar: $a + b < \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}, \forall a, b \in R^+; a \neq b$

Demostración

Para mayor facilidad y tener una idea clara de dónde empezar a demostrar, se puede ensayar, en borrador, con la desigualdad dada.

$$a + b < \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \implies a + b < \frac{a^3 + b^3}{ab}$$

$$a + b < \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{ab}$$

$$(a + b)ab < (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$ab < a^2 - ab + b^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

$$(a-b)^2 > 0$$

Como se puede ver ya tenemos una idea de dónde empezar a demostrar.

Veamos

$(a-b)^{\mathbf{2}} > 0$ por propiedad 17

$a^2 - 2ab + b^2 > 0$ Binomio al cuadrado

$a^2 - 2ab + ab + b^2 > 0 + ab$ por el axioma de monotonía para la adición

$a^2 - ab + b^2 > ab$

$(a+b)ab < (a+b)(a^2 - ab + b^2),\ a+b > 0$ por axioma de monotonía para la multiplicación

$\frac{(a+b)ab}{ab} < \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{ab}, ab > 0$ por axioma de monotonía para la multiplicación

$a + b < \frac{a^3+b^3}{ab}$ por suma de cubos

$a + b < \frac{a^3}{ab} + \frac{b^3}{ab}$ por el axioma de distributiva

$a + b < \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ lo que queda demostrado

2. Si $a > 0, b > 0$ demostrar que: $\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)(a^2 + b^2) \geq 4$

Demostración

Para tener una idea clara de dónde empezar a demostrar, ensayaremos un borrador, con la desigualdad dada.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)(a^2+b^2) \geq 4 \Longrightarrow \left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right)(a^2+b^2) \geq 4$$

$$(a^2+b^2)(a^2+b^2) \geq 4a^2b^2$$

$$(a^2+b^2)^2 \geq 4a^2b^2$$

$$a^4+2a^2b^2+b^4 \geq 4a^2b^2$$

$$a^4-2a^2b^2+b^4 \geq 0$$

$$(a^2-b^2)^2 \geq 0$$

Ya tenemos una idea de dónde empezar a demostrar.

Veamos

$(a^2-b^2)^2 \geq 0$ por propiedad 18

$a^4-2a^2b^2+b^4 \geq 0$ Binomio al cuadrado

$a^4-2a^2b^2+4a^2b^2+b^4 \geq 0+4a^2b^2$ por el axioma de monotonía para la adición

$a^4+2a^2b^2+b^4 \geq 4a^2b^2$ Trinomio cuadrado perfecto

$(a^2+b^2)^2 \geq 4a^2b^2$

$(a^2+b^2)(a^2+b^2) \geq 4a^2b^2, \;\; a^2b^2 > 0$

$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right)(a^2+b^2) \geq \frac{4a^2b^2}{a^2b^2}$ por axioma de monotonía para la multiplicación

$\left(\frac{a^2}{a^2b^2}+\frac{b^2}{a^2b^2}\right)(a^2+b^2) \geq 4$ por el axioma de distributiva

$\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a^2}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b^2}}\right)(a^2+b^2) \geq 4$ lo que queda demostrado

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

3. Si $a > 0, b > 0$, tal que $a \geq b$, demostrar que: $\frac{a}{b} + \frac{3b}{a} \geq \frac{b^2}{a^2} + 3$

Demostración

Primero ensayaremos un borrador, con la desigualdad dada, para tener una idea de donde iniciar a demostrar.

$$\frac{a}{b} + \frac{3b}{a} \geq \frac{b^2}{a^2} + 3 \Longrightarrow \frac{a^3 + 3ab^2}{a^2b} \geq \frac{b^3 + 3a^2b}{a^2b}$$

$$a^3 + 3ab^2 \geq b^3 + 3a^2b$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \geq 0$$

$$(a-b)^3 \geq 0$$

Veamos

Tenemos como información que

$a > 0,\ b > 0$ y $a \geq b$

$a - b \geq b - b$ por el axioma de monotonía para la adición

$a - b \geq 0 \Longrightarrow (a-b)^3 \geq 0$

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \geq 0$ Binomio al cubo

$a^3 - 3a^2b + 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + b^3 \geq 0 + b^3 + 3a^2b$ por el axioma de monotonía para la adición

$a^3 + 3ab^2 \geq b^3 + 3a^2b$

$\frac{a^3+3ab^2}{a^2b} \geq \frac{b^3+3a^2b}{a^2b},\ a^2b > 0$ axioma de monotonía para la multiplicación

$\frac{a^3}{a^2b} + \frac{3ab^2}{a^2b} \geq \frac{b^3}{a^2b} + \frac{3a^2b}{a^2b}$ por el axioma de distributiva

$\frac{a}{b} + \frac{3b}{a} \geq \frac{b^2}{a^2} + 3$ lo que queda demostrado

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

4. Si $c > 0, d > 0, 2d \neq 3c$; demostrar que: $\frac{d}{3c} > 1 - \frac{3c}{4d}$

Demostración

Ensayaremos un borrador, con la desigualdad dada, para tener una idea de donde iniciar a demostrar.

$$\frac{d}{3c} > 1 - \frac{3c}{4d} \Longrightarrow \frac{d}{3c} + \frac{3c}{4d} > 1$$

$$\frac{4d^2+9c^2}{12cd} > 1$$

$$4d^2 + 9c^2 > 12cd$$

$$4d^2 - 12cd + 9c^2 > 0$$

$$(2d - 3c)^2 > 0$$

Veamos

Tenemos como información que

$$c > 0, d > 0, 2d \neq 3c \Longrightarrow 2d - 3c \neq 0 \ \wedge \ cd > 0$$

$(2d - 3c)^2 > 0$ por propiedad 17

$4d^2 - 12cd + 9c^2 > 0$ Binomio al cuadrado

$4d^2 - 12cd + 12cd + 9c^2 > 0 + 12cd$ Monotonía de adición

$4d^2 + 9c^2 > 12cd$

$\frac{4d^2+9c^2}{12cd} > \frac{12cd}{12cd}, cd > 0$ Monotonía de la multiplicación

$\frac{4d^2}{12cd} + \frac{9c^2}{12cd} > 1$ Distributiva

$\frac{d}{3c} + \frac{3c}{4d} > 1$

$\frac{d}{3c} + \frac{3c}{4d} - \frac{3c}{4d} > 1 - \frac{3c}{4d}$ Monotonía de la adición

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\frac{d}{3c} > 1 - \frac{3c}{4d} \qquad \text{lo que queda demostrado}$$

5. Si $a + b = 2$; $a, b \in R$ demostrar que: $a^4 + b^4 \geq 2$

Demostración

Como $a + b = 2 \Longrightarrow (a + b)^2 = 4$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4 \qquad \text{Binomio al cuadrado}$$

$$a^2 + 2ab - 2ab + b^2 = 4 - 2ab \quad \text{Monotonía de la adición}$$

$$a^2 + b^2 = 4 - 2ab \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

Por otro lado $(a - b)^2 \geq 0$ propiedad 18

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \qquad \text{Binomio al cuadrado}$$

$$a^2 - 2ab + 2ab + b^2 \geq 0 + 2ab \quad \text{Monotonía de la adición}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

De (1) y (2) tenemos:

$$4 - 2ab \geq 2ab$$

$$4 - 2ab + 2ab \geq 2ab + 2ab \quad \text{Monotonía de la adición}$$

$$4ab \leq 4 \Rightarrow ab \leq 1$$

Ahora si

$$ab \leq 1 \ \Longrightarrow \begin{cases} a^2b^2 \geq 1, \ \ si\ (a \geq 1 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b \geq 1) \\ \ \ a^2b^2 < 1, \ \ si \ \ a, b \in \langle 0,1 \rangle \ \vee \ \ a, b \in \langle -1,0 \rangle \end{cases} \ \ldots\ldots\ldots \ (3)$$

Por otro lado $(a^2 - b^2)^2 \geq 0$ propiedad 18

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0 \quad \text{Binomio al cuadrado}$$

$$a^4 - 2a^2b^2 + 2a^2b^2 + b^4 \geq 0 + 2a^2b^2 \quad \text{Monotonía de la adición}$$

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k
Eidec EDITORIAL

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2 \geq 2 \text{ por (3)}$$

$$\text{Si } (a \geq 1 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b \geq 1)$$

Luego se demuestra que $a^4 + b^4 \geq 2$ por el axioma de transitividad.

6. Si $a, b, c \in R$ demostrar que $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$

Demostración

Sabemos que $\begin{cases} (a-1)^2 \geq 0 \\ (b-1)^2 \geq 0 \\ (c-1)^2 \geq 0 \end{cases}$ por propiedad 18

Desarrollando el binomio al cuadrado y aplicando monotonía, tenemos

$$\begin{cases} a^2 - 2a + 1 \geq 0 \\ b^2 - 2b + 1 \geq 0 \\ c^2 - 2c + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + 2a + 1 \geq 0 + 2a \\ b^2 - 2b + 2b + 1 \geq 0 + 2b \\ c^2 - 2c + 2c + 1 \geq 0 + 2c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 \geq 2a \\ b^2 + 1 \geq 2b \\ c^2 + 1 \geq 2c \end{cases}$$

Ahora sumando por propiedad 20, tenemos

$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2a + 2b + 2c$ distributiva

$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$ lo que queda demostrado.

Ejercicios

1. Si $\boldsymbol{a \neq b}$, donde $a, b \in R^+$; demostrar que $(a^3 + b^3)(a + b) > (a^2 + b^2)^2$
2. Si $\boldsymbol{a, b}$ son números reales positivos, demostrar que: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geq 4$
3. $\forall a \in R, a \neq 0$ demostrar que: $a^2 + \frac{9}{a^2} \geq 6$
4. Si $0 < a < 1$, demostrar que $a^2 < a$
5. Si $x + y + z = 6$, demostrar $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

1.3 Ecuaciones Lineales

Una ecuación es una proposición que indica que el valor numérico de dos expresiones algebraicas es igual. Las dos expresiones que conforman una ecuación son llamadas lados o miembros, y están separados por el signo de igualdad " = ".

Toda ecuación lineal con una incógnita se puede llevar a la forma:

$ax + b = 0, a \neq 0$. Resolver una ecuación consiste en hallar el valor de la variable que hace verdadera dicha proposición, la solución es también llamada raíz de la ecuación siendo expresada por el valor: $x = -\frac{b}{a}$

Podemos encontrar ecuaciones lineales básicas, con literales, fraccionarias, con radicales.

Ejercicios Desarrollados

Resolver la ecuación lineal básica

1. $2(x-1) - 3(x-4) = 4$

Resolución

$$2x - 2 - 3x + 12 = 4$$
$$-x + 10 = 4$$
$$x = 6$$

2. $\boldsymbol{\frac{x}{3} - 4 = \frac{x}{5}}$

Resolución

$$\frac{x-12}{3} = \frac{x}{5}$$
$$5(x-12) = 3x$$
$$5x - 60 = 3x$$
$$2x = 60 \Rightarrow x = 30$$

Resolver la ecuación lineal con literales

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

3. $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{x - xr^2}}{\boldsymbol{1 - r}}$; $r \neq 1,\ x = ?$

Resolución

$$a(1-r) = x - xr^2$$
$$a(1-r) = x(1-r^2)$$
$$a(1-r) = x(1-r)(1+r)$$
$$a = x(1+r)$$
$$x = \frac{a}{1+r}$$

4. $S = P + Prt;\ P = ?$

Resolución

$$S = p(1+rt)$$
$P = \frac{S}{1+rt}$; $rt \neq -1$

Resolver la ecuación fraccionaria

5. $\frac{x-6}{x} - \frac{6}{x} = \frac{x+6}{x-6}; x \neq 0, x \neq 6$

Resolución

$$\frac{x-12}{x} = \frac{x+6}{x-6}$$

$$(x-12)(x-6) = x(x+6)$$

$$x^2 - 18x + 72 = x^2 + 6x$$

$$-18x + 72 = 6x$$

$$24x = 72$$

$$x = 3$$

6. $\frac{2}{x} - 1 = \frac{9x}{x+4};\ x \neq 0, x \neq -4$

Resolución

$$\frac{2-x}{x} = \frac{9x}{x+4}$$
$$(2-x)(x+4) = x(9x)$$
$$2x + 8 - x^2 - 4x = 9x^2$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$10x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$5x^2 + x - 4 = 0$$
$$(5x - 4)(x + 1) = 0 \qquad \text{aplicando aspa simple}$$
$$5x - 4 = 0 \ \lor \ x + 1 = 0 \qquad \text{aplicando propiedad } 9$$
$$x = \frac{4}{5} \ \lor \ x = -1$$

Resolver la ecuación con radical

7. $6 - \sqrt{2x + 5} = 0$

Resolución

$$\sqrt{2x + 5} = 6 \qquad \textit{elevando al cuadrado}$$
$$2x + 5 = 36$$
$$2x = 31 \Rightarrow x = \frac{31}{2}$$

Comprobando el resultado en la ecuación

$$6 - \sqrt{2\left(\frac{31}{2}\right) + 5} = 6 - \sqrt{31 + 5} = 6 - \sqrt{36} = 0$$

8. $\boldsymbol{\sqrt{y^2 - 9} = 9 - y}$

Resolución

$$y^2 - 9 = (9 - y)^2$$
$$y^2 - 9 = 81 - 18y + y^2 \qquad \text{binomio al cuadrado}$$
$$-9 = 81 - 18y$$
$$18y = 90 \ \Longrightarrow y = \frac{90}{18}$$
$$y = \frac{10}{2} \Longrightarrow \ y = 5$$

Comprobando el resultado en la ecuación $\sqrt{5^2 - 9} = 9 - 5$

$$\sqrt{25 - 9} = 4$$
$$\sqrt{16} = 4 \Longrightarrow 4 = 4$$

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones lineales básicas:

1. $2(x + 4) = 7x + 2$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

2. $4(x-3)+\frac{3}{4}=2(x+5)$
3. $\frac{x}{3}-4=\frac{x}{5}$
4. $\frac{7x+3}{2}-\frac{9x-8}{4}=6$
5. $\frac{x+2}{3}-\frac{2-x}{6}=x-2$
6. $\frac{2y-7}{3}+\frac{8y-9}{14}=\frac{3y-5}{21}$
7. $5(x-1)+\frac{1}{2}=x+2$
8. $2(x+3)+3(x-2)=\frac{1}{2}(x+3)$
9. $\frac{x+8}{3}+2(x+1)=3\left(x-\frac{1}{2}\right)$
10. $2\left(\frac{x+1}{5}\right)+x=4\left(x+\frac{1}{2}\right)$
11. $3\left(\frac{2x-7}{5}\right)-\frac{1}{4}(2x-7)+5\left(\frac{x+2}{3}\right)=5$
12. $\frac{x+n}{2}-6+\frac{n-x}{5}=\frac{7n}{10}$

Resolver las siguientes ecuaciones con literales despejando la variable indicada:

1. $r=\frac{2mI}{B(n+1)};\ m=?$
2. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f};\ q=?$
3. $S=\frac{R[(1+i)^n-1]}{i};\ R=?$
4. $S=\frac{u}{au+c};\ u=?$
5. $p=8q-1;\ q=?$
6. $S=p(1+rt);\ r=?$
7. $S=\frac{n}{2}(a_1+a_n);\ a_1=?$
8. $r=\frac{d}{1-dt};\ t=?$
9. $r=\frac{2ml}{B(n+1)};\ n=?$
10. $\frac{a+x}{b}-\frac{x-b}{a}=2,\ x=?$
11. $3(a+4x)+7(2x-a)-5(3x+2a)+a=0;\ x=?$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

12. $\frac{x+3b}{x+b}=\frac{x-2}{x-5}; x=?$

Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias:

1. $\frac{3x+1}{x^3}+\frac{x+1}{x}=1+\frac{2x+3}{x^2}$

2. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{x-2}{x^2-1}$

3. $\frac{2(x+1)}{x-2}+\frac{5}{x+4}=\frac{36}{x^2+2x-8}$

4. $\frac{8}{x+6}+\frac{12-x}{x-6}=1$

5. $\frac{x-4}{x+6}=\frac{x+4}{x+22}$

6. $\frac{x-5}{x-1}-\frac{x+5}{x+1}=0$

Resolver las siguientes ecuaciones con radicales:

1. $\sqrt{x+7}-\sqrt{x+14}=-1$

2. $\sqrt{x-2}+5=\sqrt{x+53}$

3. $\sqrt{\sqrt{x+16}+\sqrt{x}}=2$

4. $\sqrt{2x-1}-6=-\sqrt{x+4}$

5. $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-4}=0$

6. $\sqrt{5+2x}=\sqrt{4x-2}$

7. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=1$

8. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+7}=1$

9. $\sqrt{5x-14}=2\sqrt{x-1}$

10. $\sqrt{5x-6}-16=0$

11. $\sqrt{\frac{x}{2}+1}=\frac{2}{3}$

12. $\sqrt{4x-6}-\sqrt{x}=0$

13. $\sqrt{x^2+33}-x=3$

14. $\sqrt{5-x}+\sqrt{x+3}=0$

15. $\sqrt{5x+19}-\sqrt{5x}=-1$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Aplicación de ecuaciones lineales

En los problemas de aplicación el matemático y educador George Pólya (1887-1985) recomienda organizar el desarrollo de la solución, usando los siguientes pasos

- Comprensión del problema
  - Leer todo el enunciado atentamente.
  - Trazar un esquema que ilustre el enunciado, si es posible.
  - Identificar las cantidades conocidas y desconocidas que presenta el problema.
  - Elegir una variable para la cantidad desconocida y escribir exactamente lo que representa. Para esto es de utilidad fijarse en la pregunta del enunciado.
- Concepción de un plan- Planteamiento

  Establecer relaciones entre las cantidades y variables indicadas anteriormente:
  - Traducir el enunciado a una o varias ecuaciones (interpretación de textos)
  - Reglas externas al problema.
- Ejecución del plan-Resolución

  La parte operativa ya debe ser sencilla después de todo lo trabajado.
- Comprobación y respuesta

  Es siempre bueno asegurarnos que el proceso de cálculo esté correcto, además se debe escribir una respuesta completa para dar claramente solución a la pregunta propuesta.

Problema 1.

Emilio y Valentina depositan su dinero en una cuenta mancomunada. Al cabo de un año tiene en total 8 000 soles, pero a Emilio le corresponde el triple de dinero que a Valentina. ¿Cuánto posee cada uno?

Comprensión del problema (Variable)	¿Cuánto posee cada uno de ellos?	Incógnita(s): E=Emilio V=Valentina
Planteamiento	Tiene en total 8000 nuevos soles	$E + V = 8\,000$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

	A Emilio le corresponde el triple de dinero que a Valentina.	$E = 3V$
Resolución	$E + V = 8\,000$ $E = 3V$ entonces $3V + V = 8\,000$ $4V = 8\,000$ $V = 2\,000$ luego $E = 6\,000$	
Respuesta	Emilio posee 6 000 soles y Valentina 2 000 soles	

Problema 2.

En el mes de julio un comerciante gana cada semana S/. 400 más que la semana anterior. Si consideramos que el mes tiene 4 semanas y que en la cuarta semana gana siete veces lo que ganó en la primera semana, ¿Cuánto gana en cada semana?

Variable	¿Cuánto gana en cada semana?	Incógnita(s): x = ganancia de la 1ra semana
Planteamiento	Gana cada semana S/. 400 más que en la semana anterior	1ra semana=x
		2da semana= $x + 400$
		3ra semana= $x + 400 + 400$
		4ta semana= $x + 400 + 400 + 400$
	En la cuarta semana gana siete veces lo que gana en la primera	$x + 1200 = 7x$
Resolución	$6x = 1200 \Rightarrow x = 200$	
Respuesta	La 1ra semana gano S/. 200; la 2da S/. 600; la 3ra S/.1 000 y la 4ta S/.1 400	

Problema 3:

El responsable de un minimarket compra una cierta cantidad de fresa a S/. 3.5 el kilogramo. Pero se le malogra 4 kilogramos y el resto los vende a S/. 6 el kilogramo ¿Qué cantidad ha comprado si la ganancia es de S/. 40?

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Comprensión del problema (Variable)	¿Qué cantidad ha comprado si la ganancia es de S/.40?	Incógnita(s): x=kg de fresa que compró
Planteamiento	El costo por kg es S/. 3.5 Pierde 4 kg de fresa	$C = 3.5x$ $x - 4$
	La venta por kg es a S/. 6	$V=6(x-4)$
Resolución	$G = V - C = 6(x - 4) - 3.5x$ $G = 6x - 24 - 3.5x$, por dato la ganancia es 40 soles $40=2.5x-24$ $64 = 2.5x$ $x = 25.6$	
Respuesta	El responsable del minimarket ha comprado 25.6 kg de fresa.	

Problema 4.

En una tienda de prendas, por cierre de mes, se está rebajando sus artículos en un 25%, ¿Cuál sería el precio inicial de una prenda cuyo precio rebajado es de 38 soles?

Comprensión del problema (Variable)	¿Cuál sería el precio inicial de una prenda cuyo precio rebajado es de 38 soles?	Incógnita(s): x=precio inicial de la prenda
Planteamiento	El costo inicial de la prenda es x soles Le rebaja 38 soles	$Costo = x$ $x - 38$
	El precio rebajado es el 25% que corresponde a 38soles	$38\ soles \Leftrightarrow 25\%$
Resolución	$soles \quad \%$ $x \quad 100$ $38 \quad 25$ $25x = 3800$ $x = 152$	

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Respuesta	El precio inicial de la prenda es S/.152.

Problema 5.

Póngase en la situación de que usted es el asesor financiero de una compañía que posee un edificio con 50 oficinas. La compañía tiene alquiladas 20 oficinas a $400 mensuales, que tienen un contrato por 5 años. Si la compañía quiere obtener un total de $20 450 mensuales de rentas del edificio. ¿Cuál es la renta que debe cobrarse por cada oficina que no están rentadas?

Comprensión del problema (Variable)	¿Cuál es la renta que debe cobrarse por cada oficina que no están rentadas?	Incógnita(s): x=renta que se debe cobrar por cada oficina vacante
Planteamiento	Si se renta las 20 oficinas a $400, se obtiene $8 000. Se quiere obtener un total de $20 450 mensuales de rentas.	A la compañía le faltaría 20 450-8000= $ 12 450 para su objetivo
Resolución	$12\ 450 \div 30 = 415$	
Respuesta	La renta que se debe cobrar a cada oficina vacante es de $415.	

Problemas Para Resolver

1. Se tiene que repartir S/. 30 000 entre cierto número de trabajadores presentes en una reunión de manera exacta entre ellos, uno de los trabajadores nota que si hubiera 3 trabajadores menos a cada uno le tocaría S/.500 más ¿Cuánto trabajadores hay y cuanto le toca a cada uno?
2. La diferencia de dos números es 10, y la suma de ocho veces el primero y cuatro veces el segundo resulta 8. Hallar dichos números.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

3. La suma de las edades de A, B, C es 69 años. La edad de A es el doble que la de B y 6 años mayor que la de C. Hallar las edades correspondientes.
4. Dentro de 20 años tendré 3 veces la edad que tenía hace 18 años ¿Cuantos años me faltan para cumplir 49 años?
5. Luis debe pagar una deuda de S/. 670 con 38 billetes de S/.10 y S/.20 ¿Cuántos billetes de S/. 10 empleará?
6. Ana y Raquel tienen entre los dos 10 vestidos de fiesta; si la mitad de vestidos que tiene Ana multiplicado por la tercera parte de vestidos de Raquel es 4, indicar cuantos vestidos tiene Ana.
7. El doble del cuadrado de un número natural disminuido en tres unidades es igual al quíntuple del mismo. ¿Cuál es dicho número?
8. En un examen de 20 preguntas, Juana alcanza 7 puntos. Si cada acierto vale dos puntos y cada error o no marcada le disminuyen un punto ¿Cuántas preguntas ha acertado Juana?
9. Un revendedor vende la mitad de las naranjas, más la mitad de una naranja; una segunda vez, vende la mitad del resto, más media naranja, y así sucesivamente; después de tres ventas no queda ninguna ¿Cuantas naranjas tenía?
10. Un concierto produjo S/. 60 000 por la venta de 8000 boletos. Si los boletos se vendieron a S/. 6 y S/. 10 cada uno. ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron?
11. Quince personas, entre hombres y mujeres, comen en restaurant; el grupo de varones gastan S/. 36 y el grupo de mujeres también gastan lo mismo. Hallar el número de hombres y su gasto individual, sabiendo que cada mujer ha pagado S/. 2 menos que un hombre.
12. Un ganadero compra borregos en S/.750; los cría 3 meses y pierde 5 borregos por enfermedad y vende cada uno de los que quedan a S/.50 más de lo que le costaron. En esta operación gana S/. 250. Hallar el número de borregos que compró el ganadero.
13. Un teatro vendió 242 entradas en $1096. Las entradas de los adultos se vendieron a $5.30 cada una y los de niños a $2.0. ¿Cuántas entradas de cada clase se vendieron?
14. Gia lee 30 páginas de su libro, si al día siguiente; lee el doble de lo que le queda disminuido en 100; si todavía le falta 10 páginas por leer. ¿Cuántas páginas tiene su libro de Gia?

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

15. La edad de Francisco es la mitad de la edad de su padre aumentado en 4 años. Si ambas edades suman 64 años. ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?
16. Hace 8 años la edad de James era el triple de Fernando y dentro de 4 años la edad de Fernando será los 5/9 de la edad de James. Hallar las edades actuales de estas personas.
17. Un granjero dedicado a la crianza de aves y ganado vacuno tiene actualmente 320 animales. Si un empleado cuenta el número de patas llega a 840. ¿Cuál es el número de aves que tiene el granjero?
18. Un mendigo da 3 golpes de bastón cada vez que ve a un hombre y 2 golpes cada vez que ve a una mujer. Si llega observar a 26 personas, dando 60 golpes. ¿Calcular la diferencia entre el número de mujeres y hombres?
19. El ingreso mensual total de una guardería por el cuidado de x niños está dado por $I = 450x$ y sus costos mensuales totales están dados por $C = 380x + 3500$ ¿Cuántos niños se necesitan inscribir mensualmente para llegar al punto de equilibrio? (los ingresos son igual a los costos)

1.4 Ecuaciones de Segundo Grado

La forma general de una ecuación cuadrática en x, está dado por:

$$\boldsymbol{ax^2 + b\,x + c = 0}$$

Donde $a, b, c \epsilon R$ y $a \neq 0$

Raíz de una ecuación cuadrática

Al resolver una ecuación de segundo grado, se está encontrando los valores positivos, nulos o negativos, llamadas raíces (real o complejo) que satisfagan la ecuación.

Diremos que r es raíz de $ax^2 + b\,x + c = 0 \Leftrightarrow ar^2 + b\,r + c = 0$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Resolución de la ecuación cuadrática:

Por factorización:

Resolver la ecuación: $$x^2-x-6=0$$ Aplicamos el aspa simple $$(x-3)(x+2)=0$$ Aplicando la propiedad 9 $$x-3=0 \vee x+2=0$$ $$x=3 \vee x=-2$$ $$CS=\{-2,3\}$$	Resolver la ecuación: $$4x^2-9=0$$ $$(2x)^2-3^2=0$$ Aplicamos diferencia de cuadrados $$(2x-3)(2x+3)=0$$ Aplicando propiedad 9 $$2x-3=0 \vee 2x+3=0$$ $$x=\frac{3}{2} \vee x=-\frac{3}{2}$$ $$CS=\left\{\pm\frac{3}{2}\right\}$$

Completando el cuadrado:

El completar el cuadrado conlleva hallar el tercer término de un trinomio cuadrado perfecto cuando conocemos los primeros dos.

Para el trinomio de la forma: $x^2+bx+?$ su último término para formar un trinomio cuadrado perfecto, es el cuadrado de la mitad del coeficiente del término de x, es decir $x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2$

Pero en una ecuación debemos sumar a ambos lados el número que completa el cuadrado, para obtener una ecuación equivalente.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones:

$x^2-2x-2=0$	$2x^2+5x-10=0$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Completando cuadrados $x^2-2x+\left(\frac{-2}{2}\right)^2-2=0+\left(\frac{-2}{2}\right)^2$ $(x-1)^2-2=1$ $(x-1)^2=3$ Aplicando propiedad 27 $x-1=\pm\sqrt{3}$ $\mathrm{x}-1=\sqrt{3}\ \vee\ \mathrm{x}-1=-\sqrt{3}$ $x=1+\sqrt{3}\ \vee\ x=1-\sqrt{3}$ $CS=\{1\pm\sqrt{3}\}$	Dividimos todo entre 2 $x^2+\frac{5}{2}x-5=0$ Completando cuadrados $x^2+\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2-5=0+\left(\frac{5}{4}\right)^2$ $\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-5=\left(\frac{5}{4}\right)^2$ $\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2+5$ $\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}+5$ $\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{105}{16}$ Aplicando propiedad 27 $x+\frac{5}{4}=\pm\sqrt{\frac{105}{16}}$ $x=-\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{105}}{4}$ $CS=\left\{\frac{-5\pm\sqrt{105}}{4}\right\}$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Por la fórmula Cuadrática:

Encontremos las raíces de la ecuación cuadrática ax^2+bx+c=0; a≠0, estas se obtienen completando cuadrados.

Para ello a la ecuación cuadrática, dividimos a todo entre a

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Ahora analizaremos: Sea $\Delta=b^2-4ac$ el discriminante de la ecuación cuadrática, entonces se cumple:

a) Si $\Delta>0$ entonces aplicando la propiedad 27 obtenemos

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

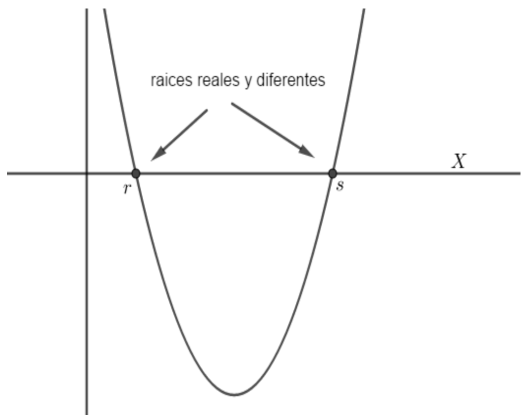
Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

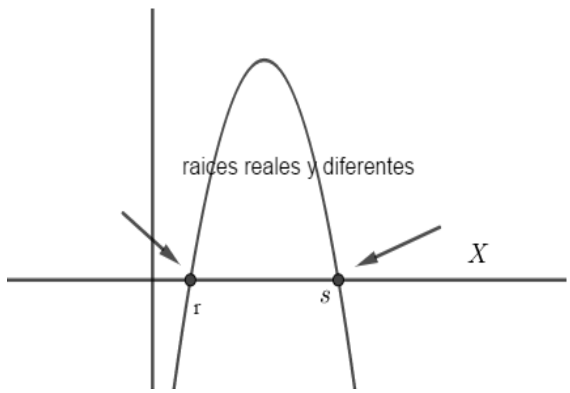
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Como podemos observar tenemos dos raíces reales y diferentes que lo denominaremos: $r = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $s = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

En conclusión, si $\Delta > 0 \Longrightarrow CS = \{r, s\}$

Observación: gráficamente se estaría encontrando los valores donde la parábola corta al eje X





b) Si $\Delta = 0$ obtenemos

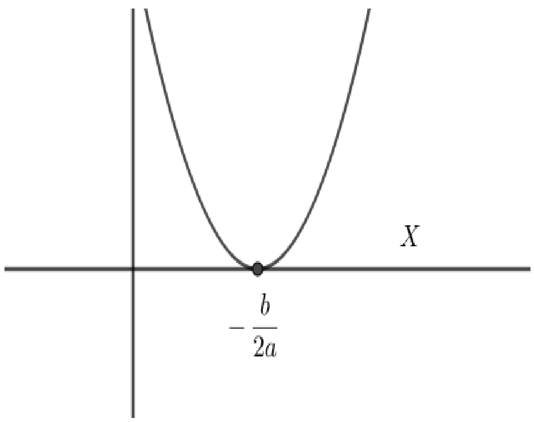
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$
$$x + \frac{b}{2a} = 0$$
$$x = -\frac{b}{2a}$$

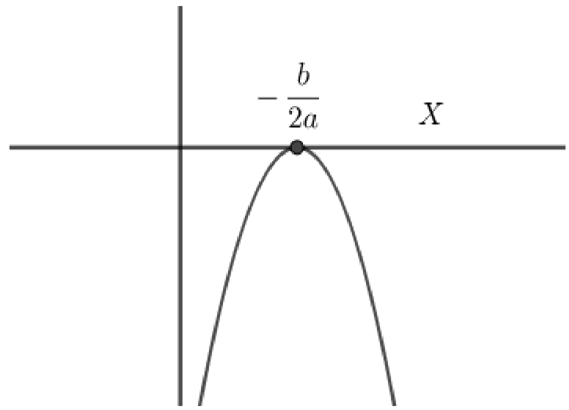
Luego podemos concluir que:

Si $\Delta = 0 \Longrightarrow CS = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Observación: gráficamente se estaría encontrando el valor donde la parábola toca al eje *X*





c) Si $\Delta < 0$ obtenemos $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$$

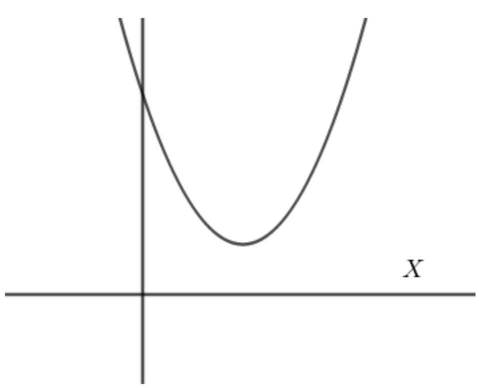
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$$

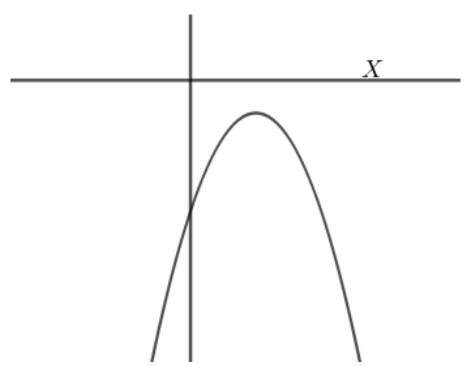
Que contradice a la propiedad 17, lo que quiere decir que no se tendría raíces en los reales.

Luego podemos concluir que:

Si $\Delta < 0 \Longrightarrow CS = \phi = \{\,\}$

Observación: gráficamente en este caso la parábola no toca al eje *X*





Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Ejemplos

Resolver la ecuación: $3x^2 - 2x - 4 = 0$ Encontraremos el discriminante $$\Delta = b^2 - 4ac$$ $$\Delta = (-2)^2 - 4(3)(-4)$$ $$\Delta = 52 > 0$$ Como él $\Delta > 0$ entonces la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales y diferentes, r y s $$r = \frac{-(-2) - \sqrt{52}}{2(3)} = \frac{2 - \sqrt{52}}{6}$$ $$r = \frac{2 - 2\sqrt{13}}{6} \Rightarrow r = \frac{1 - \sqrt{13}}{3}$$ Entonces $s = \frac{1+\sqrt{13}}{3}$ Por tanto $CS = \{r, s\}$	Resolver la ecuación: $2x^2 - 3x + 4 = 0$ Encontrando el discriminante $$\Delta = b^2 - 4ac$$ $$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(4)$$ $$\Delta = -23 < 0$$ Como el $\Delta < 0$ entonces la ecuación cuadrática no tiene solución en lo reales. Por tanto $CS = \phi$
Resolver la ecuación: $$25x^2 - 80x + 64 = 0$$ Encontrando la discriminante $$\Delta = b^2 - 4ac$$ $$\Delta = (-80)^2 - 4(25)(64)$$ $$\Delta = 0$$ Como el $\Delta = 0$ entonces la ecuación cuadrática tiene solución $\left\{-\frac{b}{2a}\right\} = \left\{-\frac{(-80)}{50}\right\} = \left\{\frac{8}{5}\right\}$ Luego $CS = \left\{\frac{8}{5}\right\}$	Resolver la ecuación: $$9x^2 + 6x = 1$$ Aplicando monotonía $$9x^2 + 6x - 1 = 0$$ Encontrando la discriminante $$\Delta = b^2 - 4ac$$ $$\Delta = (6)^2 - 4(9)(-1)$$ $$\Delta = 72 > 0$$ Entonces tiene dos soluciones reales y diferentes, r y s

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

	$r=\frac{-6-\sqrt{72}}{2(9)}=\frac{-6-6\sqrt{2}}{18}$ $r=\frac{-1-\sqrt{2}}{3}$ $s=\frac{-1+\sqrt{2}}{3}$ $\therefore CS=\{r,s\}$

Teorema 1.

Si $r=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ y s= $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ son las raíces reales de ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ se cumple las siguientes propiedades:

a) $r+s=-\frac{b}{a}$
b) $rs=\frac{c}{a}$
c) $|r-s|=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$
d) $ax^2+bx+c=a(x-r)(x-s)$

Ejemplo

Hallar el valor de k en la ecuación $x^2+(2k+5)x+k=0$ sí una raíz excede la otra en 3 unidades.

Resolución

Por el teorema anterior

$$|r-s|=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{a}=3$$

$$\frac{\sqrt{(2k+5)^2-4(1)(k)}}{1}=3$$

$\sqrt{(2k+5)^2-4(1)(k)}=3$ elevando al cuadrado

$$(2k+5)^2-4(1)(k)=9$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$4k^2+20k+25-4k=9$

$4k^2+16k+16=0$

$k^2+4k+4=0$

$(\mathrm{k}+2)^2=0$

$k=-2$

Ejercicios para resolver

1. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por factorización:

a) $9x^2+6x+1=0$	g) $4x^2+12x+9=0$
b) $x^2+165x+6624=0$	h) $x^2-4=0$
c) $x^2-6x+5=0$	i) $x^2+x-12=0$
d) $2m^2+5m+3=0$	j) $x^2-8=0$
e) $x^2-x-20=0$	k) $(x+3)(x-2)=6$
f) $(3\mathrm{x}-4)(x+1)=-2$	l) $4y^2+2y-2=0$

2. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas completando cuadrados:

a) $2x^2-5x+1=0$	g) $x^2+6x+7=0$
b) $x^2-7x+4=0$	h) $x^2=-3x+8$
c) $6x^2-12x=3$	i) $x^2-10x+5=0$
d) $m^2-3=-m$	j) $x^2+8x+6=0$
e) $3x-4=-2x^2$	k) $5x^2-4x+1=0$
f) $2p^2+5p+6=0$	l) $2x^2-3x-4=0$

3. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la formula cuadrática:

a) $x^2=4x-1$	*f)* $2m^2+5m+3=0$
b) $8x+3=8x^2$	g) $\frac{6}{k^2}+\frac{1}{k}-2=0$
c) $2.1x^2-4.7x-6.2=0$	h) $x^2-4x+5=0$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

d) $4x = -2x^2 + 3$	i) $3y^2 - 4y + 5 = 0$
e) $2x^2 - x - 7 = 0$	j) $6x^2 + 2x = 27$

4. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas, por el método que prefiera:

a) $x^2 + 2x - 8 = 0$	*k)* $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
b) $4x^2 - 13 = 0$	l) $\frac{2}{2x+1} - \frac{6}{x-1} = 5$
c) $x^2 - 4x - 21 = 0$	m) $-2x^2 - 6x + 5 = 0$
d) $x + \frac{1}{x-3} = 5$	n) $x + \sqrt{4x} - 5 = 0$
e) $(2x-3)^2 = 8x$	o) $0.02w^2 - 0.3w = 20$
f) $\frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1$	p) $\frac{2}{r-2} - \frac{r+1}{r+4} = 0$
g) $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x-2}$	q) $p(p-3)^2 - 4(p-3)^3 = 0$
h) $\frac{3}{x+1} + \frac{4}{x} - \frac{12}{x+2} = 0$	r) $x^2 = \frac{x+3}{2}$
i) $\frac{1}{x^6} + \frac{9}{x^3} + 8 = 0$	s) $\frac{3}{x-4} + \frac{x-3}{x} = 2$
j) $4x^2 - 17x + 15 = 0$	t) $\frac{y+1}{y+3} + \frac{y+5}{y-2} = \frac{7(2y+1)}{y^2+y-6}$

5. Para qué valor del parámetro "m" las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + 2(m+2)x + 9m = 0$ ¿son iguales?

6. Dada la ecuación: $(2k+2)x^2 + 4x - 4kx + k - 2 = 0$ hallar la suma de sus raíces sabiendo que estas son inversas.

7. Las raíces r y s de una ecuación cuadrática satisfacen: $4r - 16s = 7$ y $8r + 4s = 5$ hallar la ecuación cuadrática cuyas raíces son respectivamente las inversas de r y s

8. Dado el conjunto $A = \{x \in R / x^2 - 2(1+3m)x + 7(3+2m) = 0, m \in R\}$ hallar los valores de "m" para que A sea un conjunto unitario. Construir dicho conjunto.

9. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 + 2x - 3\sqrt{x^2 + x + 3} = 3$

b) $(2x-7)(x^2-9)(2x+5) = 91$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k
Eidec EDITORIAL

c) $2x^2 - 2x + 2\sqrt{2x^2 - 7x + 6} = 5x - 6$

d) $\left(x + 1 + \frac{6}{x}\right)\left(x - 1 + \frac{6}{x}\right) = 24$

e) $\left(x - \frac{3}{x}\right)^2 - 4x + \frac{12}{x} = 12$

f) $(x^2 + 3x + 2)^2 - 8(x^2 + 3x) = 4$

Aplicación de Ecuaciones de Segundo Grado

Ejemplo 1

¿Cuántos metros de lienzo se comprarán con S/. 250, sabiendo que, si el metro hubiese costado 2 soles menos, si hubieran tenido 5 metros más?

Resolución

<table>
<tr><td>Comprensión del problema (Variable)</td><td colspan="2">¿Cuántos metros de lienzo se comprarán con S/. 250?</td><td>Incógnita(s):
x=precio del metro de lienzo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Planteamiento</td><td colspan="2">El costo inicial del lienzo es x soles
si el metro costara 2 soles menos</td><td>$Costo = x$
$x - 2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">si el metro hubiese costado 2 soles menos, si hubieran tenido 5 metros más</td><td>$\frac{250}{x} + 5 \Leftrightarrow \frac{250}{x-2}$</td></tr>
<tr><td>Resolución</td><td>$\frac{250}{x} + 5 = \frac{250}{x - 2}$
$\frac{250 + 5x}{x} = \frac{250}{x - 2}$
$(x - 2)(250 + 5x) = 250x$
$240x + 5x^2 - 500 = 250x$
$5x^2 - 10x - 500 = 0$
$x^2 - 2x - 100 = 0$
$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-100)$
$\Delta = 404$</td><td colspan="2">$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{404}}{2}$
$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{101}}{2}$
$x = 1 \pm \sqrt{101}$
$x = 1 + \sqrt{101}$
$x = 11.05$
Luego la cantidad de metros que compraría es
$\frac{250}{x} = \frac{250}{11.05} = 22.62$</td></tr>
<tr><td>Respuesta</td><td colspan="3">Se comprará 22.62 metros de lienzo.</td></tr>
</table>

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Ejemplo 2

Una pieza de alfombra ha sido vendida en S/.1 500; el comprador al llegar a su casa, nota que, por equivocación, le han entregado una pieza que vale S/.2 menos por metro, pero que en compensación contiene 15 metros más que lo que esperaba. ¿Cuántos metros tiene esta pieza de alfombra, y cuál era el precio del metro?

Comprensión del problema (Variable)	¿Cuántos metros tiene esta pieza de alfombra, y cuál era el precio del metro?	Incógnita(s): x=cantidad de metros que creyó comprar
Planteamiento	El costo inicial del lienzo de x metros El costo del metro del lienzo con 2 soles menos	$\frac{1500}{x}$ $\frac{1500}{x}-2$
	En compensación el lienzo contiene 15 metros más	$\left(\frac{1500}{x}-2\right)(x+15) = 1500$
Resolución	$\left(\frac{1500}{x}-2\right)(x+15) = 1500$ $\frac{(1500-2x)}{x}(x+15) = 1500$ $(1500-2x)(x+15) = 1500x$ $1500x + 22\,500 - 2x^2 - 30x = 1500x$ $2x^2 + 30x - 22500 = 0$ $x^2 + 15x - 11250 = 0$ $\Delta = (15)^2 - 4(1)(-11250)$ $\Delta = 45225$	$x = \frac{-(15) \pm \sqrt{45225}}{2}$ $x = \frac{-15 \pm 15\sqrt{201}}{2}$ $x = \frac{-15 \pm 212.66}{2}$ $x = \frac{-15 + 212.66}{2}$ $x = 98.83$ Observemos que x es la cantidad de metros, por lo que tiene que ser positivo.
Respuesta	La pieza tiene $x + 15 = 98.83 + 15 = 113.83$ metros El costo del metro de la pieza de alfombra que le dieron es $\frac{1500}{113.83} =$ 13.18 soles.	

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Problemas para resolver

1. En una fábrica de zapatos se determina que la utilidad P en dólares generada por la producción de x pares de zapatos por semana, está dada por la fórmula P=1/10 x(250-x) siempre que $0 \leq x \leq 120$ ¿Cuántos pares de zapatos deben ser fabricados en una semana para obtener una utilidad de $1500?
2. En una boutique se puede vender x unidades de prendas exclusivas semanalmente a un precio P cada uno, en donde P=x(1000-x)
   ¿Cuántas prendas exclusivas deben venderse para obtener ingresos semanales igual a S/.250 000?
3. Se han comprado tajadores por un total de S/.50. Si se hubieran comprado cinco tajadores más, el vendedor haría un descuento de S/.0.5 en cada una, y el precio total habría sido el mismo. ¿Cuántos tajadores se compraron?
4. La temperatura, $T°C$, a la cual hierve el agua, se relaciona con la altitud, h, en metros sobre el nivel del mar, mediante la fórmula
   $h = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2$, válida para $T \in [95,100]$.
   La altitud oficial del nevado de Huascarán, es de 6757 m.s.n.m. ¿cuál será la temperatura a la cual hierve el agua en la cima de este nevado?

5. Cuando el precio de un producto es x dólares por unidad, suponga que un fabricante suministrará $5x^2 - 6x$ unidades del producto al mercado y que los consumidores demandarán $36 - x^2$ unidades. Determinar el valor de x para que el mercado esté en equilibrio (oferta = demanda).

6. Una compañía determina que, si vende x unidades de un producto, el ingreso total por las ventas será de $81\sqrt{x}$ dólares. Si el costo variable por unidad es de $2 y el costo fijo de $\$\,820$, determinar los valores de x para los que: $Ingreso\ total\ por\ ventas = costo\ variable + costo\ fijo$ (Esto es, utilidad cero).

7. Un proveedor de instrumentos quirúrgicos vende un instrumento a $ 3 500, para pedidos menores de 50 unidades. Si el pedido es de más de 50 hasta un máximo de 100 unidades, el precio total se reduce en $\$\,8\,000$ ¿Cuántos instrumentos se pueden comprar con $\$\,19\,087\,500$?

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

8. Una compañía de bienes raíces es propietario de 90 departamentos, cada uno de los cuales puede ser rentado en \$500 mensuales. Sin embargo, por cada \$25 mensuales de aumento en la renta, se tendrán tres departamentos desocupados sin posibilidad de que se renten inmediatamente. La compañía quiere recibir \$46 800 mensuales de rentas. ¿Cuál debe ser la renta mensual de cada departamento?

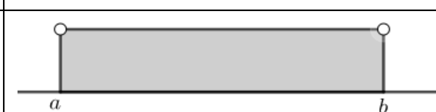
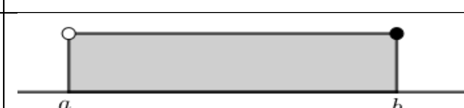
9. Un deportista lanza una pelota, la trayectoria que siguió la pelota está dada por la función que describe su altura (medida en metros) según el tiempo; $h(t) = 1.2 + 4t - 2t^2$.Calcula la altura máxima que alcanzó la pelota y el tiempo que permaneció en el aire.

1.5 Intervalos

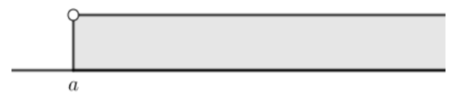
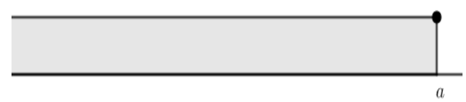
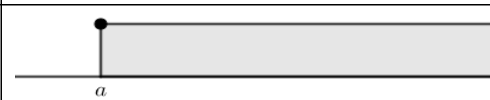
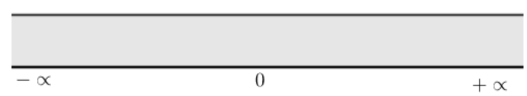
Si $a, b \in R$, tales que:

$$\begin{array}{lr} a > b & a \;\; mayor\ que \;\; b \\ a < b & a \;\; menor\ que \;\; b \\ a \geq b & a\ mayor\ o\ igual\ que \;\; b \\ a \leq b & a\ menor\ o\ igual\ que \;\; b \end{array}$$

Definimos los siguientes intervalos:

Intervalo	Definición	Gráfica
Abierto	$\langle a, b \rangle = \{x \in R : a < x < b\}$	
Cerrado	$[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$	
Abierto por la izquierda	$]a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$	
Abierto por la derecha	$[a, b[= \{x \in R : a \leq x < b\}$	

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Infinito abierto por la derecha	$\langle -\infty, a\rangle = \{x \in R: x < a\}$	
Infinito abierto por la izquierda	$\langle a, +\infty\rangle = \{x \in R: a < x\}$	
Infinito cerrado por la derecha	$]-\infty, a] = \{x \in R: x \leq a\}$	
Infinito cerrado por la izquierda	$[a, +\infty[= \{x \in R: a \leq x\}$	
Reales	$R = \langle -\infty, +\infty\rangle$	
Vacío	$\phi = \{\}$	

Ejercicios

1. Expresar cada uno de los intervalos en términos de desigualdades y graficar en la recta numérica:

a) $\langle -7,4\rangle$ b) $\langle -1,11\rangle$ c) $\langle 7,15\rangle$
d) $\langle 30, +\infty\rangle$ e) $\langle -\infty, 10\rangle$ f) $[3,15]$
g) $[-5,5[$ h) $[0, +\infty[$ i) $]-10, 5]$

2. Representar en forma geométrica sobre la recta de los números reales, el intervalo(s) resultante de la operación dada.

a) $x\epsilon[-3, 5] \cap [2, 7]$
b) $x\epsilon[2, 4] \cup [3, 12[$
c) $x\epsilon[2, 5[\cup [5, 10[$
d) $x\epsilon]-\infty, 3] \cap [2, +\infty[$
e) $x\epsilon[0, 8] - [3, 7]$
f) $x\epsilon[0, 8] - \{2, 7\}$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

1.6 Inecuaciones

Se denomina inecuación a cualquier desigualdad relativa. Los valores de la variable que verifican la inecuación forman el conjunto solución, la cual se representa en función de intervalos.

1.6.1 Inecuaciones Lineales

Se dice una inecuación de primer grado o lineal, a la desigualdad en la variable x, de la forma:

$$ax + b > 0 \qquad a, b \in R; a \neq 0$$
$$ax + b < 0 \qquad a, b \in R; a \neq 0$$
$$ax + b \geq 0 \qquad a, b \in R; a \neq 0$$
$$ax + b \leq 0 \qquad a, b \in R; a \neq 0$$

Ejemplos: Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $3x + 2 < 7$

Resolución

$$3x + 2 < 7$$
$$3x < 5$$
$$x < \frac{5}{3}$$

$$CS = \langle -\infty, \frac{5}{3} \rangle$$

2. $\frac{5x}{3} - 4x \leq 3x + 2$

Resolución

$\frac{5x}{3} - 4x \leq 3x + 2$ $\frac{5x}{3} - 4x - 3x \leq 2$ $\frac{5x}{3} - 7x \leq 2$	$-8x \leq 3$ $-x \leq \frac{3}{8}$ Por Monotonía -Consistencia multiplicativa

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$\frac{5x-21x}{3} \leq 2$ $-16x \leq 6$	$x \geq -\frac{3}{8}$ $CS = \left[-\frac{3}{8}, +\infty\right[$

3. $x + 1 > 4 \quad \vee \quad x + 2 < -1$

Resolución

$$x + 1 > 4 \qquad \vee \qquad x + 2 < -1$$

$$x > 3 \qquad \vee \qquad x < -3$$

$$CS = \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$$

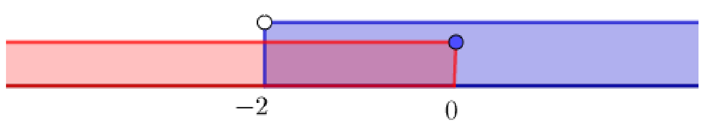
4. $3x - 2 < 5x + 2 \quad \wedge \quad 2(x + 2) \geq 3x + 4$

Resolución

$$3x - 2 < 5x + 2 \quad \wedge \quad 2(x + 2) \geq 3x + 4$$

$$-4 < 2x \quad \wedge \quad 2x + 4 \geq 3x + 4$$

$$-2 < x \quad \wedge \quad 0 \geq x$$



$$CS =]-2{,}0]$$

5. $11 - \frac{3x}{2} < \frac{1}{3}(5x + 14) \leq \frac{9}{5}(2 + x)$

Resolución

Para este tipo de inecuación, lo separamos en dos inecuaciones con el conectivo " $\wedge$ ", que define a la intersección de dos conjuntos.

$$11 - \frac{3x}{2} < \frac{1}{3}(5x + 14) \quad \wedge \quad \frac{1}{3}(5x + 14) \leq \frac{9}{5}(2 + x)$$

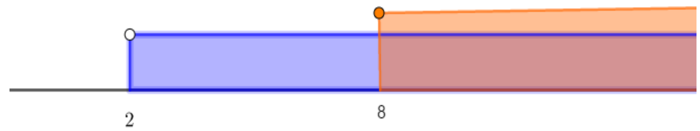
$$\frac{22 - 3x}{2} < \frac{1}{3}(5x + 14) \quad \wedge \quad 5(5x + 14) \leq 27(2 + x)$$

$$66 - 9x < 10x + 28 \quad \wedge \quad 25x + 70 \leq 54 + 27x$$

$$38 < 19x \quad \wedge \quad 16 \leq 2x$$

ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$2 < x \quad \wedge \quad 8 \le x$$



$$CS = [8, +\infty[$$

Ejercicios

I. Resolver las inecuaciones dadas y dar su respuesta en notación de intervalo y representación en forma geométrica sobre la recta de los números reales.

1. $4 + 9x \ge -2 + 7x$	**10.** $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} \le \frac{2}{3} - \frac{5}{6}x$	**11.** $\frac{x+1}{x-2} > 2$
2. $5 - 3x < 13 + 3x$	**11.** $\frac{1}{5} < \frac{2-x}{2} < \frac{2}{3}$	**12.** $\frac{3x-1}{x-3} > 2$
3. $4x - \frac{1}{3} \le 2x + \frac{3}{4}$	**12.** $5x - 3 < 18 - 2x \le 7x + 9$	**13.** $\frac{4x+1}{5} \ge \frac{3x-2}{3}$
4. $-5x + \frac{2}{3} > -\frac{1}{2}x - 1$	**13.** $\frac{2-x}{3} < \frac{2x-3}{5} < \frac{1+3x}{2}$	**14.** $\frac{x+3(x+4)}{4} > 2(x+1)$
5. $-14 \le 4x - 2 \le 14$	**14.** $3x + 5 \le 12 \le 4 - 5x$	**15.** $\frac{2x+1}{5} - \frac{x+1}{2} > \frac{3x-1}{10}$

II. Resolver las siguientes inecuaciones.

1. Hallar el intervalo que recorre "x",

   si: $\frac{x+1}{3} \le x - 2 \quad \ldots$(I)

   $x < \frac{x+4}{2} \quad \ldots$ (II)

2. $2x + 6 \ge 3x + 6 \quad \vee \quad 7x - 4 < 5x + 8$
3. $4x < 1 - \frac{x-2}{2} \quad \wedge \quad 2x < \frac{3x}{-2}$
4. $\frac{x}{2} + \frac{6}{5} < \frac{3x}{4} + \frac{11}{5} > 2x - \frac{14}{5}$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Aplicaciones de inecuaciones lineales

Se sabe que:

UTILIDAD= INGRESO TOTAL - COSTO TOTAL

OBTENER GANANCIA:

UTILIDAD > 0 → INGRESO TOTAL - COSTO TOTAL > 0

NO OBTENER PÉRDIDA:

UTILIDAD ≥ 0 → INGRESO TOTAL - COSTO TOTAL ≥ 0

Problemas

1. Un fabricante hizo un cierto número de anillos de compromiso, vende 60 y le quedan por vender más de la mitad. Después hace 8 anillos más y vende 30. ¿Cuántos anillos hizo en total el fabricante si le quedan por vender menos de 40?
2. Una constructora trata de decidir cuál de dos modelos de grúa comprar. El modelo A cuesta $50 000 y necesita $4 000 anuales por mantenimiento. El modelo B cuesta $40 000 y sus costos anuales de mantenimiento son $5 500. ¿Durante cuántos años debe usarse el modelo B para que sea más económico que el A?
3. Una empresa fabrica un número determinado de computadoras; si duplica su producción y vende 60 le quedan más de 26. Pero si bajara su producción a la tercera parte y vendiera 5, entonces tendría menos de 10 computadoras ¿Cuántas computadoras se fabricaron?
4. Para una compañía que fabrica calentadores para acuarios, el costo combinado de mano de obra y material es de $21 por calentador. Los costos fijos (costos en que se incurre en un periodo dado, sin importar la producción) son $70 000. Si el precio de venta de un calentador es $35, ¿cuántos debe vender para que la compañía genere utilidades?
5. Los niños de una escuela compran x unidades de galletas al precio de 10/x+2 por unidad. ¿Cuál es el número mínimo de unidades de galletas que deben venderse para que el ingreso sea mayor que S/ 130?

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

6. Para una compañía que fabrica termostatos, el costo combinado de mano de obras y material es de \$5 por termostato. Los costos fijos (los costos de un periodo dado sin importar la producción) son de \$60 000. Si el precio de venta de un termostato es de \$7, ¿cuántos deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?

7. Un constructor debe decidir si renta o compra una máquina excavadora. Si renta la máquina el pago mensual sería de \$600 (con base en un año), y el costo diario (gas, aceite y conductor) sería de \$60 por cada día que sea utilizada. Si la compra, su costo fijo anual sería de \$4000, y los costos por operación y mantenimiento serían de \$80 por cada día que la máquina sea utilizada. ¿Cuál es el número mínimo de días al año que tendría que usarse la máquina para justificar la renta en lugar de la compra?

8. La compañía "Adony" fabrica un producto que tiene un precio unitario de venta de \$20 y un costo unitario de \$15. Si los costos fijos son de \$600 000. Determine el número mínimo de unidades que deben ser vendidas para que la compañía tenga utilidades.

9. Una fábrica de camisetas produce x camisetas a un costo de mano de obra total de $\$1.2x$ y un costo total por material de $\$0.3x$, los gastos generales para la planta son $\$\ 6\ 000$. Si cada camiseta se vende en $\$\ 3$, ¿cuántas camisetas deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?

10. Un comerciante adquirió cierto número de artículos de los que vendió 70 y le quedaron más de la mitad, al día siguiente le devolvieron seis, pero logró vender 36 después de lo cual le quedaron menos de 42. ¿Cuántos artículos adquirió el comerciante?

11. Richard, se dedica a la venta de sándwich de pollo. El precio de venta al público es de S/ 1.50 cada uno. Si el costo unitario de S/ 0.80 y los costos fijos de S/ 20 determinar el número de sándwiches de pollo que deben venderse para que Richard no tenga pérdidas.

12. Un fabricante tiene 2 500 unidades de un producto. El precio unitario del producto es S/ 4 000. El próximo mes el precio por unidad se incrementará en S/ 0.50. El fabricante quiere que el ingreso total recibido por la venta de las 2500 unidades no sea menor que S/ 10 750, ¿Cuál es el número máximo de unidades que pueden venderse al mes?

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

1.6.2 Inecuaciones de Segundo Grado (Cuadrática)

Se dice inecuación cuadrática o de segundo grado, en la variable x aquella que se puede expresar como:

$$\begin{array}{l} ax^2+bx+c>0 \\ ax^2+bx+c\geq 0 \\ ax^2+bx+c<0 \\ ax^2+bx+c\leq 0 \end{array} \quad a,b,c\in R/a\neq 0$$

Métodos para resolver una Inecuación Cuadrática

I. Según sea el caso, se puede aplicar los teoremas, proposición y/o corolarios de números reales siguientes:

Teorema 2. $a^2\geq b \Leftrightarrow (b\geq 0)\wedge\left(a\geq\sqrt{b}\ \vee a\leq-\sqrt{b}\right)$

Teorema 3. $a^2\leq b \Leftrightarrow (b\geq 0)\wedge\left(-\sqrt{b}\leq a\leq\sqrt{b}\right)$

Proposición 1.

i. $ax^2+bx+c>0, \forall x\epsilon R \Leftrightarrow a>0\ \wedge\ b^2-4ac<0$
ii. $ax^2+bx+c<0, \forall x\epsilon R \Leftrightarrow a<0\ \wedge\ b^2-4ac<0$

Corolario 1. Tenemos los siguientes casos especiales:

i. $a^2\geq 0 \Longrightarrow\ a\epsilon R$
ii. $a^2>0 \Longrightarrow\ a\epsilon R-\{0\}$
iii. $a^2\leq 0 \Longrightarrow\ a=0$
iv. $a^2<0 \Longrightarrow\ a\ no\ existe$

Ejemplos: Resolver las siguientes inecuaciones cuadráticas:

1. $x^2>9$

Resolución

Aplicando el teorema 2: $x^2>9\Leftrightarrow x>\sqrt{9}\ \vee x<-\sqrt{9}$

$$\Leftrightarrow x>3\ \vee x<-3$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$CS = \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$$

2. $-4x^2 + 4x + 5 > 0$

Resolución

En este caso multiplicamos la desigualdad por (-1), para convertir en positivo el coeficiente de x^2

$$4x^2 - 4x - 5 < 0 \ldots (*)$$

Ahora multiplicamos a $(*)$ por $\left(\frac{1}{4}\right)$

$$x^2 - x - \frac{5}{4} < 0$$

Para llegar a la forma del teorema 3, completamos cuadrados

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} < 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{5}{4} < 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{6}{4}$$

Ahora aplicamos el teorema 3

$$-\sqrt{\frac{6}{4}} < x - \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{6}{4}}$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1 - \sqrt{6}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{6}}{2}$$

$$CS = \langle \frac{1 - \sqrt{6}}{2}, \frac{1 + \sqrt{6}}{2} \rangle$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Resolución

Aplicando el corolario 1.i., tenemos:

$x - 4 \in R \Longrightarrow x \in R$

$CS = R$

3. $(x-4)^2 > 0$

Resolución

Aplicando el corolario 1.i., tenemos:

$x - 4 \in R \Longrightarrow x \in R$

$CS = R$

4. $(x-4)^2 \leq 0$

Resolución

Aplicando el corolario 1.iii., tenemos:

$x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 4$

$CS = \{4\}$

5. $(x-4)^2 < 0$

Resolución

Aplicando el corolario 1.iv., tenemos:

$x - 4\ \ no\ existe$

$x\ no\ existe$

$CS = \phi$

6. Hallar los valores reales que tiene "k" si $x^2 + 3kx + 3 > 0\ , \forall x \in R$

Resolución

Aplicando la proposición 1.i.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$x^2+3kx+3>0, \forall x \in R \Leftrightarrow b^2-4ac<0$$
$$\Longrightarrow (3k)^2-4(1)(3)<0$$

$$9k^2-12<0$$
$$3k^2<4 \Longrightarrow k^2<\frac{4}{3}$$

Aplicando el teorema 3, obtenemos

$$-\sqrt{\frac{4}{3}}<k<\sqrt{\frac{4}{3}}$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}}<k<\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Luego $k \in \langle -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \rangle$

7. $x^2-x<2x^2-2<x^2+2$

Resolución

En este caso separamos en dos inecuaciones con el conectivo " $\wedge$ ", que define a la intersección de dos conjuntos.

$$x^2-x<2x^2-2 \qquad \wedge \qquad 2x^2-2<x^2+2$$
$$0<x^2+x-2 \qquad \wedge \qquad x^2-4<0$$
$$0<x^2+x-2 \qquad \wedge \qquad x^2<4$$

Completando cuadrados y aplicando el teorema 3

$$0<\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2 \qquad \wedge \qquad -2<x<2$$

$$0<\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4} \qquad \wedge \qquad -2<x<2$$

$$\frac{9}{4}<\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \wedge \qquad -2<x<2$$

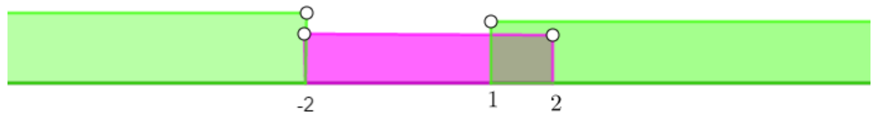
Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{9}{4} \qquad \wedge \qquad -2 < x < 2$$

Aplicando el teorema 2

$$\left[x+\frac{1}{2} > \frac{3}{2} \quad \vee \quad x+\frac{1}{2} < -\frac{3}{2}\right] \wedge \quad -2 < x < 2$$

$$[x > 1 \quad \vee \quad x < -2] \qquad \wedge \quad -2 < x < 2$$



$$CS = \langle 1,2 \rangle$$

II. Regla de signos

En este caso aplicaremos las siguientes propiedades:

1) $ab \geq 0 \Leftrightarrow [a \geq 0 \wedge b \geq 0] \vee [a \leq 0 \wedge b \leq 0]$
2) $ab \leq 0 \Leftrightarrow [a \geq 0 \wedge b \leq 0] \vee [a \leq 0 \wedge b \geq 0]$

Ejemplos: Resolver las siguientes inecuaciones cuadráticas:

1. $4x^2 - x - 5 \leq 0$

Resolución

$$4x^2 - x - 5 \leq 0$$

Aplicando el aspa simple obtenemos

$$(4x-5)(x+1) \leq 0$$

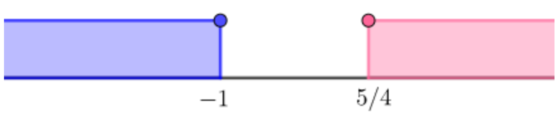
Aplicando la regla de signos II. 2)

$$[4x-5 \geq 0 \ \wedge \ x+1 \leq 0] \qquad \vee \qquad [4x-5 \leq 0 \ \wedge \ x+1 \geq 0]$$

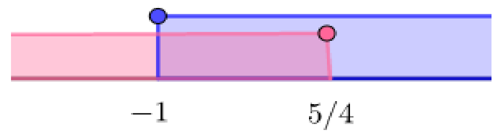
$$[4x \geq 5 \ \wedge \ x \leq -1] \qquad \vee \qquad [4x \leq 5 \ \wedge \ x \geq -1]$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\left[x \geq \frac{5}{4} \ \wedge \ x \leq -1\right] \qquad \vee \qquad \left[x \leq \frac{5}{4} \ \wedge \ x \geq -1\right]$$



$\vee$



$$CS_1 = \emptyset \qquad \vee \qquad CS_2 = \left[-1, \frac{5}{4}\right]$$

$$\therefore \ CS = \phi \cup \left[-1, \frac{5}{4}\right]$$

$$CS = \left[-1; \frac{5}{4}\right]$$

2. $-4x^2 - 8 < -12x$

Resolución

$-4x^2 - 8 < -12x$

$0 < 4x^2 - 12x + 8$

$4x^2 - 12x + 8 > 0$

Multiplicando por $\frac{1}{4}$

$x^2 - 3x + 2 > 0$

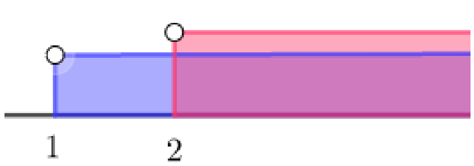
Aplicando aspa simple obtenemos

$(x - 2)(x - 1) > 0$

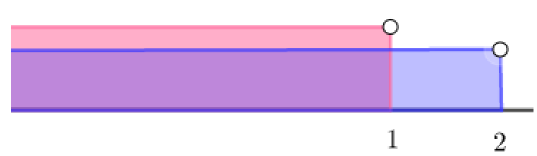
Aplicando la regla de signos II. 1)

$$[x - 2 > 0 \ \wedge \ x - 1 > 0] \qquad \vee \qquad [x - 2 < 0 \ \wedge \ x - 1 < 0]$$

$$[x > 2 \ \wedge \ x > 1] \qquad \vee \qquad [x < 2 \ \wedge \ x < 1]$$



$\vee$



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$CS_1 = \langle 2, +\infty\rangle \qquad \vee \qquad CS_2 = \langle -\infty, 1\rangle$$

$$\therefore\ CS = \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$$

III. Método práctico

Si $ax^2 + bx + c,\ donde\ a > 0$ es de fácil factorización, cualquier inecuación cuadrática se pueden resolver fácilmente, ubicando en la recta real los puntos referenciales (las raíces de la ecuación cuadrática que son reales y diferentes) y asignando al primer intervalo de la derecha, el signo " $+$ ", luego al siguiente intervalo de la izquierda el signo " $-$ ", después al siguiente intervalo el signo " $+$ " ; Y para elegir el conjunto solución miramos la inecuación que nos pregunta.

Ejemplos: Resolver las siguientes inecuaciones cuadráticas:

1. $x^2 + x > 6$

Resolución

$$x^2 + x - 6 > 0$$

factorizando

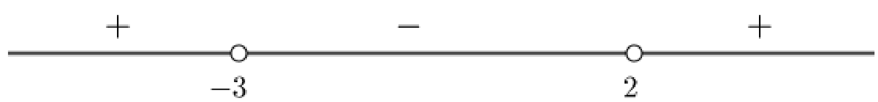
$$(x-2)(x+3) > 0$$

Para obtener los puntos de referencia o las raíces (puntos críticos) igualamos cada factor a cero.

$$x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

$$x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3$$

Ubicamos los puntos referenciales en la recta real, que lo dividirá en tres intervalos, y colocamos los signos alternadamente empezando del intervalo de la derecha.



Luego elegimos el signo según la pregunta $\quad x^2 + x - 6 > 0$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

en este caso el signo " + "

Así el conjunto solución será

$$CS = \langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$$

2. $-4x^2 + 4x + 3 > 0$

Resolución

$-4x^2 + 4x + 3 > 0$

Multiplicamos a la desigualdad por (-1)

$4x^2 - 4x - 3 < 0$

Factorizando obtenemos

$(2x + 1)(2x - 3) < 0$

Igualamos a cero cada factor, para obtener los puntos críticos

$$2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Luego colocamos los puntos de referencia en la recta real, colocamos los signos de forma alternada en los intervalos y escogemos el signo que corresponda a la inecuación $4x^2 - 4x - 3 < 0$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$CS = \langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle$$

1.6.3 Inecuaciones Racionales

Son inecuaciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, además tenemos que tener en cuenta que $Q(x) \neq 0$

Si multiplicamos las inecuaciones por $Q^2(x)$, entonces obtenemos

$$P(x)Q(x) < 0, \qquad P(x)Q(x) \leq 0, \qquad P(x)Q(x) > 0, \qquad P(x)Q(x) \geq 0$$

Luego resolvernos estas inecuaciones por la regla de signos ó por el método práctico (puntos críticos).

Resolución de una Inecuación por Puntos Críticos

Para resolver una inecuación por este método, hay que tener en cuenta

- Se trasladan todos los términos al primer miembro, obteniendo siempre una expresión de coeficiente principal positivo y el segundo miembro será cero.
- Se hallan todos los factores primos de la expresión obtenida.
- Se calculan los puntos críticos, que son obtenidos al igualar cada factor primo a cero.
- Se ubican ordenadamente todos los puntos críticos en la recta real, dichos puntos originan en la recta dos o más intervalos.

Caso I: Si los puntos críticos son reales y diferentes

- Se marcan los intervalos obtenidos a partir de la derecha alternando los signos $(+), (-), (+), \ldots$
- Si el signo de relación es $>$ ó $\geq$, el conjunto solución estará conformado por todos los intervalos positivos, pero si el signo de relación es $<$ ó $\leq$, el conjunto solución lo conformarán todos los intervalos negativos.

Caso II: Si los puntos críticos son reales e iguales de multiplicidad impar, se trabaja como en el caso I.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Si los puntos críticos son reales e iguales de multiplicidad par, se repite el signo en los intervalos correspondientes.

Caso III: Si los puntos críticos son no reales (complejos), simplemente no lo consideramos en la recta real.

Ejemplos: Resolver las siguientes inecuaciones fraccionarias:

1. $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-42} \geq 0$

Resolución

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-42} \geq 0$$

Factorizamos el numerador y denominador

$$\frac{(x-3)(x-2)}{(x-6)(x+7)} \geq 0$$

Para obtener los puntos críticos, igualamos a cero cada factor primo

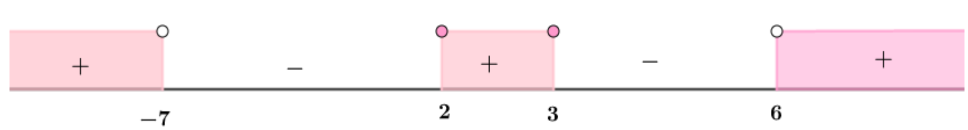
$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

$$x-2=0 \Longrightarrow x=2$$

$$x-6=0 \Longrightarrow x=6$$

$$x+7=0 \Longrightarrow x=-7$$

Colocamos los puntos críticos en la recta real ordenadamente, considerando que los puntos críticos del denominador siempre irán abiertos; luego trabajamos con el caso I.



$$CS = \langle -\infty, -7\rangle \cup [2,3] \cup \langle 6, +\infty\rangle$$

2. $\frac{x-5}{7-x} \geq 0$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

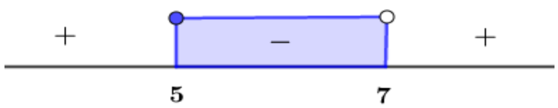
Resolución

$$\frac{x-5}{7-x} \geq 0$$

En este caso multiplicaremos a la inecuación por (-1), puesto que el factor lineal del denominador, su coeficiente principal debe ser positivo, así poder aplicar el método de los puntos críticos.

$$\frac{x-5}{x-7} \leq 0$$

Aplicando el caso I, obtenemos



$$CS = [5,7[$$

3. $\frac{5x-2}{x} - 4 < 0$

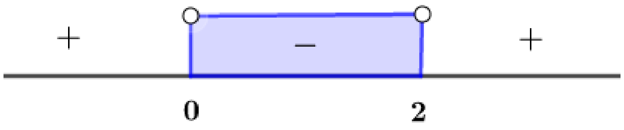
Resolución

$$\frac{5x-2}{x} - 4 < 0$$

Sacando el mínimo común múltiplo

$$\frac{x-2}{x} < 0$$

Aplicando el caso I, obtenemos



$$CS = \langle 0,2 \rangle$$

4. $\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x}$

Resolución

$$\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x}$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Trasladamos todos los términos al primer miembro y el segundo miembro será cero

$$\frac{x-2}{x+3}-\frac{x+1}{x}<0$$

Sacando el mínimo común múltiplo

$$\frac{x(x-2)-(x+3)(x+1)}{x(x+3)}<0$$

$$\frac{x^2-2x-(x^2+4x+3)}{x(x+3)}<0$$

$$\frac{-2x-4x-3}{x(x+3)}<0$$

$$\frac{-6x-3}{x(x+3)}<0$$

multiplicaremos a la inecuación por (-1), puesto que el factor lineal del numerador, su coeficiente principal debe ser positivo, así poder aplicar el método de los puntos críticos.

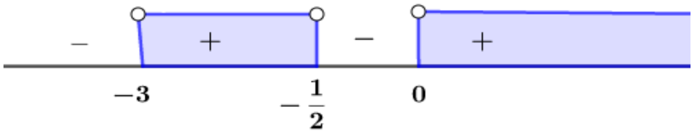
$$\frac{6x+3}{x(x+3)}>0$$

$$\frac{3(2x+1)}{x(x+3)}>0$$

Multiplicando por $\left(\frac{1}{3}\right)$, obtenemos:

$$\frac{(2x+1)}{x(x+3)}>0$$

Aplicando el caso I, obtenemos



$$CS=\langle -3,-\frac{1}{2}\rangle \cup \langle 0,+\infty\rangle$$

Ejercicios:

I. Resolver las siguientes inecuaciones cuadráticas:

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

1. $x^2 - 5x - 6 \geq 0$	8. $(2x+1)^2 \leq 0$
2. $x^2 < 25$	9. $x^2 \leq 4x$
3. $x^2 > 25$	10. $(x-3)(x-5) < 0$
4. $x^2 - 11x + 28 > 0$	11. $2x^2 - 6x + 3 < 0$
5. $(2x+1)^2 > 0$	12. $2x^2 + 6x - 9 < 0$
6. $(2x+1)^2 \geq 0$	13. $x(3x+2) < (x+2)^2$
7. $(2x+1)^2 < 0$	

II. Resolver las siguientes inecuaciones fraccionarias:

1. $\frac{3x-1}{x-3} > 2$	**8.** $\frac{x}{1-x} \leq \frac{x-3}{2-x}$
2. $\frac{x+1}{x-2} > 2$	**9.** $\frac{(x^2-1)(x+3)(x-2)}{(x-5)(x+7)} > 0$
3. $\frac{3x+5}{2x+1} \leq 3$	**10.** $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} < \frac{2x}{x+1}$
4. $\frac{x-5}{x-7} \leq 0$	**11.** $\frac{3x-2}{x+1} < \frac{4}{x-2}$
5. $\frac{9x+10}{x+2} < 2$	**12.** $\frac{6}{x-1} - \frac{5}{x-2} > -2$
6. $\frac{3x^2+1}{x^2-x-2} \geq 3$	**13.** $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3$
7. $\frac{x^2-5}{x^2-x-12} < 1$	**14.** $\frac{x+4}{x-5} < \frac{x-2}{x+3}$

Problemas con Inecuaciones Cuadráticas

1. Una fábrica de cierto artículo ha estimado que su ganancia en miles de soles está dada por $f(x) = -x^2 + 582x - 76$ donde x (en miles) es el número de unidades producidas. ¿Qué nivel de producción le permitirá obtener una ganancia de al menos $S/14\ 000$?

2. Las ventas mensuales "x" de cierto producto cuando su precio es "y" dólares están dada por $y = 200 - 3x$. El costo de producir x unidades al mes del producto es $C = 650 + 5x$ dólares. ¿Cuántas unidades de este producto deberán producirse y venderse de modo que la utilidad mensual sea por lo menos de 2 200 dólares?

ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

3. La peluquería "Fanny" tiene en promedio de 120 clientes semanales a un costo actual de $S/8$ por corte de cabello. Por cada incremento de $S/\ 0.50$ en el precio, la peluquería perdería 6 clientes. ¿Cuál debe ser el precio máximo que puede cobrarse de modo que los ingresos semanales no sean menores que los actuales?

4. En el mercado se puede venderse "x" unidades de cierto artículo al mes, a p $= 500 - 5x$. ¿Cuántas unidades deberán venderse cada mes con el objeto de obtener ingresos de por lo menos $ 12 500?

5. El costo de producir "x" lámparas esta dado por $C = 300 + 70x + x^2$. Si estas se pueden vender a 140 soles. ¿Cuántas deben producirse y venderse para obtener utilidades mensuales de al menos 900 soles?

6. Un fabricante de cierto artículo puede vender al precio de 60 soles cada artículo que produce. Gasta 40 soles en materia prima y mano de obra por artículo y tiene costos fijos de 3 000 soles a la semana en la operación de la planta. Encuentre el número de unidades que debería producir y vender para obtener una utilidad de al menos 1 000 soles a la semana.

7. Para una compañía que fabrica calentadores para acuarios el costo combinado de mano de obra y material es de $S/21$ por calentador. Los costos fijos son $S/70\ 000$. Si el precio de venta de un calentador es $S/35$ ¿Cuánto debe vender para que la compañía genere utilidades?

8. El ingreso mensual obtenido por la venta de "x" cajas de dulces está dado por $I = x(5 - 0.5x)$ soles. El costo al por mayor de cada caja es 1.50 soles ¿Cuántas cajas deben venderse cada mes para obtener una ganancia de al menos 60 soles?

9. Si el precio "p" de cierto artículo depende de la cantidad demandada "q" y está dado por $p = 120 - 2q$, y además se tienen costos fijos de $S/300$ y el costo de producción de cada unidad es de $S/20$. ¿Cuántas unidades deben producirse y venderse para obtener utilidades de al menos $S/900$?

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

10. Una compañía de belleza vende 300 unidades de un cosmético cuando su precio unitario es de $S/60$. Por cada disminución de $S/5$ en el precio se venderán 45 unidades más. ¿Qué precio máximo deberá fijar para obtener ingresos de al menos $S/19\ 500$?

1.6.4 Inecuaciones Polinómicas

Para resolver las inecuaciones polinómicas factorizables usaremos el método de los puntos críticos.

Ejemplos: Resolver las siguientes inecuaciones polinómicas:

1. $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 < 0$

Resolución

Como el polinomio está ordenado y completo, lo factorizamos con el método de Ruffini

	1	-3	-15	19	30
x=-1		-1	4	11	-30
	1	-4	-11	30	0
x=2		2	-4	-30	
	1	-2	-15	0	
x=-3		-3	15		
	1	-5	0		
x=5		5			
	1	0			

Luego el polinomio queda factorizado de la siguiente manera:

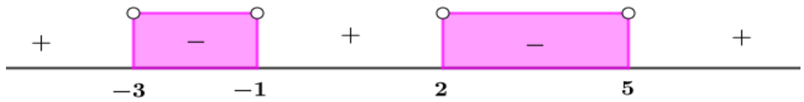
$$(x+1)(x-2)(x+3)(x-5) < 0$$

Donde los puntos críticos son reales y diferentes:

$$x = -3$$
$$x = -1$$
$$x = 2$$
$$x = 5$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Aplicando el caso I, del método de los puntos críticos obtenemos:



$$CS = \langle -3, -1 \rangle \cup \langle 2,5 \rangle$$

2. $(x^2 + 2x - 3)(3x - 4 + x^2) > 0$

Resolución

$(x^2 + 2x - 3)(3x - 4 + x^2) > 0$

Ordenamos y factorizamos

$(x + 3)(x - 1)(x^2 + 3x - 4) > 0$

$(x + 3)(x - 1)(x + 4)(x - 1) > 0$

$(x + 3)(x + 4)(x - 1)^2 > 0$

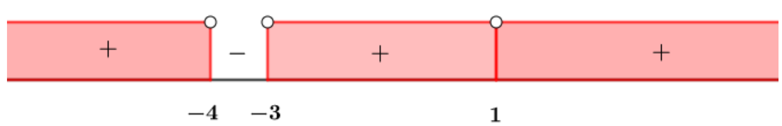
Luego tenemos los puntos críticos

$x = -4$

$x = -3$

$x = 1 \quad de\ multiplicidad\ 2\ (par)$

Aplicando el caso I y II, obtenemos



$$CS = \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle -3,1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$$

O también se puede poner como respuesta, el equivalente:

$$CS = \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle -3, +\infty \rangle - \{1\}$$

3. $(x + 3)(x + 4)(x - 1)^2 \geq 0$

Resolución

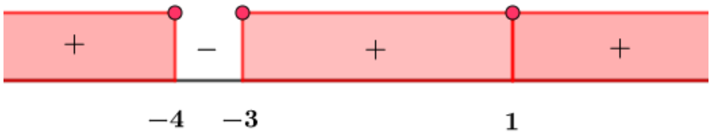
$(x + 3)(x + 4)(x - 1)^2 \geq 0$

Podemos observar que se trata del mismo polinomio del ejemplo anterior entonces los puntos críticos son:

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$x = -4$$
$$x = -3$$
$$x = 1 \quad de\ multiplicidad\ 2\ (par)$$

Aplicando el caso I y II, obtenemos:



$$CS =]-\infty, -4] \cup [-3, +\infty[$$

4. $(x+3)(x+4)(x-1)^2 < 0$

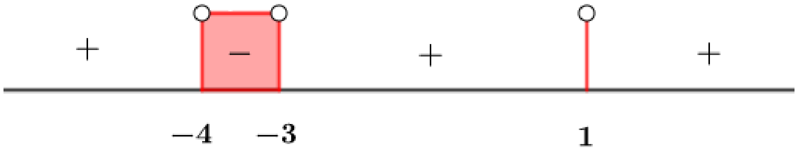
Resolución

$$(x+3)(x+4)(x-1)^2 < 0$$

Observemos que se trata del mismo polinomio del ejemplo anterior entonces los puntos críticos son:

$$x = -4$$
$$x = -3$$
$$x = 1 \quad de\ multiplicidad\ 2\ (par)$$

Aplicando el caso I y II del método de los puntos críticos, obtenemos:



$$CS = \langle -4, -3 \rangle$$

5. $(x+3)(x+4)(x-1)^2 \leq 0$

Resolución

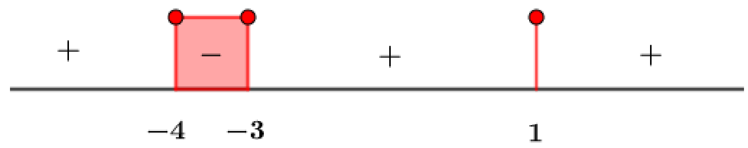
$$(x+3)(x+4)(x-1)^2 \leq 0$$

Observemos que se trata del mismo polinomio del ejemplo anterior entonces los puntos críticos son:

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$x = -4$$
$$x = -3$$
$$x = 1 \quad de\ multiplicidad\ 2\ (par)$$

Aplicando el caso I y II del método de los puntos críticos, obtenemos



$$CS = [-4, -3] \cup \{1\}$$

6. $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 6x + 8 \geq 0$

Resolución

Como el polinomio está ordenado y completo, lo factorizamos con el método de Ruffini

	1	-5	5	-3	-6	8
x=1		1	-4	1	-2	-8
	1	-4	1	-2	-8	0
x=-1		-1	5	-6	8	
	1	-5	6	-8	0	
x=4		4	-4	8		
	1	-1	2	0		

Luego el polinomio queda factorizado de la siguiente manera:

$$(x-1)(x+1)(x-4)(x^2 - x + 2) \geq 0$$

Observemos que el factor $x^2 - x + 2$ no se puede factorizar en los reales, puesto que su discriminante es negativa

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(2) = -7 < 0$$

Lo que significa que el factor $x^2 - x + 2$ es complejo, por lo que aplicamos el caso III del método de los puntos críticos, es decir no consideramos ese factor complejo, luego la pregunta se reduce a:

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$(x-1)(x+1)(x-4) \geq 0$$

Donde los puntos críticos son reales y diferentes

$$x = -1$$
$$x = 1$$
$$x = 4$$

Ahora aplicamos el caso I del método de los puntos críticos, obtenemos:

$$CS = [-1,1] \cup [4, +\infty[$$

Ejercicios

Resolver las siguientes inecuaciones polinómicas

1. $x^3 + x^2 \leq 4x + 4$
2. $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8 \geq 0$
3. $(x^3 + x^2 - 9x - 9)(x-2)^3 < 0$
4. $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 < 0$
5. $(x - 2 + x^2)(x^2 + 2x - 8) < 0$
6. $4x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x - 3 \leq 0$
7. $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 > 0$
8. $(4 - x^2)(8 - x^3) \leq 0$
9. $1 + x - x^2 - x^3 \leq 0$
10. $(x - x^3)(1 - x) < 0$

1.7 Valor Absoluto

$$|a| = \begin{cases} a, & si \ \ a \geq 0 \\ -a, & si \ \ a < 0 \end{cases}$$

Se lee como: el valor absoluto de número real "a" es igual al mismo número "a", si a es positivo o cero, o es igual a "$-a$", si a es negativo.

Propiedades

1. $\forall a \in R, se\ cumple\ |a| \geq 0$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3. $|ab| = |a||b|$
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
5. $|a|^2 = a^2$
6. $|a| = |-a|$
7. $\forall a \in R, |a| \geq a$
8. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (**Desigualdad triangular**)
9. $|a| = b,\ b \geq 0 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$
10. $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \ \vee \ a = -b$
11. $|a| \leq b, b \geq 0 \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
12. $|a| \geq b, \forall b \in R \Leftrightarrow a \geq b \vee a \leq -b$
13. $|a| < |b| \Rightarrow a^2 < b^2$

Desigualdad Triangular

$|a+b| \leq |a| + |b|$

Prueba

$|a+b|^2 = (a+b)^2$ propiedad 5

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ binomio al cuadrado

$a^2+2ab+b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2$ propiedad 5

$|a|^2 + 2ab + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$ propiedad 7

$|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$ Trinomio cuadrado perfecto

$|a+b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$ axioma de transitividad

$|a+b| \leq |a| + |b|$ propiedad 30 de numeros reales.

Ejemplos

Para resolver ejercicios y/o problemas con valor absoluto aplicamos la definición y/o propiedades

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

1. $|3x-1| = 2x+5$

Resolución

Aplicamos la propiedad 9: $|a| = b, b \geq 0 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

Si $2x+5 \geq 0 \Longrightarrow 3x-1 = 2x+5 \ \vee \ 3x-1 = -(2x+5)$

$x \geq -\dfrac{5}{2} \wedge (x = 6 \ \vee \ 3x-1 = -2x-5)$

$x \geq -\dfrac{5}{2} \wedge (x = 6 \ \vee \ 5x = -4)$

$x \geq -\dfrac{5}{2} \wedge \left(x = 6 \ \vee \ x = -\dfrac{4}{5}\right)$

Como $6 \geq -\frac{5}{2}$ y $-\frac{4}{5} \geq -\frac{5}{2}$

Luego $CS = \left\{6, -\frac{4}{5}\right\}$

2. $|2x+3| + 4 = 5x$

Resolución

$|2x+3| + 4 = 5x$

$|2x+3| = 5x-4$

Aplicamos la propiedad 9: $|a| = b, b \geq 0 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

Si $5x-4 \geq 0 \Rightarrow 2x+3 = 5x-4 \ \vee \ 2x+3 = -(5x-4)$

$x \geq \dfrac{4}{5} \wedge (3x = 7 \ \vee 2x+3 = -5x+4)$

$x \geq \dfrac{4}{5} \wedge \left(x = \dfrac{7}{3} \vee 7x = 1\right)$

$x \geq \dfrac{4}{5} \wedge \left(x = \dfrac{7}{3} \vee x = \dfrac{1}{7}\right)$

Como $\frac{7}{3} \geq \frac{4}{5}$ y $\frac{1}{7} \ngeq \frac{4}{5}$

Luego $CS = \left\{\frac{7}{3}\right\}$

3. $|3x-1| = |5x-15|$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Resolución

$|3x-1| = |5x-15|$

Aplicamos la propiedad 10: $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \ \lor \ a = -b$

$3x-1 = 5x-15 \ \lor \ 3x-1 = -(5x-15)$

$2x = 14 \ \lor \ 3x-1 = -5x+15$

$x = 7 \ \lor \ 8x = 16$

$x = 7 \ \lor \ x = 2$

$$CS = \{2, 7\}$$

4. $|2x-3| + 2 = |x-6|$

Resolución

$|2x-3| + 2 = |x-6|$

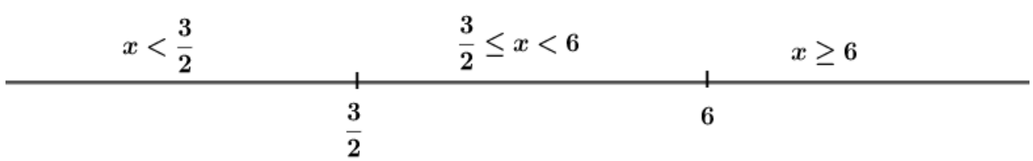
Para resolver ecuaciones con 2 o mas valores absolutos, lo haremos con el método de los puntos críitcos.

Igualamos cada valor absoluto a cero para encontrar los puntos críticos.

$|2x-3| = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

$|x-6| = 0 \Rightarrow x = 6$

Colocamos los puntos críticos en la recta real, que lo dividirá en intervalos.



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Luego resolveremos la ecuación en cada intervalo, para saber la respuesta de cada valor absoluto tomaremos cualquier valor del intevalo:

$x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} \leq x < 6$	$x \geq 6$
$x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} \leq x < 6$	$x \geq 6$
$Si\ x = 0 \Rightarrow 2(0) - 3 = -3\ es\ negativo$ $luego\ \|2x-3\| = 3 - 2x$	$Si\ x = 2 \Rightarrow 2(2) - 3 = 1$ $es\ positivo$ $luego\ \|2x-3\| = 2x - 3$	$Si\ x = 6 \Rightarrow 2(6) - 3 = 9\ es\ positivo$ $luego\ \|2x-3\| = 2x - 3$
$Si\ x = 0 \Rightarrow 0 - 6 = -6\ es\ negativo$ $luego\ \|x-6\| = 6 - x$	$si\ x = 2 \Rightarrow 2 - 6 = -4$ $es\ negativo$ $luego\ \|x-6\| = 6 - x$	$Si\ x = 6 \Rightarrow 6 - 6 = 0\ es\ cero$ $luego\ \|x-6\| = x - 6$
$Asi\ \ \|2x-3\| + 2 = \|x-6\|$ $3 - 2x + 2 = 6 - x$ $x = -1$ $-1 < \frac{3}{2}$	$Asi\ \|2x-3\| + 2 = \|x-6\|$ $2x - 3 + 2 = 6 - x$ $x = \frac{7}{3}$ $\frac{3}{2} \leq \frac{7}{3} < 6$	$Asi\ \ \|2x-3\| + 2 = \|x-6\|$ $2x - 3 + 2 = x - 6$ $x = -5$ $-5\ no\ es\ mayor\ \ que\ \ 6$

Por tanto tenemos que $CS = \left\{-1, \frac{7}{3}\right\}$

5. $|x-2| < \frac{4-x}{x}$

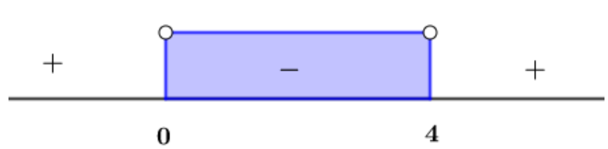
Resolución

$$|x-2| < \frac{4-x}{x}$$

Aplicamos la propiedad 11: $|a| < b, b > 0 \Leftrightarrow -b < a < b$

Primero determinamos el universo $(b > 0)$

$\frac{4-x}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x} < 0$



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Luego tenemos el universo: $U = \langle 0,4\rangle$

$$-\frac{4-x}{x} < x-2 < \frac{4-x}{x}$$

$$-\frac{4-x}{x} < x-2 \qquad \wedge \qquad x-2 < \frac{4-x}{x}$$

$$-\frac{4-x}{x} - x + 2 < 0 \qquad \wedge \qquad x - 2 - \frac{4-x}{x} < 0$$

$$\frac{x-4}{x} - x + 2 < 0 \qquad \wedge \qquad \frac{x^2-2x-4+x}{x} < 0$$

$$\frac{x-4-x^2+2x}{x} < 0 \qquad \wedge \qquad \frac{x^2-2x-4+x}{x} < 0$$

$$\frac{x^2-3x+4}{x} > 0 \qquad \wedge \qquad \frac{x^2-x-4}{x} < 0$$

Observemos que el factor x^2-3x+4 es complejo, puesto que

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(4)$

$\Delta = -7 < 0$

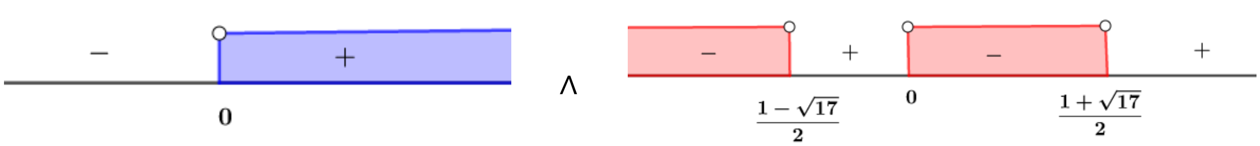
Cuando tenemos un factor complejo, no lo consideramos (caso III, del método de puntos críticos)

Por otro lado, las raíces (puntos críticos) del factor $x^2 - x - 4$ son:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-4)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

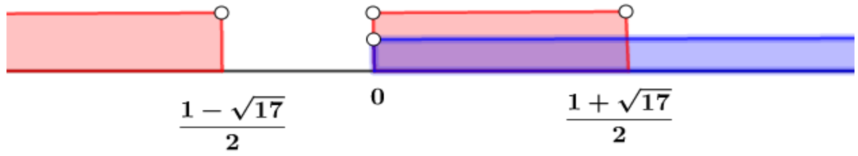
Luego tenemos $\frac{1}{x} > 0 \ \wedge \ \frac{\left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)}{x} < 0$



$$\langle 0, +\infty\rangle \ \wedge \ \langle -\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\rangle \cup \langle 0, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\rangle$$

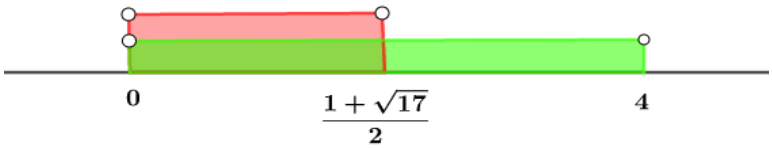
Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Interceptando se obtiene:



$$\langle 0, \frac{1+\sqrt{17}}{2} \rangle$$

Ahora este resultado falta interceptar con el universo, para llegar a la respuesta final.



$$CS = \langle 0, \frac{1+\sqrt{17}}{2} \rangle$$

6. $|3x+1| > x-2$

Resolución

$|3x+1| > x+2$

Aplicamos la propiedad 12: $|a| > b, \forall b \in R \Leftrightarrow a > b \vee a < -b$

$3x+1 > x+2 \;\; \vee \;\; 3x+1 < -(x+2)$

$2x > 1 \;\; \vee \;\; 3x+1 < -x-2$

$x > \frac{1}{2} \;\; \vee \;\; 4x < -3$

$x > \frac{1}{2} \;\; \vee \;\; x < -\frac{3}{4}$

$CS = \langle -\infty, -\frac{3}{4} \rangle \cup \langle \frac{1}{2}, +\infty \rangle$

7. $|x-2| + |x+5| < 3x+2$

Resolución

$|x-2| + |x+5| < 3x+2$

En este caso aplicaremos el método de los puntos críitcos.

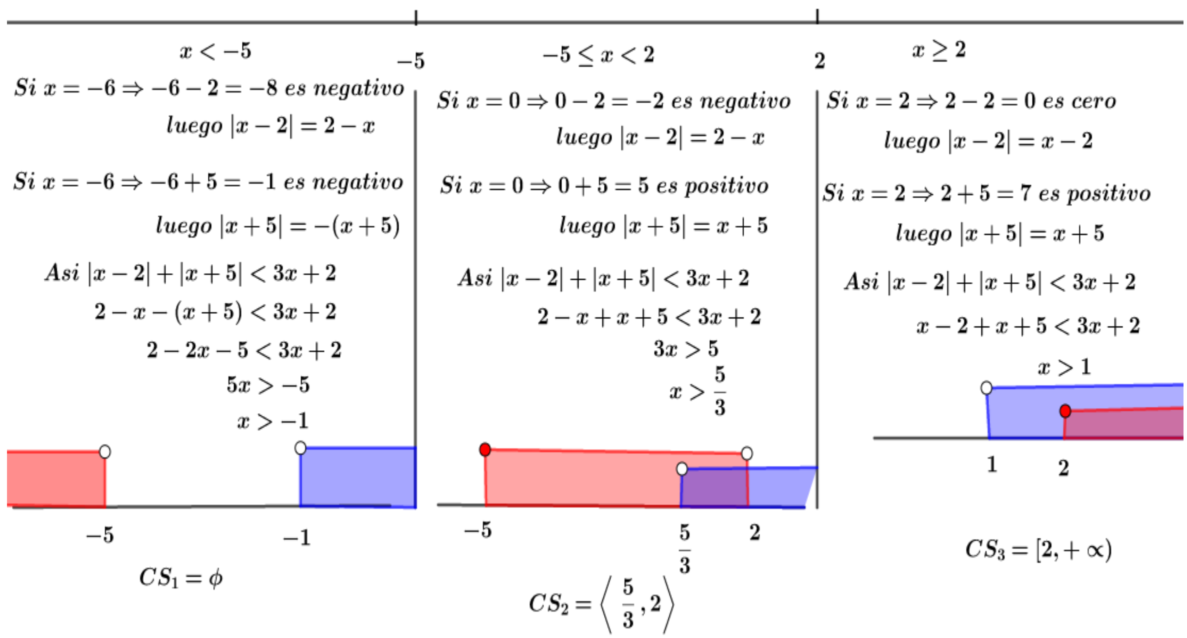
Igualamos cada valor absoluto a cero para encontrar los puntos críticos.

$|x-2| = 0 \Rightarrow x = 2$

$|x+5| = 0 \Longrightarrow x = -5$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Colocamos los puntos críticos en la recta real, que lo dividirá en intervalos



Por tanto, tenemos: $CS = \phi \cup \langle \frac{5}{3}, 2 \rangle \cup [2, +\infty[$

$$CS = \langle \frac{5}{3}, +\infty \rangle$$

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:

1. $|x^2 - 4| = 4 - 2x$

2. $|2x + 9| = x - 1$

3. $|3x - 1| = 7 - x$

4. $|2x - 6| = |4 - 5x|$

5. $|3x - 1| - |x + 2| = 1$

6. $|2x - 3| - 1 = |x - 3|$

7. $|x^2 - 6x + 8| \leq x - 4$

8. $\left|\frac{x-2}{x-1}\right| < x - 1$

9. $|2x + 1| < 2x - 1$

10. $|x - 3| > 2$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

11. $|5x-2| \geq 4x$

12. $|2x-1| \geq x-1$

13. $\frac{|x-1|+|x-2|}{|x|-3} < 3$

14. $|x-5|-|x-2| < |x-1|+3-x$

1.8 Ecuaciones e Inecuaciones con Radicales

Para resolver ecuaciones con radicales usaremos los siguientes teoremas**:**

T1: $Si\ a \geq 0\ \wedge b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2$

T2: $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \leq a \leq b$

T3: $\sqrt{a} \leq b \Leftrightarrow Si\ a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow a \leq b^2$

T4: $\sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow [a \geq 0\ \wedge b < 0] \vee [a \geq b^2 \wedge b \geq 0]$

T5: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0\ \wedge b \geq 0$

T6: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 0 \Leftrightarrow a = 0\ \wedge b = 0$

T7: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq k, k \geq 0 \Leftrightarrow Si\ a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Longrightarrow \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \leq k^2$

Ejemplos

Resolver los siguientes ejercicios:

1. $\sqrt{10-x} = x+2$

Resolución

$\sqrt{10-x} = x+2$

En este caso aplicamos el **T1:** $Si\ a \geq 0\ \wedge b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2$

$\overbrace{(10-x \geq 0\ \wedge x+2 \geq 0)}^{uiverso} \Rightarrow 10-x = (x+2)^2$

$\overbrace{(10 \geq x\ \wedge x \geq -2)}^{uiverso} \Rightarrow 10-x = x^2+4x+4$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\overbrace{(x \leq 10 \ \wedge x \geq -2)}^{uiverso} \Rightarrow \ x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \ (x+6)(x-1) = 0$$

$$\overbrace{[-2{,}10]}^{\boldsymbol{universo}} \quad \wedge \qquad A = \{x = -6 \vee x = 1\}$$

Interceptando el universo con el conjunto A, obtenemos el conjunto solución

$$CS = \{1\}$$

2. $\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} - 2\sqrt{x} = 0$

Resolución

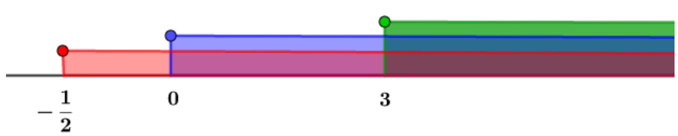
$$\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} - 2\sqrt{x} = 0$$

Primero encontramos el universo

$$x - 3 \geq 0 \quad \wedge \quad 2x + 1 \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 0$$

$$x \geq 3 \qquad \wedge \qquad 2x \geq -1 \quad \wedge \quad x \geq 0$$

$$x \geq 3 \qquad \wedge \qquad x \geq -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad x \geq 0$$



Ahora a la ecuación $\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} - 2\sqrt{x} = 0$ la expresamos como suma de radicales y quedaria asi:

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} = 2\sqrt{x}$$

Luego lo elevamos al cuadrado y reducimos a la menor expresión

$$\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1}\right)^2 = \left(2\sqrt{x}\right)^2$$

$$x - 3 + 2\sqrt{x-3}\sqrt{2x+1} + 2x + 1 = 4x$$

$$2\sqrt{x-3}\sqrt{2x+1} = x + 2$$

Ahora elevamos al cuadrado y resolvemos

$$4(x-3)(2x+1) = (x+2)^2$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$4(2x^2 + x - 6x - 3) = x^2 + 4x + 4$

$8x^2 - 20x - 12 = x^2 + 4x + 4$

$7x^2 - 24x - 16 = 0$

$(7x + 4)(x - 4) = 0$

$7x + 4 = 0 \ \vee x - 4 = 0$

$A = \left\{-\frac{4}{7}, 4\right\}$

Por lo tanto, el conjunto solución será la intersección del universo y el conjunto A

$[3, +\infty[\ \cap \left\{-\frac{4}{7}, 4\right\} = \{4\}$

$CS = \{4\}$

3. $\sqrt{1 - x} \leq \sqrt{2x + 1}$

Resolución

Para resolver este ejercicio aplicamos T**2:** $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \leq a \leq b$

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - x} \leq \sqrt{2x + 1} \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \leq 1 - x \leq 2x + 1\\ &\Leftrightarrow 0 \leq 1 - x \ \wedge \ 1 - x \leq 2x + 1\\ &\Leftrightarrow \quad x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq 3x\\ &\Leftrightarrow \quad x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq x\end{aligned}$$

Luego tenemos que $CS = [0,1]$

4. $\sqrt{4 - x^2} \leq x$

Resolución

Para resolver este ejercicio aplicamos el

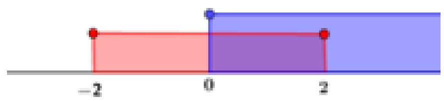
T**3:** $\sqrt{a} \leq b \Leftrightarrow Si \ a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow a \leq b^2$

Si $\{4 - x^2 \geq 0 \ \wedge x \geq 0\} \Rightarrow 4 - x^2 \leq x^2$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

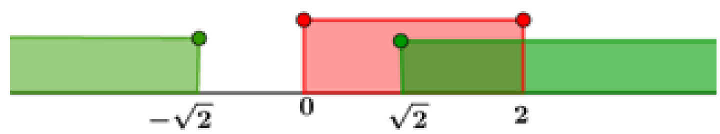
$$\{x^2 \leq 4 \quad \wedge \quad x \geq 0\} \Rightarrow 4 \leq 2x^2$$

$$\{-2 \leq x \leq 2 \quad \wedge \quad x \geq 0\} \Rightarrow 2 \leq x^2$$



$\wedge \quad x \leq -\sqrt{2} \ \vee \ \ x \geq \sqrt{2}$

$[0,2] \qquad \wedge \qquad A =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$



Luego el conjunto solución es:

$$CS = [\sqrt{2}, 2]$$

5. $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x + 3$

Resolución

Para resolver este ejercicio aplicamos el **T4,** adaptándolo

$$\sqrt{a} > b \Leftrightarrow [a > 0 \ \wedge b < 0] \vee [a > b^2 \wedge b \geq 0]$$

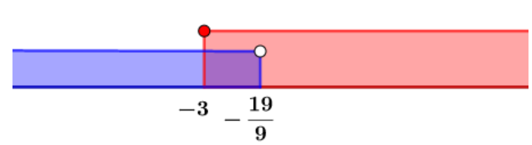
$$[x^2 - 3x - 10 > 0 \ \wedge \ x + 3 < 0] \vee [x^2 - 3x - 10 > (x+3)^2 \wedge x + 3 \geq 0]$$

$$[(x-5)(x+2) > 0 \ \wedge \ x < -3] \vee [x^2 - 3x - 10 > x^2 + 6x + 9 \ \wedge x \geq -3]$$

$$[(x-5)(x+2) > 0 \ \wedge \ x < -3] \vee [-19 > 9x \wedge x \geq -3]$$

$$\vee \quad \left[x < -\frac{19}{9} \wedge x \geq -3\right]$$

$]-\infty, -3[\quad \vee$



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$]-\infty,-3[\ \cup\ \left[-3,-\frac{19}{9}\right[$$

$$CS = \left]-\infty,-\frac{19}{9}\right[$$

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones con radicales:

1. $\sqrt{4x-x^2} = 3x-4$

2. $2x-\sqrt{x-1} = 3x-7$

3. $\sqrt{x-2x^2} = x$

4. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{16x+1} = -\sqrt{5x}$

5. $\sqrt{5-2x}-\sqrt{x+6} = \sqrt{x+3}$

6. $\sqrt{3x} < \sqrt{x^2+2}$

7. $\sqrt{x^2-6x} \leq \sqrt{6-x}$

8. $\sqrt{8-4x} > \sqrt{x^2-3x+2}$

9. $\sqrt{x-2x^2} < 1+2x$

10. $2\sqrt{x+4}-x \leq 1$

11. $\sqrt{9-x^2} < |x-1|$

12. $\sqrt{-x^2-5x-6} \geq 2x+2$

13. $\sqrt{2x-1} \geq x-1$

14. $\sqrt{x-2x^2} < 1+2x$

15. $\sqrt{5x-2} > 1-x$

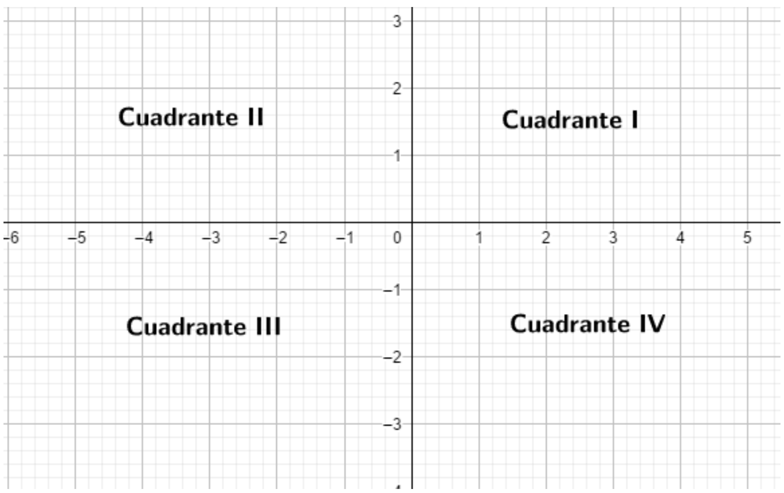
16. $\sqrt{\frac{x}{1-x}} > \frac{1}{2x-1}$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

CAPÍTULO II: GEOMETRÍA ANALÍTICA

2.1 Sistema de Coordenadas Rectangulares

El sistema de coordenadas rectangulares divide al plano en cuatro cuadrantes por medio de dos rectas perpendiculares que se cortan en el punto 0. La recta horizontal se denomina eje X, la recta vertical eje Y, ambas constituyen los ejes de coordenadas. El punto 0, se llama origen del sistema. La distancia de un punto al eje Y se llama abscisa. La distancia de un punto al eje X es la ordenada y ambas constituyen las coordenadas de dicho punto y se representa por el símbolo (x, y).



Par ordenado

Cada punto de un plano se asocia con una pareja de números llamados coordenadas, denotado por (a, b) que es un par ordenado si y solo si tiene la propiedad de que el elemento "a" puede ser distinguido como el primero (abscisa) y "b" como el segundo elemento(ordenada) del par.

Pares ordenados iguales

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales, si y solo si $a = c$ y $b = d$

Es decir: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

El producto cartesiano RxR

Si R es el conjunto de los números reales, el producto cartesiano RxR es el conjunto de las pares ordenados (x, y) tales que $x \in R \wedge y \in R$, esto es:

$RxR = R^2 = \{(x, y) \ / \ x \in R \wedge y \in R\}$

Suma de pares ordenados

Dado dos pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de R^2, la suma de (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es el par ordenado $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; esto es:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

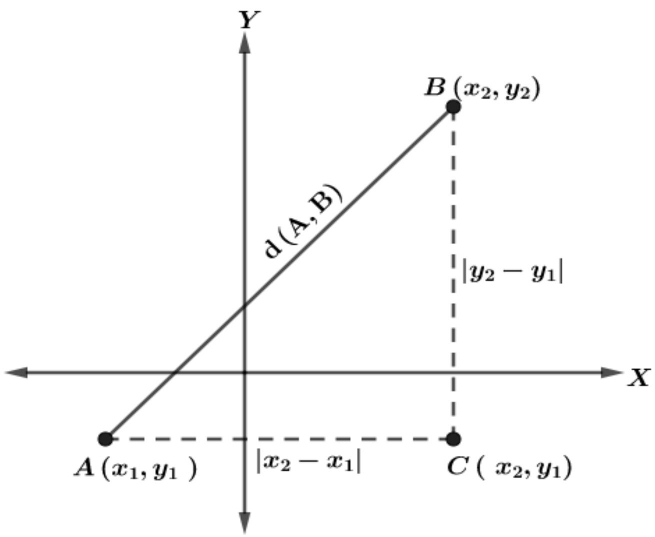
Producto de un número real por un par ordenada.

Dado el par ordenada (x, y) de R^2 y un número real r, el producto del número real r por el par ordenado (x, y), es el par ordenado(rx, ry); esto es:

$$r(x, y) = (rx, ry)$$

Distancia entre dos puntos

La distancia entre el punto $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano cartesiano, la podemos expresar como: $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Como podemos observar en la gráfica, se tiene un triángulo rectángulo recto en C, por lo que podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

$$d^2(A,B) = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

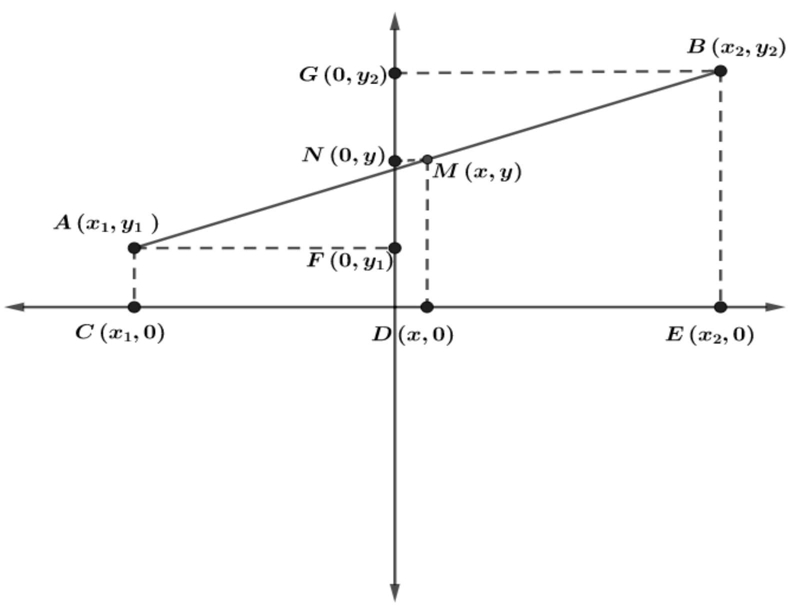
$$d^2(A,B) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Por lo que se concluye que: $d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Punto medio

EI punto medio del segrnento entre $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, es:

$$M(x,y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



En el gráfico, si trazamos una recta paralela al eje Y que pasa por el punto medio M del segmento AB, entonces la recta biseca al segmento CE en el punto D, es decir D es punto medio del segmento CE.

Entonces se cumple $CD = DE$

$$|x - x_1| = |x_2 - x|$$

$$x - x_1 = x_2 - x$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$2x = x_1 + x_2$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

De la misma forma, si trazamos una recta paralela al eje X que pasa por el punto medio M del segmento FG, entonces la recta biseca al segmento FG en el punto N, es decir N es punto medio del segmento FG.

Se cumple entonces que $FN = NG$

$$|y - y_1| = |y_2 - y|$$

$$y - y_1 = y_2 - y$$

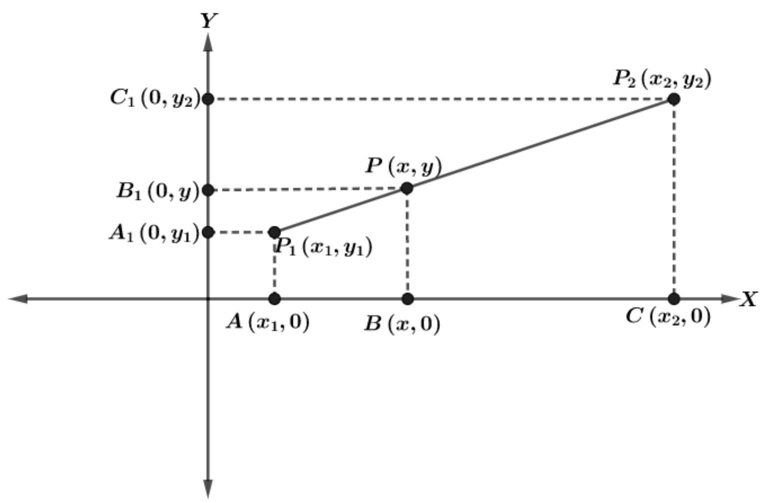
$$2y = y_1 + y_2$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Así tenemos que: $M(x, y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

También lo podemos expresar como: $M = \frac{1}{2}(A + B)$

División de un segmento en una razón dada



En el gráfico si queremos obtener las coordenadas del punto P que divide al segmento $\mathrm{P_1P_2}$ en una razón dada, sabemos por el teorema de Tales que las paralelas $\mathrm{P_1A}, \mathrm{PB}$ y

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

P_2Ccortan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y AC, luego entonces tenemos que:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

Calcularemos la longitud de los segmentos, tales como:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x - x_1)^2 + (0 - 0)^2} = |x - x_1|$$

$$\overline{AB} = x - x_1$$

De igual forma obtenemos: $\overline{BC} = x_2 - x$

Luego tenemos que: $r = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

$$r(x_2 - x) = x - x_1$$

$$rx_2 - rx = x - x_1$$

$$x + rx = rx_2 + x_1$$

$$x(1 + r) = x_1 + rx_2$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, r \neq -1$$

Por otro lado, en el gráfico por el teorema de Tales las paralelas P_1A_1, PB_1 y P_2C_1 cortan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y A_1C_1, luego entonces tenemos que:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}}$$

Calculamos la longitud de los segmentos, tales como:

$$\overline{A_1B_1} = y - y_1$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\overline{B_1C_1} = y_2 - y$$

Luego tenemos que: $r = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$r(y_2 - y) = y - y_1$$

$$ry_2 - ry = y - y_1$$

$$y + ry = ry_2 + y_1$$

$$y(1 + r) = y_1 + ry_2$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, r \neq -1$$

Se puede concluir entonces que, si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son los extremos del segmento P_1P_2, las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide a este segmento en la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ son:

$$P(x, y) = \left(\frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}\right), r \neq -1$$

Cuando $r < 0$, el punto de división está fuera del segmento P_1P_2 y si $r > 0$, $P(x, y)$ está dentro del segmento P_1P_2

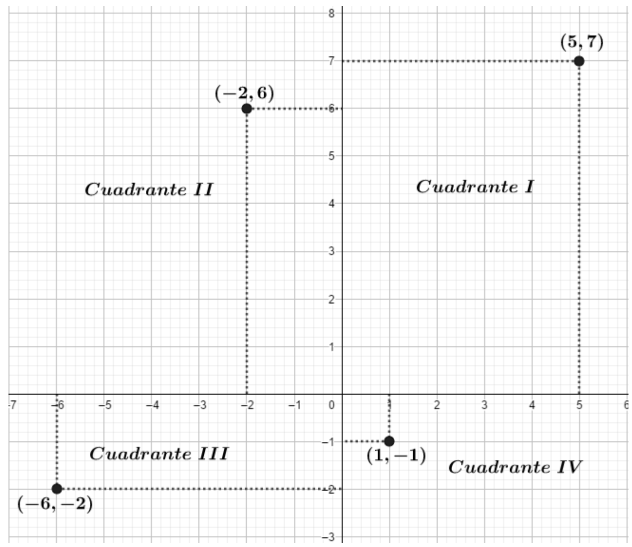
Ejemplos.

1. Ubicar los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares, indique el cuadrante al que pertenece cada punto

   $(-2,6); (1, -1); (5,7); (-6, -2)$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Resolución



2. Se tienen los conjuntos: $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{5,7\}$, calcular AxB

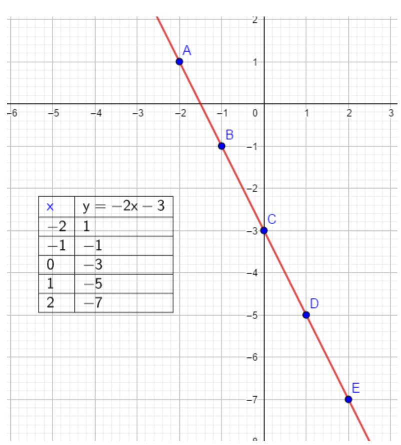
Resolución

$$\text{AxB} = \{(1,5), (1,7), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7)\}$$

3. Obtener la gráfica de: $y = -3 - 2x$

Resolución

Asignando valores a x, obtenemos algunos puntos coordenados que graficamos, uniendo con una recta todos los puntos obtenidos.

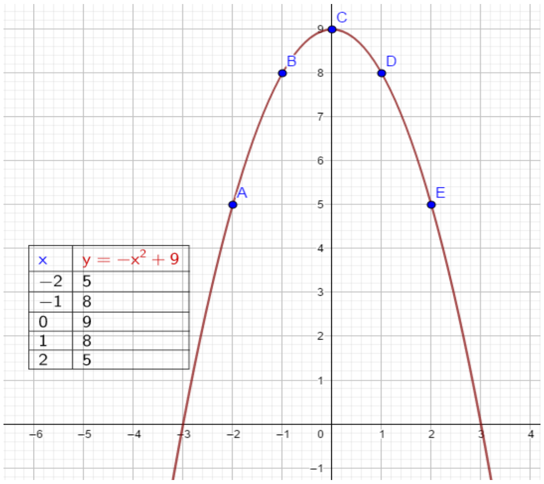


Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

4. Obtener la gráfica de: $y = 9 - x^2$

Resolución

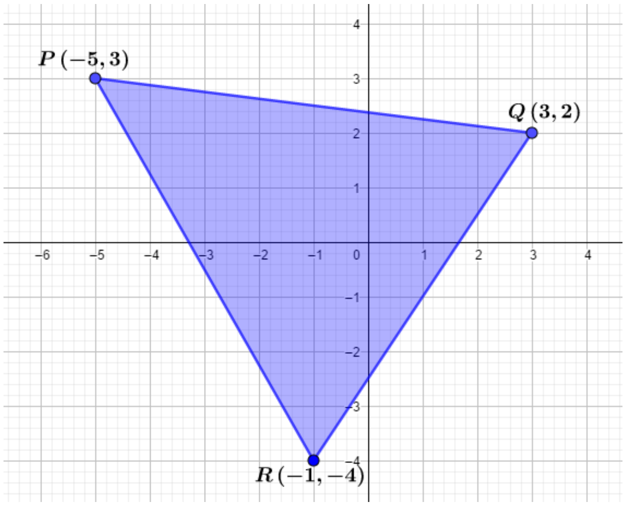
Asignando valores a x, obtenemos algunos puntos coordenados que graficamos, uniendo con una parábola todos los puntos obtenidos.



5. Demuestra que los puntos$P(-5,3), Q(3,2)$ y $R(-1,-4)$ son los vértices de un triángulo isósceles, encontrar su perímetro y área.

Resolución

Graficamos los puntos en el plano



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

a) Para demostrar que el triángulo es isósceles, tenemos que verificar que la longitud de dos lados del triángulo es igual.

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-5-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{65}$$
$$|\overline{PQ}| = \sqrt{65}$$

$$|\overline{PR}| = \sqrt{(-5-(-1))^2 + (3-(-4))^2} = \sqrt{65}$$
$$|\overline{PR}| = \sqrt{65}$$

$$|\overline{RQ}| = \sqrt{(-1-3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{52}$$
$$|\overline{RQ}| = \sqrt{52}$$

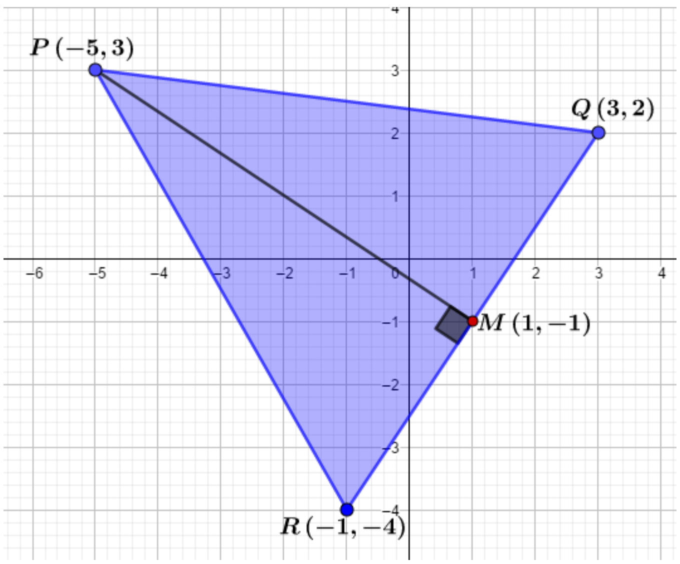
Como $|\overline{PQ}|$ y $|\overline{PR}|$ son de igual longitud, entonces el triángulo formado por los puntos P, Q y R es isósceles.

b) Para encontrar el perímetro del triángulo formado por los puntos P, Q y R, solamente sumamos las longitudes de los lados del triángulo.

$$Perímetro = |\overline{PQ}| + |\overline{PR}| + |\overline{RQ}|$$
$$Perímetro = \sqrt{65} + \sqrt{65} + \sqrt{52} = 2\sqrt{65} + 2\sqrt{13}$$
$$Perímetro = 2\sqrt{5}\sqrt{13} + 2\sqrt{13} = 2\sqrt{13}\left(\sqrt{5}+1\right)$$
$$Perímetro = 2\sqrt{13}\left(\sqrt{5}+1\right)$$

c) Para encontrar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R, necesitamos encontrar la altura desde el vértice P al punto medio de la base RQ, ya que es un triángulo isósceles.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k



Para determinar el punto medio del segmento $\overline{RQ}$, usamos el hecho de que

$$M = \frac{1}{2}(R+Q)$$

$$M = \frac{1}{2}\big((-1,-4) + (3,2)\big)$$

$$M = \frac{1}{2}(2,-2) = (1,-1)$$

$$M = (1,-1)$$

Para determinar la altura $|PM|$, encontraremos la distancia del punto P al punto M

$$|\overline{PM}| = \sqrt{(-5-1)^2 + \big(3-(-1)\big)^2} = \sqrt{52}$$

$$\left|\overline{PM}\right| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\left|\overline{PM}\right| = 2\sqrt{13}$$

Finalmente encontramos el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R, usando el hecho

$$Area(\triangle) = \frac{(base)(altura)}{2}$$

En nuestro caso $\quad Area(\triangle) = \frac{|\overline{RQ}|\left|\overline{PM}\right|}{2}$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Eidec EDITORIAL

$$Area(\triangle) = \frac{(\sqrt{52})(2\sqrt{13})}{2}$$

$$Area(\triangle) = \frac{\left(2\sqrt{13}\right)\left(2\sqrt{13}\right)}{2} = 2(13)$$

$$Area(\triangle) = 26\,u^2$$

Observación

Otra forma de calcular el área de un triángulo es mediante, un medio del determinante que se forma con las coordenadas de los vértices ordenándolos en sentido contrario al de las manecillas de un reloj (sentido antihorario).

$$Area(\triangle) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

En nuestro caso el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R, seria:

Del grafico del triángulo, si empezamos de P, seguiría R, luego Q, ya que estamos yendo en sentido antihorario.

$$Area(\triangle) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Area(\triangle) = \frac{1}{2}(20 + 9 - 2 + 12 + 10 + 3)$$

$$Area(\triangle) = \frac{1}{2}(52)$$

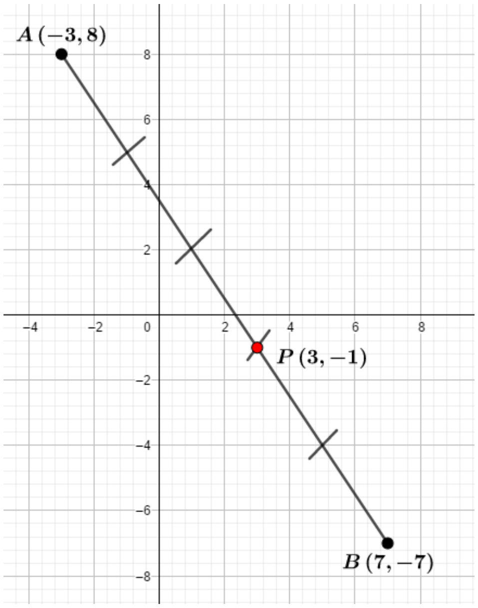
$$Area(\triangle) = 26\,u^2$$

6. Dados los puntos $(-3{,}8), (7, -7)$ y la razón $3{:}\,2$ en que hay que dividir el segmento. Hallar el punto de división, representar en una gráfica.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Resolución

Sea $A(-3{,}8)$ el punto inicial y $B(7,-7)$ el punto final del segmento $\overline{AB}$ según nos indica los datos tenemos, que por el valor de la razón sabemos que, si dividimos al segmento dado en cinco segmentos iguales, el punto $P(x,y)$ está situado a tres segmentos del inicio del segmento y dos del final del segmento dado.



$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\frac{3}{2}$$
$$\frac{P-A}{B-P}=\frac{3}{2}$$
$$2(P-A)=3(B-P)$$
$$2P-2A=3B-3P$$
$$2P+3P=3B+2A$$
$$5P=3(7,-7)+2(-3{,}8)$$
$$5P=(21,-21)+(-6{,}16)$$
$$5P=(15,-5)$$
$$P=\frac{1}{5}(15,-5)$$
$$P=(3,-1)$$

Observación

También podemos aplicar la formula directamente para calcular las coordenadas del punto de división:

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$P(x,y)=\left(\frac{x_1+rx_2}{1+r},\frac{y_1+ry_2}{1+r}\right), r\neq -1$$

Tenemos $A(x_1,y_1)=(-3{,}8)$, $B(x_2,y_2)=(7,-7)$, $r=\frac{3}{2}$

$$P(x,y)=\left(\frac{-3+\frac{3}{2}(7)}{1+\frac{3}{2}},\frac{8+\frac{3}{2}(-7)}{1+\frac{3}{2}}\right)$$

$$P(x,y)=\left(\frac{\frac{-6+21}{2}}{\frac{2+3}{2}},\frac{\frac{16-21}{2}}{\frac{2+3}{2}}\right)$$

$$P(x,y)=\left(\frac{\frac{15}{2}}{\frac{5}{2}},\frac{\frac{-5}{2}}{\frac{5}{2}}\right)$$

$$P(x,y)=\left(\frac{15}{5},\frac{-5}{5}\right)$$

$$P(x,y)=(3,-1)$$

Ejercicios

1. Ubicar los puntos en el sistema de coordenadas rectangulares, indique el cuadrante al que pertenece cada punto.
   a) $(1,-8), (-2{,}0), (0,-11), (-2{,}9)$
   b) $(-1{,}0), (2,-2), (0{,}9), \left(\frac{1}{2},-4\right)$

2. Obtener la gráfica de:
   a) $y=2-3x$
   b) $y=x^2+2$
   c) $y=\frac{1}{2}(x-1)$

3. Obtener las coordenadas del punto que divide al segmento que une cada pareja de puntos en la razón indicada en cada caso.
   a) $P_1(0,-5), P_2(1{,}6)$ y $r=3$
   b) $P_1(2,-3), P_2(7{,}8)$ y $r=\frac{3}{5}$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

c) $P_1\left(\frac{3}{2},-3\right), P_2\left(\frac{7}{3},8\right)$ y $r=\frac{2}{3}$

d) $P_1(-6,5), P_2(3,11)$ y $r=-\frac{3}{5}$

4. Un automóvil que avanza en línea recta se encuentra a $350\ km$ del punto de partida y a $250\ km$de su punto de llegada. ¿Cuáles son las coordenadas del sitio en donde se encuentra, si las coordenadas del punto de partida son $P_1(3,4)$ y $P_2(14,-2)$ las del punto de llegada?

5. Calcular la longitud de las tres medianas del triángulo formado por los vértices $A(-5,2), B(4,8)$ y $C(-1,-6)$
6. $M(3,5)$ es el punto medio del segmento que une los puntos $A(x,9)$ y $B(8,y)$. Calcular los valores de x y y

7. Calcular el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $A(-3,1), B(0,7), C(-8,-3)$ y $D(-5,4)$.

8. Calcular el área de las siguientes figuras.
   a) Triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-3,5), B(0,-4)$ y $C(2,7)$.
   b) Cuadrilátero cuyos vértices son los puntos
   $$P(0,5), Q(-2,-1), R(3,1), \text{ y } S(5,7)$$
   c) Triángulo cuyos vértices son los puntos $A(5,1), B(-3,4)$ y $C(-1,-2)$.
   d) Cuadrilátero cuyos vértices son los puntos
   $$P(-3,7), Q(6,5), R(2,12), \text{ y } S(-2,0)$$

9. Demostrar que los puntos $(-2,8), (1,-1), (3,-7)$ están en una recta, probando que el triángulo cuyos vértices son estos puntos, es cero.
10. Hallar la razón en la cual el punto $(2,3)$ divide al segmento que une $(3,8)$ con $(-1,-12)$.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

2.2 Lugares Geométricos

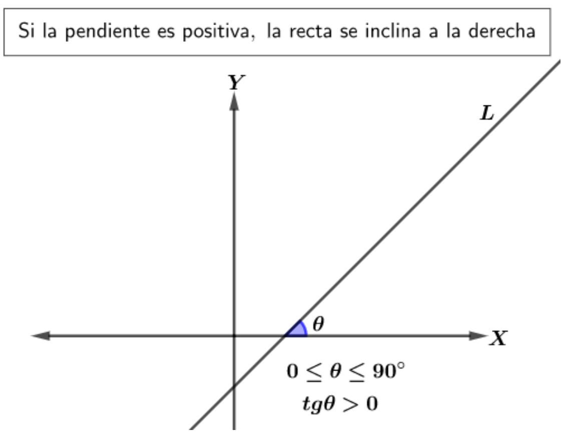
2.2.1 La Recta

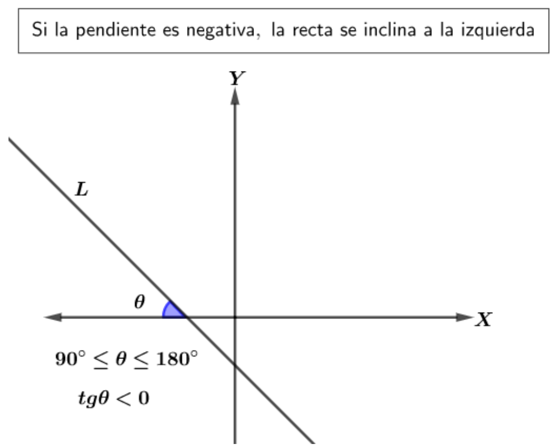
Ángulo de inclinación de la recta

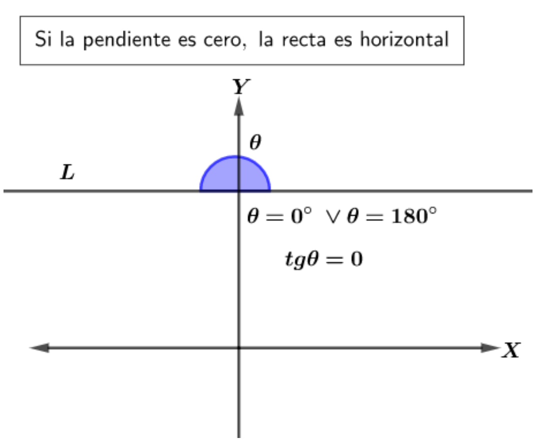
Sea L una recta en el plano R^2, se llama ángulo de inclinación de la recta L, el ángulo formado con la parte positiva del EJE X, y la recta L, en sentido antihorario.

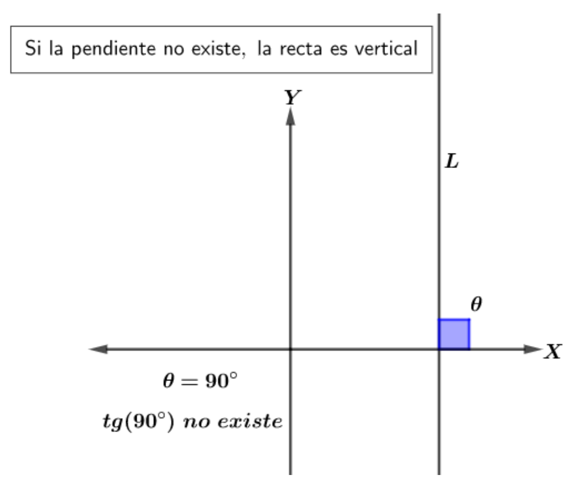
Si θ es el ángulo de inclinación de la recta L, su variación es

$0 \leq \theta \leq 180°$









Pendiente de una recta

La pendiente de una recta L, es la tangente de su ángulo de Inclinación θ, esto es:

$$m = tg\theta, \qquad \theta \neq 90°$$

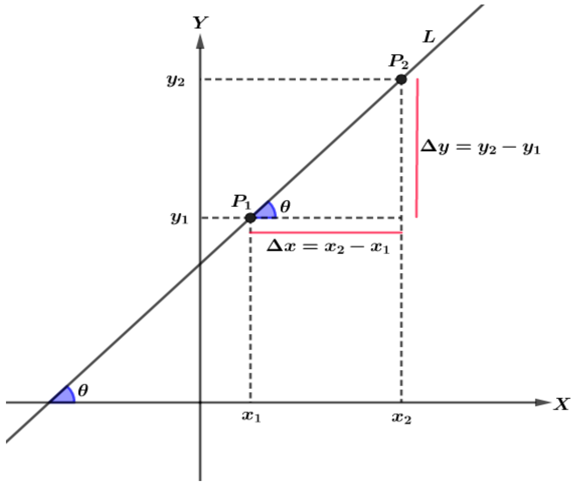
$$m = pendiente\ \ de\ \ L$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Teorema 1

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera de una recta L no vertical, entonces la pendiente de la recta L es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_2 \neq x_1$$



Como podemos ver en el grafico

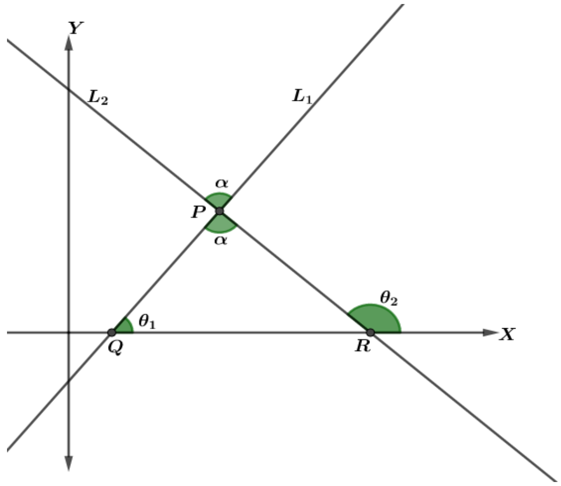
$$tg\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Pero $m = tg\theta$

Por tanto

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_2 \neq x_1$$

Ángulo entre dos rectas



En el gráfico tenemos las rectas L_1 y L_2 que se interceptan en el punto P, θ_1 es el ángulo de inclinación de la recta L_1 y θ_2 es el ángulo de inclinación de la recta L_2; α

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

es el ángulo entre las rectas L_1 y L_2, que se mueve en sentido antihorario desde la recta L_1 hasta L_2.

L_1 es la recta inicial y L_2 es la recta final, por otro lado, podemos observar en el grafico:

La pendiente de la recta inicial L_1 es $m_1 = tg\theta_1$

La pendiente de la recta final L_2 es $m_2 = tg\theta_2$

Teorema 2

Si α es el ángulo entre las rectas L_1 y L_2, entonces

$$tg\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2};\ m_1 m_2 \neq -1$$

donde m_1, es la pendiente la recta inicial L_1 y m_2 la pendiente de la recta final L_2, correspondiente al ángulo α.

Prueba

Del gráfico en el triángulo PQR, se tiene al ángulo exterior θ_2 relativo al vértice R, además θ_1 y α ángulos interiores del triángulo PQR no adyacente de θ_2.

Sabemos que un ángulo exterior de un triángulo, es la suma de dos ángulos interiores del triángulo, no adyacente al ángulo exterior.

Luego tenemos que,

$$\theta_2 = \theta_{1+}\alpha$$

Despejando α, tenemos: $\alpha = \theta_2 - \theta_1$

Aplicando la tangente: $tg\alpha = tg(\theta_2 - \theta_1)$

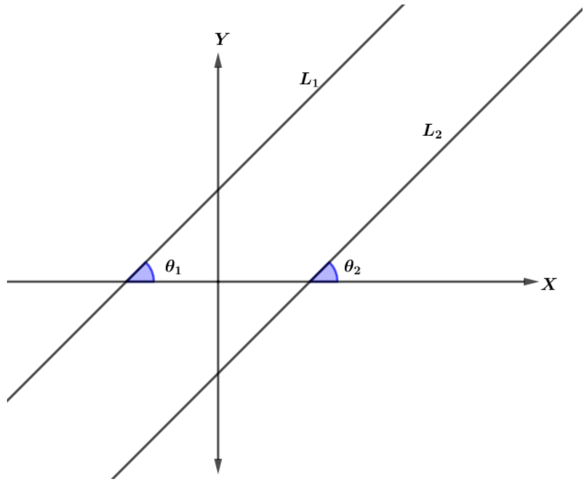
$$tg\alpha = \frac{tg\theta_2 - tg\theta_1}{1 + tg\theta_1 tg\theta_2}$$

Pero sabemos que $m_1 = tg\theta_1,\ m_2 = tg\theta_2$ luego se tiene:

$$tg\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2};\ m_1 m_2 \neq -1$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Rectas Paralelas



Dos rectas son paralelas si tienen el mismo ángulo de inclinación, en el gráfico $L_1//L_2$ (L_1 es paralelo a L_2), entonces $\theta_1 = \theta_2$

Luego aplicando tangente tenemos $tg\theta_1 = tg\theta_2$

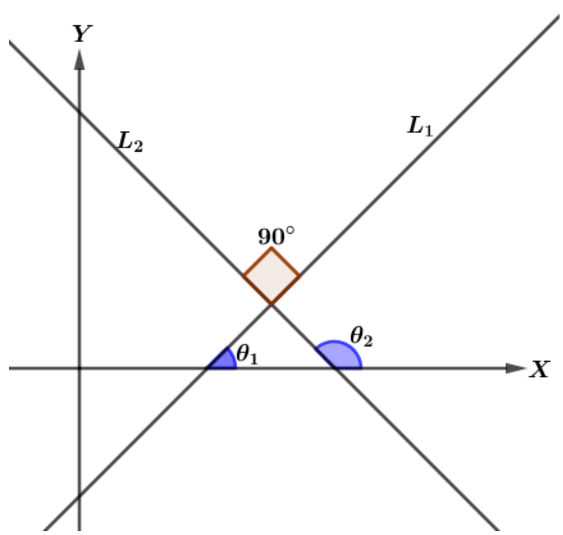
Pero sabemos que $m_1 = tg\theta_1,\ m_2 = tg\theta_2$ luego se tiene:

$$\boldsymbol{m_1 = m_2}$$

En conclusión, tenemos:

$$L_1//L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

Rectas perpendiculares



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Dos rectas son perpendiculares si el ángulo formado entre ellas es de 90°, pero $tg90° = \infty$ es decir no existe, por lo que conviene utilizar $ctg90° = 0$. Luego por teorema 2, se tiene que:

$$ctg90° = \frac{1 + tg\theta_1 tg\theta_2}{tg\theta_2 - tg\theta_1}$$

$$0 = \frac{1 + tg\theta_1 tg\theta_2}{tg\theta_2 - tg\theta_1}$$

$$1 + tg\theta_1 tg\theta_2 = 0$$

$$tg\theta_1 tg\theta_2 = -1$$

Pero sabemos que $m_1 = tg\theta_1,\ m_2 = tg\theta_2$ luego se tiene:

$$m_1 m_2 = -1$$

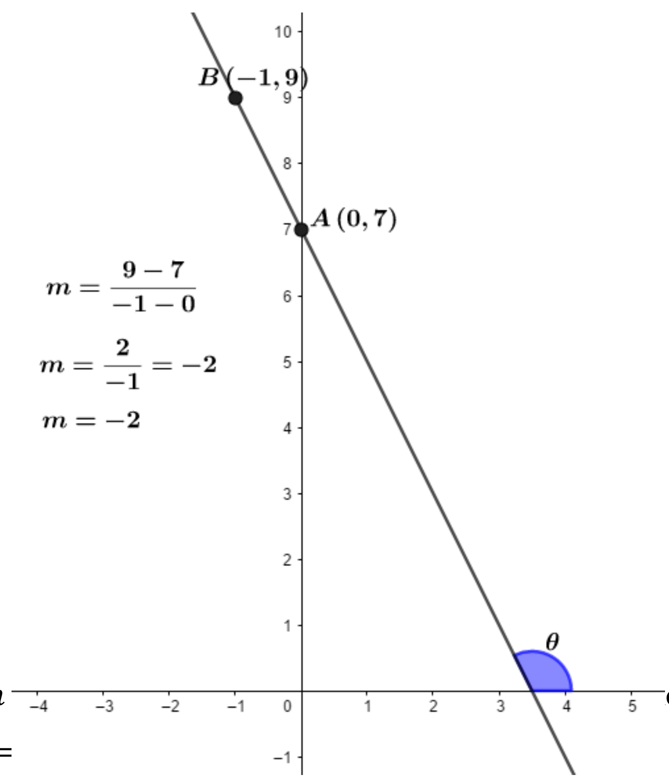
En conclusión, si L_1 es perpendicular a L_2 si y solo si el producto de sus pendientes es igual a -1.

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$$

Ejemplos

1. Determinar la pendiente y la inclinación de la recta que pasa por los puntos$A(0,7)$ y $B(-1,9)$

Resolución



La pendiente es m ... clinación θ, utilizamos el hecho que m =

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$tg\theta = -2$$

$$\theta = arctg(-2)$$

2. Graficar la recta que pasa por el punto $A(2,3)$ y tiene pendiente $m = \frac{3}{5}$

Resolución

Sabemos que la pendiente de una recta es

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_2 \neq x_1$, en nuestro caso $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{5}$

De donde $\Delta y = 3 \ \wedge \ \Delta x = 5$, ahora sea

$A(2,3) = P_1(x_1, y_1)$ ahora encontraremos $P_2(x_2, y_2)$

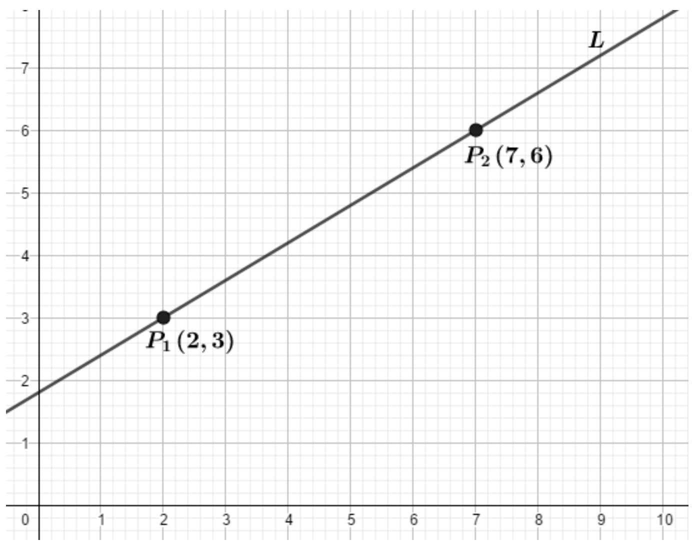
$\Delta y = y_2 - y_1 \ \wedge \ \Delta x = x_2 - x_1$

$3 = y_2 - 3 \quad \wedge \quad 5 = x_2 - 2$

$y_2 = 6 \quad \wedge \quad x_2 = 7$

Luego $P_2(x_2, y_2) = (7,6)$

Como ya tenemos dos puntos de la recta es suficiente para trazar la gráfica de la recta.



3. Una motocicleta tiene 25 meses de uso y su valor de venta es de $18 700, sin embargo, siete meses antes su valor era de $22 620. Si el valor de la motocicleta varía linealmente con el tiempo:

a) ¿Cuál es la variación mensual del precio de venta de la motocicleta?

b) ¿Cuál será el valor de venta a los 38 meses de uso?

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Resolución

a) Como la pregunta se refiere a la variación, entonces se refiere a la pendiente, para ello identificaremos que puntos nos da como datos:

N° de mes	18	25
Valor de venta $	22 620	18 700

Luego tenemos dos puntos $P_1(18{,}22\ 620)\ \wedge\ P_2(25{,}18\ 700)$

Por tanto, la variación es

$$m = \frac{18\ 700 - 22\ 620}{25 - 18} = -\frac{3920}{7}$$

$$m = -560\,\frac{\$}{mes}$$

b) Si partimos del mes 25, que su valor de venta es $18 700, y la variación por mes es $-560\frac{\$}{mes}$, luego tenemos:

$$Valor\ de\ venta, mes\ 38 = valor\ de\ venta, mes\ 25 - depreciación$$

$$Valor\ de\ venta, mes\ 38 = 18\ 700 - 13(560)$$

$$Valor\ de\ venta, mes\ 38 = 18\ 700 - 7\ 280$$

$$Valor\ de\ venta, mes\ 38 = \$11\ 420$$

Ejercicios

1. Determina la pendiente y el ángulo de inclinación de las rectas que unen los siguientes pares de puntos.

a) $A(5,2)$ y $B(3,4)$

b) $C(1,4)$ y $D(-5,2)$

c) $E(0,0)$ y $F(-2,-5)$

2. Trazar la gráfica de la recta que pase por el punto dado y que tenga la pendiente indicada.

a) $A(-3,0), m = -\frac{4}{3}$

b) $B(-4,2), m = -\frac{2}{5}$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

c) $C(4,1),\ m = -\frac{7}{3}$

3. Una compañía estima que producir 200 artículos tiene un costo de $3 500, mientras que producir 750 artículos le cuesta $8 700. Si el costo varía linealmente con la cantidad de artículos producidos:

a) ¿Cuál es la variación del costo por unidad?

b) ¿Cuánto le cuesta a la empresa producir 1 300 artículos?

4. Investiga sobre la presión hidrostática y contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Qué significa presión hidrostática?

b) ¿Qué relación hay entre la presión ejercida por el líquido y la profundidad a la que está un objeto?

c) ¿Cuál es la presión hidrostática en una alberca a una profundidad 2.3 m ?

d) ¿A qué profundidad la presión hidrostática en la alberca es de $13\ 600\ Pa$?

5. Utiliza el concepto de pendiente para demostrar que los puntos $(2,-4)$, $(6,1)$ y $(10,6)$ son colineales.

Ecuación punto-pendiente de la recta.

Sea la recta L, que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$ y tiene una pendiente m cuya trayectoria de un punto cualquiera $P(x, y)$ se mueva de tal manera que la pendiente de P_1P es siempre m.

Por lo que la ecuación de esa trayectoria es

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Forma punto-pendiente

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-5,-3), (4,4)$.

Resolución

Como tenemos dos puntos de la recta, encontraremos la pendiente

$$m = \frac{4 - (-3)}{4 - (-5)} = \frac{7}{9}$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$m = \frac{7}{9}$$

Sea $P_1(-5,-3)$, y por la ecuación punto-pendiente, obtenemos la ecuación de la recta solicitada

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = \frac{7}{9}\big(x - (-5)\big)$$

$$y + 3 = \tfrac{7}{9}(x + 5)$$

O también $$9y + 27 = 7x + 35$$

$$7x - 9y + 8 = 0$$

2. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(-3,-2)$ y $m = -\frac{3}{4}$

Resolución

Aplicamos la forma punto-pendiente, donde $P_1(-3,-2)$ y $m = -\frac{3}{4}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-2) = -\frac{3}{4}\big(x - (-3)\big)$$

Así tenemos la ecuación punto pendiente

$$y + 2 = -\frac{3}{4}(x + 3)$$

O también lo podemos desarrollar

$$4y + 8 = -3x - 9$$

$$3x + 4y + 17 = 0$$

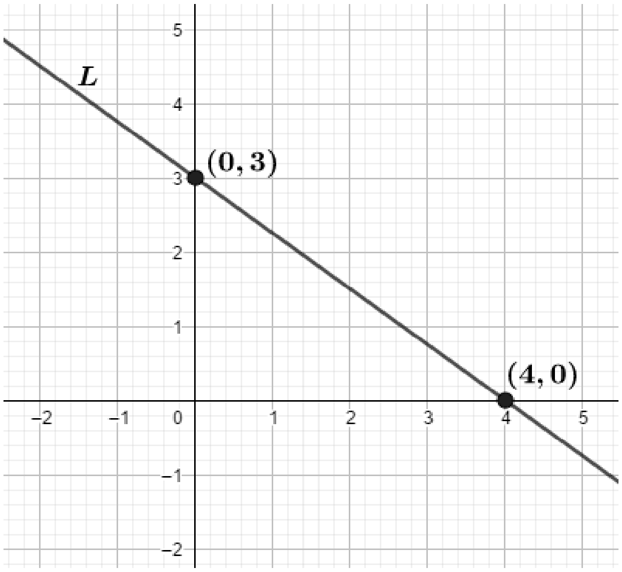
3. Traza la gráfica de la siguiente recta, $3x + 4y = 12$

Resolución

Para trazar la gráfica de la recta, es suficiente dos puntos, para ello damos valores:

Si $x = 0 \Rightarrow 4y = 12$ $\Rightarrow y = 3$ Luego tenemos el punto $(0,3)$	Si $y = 0 \Rightarrow 3x = 12$ $\Rightarrow x = 4$ Luego tenemos el punto $(4,0)$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k



4. Un equipo de sonido tiene un valor venta de $S/32\ 400$ a los ocho años de uso y de $S/19\ 200$ después de 11 años.

a) Determinar el modelo que expresa la relación de su valor con el tiempo de uso.

b) Hallar el valor del equipo de sonido a los cuatro años de uso.

c) ¿A los cuantos años se deprecia totalmente el equipo?

Resolución

a) Para modelar la relación del valor con el tiempo, identificaremos que puntos nos da como datos:

N° de año→ x	8	11
Valor de venta S/→ y	32 400	19 200

Luego tenemos dos puntos $P_1(8{,}32\ 400)\ \wedge\ P_2(11{,}19\ 200)$

Por tanto, la pendiente es

$$m = \frac{19\ 200 - 32\ 400}{11 - 8} = -\frac{13\ 200}{3}$$

$$m = -4\ 400\,\frac{S/}{año}$$

Aplicamos la forma punto-pendiente, donde

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$P_1(8{,}32\ 400)$(también se podría usar P_2) y $m = -4\ 400$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 32\ 400 = -4\ 400(x - 8)$$

$$y - 32\ 400 = -4\ 400x + 35\ 200$$

$$y = -4\ 400x + 67\ 600$$

b) Para $x = 4\ años$, tenemos que el valor del equipo es:

$$y = -4\ 400(4) + 67\ 600$$

$$y = S/\ 50\ 000$$

c) El equipo de sonido ya no tendrá valor cuando $y = 0$

$$y = -4\ 400x + 67\ 600$$

$$0 = -4\ 400x + 67\ 600$$

$$4\ 400x = 67\ 600$$

$$x = \frac{67\ 600}{4\ 400}$$

$$x = 15{,}36\ años$$

Ejercicios

1. Encontrar la ecuación de la recta que cumpla las condiciones dadas:

a) Pasa por $(-2{,}2)$ y $m = -\frac{2}{5}$

b) Pasa por $(-2{,}0)$ y $m = -2$

c) Pasa por $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ y $(3, -2)$

d) Pasa por $(2, -3)$ y tiene una inclinación de $120°$

2. Trazar la gráfica de cada una de las rectas dadas

a) $3y + 5x = 15$

b) $2x + 3y - 10 = 0$

c) $3x + 2y = 0$

d) $5x - 4y + 24 = 0$

3. El valor de una pantalla de plasma nueva es de $S/4\ 690$ Si se deprecia su valor linealmente 8.5% por año, encontrar:

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

a) Una ecuación que ayude a determinar el valor de la pantalla de plasma a los t años de uso.

b) ¿Cuál será el valor de la pantalla de plasma después de 4 años de uso?

c) ¿En cuántos años se deprecia completamente la pantalla de plasma?

4. Investiga la relación que hay entre las escalas para medir la temperatura Celsius y Fahrenheit y contestar las siguientes preguntas:

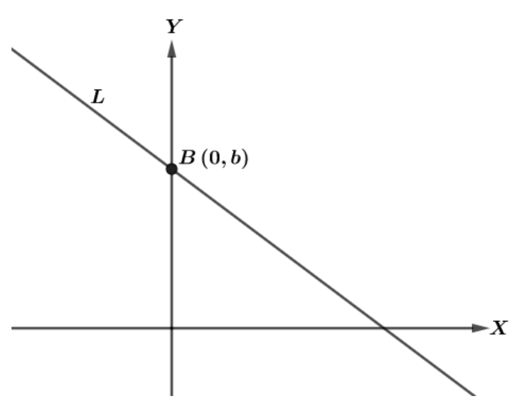
a) ¿Qué tipo de relación hay entre las dos escalas?

b) ¿Qué temperatura indica la escala Fahrenheit cuando la escala Celsius marca $100°C$?

c) ¿Qué temperatura marca una escala Celsius cuando un termómetro en escala Fahrenheit marca $170°F$?

Ecuación pendiente-ordenada al origen

Cuando una recta corta al eje Y en el punto $B(0, b)$, se le llama ordenada al origen de la recta. Para obtener la ecuación consideramos la pendiente m y $B(0, b)$.



De la ecuación punto- pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - b = m(x - 0)$$

$y = mx + b$
Forma pendiente - ordenada al origen

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen, si tenemos: $(0,4)$ y $m = -3$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Resolución

Según los datos que tenemos, $b = 4$ y $m = -3$

Utilizando la forma de la ecuación pendiente ordenada al origen.

$$y = mx + b$$

Obtenemos la ecuación de la recta solicitada:

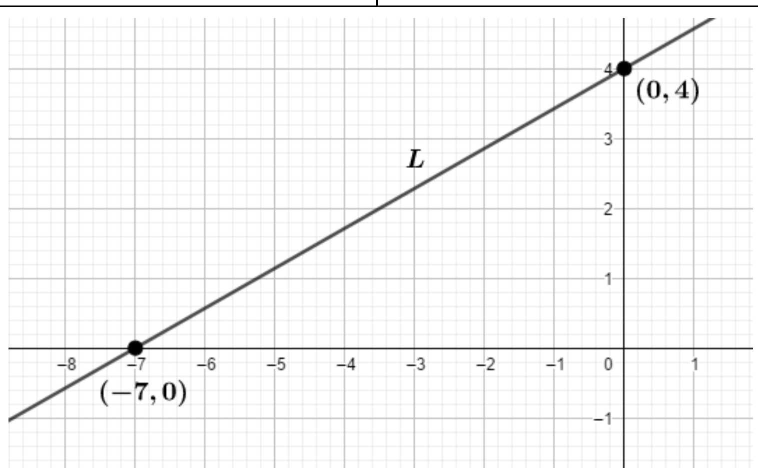
$$y = -3x + 4$$

2. Trazar la gráfica de la recta 4x-7y+28=0, mediante sus coordenadas al origen.

Resolución

Para trazar la gráfica de la recta, es suficiente dos puntos, para ello damos valores para x=0 ∧ y=0 y despejamos la variable respectiva.

Si $x = 0 \Rightarrow -7y = -28$ $\Longrightarrow y = 4$ Luego tenemos el punto $(0{,}4)$	Si $y = 0 \Rightarrow 4x = -28$ $\Longrightarrow x = -7$ Luego tenemos el punto $(-7{,}0)$



3. En una empresa presupuesta que dentro de cuatro años el valor de una de sus máquinas será de $20 100 cuando esa misma máquina dos años antes costaba $27 600.

Con esta información determinar:

a) El modelo matemático que relaciona el valor de la máquina con el tiempo de uso en años en forma pendiente-ordenada al origen.

b) ¿Cuál será el valor de la máquina dentro de 10 años a partir de este momento?

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Resolución

a) Para modelar la relación del valor de la máquina con el tiempo de uso, identificaremos que puntos nos da como datos:

N° de año→ x	Inicio= 0	Hoy=2	6
Valor de venta \$→ y	27 600		20 100

Luego tenemos dos puntos $P_1(0,27\ 600)\ \wedge\ P_2(6,20\ 100)$

Por tanto, la pendiente es

$$m=\frac{20\ 100-27\ 600}{6-0}=-\frac{7\ 500}{6}$$

$$m=-1\ 250\frac{\$}{año}$$

Con $b=27\ 600$ y $m=-1\ 250$ tenemos la ecuación de la recta de forma pendiente-ordenada al origen.

$$y=mx+b$$

$$y=-1\ 250x+27\ 600$$

b) Para saber el valor de la máquina dentro de 10 años a partir de este momento, tenemos que dar valor a $x=12$, entonces

$$y=-1\ 250(12)+27\ 600$$

$$y=\$12\ 600$$

Ejercicios

1. Encontrar la ecuación de cada una de las siguientes rectas en su forma pendiente-ordenada al origen.

a) $(0,-3)$ y $m=-3$

b) $(-3,0)$ y $(0,4)$

c) $(0,1)$ y $m=-\frac{4}{5}$

d) $(-4,0)$ y $(0,2)$

2. Trazar la gráfica de cada una de las siguientes rectas mediante sus coordenadas al origen.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

a) $3x - 2y = 12$

b) $x - 4y = -4$

c) $2x + 5y - 10 = 0$

d) $4y + 12 = 0$

3. Un emprendedor invierte por cada artículo que produce \$4.50 y tiene gastos fijos mensuales de \$5 800. Si sus gastos totales crecen en forma lineal, Encontrar:

a) Un modelo que relacione el total de sus gastos con el número de artículos producidos en un mes.

b) ¿Cuánto invierte por la producción de 650 artículos?

c) ¿Cuántos artículos produce en el mes en que sus gastos ascienden a \$15 600?

4. El costo de conducir un automóvil es directamente proporcional a la distancia recorrida. Supongamos que el dueño de un automóvil gasta en el mes de enero $S/1\,596$ por $1\,568km$ y en el mes de marzo, $S/2\,394$ por $2\,352km$. Encontrar:

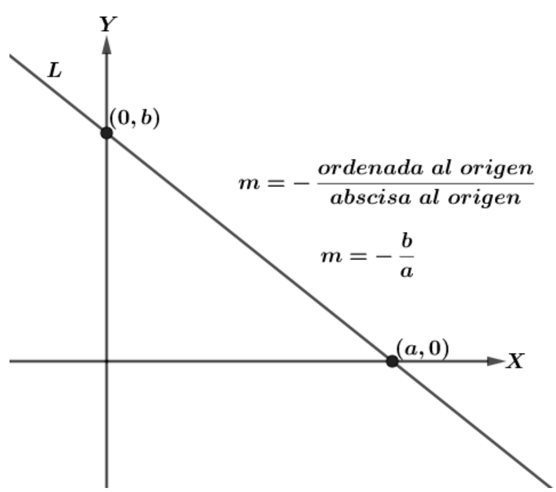
a) Un modelo lineal que relacione el costo en función de la distancia recorrida.

b) El costo por conducir $2\,120km$.

c) El kilometraje recorrido durante el mes en el que invirtió $S/1\,710$.

Ecuación simétrica de la recta.

La forma simétrica de la recta considera sus intersecciones con los ejes coordenados, ver el grafico:



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Ahora partiendo de la ecuación de la recta en la forma pendiente-ordenada al origen: $y = mx + b$

Como tenemos que $m = -\frac{b}{a}$, luego entonces:

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

$$ay = -bx + ab$$

$$ay + bx = ab$$

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Forma simétrica

Ecuación general de la recta

La ecuación general de la recta es la expresión algebraica de la forma:

$$\boxed{Ax + By + C = 0 \text{ donde } A \neq 0 \ o \ B \neq 0}$$

Si partimos de la ecuación general de la recta, y despejamos y, podemos establecer su equivalencia con la forma pendiente-ordenada al origen.

$$Ax + By + C = 0$$

$$By = -Ax - C$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

De donde obtenemos que $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$

Observación

En la ecuación general de la recta: $Ax + By + C = 0$

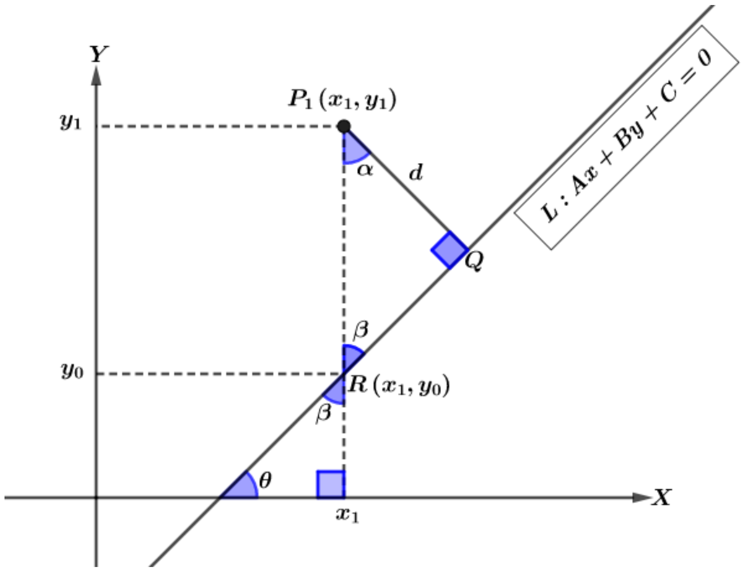
a) Si $A = 0$, entonces, $By + C = 0$ representa una recta horizontal.

b) Si $B = 0$, entonces, $Ax + C = 0$ representa una recta vertical.

c) Si $C = 0$, entonces, $Ax + By = 0$ es una recta que pasa por el origen del plano cartesiano.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Distancia de un punto a la recta



En el gráfico tenemos la recta L: $Ax + By + C = 0$ y $P_1(x_1, y_1)$, donde la distancia del P_1 a la recta L es $d = |\overline{P_1Q}|$

En el triángulo P_1QR recto en Q, tenemos que:

$$d = |\overline{P_1R}|cos\alpha \qquad (*)$$

Pero $$|\overline{P_1R}| = |y_1 - y_0| \qquad (**)$$

Además $R \in L$, entonces tenemos que $Ax_1 + By_0 + C = 0$

Despejando y_0, obtenemos:

$$y_0 = -\frac{Ax_1 + C}{B}$$

Ahora reemplazamos y_0 en (**)

$$|\overline{P_1R}| = \left|y_1 + \frac{Ax_1 + C}{B}\right|$$

$$|\overline{P_1R}| = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{B}\right|$$

$$|\overline{P_1R}| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{|B|} \qquad (***)$$

Luego reemplazamos (***) en (*)

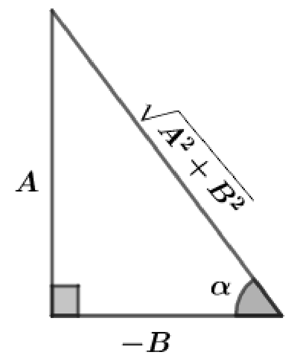
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{|B|}cos\alpha$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Por otro lado, sabemos que $tg\theta = -\frac{A}{B}$, que es la pendiente de la recta L.

Del gráfico podemos deducir que $\theta = \alpha$, entonces $tg\alpha = -\frac{A}{B}$

$$tg\alpha = \frac{A}{-B}, A > 0$$



Del triángulo tenemos que, $cos\alpha = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Ahora si $B > 0 \Longrightarrow cos\alpha < 0$

Si $B < 0 \Longrightarrow cos\alpha > 0$

Luego podemos deducir que: $cos\alpha = \frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Finalmente tenemos que:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{|B|} cos\alpha$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{|B|} \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Así, la distancia del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta L, está dada por:

$$d(P_1, L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta en su forma general, si pasa por $(2,5)$ y $(5,4)$

Resolución

Encontramos la pendiente

$m = \frac{4-5}{5-2} = -\frac{1}{3}$

Aplicamos la forma punto-pendiente,

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

$$3y - 15 = -x + 2$$

$$x + 3y - 17 = 0$$

2. Celimar ofrece banquetes a grupos de personas. Si en dos de ellos cobró por sus servicios $S/9\,170$ por 130 comensales y $S/5\,650$ por 75 comensales.

a) Encontrar un modelo matemático que permita calcular el costo de sus servicios, considerando que el comportamiento del costo es lineal.

b) ¿Cuánto cobrará por un servicio de banquete para 100 personas?

Resolución

a) Para modelar la relación del costo de los servicios con el número de los comensales, identificaremos que puntos nos da como datos:

N° de comensal→ x	75	130
Servicios $S/ \rightarrow y$	5 650	9 170

Luego tenemos dos puntos $P_1(75, 5\,650)\ \wedge\ P_2(130, 9\,170)$

Por tanto, la pendiente es

$$m = \frac{9\,170 - 5\,650}{130 - 75} = \frac{3\,520}{55}$$

$$m = 64\frac{S/}{comensal}$$

Aplicamos la forma punto-pendiente,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5\,650 = 64(x - 75)$$

$$y - 5\,650 = 64x - 4\,800$$

$$y = 64x + 850$$

b) El costo del servicio para $x = 100$ personas será:

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Resolución

$$y = 64x + 850$$
$$y = 64(100) + 850$$
$$y = S/.\ 7\,250$$

3. Determinar el punto de intersección de las rectas que pasan por los puntos $A(2,-1)$ y $B(3{,}4)$ y la recta que tiene pendiente 2 y pasa por el punto $(1{,}1)$

Resolución

Sea la recta L_1, que pasa por los puntos $A(2,-1)$ y $B(3{,}4)$, entonces la $m = \frac{4-(-1)}{3-2} = 5$

$$m = 5$$

Ahora aplicando la forma punto-pendiente,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = 5(x - 3)$$

Desarrollando, para llevarlo a la forma general

$$y - 4 = 5x - 15$$
$$L_1:\ 5x - y - 11 = 0$$

Por otro lado, encontramos L_2, con $m = 2$ y pasa por el punto $(1{,}1)$; aplicando la forma punto-pendiente,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = 2(x - 1)$$

Ahora desarrollamos, para llevarlo a la forma general

$$y - 1 = 2x - 2$$
$$L_2: 2x - y - 1 = 0$$

Luego tenemos las rectas:

$L_1:\ 5x - y - 11 = 0$ y $L_2: 2x - y - 1 = 0$

Para encontrar el punto de intersección, de las rectas $L_1 \wedge L_2$, resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x - y = 11 & (1) \\ 2x - y = 1 & (2) \end{cases}$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\begin{array}{r|l} & 5x - y = 11 \\ - & 2x - y = 1 \\ \hline & 3x \quad \cancel{} = 10 \end{array}$$

$$x = \frac{10}{3}$$

Ahora reemplazamos el valor de x encontrado en (2) para encontrar el valor de y,

$$2\left(\frac{10}{3}\right) - y = 1$$

$$y = \frac{20}{3} - 1$$

$$y = \frac{17}{3}$$

Luego el punto de intersección es: $\left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3}\right)$

4. $L_1 \ \wedge \ L_2$ son dos rectas paralelas entre sí, $L_1: y = 4x + 3$; L_2 pasa por el punto $(0,0)$. Hallar la ecuación de L_2.

Resolución

De $L_1: y = 4x + 3$, podemos deducir que su pendiente $m_1 = 4$

Como $L_1 \,//\, L_2 \Rightarrow m_1 = m_2$

Luego $m_2 = 4$

aplicando la forma punto-pendiente,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 4(x - 0)$$

así tenemos la recta $L_2: y = 4x$

5. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $5x - 3y = -2 \ \wedge \ 8x - 7y = 44$ y es perpendicular a la recta que está definida por la ecuación

$y = \frac{2}{3}x + 1$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Resolución

$$\begin{cases} 5x - 3y = -2 & (1) \\ 8x - 7y = 44 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 5x - 3y = -2 \\ -3 & 8x - 7y = 44 \\ \hline & 11x \;\; / = -146 \end{array}$$

$$x = -\tfrac{146}{11}$$

Ahora reemplazamos el valor de x encontrado en (1) para encontrar el valor de y,

$$5\left(-\frac{146}{11}\right) - 3y = -2$$

$$3y = 5\left(-\frac{146}{11}\right) + 2$$

$$3y = -\frac{730}{11} + 2$$

$$3y = -\frac{708}{11}$$

$$y = -\frac{236}{11}$$

Luego el punto de intersección es: $\left(-\frac{146}{11}, -\frac{236}{11}\right)$ que sería el punto de paso de la recta que queremos encontrar.

Por otro lado, tenemos la recta definida por la ecuación

$L: y = \frac{2}{3}x + 1$, con pendiente $m = \frac{2}{3}$

Que es perpendicular a la recta L_1 que queremos encontrar.

Por dato sabemos que $L \perp L_1 \Rightarrow m.m_1 = -1$

$$\frac{2}{3}m_1 = -1$$

$$m_1 = -\frac{3}{2}$$

Luego aplicando la forma punto-pendiente,

$$y + \frac{236}{11} = -\frac{3}{2}\left(x + \frac{146}{11}\right)$$

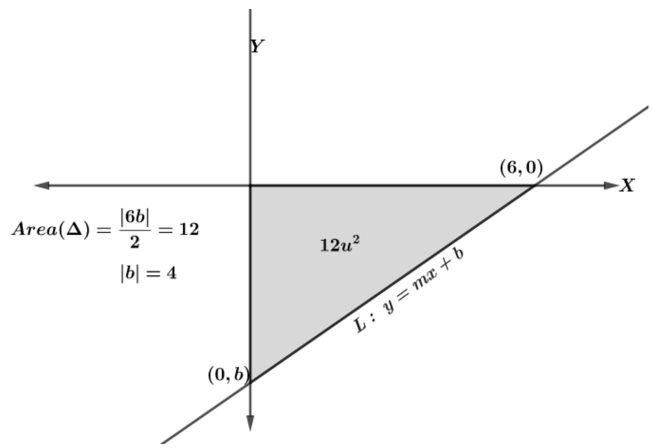
Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$11y + 236 = -\frac{33}{2}x - 438$$

así tenemos $L_1: \frac{33}{2}x + 11y + 674 = 0$

6. Una recta pasa por $(6,0)$ formando un triángulo de $12u^2$ en el cuarto cuadrante con los ejes coordenados. Hallar la ecuación de dicha recta.

Resolución



Del gráfico tenemos que $|b| = 4 \Leftrightarrow b = 4 \lor b = -4$, pero podemos observar en el grafico que b está en el cuarto cuadrante, luego

$$b = -4$$

Ahora encontraremos la pendiente m de la recta L,

$$m = -\frac{b}{6} = -\frac{-4}{6}$$

$$m = \frac{2}{3}$$

Luego aplicando la forma pendiente-ordenada al origen

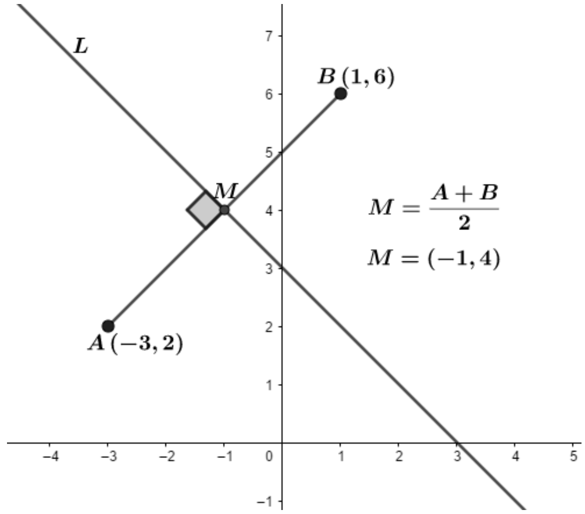
$$y = mx + b$$

$$L: y = \frac{2}{3}x - 4$$

7. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que forma $A(-3,2)$ y $B(1,6)$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Resolución



Una mediatriz divide a un segmento por el punto medio y perpendicularmente, del gráfico tenemos que el punto medio

$M = (-1,4)$, para encontrar la ecuación de la mediatriz L, necesitamos la pendiente m.

Como podemos observar en el gráfico el segmento $\overline{AB}$ es perpendicular a la mediatriz L, entonces:

$$\overline{AB} \perp L \Leftrightarrow m_{\overline{AB}}.m = -1$$

Pero la pendiente del segmento $\overline{AB}$

$$m_{\overline{AB}} = \frac{6-2}{1-(-3)} = \frac{4}{4}$$

$$m_{\overline{AB}} = 1$$

Luego reemplazando $m_{\overline{AB}} = 1$ en $m_{\overline{AB}}.m = -1$, obtenemos

$$m = -1$$

Ahora aplicando la forma punto-pendiente, con $M = (-1,4)$ y

$$m = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -(x + 1)$$

$$L: x + y - 3 = 0$$

Que sería la ecuación de la recta mediatriz del segmento dado.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Ejercicios

1. Determinar la ecuación de cada una de las rectas de acuerdo con las condiciones dadas y exprésala en forma general.

a) $(5,2)$ y $(1,7)$

b) $(-4,-5)$ y $(0,3)$

c) $\left(\frac{2}{3},\frac{7}{4}\right)$, y $m = -\frac{3}{4}$

d) $(-2,-3)$, y $m = -1$

2. Los costos de producción por cierta cantidad de artículos se encuentran en la siguiente tabla:

N° de artículos→ x	10	20	25
Costo de producción ⟶ y	95	y	180

a) Determinar la ecuación de costos, suponiendo que es lineal.

b) Encontrar el costo de producir 20 artículos al día.

c) ¿Cuáles son los costos fijos y los costos variables?

3. La ordenada al origen de una recta es el recíproco de su abscisa al origen y la recta pasa por el punto $(-1, 5)$. Hallar la ecuación de la recta.

4. Para alquilar un automóvil, Fernando paga $S\ /\ 250$ diarios y $S/3$ adicionales por kilómetro.

a) Expresar el costo de alquiler en función de la cantidad de kilómetros recorridos.

b) Representa de manera gráfica la ecuación obtenida.

c) ¿Cuánto se debe pagar por alquilar un automóvil durante un día para un viaje de $70km$?

5. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es $-\frac{5}{2}$ y que forma con los semiejes de coordenadas positivas un triángulo de 15 $unidades$ de perímetro.

6. Hallar las coordenadas del punto Q de la recta $L: 3x - y + 3 = 0$ que equidista de los puntos $A(2,4)$ y $B(6,-2)$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

7. Calcular la distancia entre el punto y la recta dada:

a) $2x - 3y + 4 = 0$ y $(2,7)$

b) $y - 5x = 2$ y $(0, -5)$

c) $y + 2x + 21 = 0$ y $(-6, -11)$

8. Encontrar la recta que pasa por la intersección de las rectas:
$7x - 2y = 0$ y $4x - y - 1 = 0$ y es perpendicular a la recta
$3x + 8y = 19$.

9. Hallar la tangente del ángulo que forma la recta que pasa por$(-5,6)$ y $(1,2)$ con la que pasa por $(-4,7)$ y $(8,7)$.

10. Hallar los valores de k, para que la recta $L: 5x - 12y + 3 + k = 0$ y el punto $(-3,2)$ disten 4 unidades.

11. ¿Para qué valor de k, la recta $L_1: 2x + ky = 3$ es perpendicular ala recta $L_2: 4x + y = 1$? ¿Para qué valor de k, son paralelas dichas rectas?

12. Si la recta $L_1: (x - 2y + 1)a + (3x - 2)b - 20 = 0$ pasa por el punto $P(1, -2)$ y es perpendicular a $L_2: 2x + 3y - 5 = 0$, hallar el valor de $a.b$

13. Una recta pasa por el punto $P(2,3)$ y la suma de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es 10 $unidades$. Hallar la ecuación de la recta.

14. Hallar el valor de k para que la rectas $L_1: \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}$ y $L_2: (k - 3)x + 2 = (2k - 2)y$

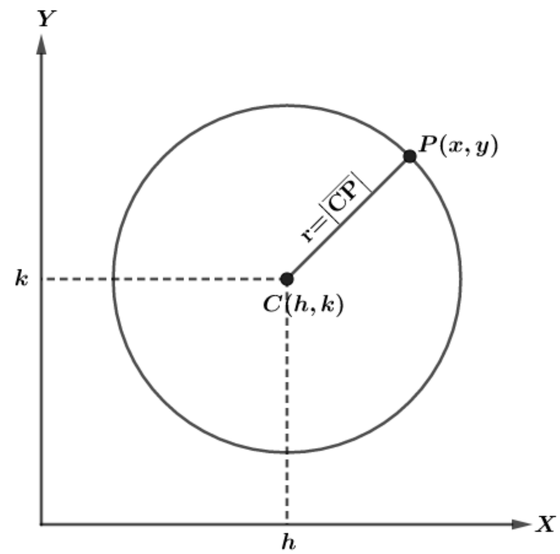
a) Sean paralelos

b) Sean perpendiculares

2.2.2 La Circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que están a una distancia constante de otro punto fijo al que llamamos centro $C(h, k)$, la distancia constante es el radio $r = |\overline{CP}|$ de la circunferencia.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k



Ecuación forma ordinaria de la circunferencia

De la gráfica tenemos que el radio de la circunferencia es:

$$r = |\overline{CP}|$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Elevando al cuadrado, obtenemos:

$$\mathcal{C}: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Forma ordinaria

Ecuación forma canónica de la circunferencia

Si $C(h,k) = (0,0)$, entonces la ecuación de la circunferencia es de la forma:

$\mathcal{C}: x^2 + y^2 = r^2$

Ecuación forma general de la circunferencia

Si desarrollamos la ecuación de forma ordinaria, tenemos:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

Ordenando $\quad x^2 + y^2 + (-2h)x + (-2k)y + k^2 + h^2 - r^2 = 0$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$x^2 + y^2 + \underbrace{(-2h)}_{D}x + \underbrace{(-2k)}_{E}y + \underbrace{k^2 + h^2 - r^2}_{F} = 0$$

Luego tenemos:

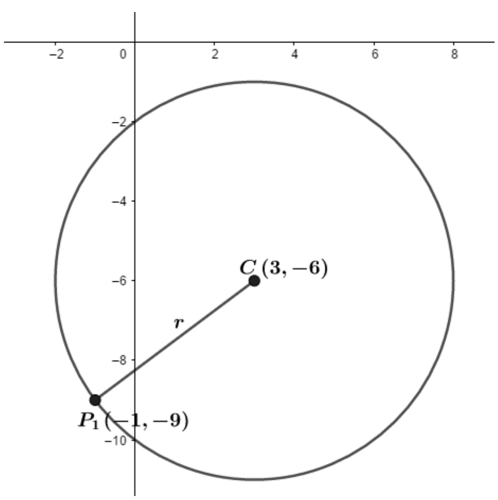
$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{C}: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ \text{Forma general} \end{array}}$$

Observación: Para transformar una ecuación de forma general de la circunferencia, a su forma ordinaria, simplemente se completa cuadrados.

Ejemplos

1. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(3, -6)$ y que pasa por el punto $(-1, -9)$.

Resolución



Reemplazamos el centro $C(3, -6)$ en la ecuación de forma ordinaria

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-3)^2 + (y-(-6))^2 = r^2$$

$$(x-3)^2 + (y+6)^2 = r^2 \qquad (*)$$

Estaría faltando el radio, pero por dato tenemos el punto $P_1(-1, -9)$ entonces $r = |\overline{CP_1}|$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$r = \sqrt{(-1-3)^2 + (-9-(-6))^2}$$

$$r = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25}$$

$$r = 5$$

Finalmente reemplazamos el radio $r = 5$ en (*)

$$(x-3)^2 + (y+6)^2 = 5^2$$

$$\mathcal{C}: (x-3)^2 + (y+6)^2 = 25$$

que es la ecuación ordinaria de la circunferencia.

2. Calcular la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en $(-1,4)$ y es tangente al eje de las ordenadas.

Resolución

Como nos da como dato el centro $C(-1,4)$, además que es tangente al eje Y , entonces $r = 1$

luego en la ecuación ordinaria tenemos

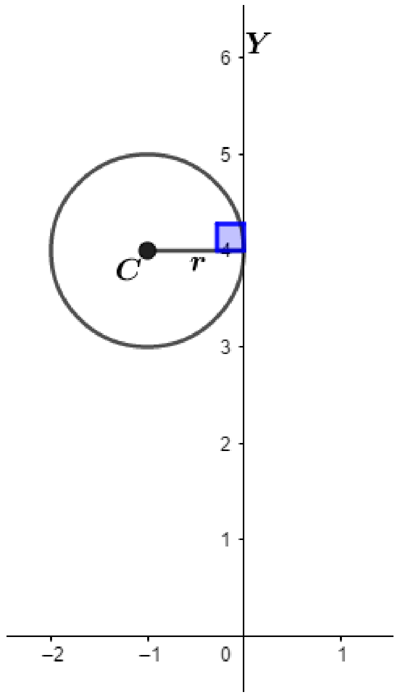
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$(x-(-1))^2 + (y-4)^2 = (1)^2$

$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 1$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = 1$

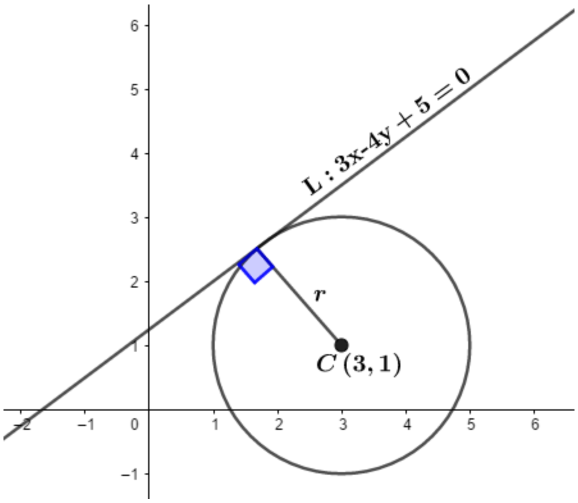
$\mathcal{C}: x^2 + y^2 + 2x - 8y + 16 = 0$



3. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto $C(3,1)$ y es tangente a la recta $3x - 4y + 5 = 0$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Resolución



Como la recta L es tangente a la circunferencia de centro $C(3,1)$, entonces para determinar el radio de la circunferencia, hallaremos la distancia del $C(3,1)$ a la recta $L\colon 3x - 4y + 5 = 0$

Sabemos que la distancia del punto $P_1(x_1, y_1)$ a una recta L, está dada por:

$$d(P_1, L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Entonces $\qquad r = d(C, L)$

$$r = \frac{|3(3) - 4(1) + 5|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{25}}$$

$$r = \frac{|10|}{5} = 2$$

$$r = 2$$

Luego usaremos la ecuación de la circunferencia de la forma ordinaria: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Donde reemplazamos el centro $C(3,1)$ y radio $r = 2$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

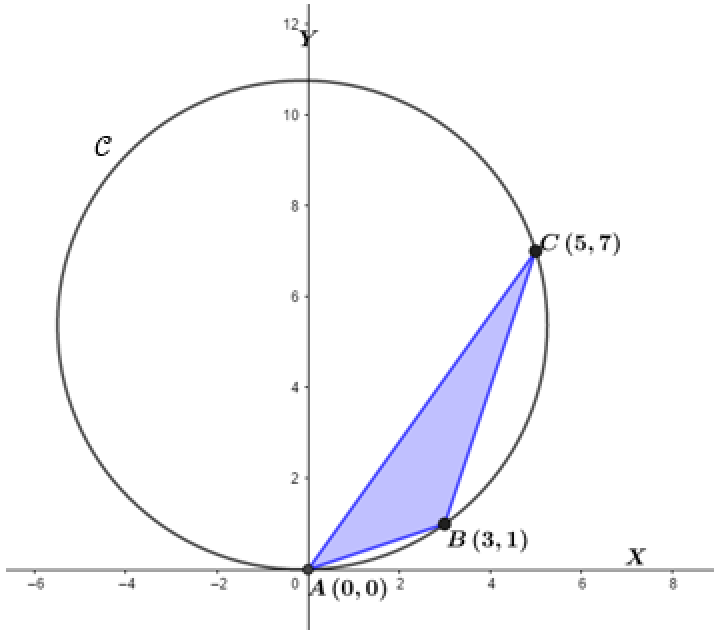
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 4$$

$$\mathcal{C}\colon x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

4. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices: $A(0,0), B(3,1)$ y $C(5,7)$.

Resolución



$$A(0,0) \in \mathcal{C}: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow: 0^2 + 0^2 + (0)D + (0)E + F = 0$$

$$\Rightarrow F = 0 \qquad (1)$$

$$B(3,1) \in \mathcal{C}: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow: (3)^2 + (1)^2 + (3)D + (1)E + F = 0$$

$$\Rightarrow 3D + E + F = -10 \qquad (2)$$

$$C(5,7) \in \mathcal{C}: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow: (5)^2 + (7)^2 + (5)D + (7)E + F = 0$$

$$\Rightarrow 5D + 7E + F = -74 \qquad (3)$$

Ahora reemplazamos (1) en (2) y (3), obtenemos:

$$3D + E = -10 \qquad (4)$$

$$5D + 7E = -74 \qquad (5)$$

Resolviendo (4) y (5),

$$\begin{array}{r|l} -7 & 3D + E \ = -10 \\ & 5D + 7E = -74 \\ \hline & -16D \ / \ = -4 \end{array}$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$D=\frac{1}{4}$$

Reemplazando el valor de D, en (4)

$$3\left(\frac{1}{4}\right)+E=-10$$

$$E=-10-\frac{3}{4}$$

$$E=-\frac{43}{4}$$

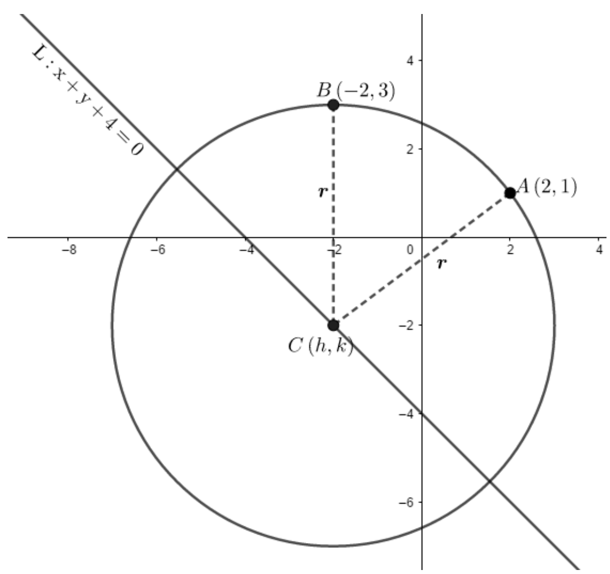
Luego tenemos en la ecuación de forma general de la circunferencia

$$\mathcal{C}: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

$$\mathcal{C}: x^2+y^2+\frac{1}{4}x-\frac{43}{4}y=0$$

5. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,1)$, $B(-2,3)$ y tiene su centro sobre la recta $L: x+y+4=0$

Resolución



Del gráfico (que se hizo en base a los datos dados) tenemos:

$$d(C,A)=d(C,B)$$

$$\sqrt{(-2-h)^2+(3-k)^2}=\sqrt{(2-h)^2+(1-k)^2}$$

Elevando al cuadrado

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$(-2-h)^2+(3-k)^2=(2-h)^2+(1-k)^2$$
$$4+4h+h^2+9-6k+k^2=4-4h+h^2+1-2k+k^2$$
$$8h-4k=-8$$
$$2h-k=-2 \qquad (1)$$

Por otro lado, tenemos que $C(h,k)\in L$, entonces satisface la ecuación de la recta $L: x+y+4=0$, es decir:

$$C(h,k)\in L \Longrightarrow h+k+4=0$$
$$h+k=-4 \qquad (2)$$

luego resolveremos el sistema de ecuaciones formado por (1) y (2)

$$\begin{cases} 2h-k=-2 & (1) \\ h+k=-4 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|l} & 2h-k=-2 \\ & h+k=-4 \\ \hline & 3h \quad \cancel{\ } =-6 \end{array}$$

$$h=-2$$

reemplazando $h=-2$ en (2)

$$-2+k=-4$$
$$k=-2$$

Tenemos así el centro de la circunferencia, $C(h,k)=(-2,-2)$

Por otro lado, determinaremos el radio de la circunferencia, que del gráfico:

$$r=d(C,A)$$
$$r=\sqrt{\left(2-(-2)\right)^2+\left(1-(-2)\right)^2}$$
$$r=\sqrt{25}=5$$
$$r=5$$

Luego para determinar la ecuación de la circunferencia, usaremos la forma ordinaria:

$$\mathcal{C}: (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$\mathcal{C}: (x-(-2))^2+(y-(-2))^2=5^2$$
$$\mathcal{C}: (x+2)^2+(y+2)^2=25$$
$$\mathcal{C}: x^2+4x+4+y^2+4y+4-25=0$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$$

6. Trazar la gráfica de la siguiente ecuación de la circunferencia

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 + 8x + 8y - 4 = 0$$

Resolución

Para trazar la gráfica de la circunferencia, tenemos que encontrar el centro y radio, para ello nos conviene tener la ecuación de la circunferencia de la forma ordinaria, para ello completamos cuadrados.

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 + 8x + 8y - 4 = 0$$

$$x^2 + 8x + y^2 + 8y - 4 = 0$$

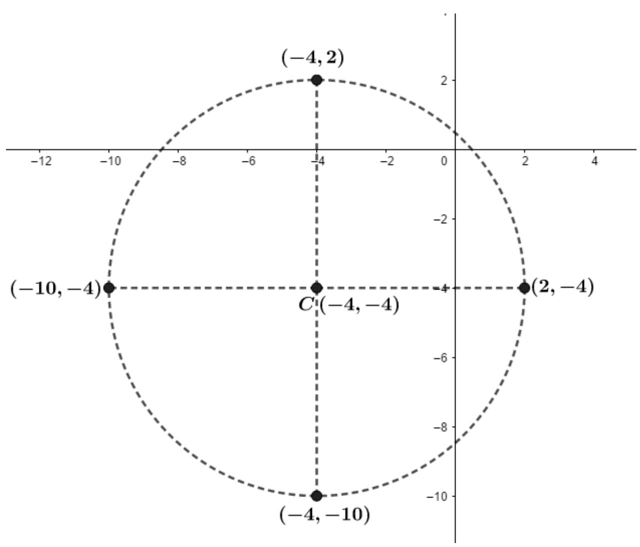
$$\underbrace{x^2 + 8x + 16} - 16 + \underbrace{y^2 + 8y + 16} - 16 - 4 = 0$$

$$(x+4)^2 - 16 + (y+4)^2 - 16 - 4 = 0$$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 = 36$$

$$\mathcal{C}: (x+4)^2 + (y+4)^2 = 6^2$$

Luego tenemos el centro $C(h,k) = (-4,-4)$ y radio $r = 6$; ahora en el plano cartesiano ubicamos el centro, a partir de ahí ubicamos los 4 puntos a la derecha, izquierda, arriba y abajo, a una distancia $r = 6$, por esos 4 puntos pasa la circunferencia.



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Ejercicios

1. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(-2,3)$ y radio 4.
2. Calcular la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en $(-1,4)$ y es tangente al eje de las abscisas.
3. Determinar las coordenadas del centro y la longitud del radio de cada una de las siguientes circunferencias representadas por su ecuación.

   a) $x^2+y^2-4x+6y+5=0$

   b) $x^2+y^2-8x-8y-7=0$

   c) $x^2+y^2+10x-12y+4=0$

   d) $5x^2+5y^2-10x+20y-30=0$
4. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices: $A(-4,-7), B(5,8)$ y $C(-3,6)$.
5. Determinar el valor de k para que la recta $L: 6x-3y=5-k$ sea tangente a la circunferencia $4x^2+4y^2-12x+16y-11=0$
6. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(3,-2)$, $B(-1,-6)$, cuyo centro está sobre la recta

   $L: x-3y+3=0$
7. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que tienen sus centros en la recta $L: 4x-5y=3$, son tangentes a las rectas

   $L_1: 2x-3y=10$ y $L_2: 3x-2y+5=0$
8. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en la recta $L_1: 3x+4y-1=0$, tangente a la recta $L_2: 3x-4y+8=0$ y radio de longitud de 5 $unidades$.
9. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo cuyos lados son $L_1: x-y=0$, $L_2: x-7y=0$ y $L_3: 7x+y=20$.
10. Determinar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en $C(-1,4)$ y es tangente a la recta que pasa por los puntos $A(3,-2)$ y $B(-9,3)$
11. La longitud de la tangente trazada del punto $P(3,y)$ a la circunferencia $x^2+y^2+10x-2y-10=0$ mide $\sqrt{53}$ $unidades$. Hallar la ordenada de P.
12. Se tiene dos rectas que pasan por el punto $P(-2,-1)$ y son tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-6x-4y-3=0$. Hallar la distancia de P a los puntos de tangencia.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

13. Obtener la ecuación de la forma general de cada una de las circunferencias que pasan por los puntos dados.

a) $(3,2),(0,4)$ y $(-6,0)$

b) $(3,5),(-2,1)$ y $(-6,0)$

c) $(-3,2)(0,-4)$ y $(1,-2)$

d) $(1,2),(-2,4)$ y $(5,-3)$

14. En una feria, uno de los juegos mecánicos consiste en cuatro tazas que giran y a su vez describen una trayectoria circular. Hallar la ecuación que representa esa trayectoria si sabemos que el diámetro del juego es de $8m$. ¿Cuál será la ecuación de la circunferencia de cada taza del juego si su radio es de $1.5\ m$?

15. Calcular la longitud de la tangente trazada desde el punto $A(1,-2)$ a la circunferencia $x^2+y^2+x-3y-3=0$

16. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que pasan par el origen de las coordenadas y son tangentes a las dos rectas concurrentes: $L_1: x+2y-9=0$ y $L_2: 2x-y+2=0$

17. Dadas las coordenadas de los extremos de uno de sus diámetros. Obtener la ecuación de la circunferencia.

a) $A(-4,3)$ y $B(4,-1)$

b) $D(-1,-3)$ y $E(1,2)$

c) $F(2,-4)$ y $G(6,0)$

d) $H(-3,-4)$ y $(5,-6)$

18. Determinar cuáles de las ecuaciones representan una circunferencia, o un punto, o no tienen gráfica.

a) $x^2+y^2-2x+4y+5=0$

b) $x^2+y^2+4x-8y-5=0$

c) $x^2+y^2-5x-3y+\frac{34}{4}=0$

d) $x^2+y^2+7x+5y+16=0$

19. Los lados de un triángulo están sobre las rectas $3x+4y+8=0,\ 3x-4y-32=0$ y $x=8$. Encontrar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo.

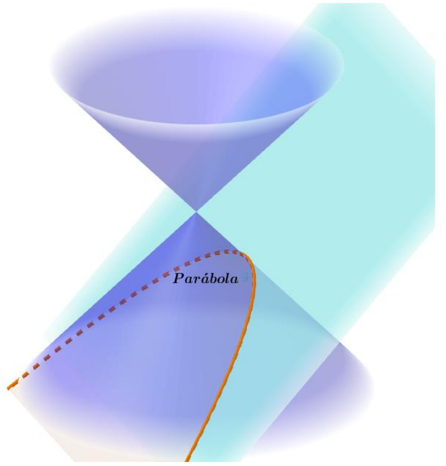
Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

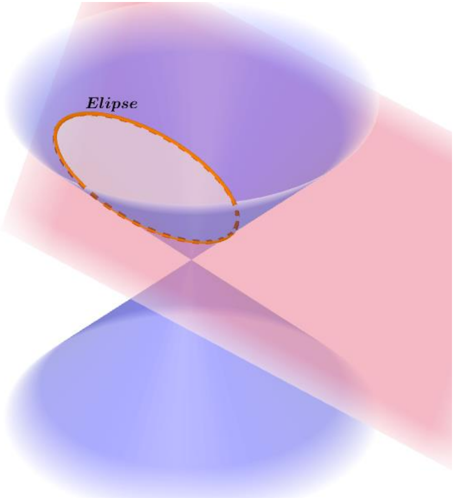
20. Determinar la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $4x + 3y = 4$ en el punto $(4, -4)$ y el centro está en la recta
$x - y = 7$.

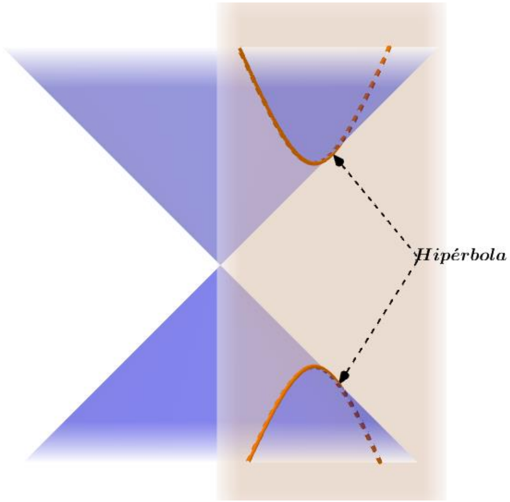
2.3 Secciones Cónicas

La gráfica de una ecuación de segundo grado, que se puede expresar de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en las coordenadas x y y se llama sección cónica o simplemente cónica.

Esta denominación viene del hecho de que la curva se puede obtener como la intersección de un cono circular recto y un plano.





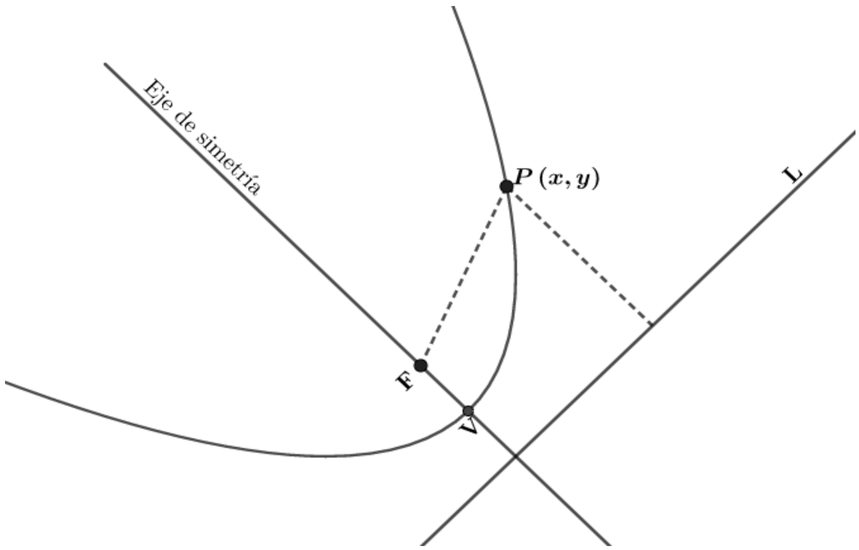


Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

2.3.1 La Parábola

Es el conjunto de puntos $P(x, y) \in R^2$**,** que equidistan de un punto fijo F (foco) y una recta fija L(directriz).

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in R^2 / d(P, F) = d(P, L)\}$$

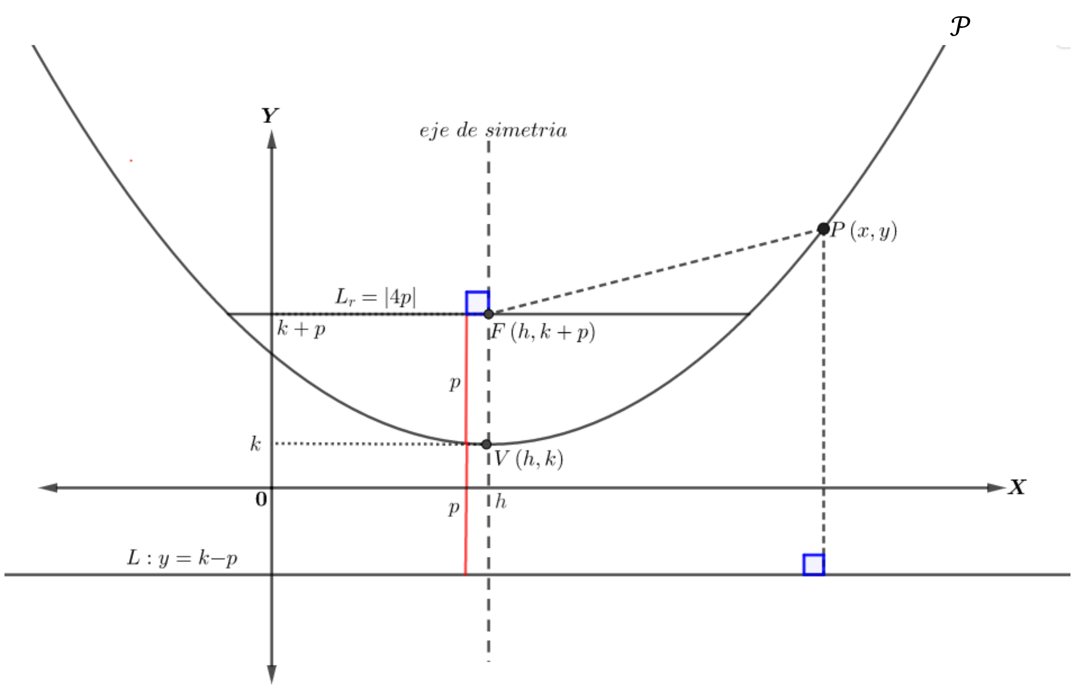


V: Vértice

F: Foco

L: Directriz

Ecuación ordinaria o por traslación de la parábola vertical



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Elementos de la parábola vertical

$V(h,k)$; *vértice*

$F(h,k+p)$; *foco*

$L: y = k - p$; *recta directriz*

$d(V,F) = d(V,L) = |p|$

$L_r = |4p|$

$x = h$; *eje de simetria = eje focal*

$e = \dfrac{d(P,F)}{d(P,L)} = 1$; *excentricidad*

Para encontrar la ecuación ordinaria de la parábola partimos de la definición:

$$\mathcal{P} = \{(x,y) \in R^2 / d(P,F) = d(P,L)\}$$

$$d(P,F) = d(P,L)$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2} = \frac{|y-k+p|}{\sqrt{0^2+1^2}}$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k-p))^2} = |y-k+p|$$

Elevando al cuadrado, y desarrollando:

$$(x-h)^2 + [(y-k)-p]^2 = [(y-k)+p]^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 - 2p(y-k) + p^2 = (y-k)^2 + 2p(y-k) + p^2$$

$$(x-h)^2 - 2p(y-k) = 2p(y-k)$$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}: (x-h)^2 = 4p(y-k)}$$

Ecuación ordinaria de la parábola vertical

$Si\ p > 0 \Longrightarrow la\ \ párabola\ es\ cóncava\ hacia\ arriba$

$Si\ p < 0 \Longrightarrow la\ \ párabola\ es\ cóncava\ hacia\ abajo$

Observación: Si el vértice de la parábola es el origen, $V(h,k) = (0,0)$

Entonces la ecuación de la parábola se llama **Canónica,** y se reduce a:

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\mathcal{P}: x^2 = 4py$$

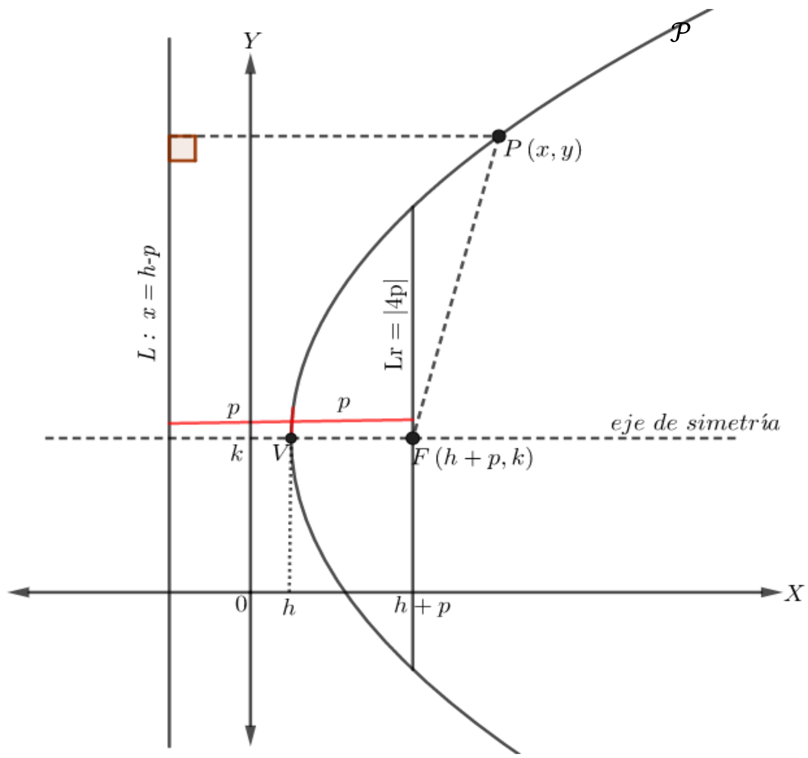
Donde el foco es $F(0, p)$

Recta directriz: $L: y = -p$

Eje de simetría: eje Y

Ecuación ordinaria o por traslación de la parábola horizontal

Para obtener la ecuación de una parábola horizontal seguimos un proceso similar



Elementos de la parábola horizontal

$V(h, k)$; $vértice$

$F(h+p, k)$; $foco$

$L: x = h - p$; $recta\ directriz$

$d(V, F) = d(V, L) = |p|$

$L_r = |4p|$

$y = k$; $eje\ de\ simetria = eje\ focal$

$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, L)} = 1;\ \ excentricidad$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Partimos de la de la definición:

$$\mathcal{P} = \{(x,y) \in R^2 / d(P,F) = d(P,L)\}$$

$$d(P,F) = d(P,L)$$

$$\sqrt{(x-(h+p))^2 + (y-k)^2} = \frac{|x-h+p|}{\sqrt{1^2+0^2}}$$

$$\sqrt{(x-h-p)^2 + (y-k))^2} = |x-h+p|$$

Elevando al cuadrado, y desarrollando:

$$[(x-h)-p]^2 + (y-k))^2 = [(x-h)+p]^2$$

$$(x-h)^2 - 2p(x-h) + p^2 + (y-k)^2 = (x-h)^2 + 2p(x-h) + p^2$$

$$(y-k)^2 - 2p(x-h) = 2p(x-h)$$

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}: (y-k)^2 = 4p(x-h)}$$

Ecuación ordinaria de la parábola horizontal

$$Si\ p > 0 \Longrightarrow la\ \ párabola\ es\ cóncava\ hacia\ la\ derecha$$

$$Si\ p < 0 \Longrightarrow la\ \ párabola\ es\ cóncava\ hacia\ la\ izquierda$$

Observación: Si el vértice de la parábola es el origen, $V(h,k) = (0,0)$

Entonces la ecuación de la parábola se llama **Canónica,** y se reduce a:

$$\mathcal{P}: y^2 = 4px$$

Donde el foco es $F(p,0)$

Recta directriz: $L: x = -p$

Eje de simetría: eje X

Ecuación general de la parábola

Partiendo de la ecuación ordinaria de la parábola,

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ $x^2 - 2hx + h^2 - 4py + 4kp = 0$ $x^2 + \underbrace{(-2h)}_{D}x + \underbrace{(-4p)}_{E}y + \underbrace{(h^2 + 4kp)}_{F}$ $= 0$ $\mathcal{P}: x^2 + Dx + Ey + F = 0$ Ecuación general de la parábola	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ $y^2 - 2ky + k^2 - 4px + 4hp = 0$ $y^2 + \underbrace{(-2k)}_{D}y + \underbrace{(-4p)}_{E}x + \underbrace{(k^2 + 4hp)}_{F}$ $= 0$ $\mathcal{P}: y^2 + Dy + Ex + F = 0$ Ecuación general de la parábola

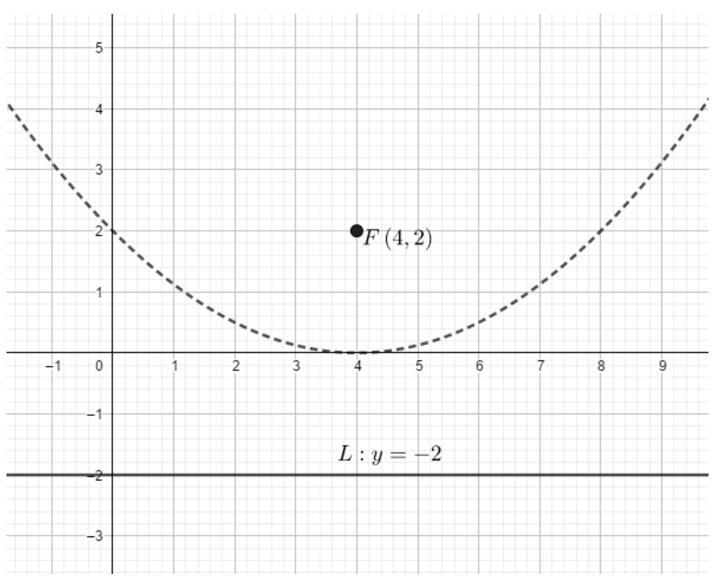
Observación: Si tenemos la ecuación general de la parábola, completando cuadrados llegamos a la forma ordinaria.

Ejemplos

1. Hallar la ecuación de la parábola si se tiene la recta directriz $L: y = -2$ y el foco $F(4,2)$.

Resolución

Ubicamos los datos dados en el plano cartesiano



Según la gráfica se nos sugiere utilizar la ecuación ordinaria vertical cóncava hacia arriba

$$\mathcal{P}: (x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Además, tenemos que:

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$F(h, k+p) = (4,2)$ y $L: y = k - p = -2$

$h = 4 \quad \wedge \quad k + p = 2$ y $k - p = -2$

resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} k + p = 2 \\ k - p = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|l} & k + p = 2 \\ & k - p = -2 \\ \hline & 2k \quad / = 0 \end{array}$$

$$k = 0 \Longrightarrow p = 2$$

así tenemos el vértice $V(4,0)$ y $p = 2$, luego reemplazamos en la ecuación ordinaria vertical

$$\mathcal{P}: (x - h)^2 = 4p(y - k)$$

$$(x - 4)^2 = 4(2)(y - 0)$$

$$\mathcal{P}: (x - 4)^2 = 8y$$

Observación: notemos que podríamos, haber reemplazado directamente del gráfico.

2. Hallar los elementos de la parábola que tiene por ecuación: $y^2 = 8x$

Resolución

Notemos que nos dan una ecuación canónica horizontal

$$\mathcal{P}: y^2 = 4px$$

$$y^2 = 8x$$

$$y^2 = 4(2)x$$

De donde nos resulta que $p = 2$

Luego los **elementos** son:

Vértice: $V(0,0)$

Foco: $F(p, 0) = (2,0)$

Recta directriz: $L: x = -p$

$L: x = -2$

Eje de simetría: eje X

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Lado recto: $L_r = |4p|$

$L_r = 8$

3. Calcular las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de la directriz de la siguiente parábola: $x^2 - 2x - 6y - 5 = 0$

Resolución

$x^2 - 2x - 6y - 5 = 0$

Completando cuadrados, obtendremos la ecuación ordinaria:

$\underbrace{x^2 - 2x + 1} - 1 - 6y - 5 = 0$

$(x-1)^2 - 1 - 6y - 5 = 0$

$(x-1)^2 = 6y + 6$

$(x-1)^2 = 6(y+1)$

Ahora tenemos la ecuación ordinaria vertical

De donde deducimos que:

$4p = 6 \Rightarrow p = \dfrac{3}{2}$

Vértice: $V(h,k) = (1,-1)$

Foco: $F(h, k+p) = \left(1, -1 + \frac{3}{2}\right) \Longrightarrow F = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

Recta directriz: $L\colon y = k - p \ \Longrightarrow y = -1 - \frac{3}{2}$

$y = -\frac{5}{2}$

4. Determinar y mostrar la gráfica de la ecuación $y^2 - 6y + 8x + 41 = 0$ y determine sus elementos.

Resolución

Completando cuadrados, obtendremos la ecuación ordinaria:

$y^2 - 6y + 8x + 41 = 0$

$\underbrace{y^2 - 6y + 9} - 9 + 8x + 41 = 0$

$(y-3)^2 - 9 + 8x + 41 = 0$

$(y-3)^2 = -8x - 32$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$(y-3)^2 = -8(x+4)$, ecuación ordinaria horizontal, de donde deduciremos sus **elementos**:

$4p = -8 \Longrightarrow p = -2$, por lo que la parábola es cóncava hacia la izquierda.

Vértice: $V(h,k) = (-4,3)$

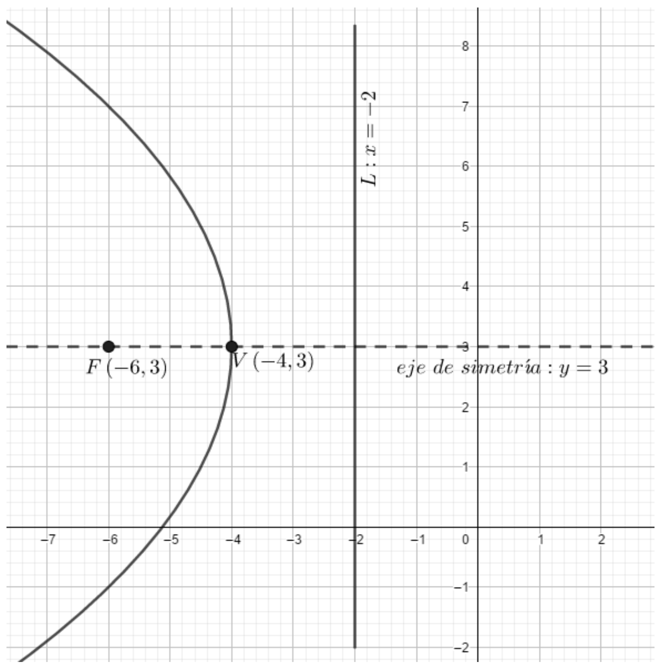
Foco: $F(h+p,k) = (-4+(-2),3) \Longrightarrow F = (-6,3)$

Recta directriz: $L: x = h - p \Longrightarrow x = -4-(-2);\ \ x = -2$

Lado recto: $L_r = |4p| \Longrightarrow L_r = |4(-2)| = 8$

Eje de simetría: $y = k \Longrightarrow y = 3$

Excentricidad: $e = \frac{d(P,F)}{d(P,L)} = 1$

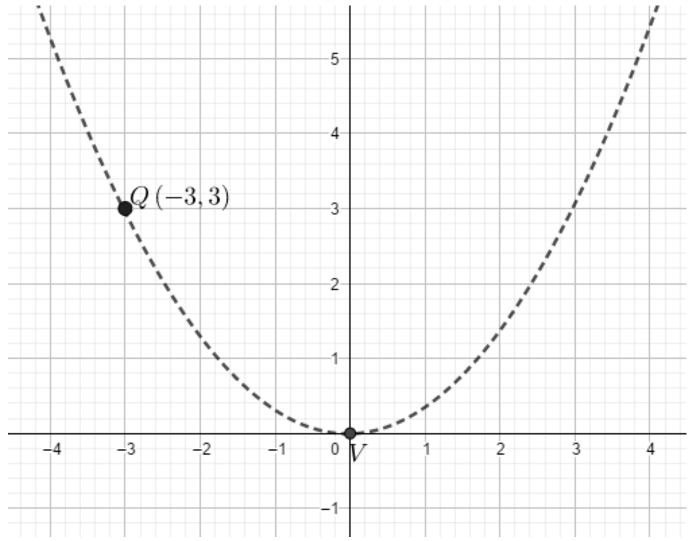


5. Determinar la ecuación de la parábola con vértice (0,0), que tiene al eje Y como eje de simetría y que pasa por el punto $Q(-3,3)$.

Resolución

Ubicamos los datos dados en el plano cartesiano

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k



Con los datos dados se sugiere que la parábola es de la forma canónica vertical, es decir: $\mathcal{P}: x^2 = 4py$

Nos faltaría encontrar el valor de p, pero tenemos un punto

$$Q(-3,3) \in \mathcal{P} \Rightarrow (-3)^2 = 4p(3)$$

$$9 = 12p$$

$$p = \frac{3}{4}$$

Luego tenemos que: $$\mathcal{P}: x^2 = 4\left(\frac{3}{4}\right)y$$

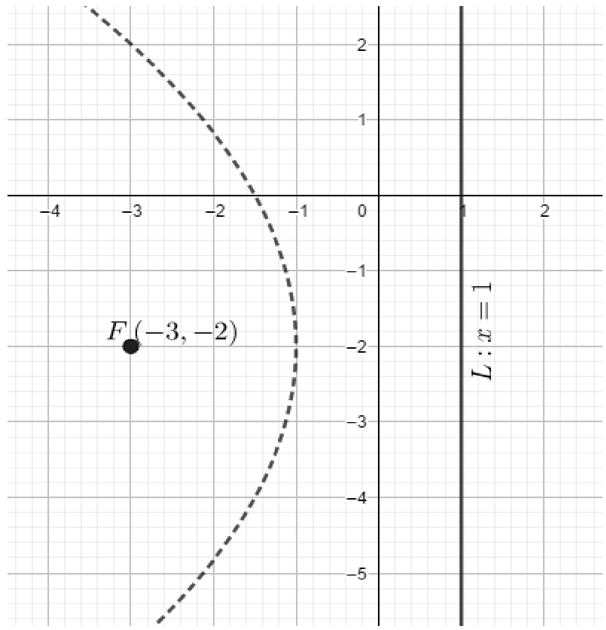
$$\mathcal{P}: x^2 = 3y$$

6. Hallar la ecuación de la parábola que tiene foco en el punto de coordenadas$(-3,-2)$ y directriz con ecuación $x = 1$.

Resolución

Ubicamos los datos dados en el plano cartesiano

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k



Con los datos dados, se puede notar que la parábola es cóncava hacia la izquierda, es decir:

$$\mathcal{P}: (y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Sabemos que $d(F,L) = |2p| \Rightarrow |-3-1| = |2p|$

$$2p = 4 \ \vee \ 2p = -4$$

$$p = 2 \ \vee \ p = -2$$

Pero por los datos que nos dan, se sugiere que la parábola es conchaba hacia la izquierda, luego $p = -2$

Por otro lado, tenemos el foco $F(h+p,k) = (-3,-2)$

$$h + p = -3 \quad \wedge \quad k = -2$$

$$h + (-2) = -3 \quad \wedge \quad k = -2$$

$$h = -1 \quad \wedge \quad k = -2$$

así el vértice es $V(h,k) = (-1,-2)$

por lo tanto, la ecuación de la parábola es:

$$\mathcal{P}: (y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$\left(y-(-2)\right)^2 = 4(-2)\left(x-(-1)\right)$$

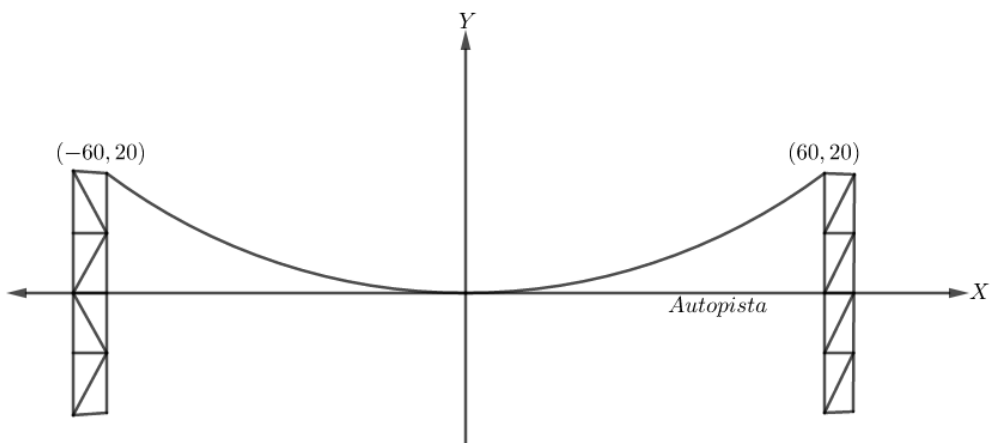
$$\mathcal{P}: (y+2)^2 = -8(x+1)$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

7. Cada uno de los cables de sujeción de un puente colgante se halla suspendido (con forma de parábola) entre dos torres separadas $120m$ entre si y tienen una altura de $20m$ sobre la autopista. Los cables tocan la autopista en el punto medio entre las torres. Hallar la ecuación o modelo matemático que represente este problema.

Resolución

Nos planteamos un gráfico con los datos dados en el plano cartesiano, considerando la autopista como el eje X, y el vértice de la parábola con el origen del plano cartesiano.



Así tenemos la ecuación canónica vertical $\mathcal{P}:\ x^2 = 4py$, donde nos faltaría encontrar el valor de p, pero tenemos puntos que pertenecen a la parábola por tanto satisfacen su ecuación, tenemos entonces:

$$(60{,}20) \in \mathcal{P} \Rightarrow (60)^2 = 4p(20)$$

$$3600 = 80p$$

$$p = 45$$

Luego la ecuación que representa este problema es:

$$\mathcal{P}:\ x^2 = 4(45)y$$

$$\mathcal{P}:\ x^2 = 180y$$

8. Si el vértice de una parábola es el punto $V(-2,-3)$, la longitud del lado recto es $4\sqrt{5}$ y la recta tangente a la parábola en él V es $L_T: 2x - y + 1 = 0$, determinar la ecuación de la parábola.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Resolución

Según los datos tenemos dos posibilidades para la ecuación de la parábola, como nos da la longitud del lado recto tenemos:

$$L_r = |4p| = 4\sqrt{5} \Longrightarrow |p| = \sqrt{5}$$

$$p = \pm\sqrt{5}$$

Tenemos por dato que la recta $L_T: 2x - y + 1 = 0$ es tangente a la parábola en el vértice, entonces la recta normal a ésta será el eje de simetría, luego:

$$L_T \perp L_N \Leftrightarrow m_T . m_N = -1$$

$$2m_N = -1 \Longrightarrow m_N = -\frac{1}{2}$$

Además, el vértice $V(-2,-3)$ pertenece a la recta normal L_N, tenemos entonces por la ecuación punto pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

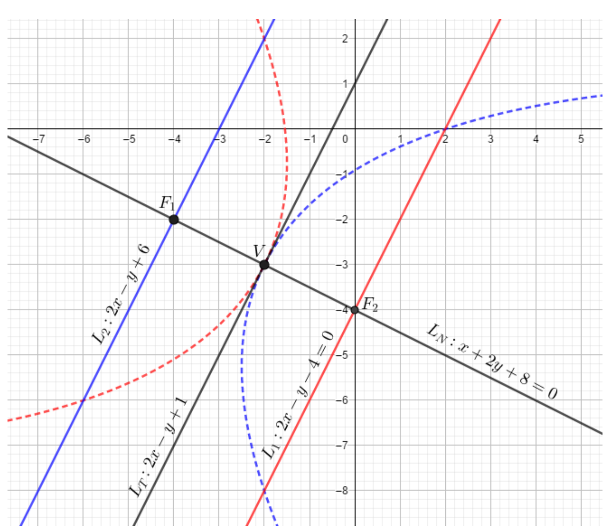
$$L_N: y - (-3) = -\frac{1}{2}(x - (-2))$$

$$L_N: y + 3 = -\frac{1}{2}(x + 2)$$

$$L_N: 2y + 6 = -x - 2$$

$$L_N: x + 2y + 8 = 0$$

Así tenemos que la recta L_N es el eje focal o eje de simetría de la parábola, luego el foco pertenece a la recta L_N



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Sea el foco $F(a,b)$, tenemos entonces:

$$F(a,b) \in L_N: x+2y+8=0$$

$$a+2b+8=0 \qquad (*)$$

Además $|\overline{VF}| = |P| \Rightarrow |\overline{VF}| = \sqrt{5}$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(a-(-2)\right)^2 + \left(b-(-3)\right)^2} = \sqrt{5}$$

Elevando al cuadrado tenemos:

$$(a+2)^2 + (b+3)^2 = 5 \qquad (**)$$

De $(*)$ obtenemos $a=-2b-8$ reemplazamos en $(**)$

Obtenemos $(-2b-8+2)^2 + (b+3)^2 = 5$

$$(-2b-6)^2 + (b+3)^2 = 5$$

$$4(b+3)^2 + (b+3)^2 = 5$$

$$5(b+3)^2 = 5$$

$$(b+3)^2 = 1$$

$$b+3 = \pm 1$$

$$b+3 = 1 \ \vee \ b+3 = -1$$

$$b = -2 \ \vee \ b = -4$$

Luego si $b=-2 \Rightarrow a=-4$; $F_1(a,b) = (-4,-2)$

si $b=-4 \Rightarrow a=0$; $F_2(a,b) = (0,-4)$

Primer caso: Si el foco fuese; $F_1(a,b) = (-4,-2)$, usando la definición de la parábola $\mathcal{P} = \{(x,y) \in R^2 / d(P,F) = d(P,L)\}$, tenemos entonces $d(P,F_1) = d(P,L_1)$, donde $P(x,y)$ es un punto cualquiera de la parábola, nos estaría faltando la recta directriz L_1, pero $F_2(0,-4) \in L_1$(mirar la gráfica) además $L_1 // L_T \Longrightarrow m_1 = m_T$, así $m_1 = 2$ entonces con la ecuación punto pendiente tenemos:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$L_1: y-(-4) = 2(x-0)$$

$$L_1: y+4 = 2x$$

$$L_1: 2x - y - 4 = 0$$

Retomando $\qquad d(P,F_1) = d(P,L_1),$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\sqrt{(x-(-4))^2+(y-(-2))^2}=\frac{|2x-y-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}=\frac{|2x-y-4|}{\sqrt{5}}$$

Elevando al cuadrado: $(x+4)^2+(y+2)^2=\frac{(2x-y+4)^2}{5}$

$$5x^2+40x+80+5y^2+20y+20=(2x-y+4)^2$$

$$5x^2+40x+5y^2+20y+100=4x^2+y^2+16-4xy+16x-8y$$

$$\mathcal{P}_1: x^2+4y^2+4xy+24x+28y+84=0$$

Que sería la ecuación de una parábola que no es vertical ni horizontal.

segundo caso: si el foco fuese ; $F_2(a,b)=(0,-4)$, usando la definición de la parábola $\mathcal{P}=\{(x,y)\in R^2/d(P,F)=d(P,L)\}$, tenemos entonces

$d(P,F_2)=d(P,L_2)$, donde $P(x,y)$ es un punto cualquiera de la parábola, nos estaría faltando la recta directriz L_2, pero $F_1(-4,-2)\in L_2$(mirar la gráfica) además $L_2 \,//\, L_T \Longrightarrow m_2=m_T$, así $m_2=2$ entonces con la ecuación punto pendiente tenemos:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$L_2: y-(-2)=2(x-(-4))$$

$$L_2: y+2=2x+8$$

$$L_2: 2x-y+6=0$$

Retomando $\quad d(P,F_2)=d(P,L_2)$,

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-(-4))^2}=\frac{|2x-y+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$\sqrt{x^2+(y+4)^2}=\frac{|2x-y+6|}{\sqrt{5}}$$

Elevando al cuadrado: $x^2+(y+4)^2=\frac{(2x-y+6)^2}{5}$

$$5x^2+5y^2+40y+80=(2x-y+6)^2$$

$$5x^2+5y^2+40y+80=4x^2+y^2+36-4xy+24x-12y$$

$$\mathcal{P}_2: x^2+4y^2+4xy-24x+52y+44=0$$

Que sería la ecuación de una parábola que no es vertical ni horizontal.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Ejercicios

1. Encontrar las coordenadas del vértice, foco, ecuación del eje focal, directriz, longitud del lado recto y grafique la parábola
 $(x+1)^2 = 12(y-4)$
2. Hallar la ecuación de la parábola, se sabe que su eje de simetría es paralelo al eje de las abscisas, que su vértice es $V(1,-2)$ y que pasa por el punto $Q(4,1)$.
3. Encontrar los elementos y graficar cada una de las siguientes parábolas representadas por su ecuación general.

a) $y^2 + 6y - 4x + 13 = 0$

b) $x^2 - 4y - 4 = 0$

c) $y^2 + 14y - 6x + 9 = 0$

d) $2y^2 - 8x + 5 = 0$

e) $9y^2 + 48x - 80 = 0$

4. Un cable sostenido por dos postes tiene forma de un arco parabólico, los postes que lo sostienen están separados $40m$ y tienen una altura de $10m$. Si el cable toca el piso a la mitad de la distancia entre los postes, calcular la altura del cable a $8m$ del centro del arco.
5. Una parábola cuya directriz es el eje X es tal que su foco está en la recta $L_1: 2x + 5y + 12 = 0$ y su vértice está en la recta $L_2: 3x + 5y - 6 = 0$. Hallar Ia ecuación de la parábola.
6. Si el vértice de una parábola es $V(-2,-3)$ y un extremo del lado recto es el punto $(0,-7)$; encontrar la ecuación de la parábola.
7. Micaela vende 80 audífonos diariamente. Si cuando los vende a $S/30$ se los compran todos y por cada aumento de $S/0.60$ en el precio deja de vender un audífono. Determinar:

a) El precio de cada audífono para que Alejandra obtenga la ganancia máxima al día.

b) ¿Cuál es el ingreso máximo por su venta de audífonos?

c) ¿Cuántos audífonos deja de vender cuando su ingreso es máximo?

8. Hallar la longitud de la cuerda focal (cuerda que pasa por el foco) de la parábola $x^2 + 8y = 0$ que es paralela a la recta $3x + 4y - 7 = 0$.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

9. Suponga que el agua al salir del extremo de un tubo horizontal que se encuentra a $7m$ arriba del suelo, describe una curva parabólica, estando el vértice en el extremo del tubo. Si en un punto a $2m$ por debajo del nivel del tubo, el flujo del agua se ha curvado hacia afuera $3m$ más allá de una recta vertical que pasa por el extremo del tubo. ¿A qué distancia de esta vertical llegará el agua al suelo?

10. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el vértice y los puntos extremos del lado recto de la parábola $x^2 = 4y$.

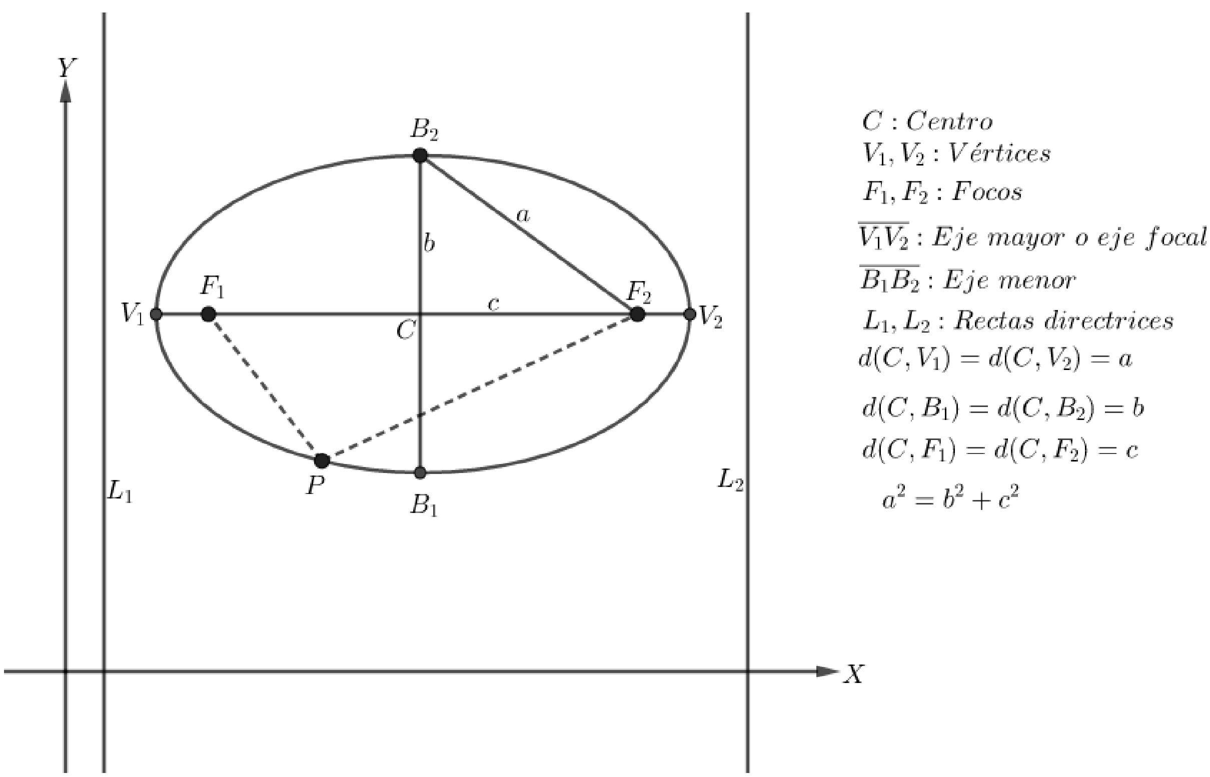
2.3.2 La Elipse

Dados dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados focos, separados por una distancia $2c$,y dada una contante a tal que $a > c > 0$, se define Ia elipse como el conjunto de todos los puntos P tales que la suma de las distancias de P a los focos F_1 y F_2 es igual a $2a$, es decir:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

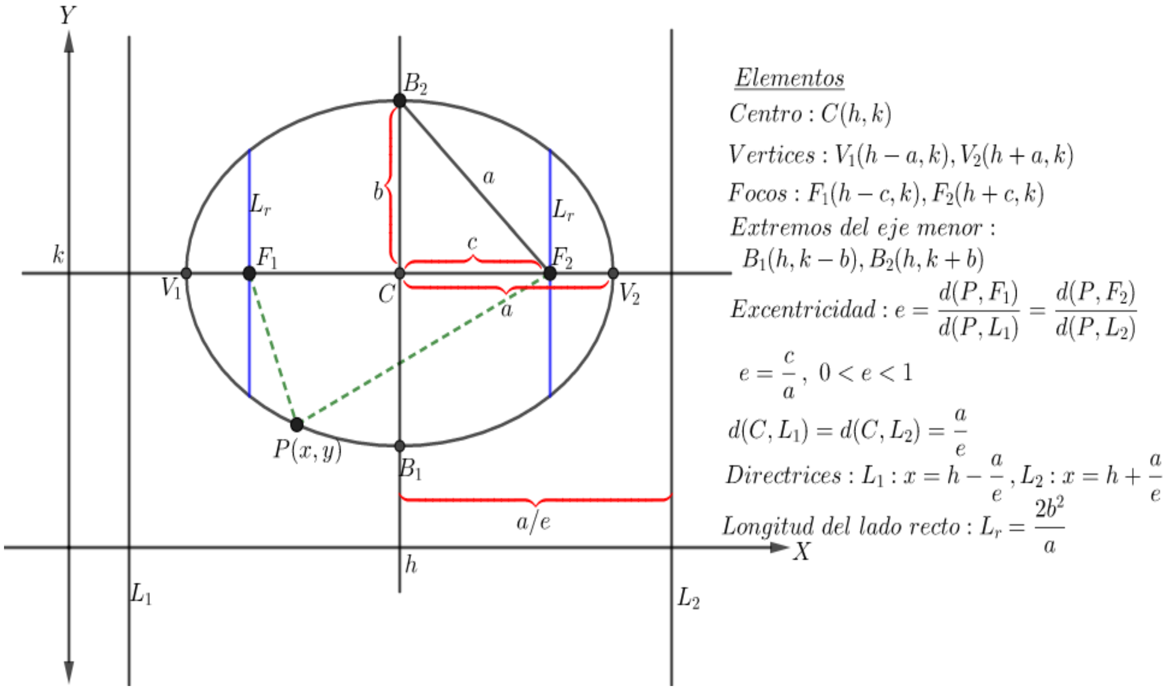
Luego tenemos que:

$$\mathcal{E} = \{P(x, y) \in R^2 / d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Ecuación ordinaria o por traslación de la elipse horizontal



De la definición tenemos $\mathcal{E}=\{P(x,y)\in R^2/d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a\}$

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$

$$\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}+\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}=2a$$

$$\sqrt{((x-h)+c)^2+(y-k)^2}+\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}=2a$$

$$\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{((x-h)+c)^2+(y-k)^2}$$

Elevando al cuadrado obtenemos

$$\left((x-h)-c\right)^2+(y-k)^2$$

$$=4a^2-4a\sqrt{\left((x-h)+c\right)^2+(y-k)^2}+((x-h)+c)^2+(y-k)^2$$

$$\left((x-h)-c\right)^2-((x-h)+c)^2=4a^2-4a\sqrt{\left((x-h)+c\right)^2+(y-k)^2}$$

$$-4c(x-h)=4a^2-4a\sqrt{\left((x-h)+c\right)^2+(y-k)^2}$$

$$-4c(x-h)-4a^2=-4a\sqrt{\left((x-h)+c\right)^2+(y-k)^2}$$

$$c(x-h)+a^2=a\sqrt{\left((x-h)+c\right)^2+(y-k)^2}$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Elevando al cuadrado

$$(c(x-h)+a^2)^2 = a^2\left(\left((x-h)+c\right)^{\mathbf{2}} + (y-k)^2\right)$$

$$c^2(x-h)^2 + 2ca^2(x-h) + a^4 = a^2[(x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + y^2 - 2yk + k^2]$$

$$c^2(x-h)^2 + 2ca^2(x-h) + a^4$$
$$= a^2(x-h)^2 + 2ca^2(x-h) + a^2c^2 + a^2y^2 - 2ka^2y + a^2k^2$$

$$c^2(x-h)^2 + a^4 = a^2(x-h)^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - 2ka^2y + a^2k^2$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2(x-h)^2 - c^2(x-h)^2 + a^2y^2 - 2ka^2y + a^2k^2$$

$$a^2(a^2-c^2) = (x-h)^2(a^2-c^2) + a^2(y^2 - 2ky + k^2)$$

$$a^2(a^2-c^2) = (x-h)^2(a^2-c^2) + a^2(y-k)^2$$

Pero de $a^2 = b^2 + c^2$ (ver el gráfico), deducimos que $b^2 = a^2 - c^2$ y reemplazando obtenemos:

$$a^2b^2 = b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2$$

Dividiendo entre a^2b^2

$$\frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{b^2(x-h)^2}{a^2b^2} + \frac{a^2(y-k)^2}{a^2b^2}$$

$$1 = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}\text{: } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación ordinaria horizontal de la elipse

Observación: Si el centro de la elipse es el origen, $C(h,k) = (0,0)$

Entonces la ecuación de la elipse se llama **Canónica,** y se reduce a:

$$\mathcal{E}\text{: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vértices: $V_1(-a,0),\ V_2(a,0)$

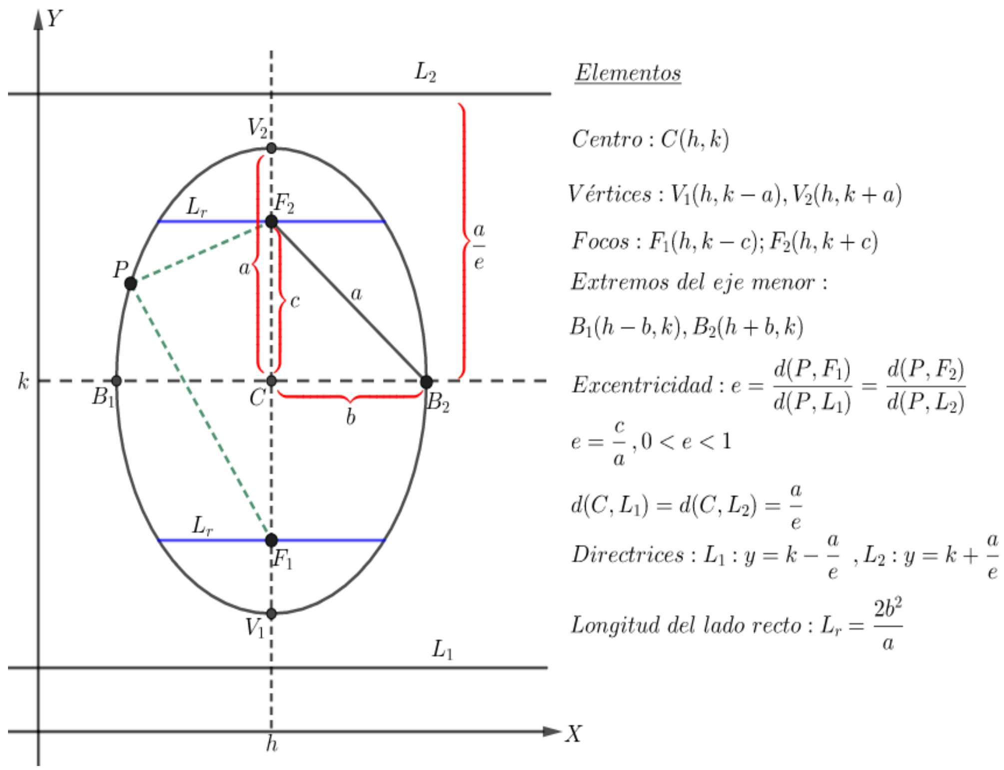
Focos: $F_1(-c,0),\ F_2(c,0)$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Extremos del eje menor: $B_1(0,-b),\ B_2(0,b)$

Directrices: $L_1\colon x = -\frac{a}{e}\ ,\ L_2\colon x = \frac{a}{e}$

Ecuación ordinaria o por traslación de la elipse vertical



De la definición tenemos $\mathcal{E} = \{P(x,y) \in R^2 / d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a\}$

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} + \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + \left((y-k)+c\right)^2} + \sqrt{(x-h)^2 + ((y-k)-c))^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + ((y-k)-c))^2} = 2a - \sqrt{(x-h)^2 + \left((y-k)+c\right)^2}$$

Elevando al cuadrado obtenemos

$$(x-h)^2 + ((y-k)-c))^2$$

$$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + \left((y-k)+c\right)^2} + (x-h)^2 + \left((y-k)+c\right)^2$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\left((y-k)-c\right)^{2}-((y-k)+c)^{2}=4a^{2}-4a\sqrt{(x-h)^{2}+\left((y-k)+c)\right)^{2}}$$

$$-4c(y-k)=4a^{2}-4a\sqrt{(x-h)^{2}+\left((y-k)+c)\right)^{2}}$$

$$-4c(y-k)-4a^{2}=-4a\sqrt{(x-h)^{2}+\left((y-k)+c)\right)^{2}}$$

$$c(y-k)+a^{2}=a\sqrt{(x-h)^{2}+\left((y-k)+c)\right)^{2}}$$

Elevando al cuadrado

$$(c(y-k)+a^{2})^{2}=a^{2}\left((x-h)^{2}+\left((y-k)+c)\right)^{2}\right)$$

$$c^{2}(y-k)^{2}+2ca^{2}(y-k)+a^{4}=a^{2}[(x-h)^{2}+(y-k)^{2}+2c(y-k)+c^{2}]$$

$$c^{2}(y-k)^{2}+2ca^{2}(y-k)+a^{4}=a^{2}(x-h)^{2}+a^{2}(y-k)^{2}+2ca^{2}(y-k)+a^{2}c^{2}$$

$$c^{2}(y-k)^{2}+a^{4}=a^{2}(x-h)^{2}+a^{2}(y-k)^{2}+a^{2}c^{2}$$

$$a^{4}-a^{2}c^{2}=a^{2}(x-h)^{2}+a^{2}(y-k)^{2}-c^{2}(y-k)^{2}$$

$$a^{2}(a^{2}-c^{2})=a^{2}(x-h)^{2}+(y-k)^{2}(a^{2}-c^{2})$$

Pero sabemos que $a^{2}=b^{2}+c^{2}$ (ver el gráfico), entonces $b^{2}=a^{2}-c^{2}$ y reemplazando obtenemos:

$$a^{2}b^{2}=a^{2}(x-h)^{2}+b^{2}(y-k)^{2}$$

Dividiendo entre $a^{2}b^{2}$

$$\frac{a^{2}b^{2}}{a^{2}b^{2}}=\frac{a^{2}(x-h)^{2}}{a^{2}b^{2}}+\frac{b^{2}(y-k)^{2}}{a^{2}b^{2}}$$

$$1=\frac{(x-h)^{2}}{b^{2}}+\frac{(y-k)^{2}}{a^{2}}$$

$$\frac{(x-h)^{2}}{b^{2}}+\frac{(y-k)^{2}}{a^{2}}=1$$

$$\mathcal{E}:\ \frac{(y-k)^{2}}{a^{2}}+\frac{(x-h)^{2}}{b^{2}}=1$$

Ecuación ordinaria vertical de la elipse

Observación: Si el centro de la elipse es el origen, $C(h,k)=(0,0)$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Entonces la ecuación de la elipse se llama **Canónica,** y se reduce a:

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Vértices: $V_1(0,-a)$, $V_2(0,a)$

Focos: $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$

Extremos del eje menor: $B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$

Directrices: $L_1: y = -\frac{a}{e}$, $L_2: y = \frac{a}{e}$

Ecuación general de la elipse

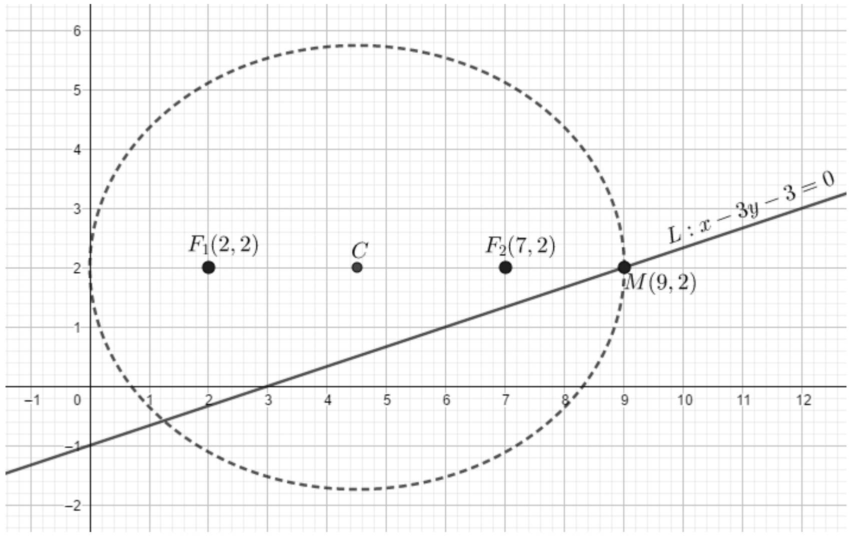
La ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, donde los coeficientes A y B son del mismo signo, representa una elipse de ejes paralelos a los ejes coordenados, o bien un punto o no representa ningún lugar geométrico real.

Ejemplos

1. Los focos de una elipse son $(2,2)$ y $(7,2)$. Hallar la ecuación de la elipse, si uno de los vértices esta sobre la recta: $L: x - 3y - 3 = 0$

Resolución

Con los datos que nos dan, hacemos un bosquejo de la gráfica



Como podemos observar del gráfico, se trata de una elipse horizontal, por lo que usaremos la ecuación ordinaria horizontal:

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\mathcal{E}: \frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Donde el centro $C=\frac{F_1+F_2}{2} \Rightarrow C(h,k)=\frac{1}{2}[(2{,}2)+(7{,}2)]$

$$C(h,k)=\frac{1}{2}(9{,}4)=\left(\frac{9}{2},2\right)$$

$$C(h,k)=\left(\frac{9}{2},2\right)$$

Además, tenemos el punto $M(9{,}2)$ que pertenece al eje focal, luego

$$d(M,C)=a \Longrightarrow a=\sqrt{\left(9-\frac{9}{2}\right)^2+(2-2)^2}$$

$$a=\frac{9}{2}$$

De igual forma $d(F_1,C)=c \Longrightarrow \sqrt{\left(2-\frac{9}{2}\right)^2+(2-2)^2}=c$

$$c=\frac{5}{2}$$

Luego de $a^2=b^2+c^2$, tenemos $\left(\frac{9}{2}\right)^2=b^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$$b^2=\left(\frac{9}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$b^2=\frac{56}{4}$$

Así tenemos la ecuación ordinaria horizontal de la elipse:

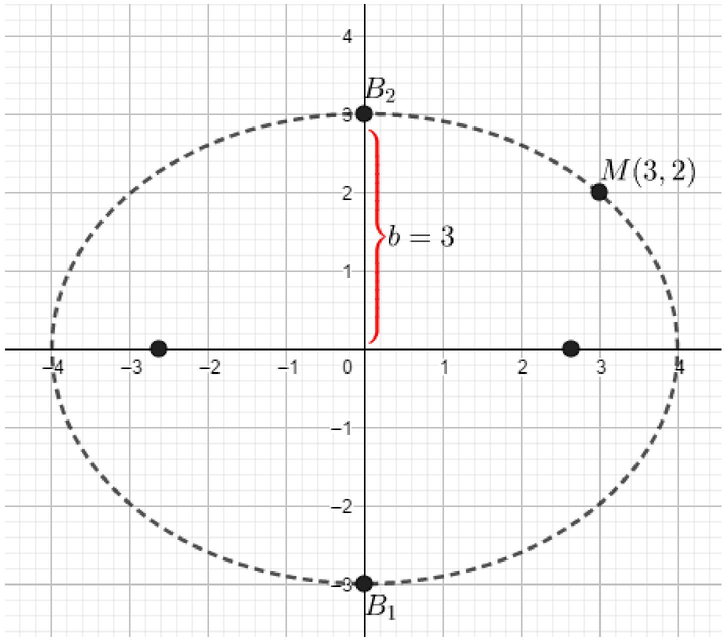
$$\mathcal{E}: \frac{\left(x-\frac{9}{2}\right)^2}{\frac{81}{4}}+\frac{(y-2)^2}{\frac{56}{4}}=1$$

2. Determinar la ecuación de una elipse con el eje horizontal y centro en el origen, que pasa por el punto $M(3{,}2)$ y cuyo eje menor mide 6 $unidades$.

Resolución

Con los datos que nos dan, hacemos un bosquejo de la gráfica

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k



Como podemos observar en el grafico se trata de una elipse canónica horizontal,

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Pero tenemos $M(3,2) \in \mathcal{E} \Longrightarrow \frac{3^2}{a^2} + \frac{2^2}{9} = 1$

$$\frac{9}{a^2} + \frac{4}{9} = 1$$

$$\frac{9}{a^2} = 1 - \frac{4}{9}$$

$$\frac{9}{a^2} = \frac{5}{9}$$

$$a^2 = \frac{81}{5}$$

Luego tenemos

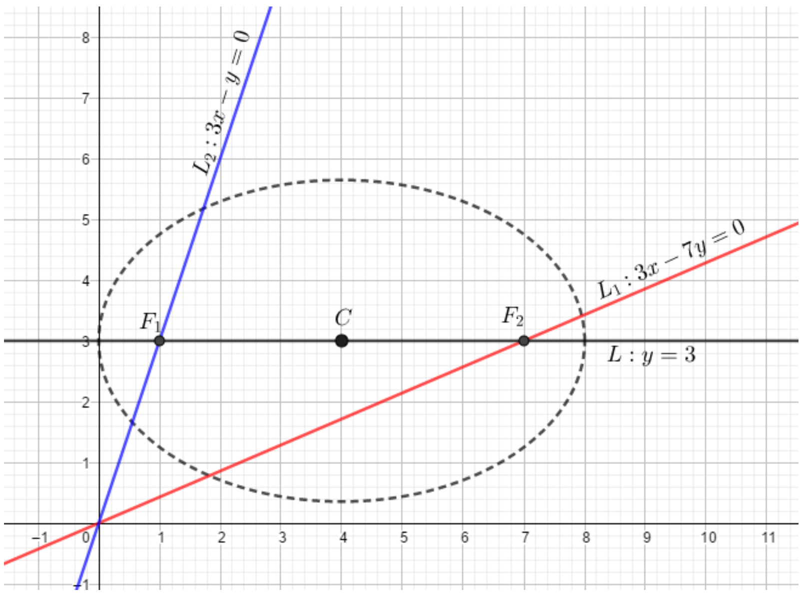
$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{\frac{81}{5}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

3. Los focos de una elipse están sobre las rectas $L_1: 3x - 7y = 0$ y $L_2: 3x - y = 0$, el eje focal es la recta $L: y = 3$. Hallar la ecuación de dicha elipse, si su eje mayor mide $8\,unidades$.

Resolución

Con los datos, hacemos un bosquejo de la gráfica



Del grafico $F_1(x, 3) \in L_2 \Longrightarrow 3x - 3 = 0$

$$\Longrightarrow x = 1$$

Así tenemos $F_1(1,3)$

Del grafico $F_2(x, 3) \in L_1 \Longrightarrow 3x - 7(3) = 0$

$$\Longrightarrow 3x = 21$$

$$x = 7$$

Así tenemos $F_2(7,3)$

Luego el centro: $C = \frac{F_1 + F_2}{2} \Rightarrow C(h, k) = \frac{1}{2}[(1,3) + (7,3)]$

$$C(h, k) = \frac{1}{2}(8,6) = (4,3)$$

$$C(h, k) = (4,3)$$

Por otro lado $|\overline{CF_1}| = |\overline{CF_2}| = c = 3$, del grafico $a = 4$

Ahora de $a^2 = b^2 + c^2$, tenemos $4^2 = b^2 + 3^2$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$b^2 = 16 - 9 = 7$$

$$b^2 = 7$$

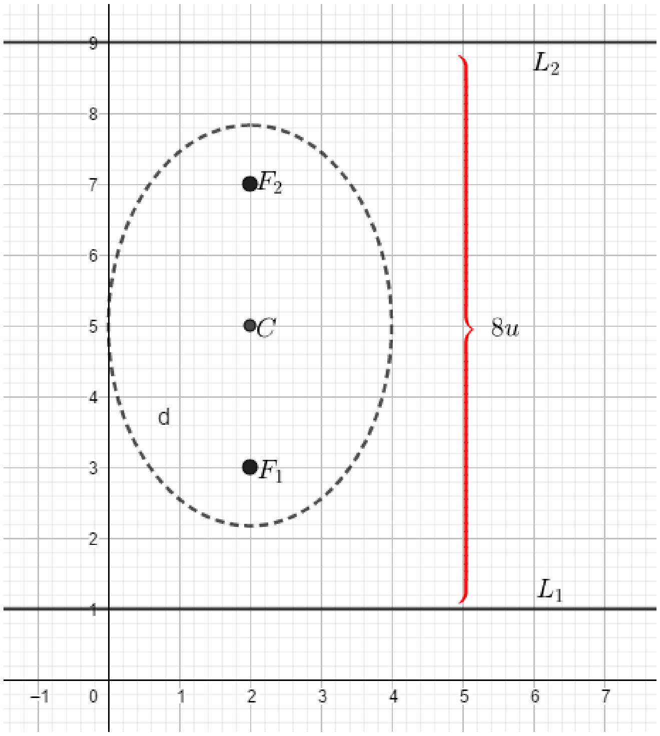
Así tenemos

$$\mathcal{E}: \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{7} = 1$$

4. La distancia entre las directrices de una elipse es $8\ u$. Hallar la ecuación si los focos son $(2{,}3)$ y $(2{,}7)$

Resolución

Con los datos, hacemos un bosquejo de la gráfica



Como tenemos los focos, encontramos el centro de la elipse

$$C = \frac{F_1 + F_2}{2} \Rightarrow C(h,k) = \frac{1}{2}[(2{,}3) + (2{,}7)]$$

$$C(h,k) = \frac{1}{2}(4{,}10) = (2{,}5)$$

$$C(h,k) = (2{,}5)$$

Por otro lado, tenemos que $d(L_1, L_2) = 8 \Longrightarrow \frac{a}{e} = 4$

También de la gráfica $|\overline{CF_1}| = |\overline{CF_2}| = c = 2$

Ahora de $\frac{a}{e} = 4$, pero $e = \frac{c}{a}$ luego tenemos que:

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\frac{a}{e} = \frac{a}{\frac{c}{a}} = 4$$

$$\frac{a^2}{c} = 4$$

$$\frac{a^2}{2} = 4$$

$$a^2 = 8$$

Luego de $a^2 = b^2 + c^2$, tenemos $8 = b^2 + 2^2$

$$b^2 = 8 - 4 = 4$$

$$b^2 = 4$$

Así tenemos la ecuación ordinaria vertical de la elipse

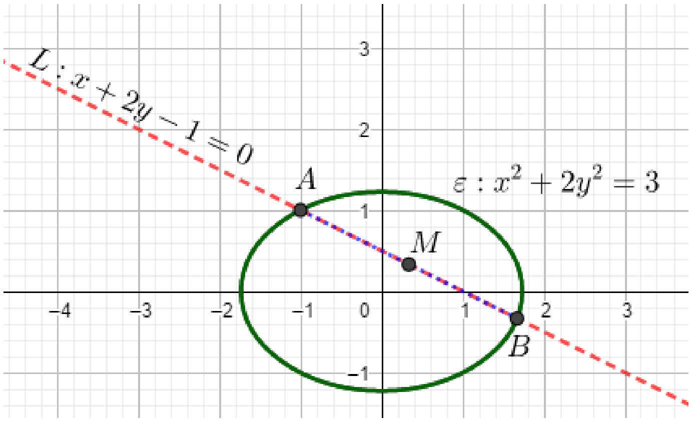
$$\mathcal{E}: \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\mathcal{E}: \frac{(y-5)^2}{8} + \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$

5. Hallar las coordenadas del punto medio de la cuerda que intercepta la recta $L: x + 2y - 1 = 0$ en la elipse de ecuación $\mathcal{E}: x^2 + 2y^2 = 3$.

Resolución

Bosquejando la recta y la elipse en una gráfica



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Para encontrar los puntos de intersección tenemos que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 & (1) \\ x^2 + 2y^2 = 3 & (2) \end{cases}$$

De la ecuación (1) obtenemos $x = 1 - 2y$, ahora reemplazamos en (2)

$$(1 - 2y)^2 + 2y^2 = 3$$

$$1 - 4y + 4y^2 + 2y^2 = 3$$

$$6y^2 - 4y - 2 = 0$$

$$3y^2 - 2y - 1 = 0$$

$$(3y + 1)(y - 1) = 0$$

$$3y + 1 = 0 \ \vee \ y - 1 = 0$$

$$y = -\frac{1}{3} \ \vee \ y = 1$$

Ahora si $y = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = 1 - 2\left(-\frac{1}{3}\right); x = \frac{5}{3}$

si $y = 1 \Rightarrow x = 1 - 2(1); \quad x = -1$

luego tenemos los puntos de intersección:

$$A(-1,1) \text{ y } B\left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Luego el punto medio que forma la cuerda $\overline{AB}$ será:

$$M = \frac{A + B}{2}$$

$$M = \frac{(-1,1) + \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)}{2}$$

$$M = \frac{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}{2}$$

$$M = \left(\frac{2}{6}, \frac{2}{6}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

6. Hallar las rectas directrices de la elipse de la ecuación

$4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$

Resolución

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Como tenemos la ecuación general de la elipse, completaremos cuadrados para transformar la ecuación a ordinaria.

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$$

$$4x^2 - 16x + 9y^2 + 54y + 61 = 0$$

$$4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 6y) + 61 = 0$$

$$4[(x-2)^2 - 4] + 9[(y+3)^2 - 9] + 61 = 0$$

$$4(x-2)^2 - 16 + 9(y+3)^2 - 81 + 61 = 0$$

$$4(x-2)^2 + 9(y+3)^2 = 36$$

$$\frac{4}{36}(x-2)^2 + \frac{9}{36}(y+3)^2 = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

De donde podemos deducir que:

$$C(h,k) = (2,-3)$$

$$a = 3 \text{ y } b = 2$$

Luego de $a^2 = b^2 + c^2$, tenemos $3^2 = 2^2 + c^2$

entonces $c = \sqrt{5}$, y $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Así tenemos las rectas directrices:

$$L_1: x = h - \frac{a}{e} = 2 - \frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \Longrightarrow x = 2 - \frac{9}{\sqrt{5}}$$

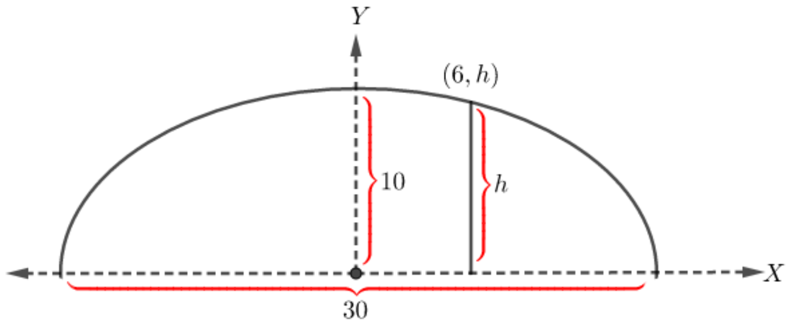
$$L_2: x = h + \frac{a}{e} = 2 + \frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \Longrightarrow x = 2 + \frac{9}{\sqrt{5}}$$

7. Un arco de un puente tiene forma semielíptica con eje mayor horizontal, la base del arco mide 30 $pies$ y la parte más alta esta 10 $pies$ por encima de la carretera horizontal que pasa por debajo del puente. Calcular la altura del arco sobre el punto del suelo que está a 6 $pies$ del centro.

Resolución

Adaptamos los datos en el plano cartesiano haciendo coincidir el centro de la elipse con el origen del plano, por lo que bosquejamos una gráfica:

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k



Del grafico nos sugiere que usaremos la ecuación canónica horizontal de la elipse

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Pero $a = 15$ y $b = 10$, entonces tenemos la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{(15)^2} + \frac{y^2}{(10)^2} = 1$$

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{100} = 1$$

Pero tenemos $(6, h) \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{6^2}{225} + \frac{h^2}{100} = 1$

$$\frac{h^2}{100} = 1 - \frac{36}{225}$$

$$\frac{h^2}{100} = \frac{189}{225}$$

$$\frac{h^2}{4} = \frac{189}{9}$$

$$\frac{h^2}{4} = 21$$

$$h^2 = 84$$

$$h = \pm 2\sqrt{21}$$

para nuestro contexto $h = 2\sqrt{21}$

Ejercicios

1. Hallar la ecuación canónica de la elipse con focos en el eje X, la longitud del eje mayor igual a 7 veces la longitud del eje menor y que pasa por el punto $(4,4)$.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

2. Hallar la ecuación de la elipse cuya suma de las distancias de un punto P de la elipse a los focos $F_1(-4,-5)$ y $F_2(6,-5)$ es igual a 16.
3. Determinar la ecuación de la elipse de centro $C(2,-3)$, eje mayor paralela a eje Y y de longitud 12, eje menor de longitud 8.
4. Un satélite viaja alrededor de la Tierra en una órbita elíptica, donde la Tierra es un foco y la excentricidad es $\frac{1}{3}$, la distancia más corta a la que se acerca el satélite a la Tierra es $300\, millas$. Encuentre la distancia mas grande a la que se aleja el satélite de la Tierra.
5. El arco de un puente en forma de semielipse tiene una extensión horizontal de $40\, pies$ y una altura de $16\, pies$ en su centro. ¿Qué altura tiene el arco a $9\, pies$ hacia la derecha o izquierda del centro?
6. Hallar las coordenadas de los vértices y focos, el lado recto, la excentricidad y las ecuaciones de las directrices de la curva que represente cada ecuación dada:
   a) $16x^2 + 25y^2 + 64x + 50y - 311 = 0$
   b) $25x^2 + 9y^2 - 200x + 90y + 400 = 0$
   c) $144x^2 + 169y^2 - 676y - 23660 = 0$
   d) $9x^2 + 2y^2 - 18x - 16y + 59 = 0$
   e) $8x^2 + 7y^2 + 96x + 70y + 463 = 0$
7. Los focos de una elipse son $(6,0)$ y $(10,0)$ respectivamente. La suma de las distancias del foco a cualquier punto $P(x,y)$ de Ia elipse, es 8. Hallar la ecuación de la elipse.
8. EI arco de un puente tiene la forma de una semielipse; la luz es de 12 metros y la altura máxima es de $13\, metros$. Hallar la altura del arco sobre el punto del suelo que está a $1.5\, metros$ del centro.
9. Encontrar la ecuación de la trayectoria de un punto $P(x,y)$ que se mueve de modo que su distancia a $(5,0)$ es la mitad de su distancia a la recta
   $x = 20$.
10. La órbita del cometa Halley es una elipse cuyo eje mayor tiene $3.34 \times 10^9 millas$ de longitud, y cuyo eje menor tiene $8.5 \times 10^8 millas$ de longitud. ¿Cuál es la excentricidad de a órbita del cometa?

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

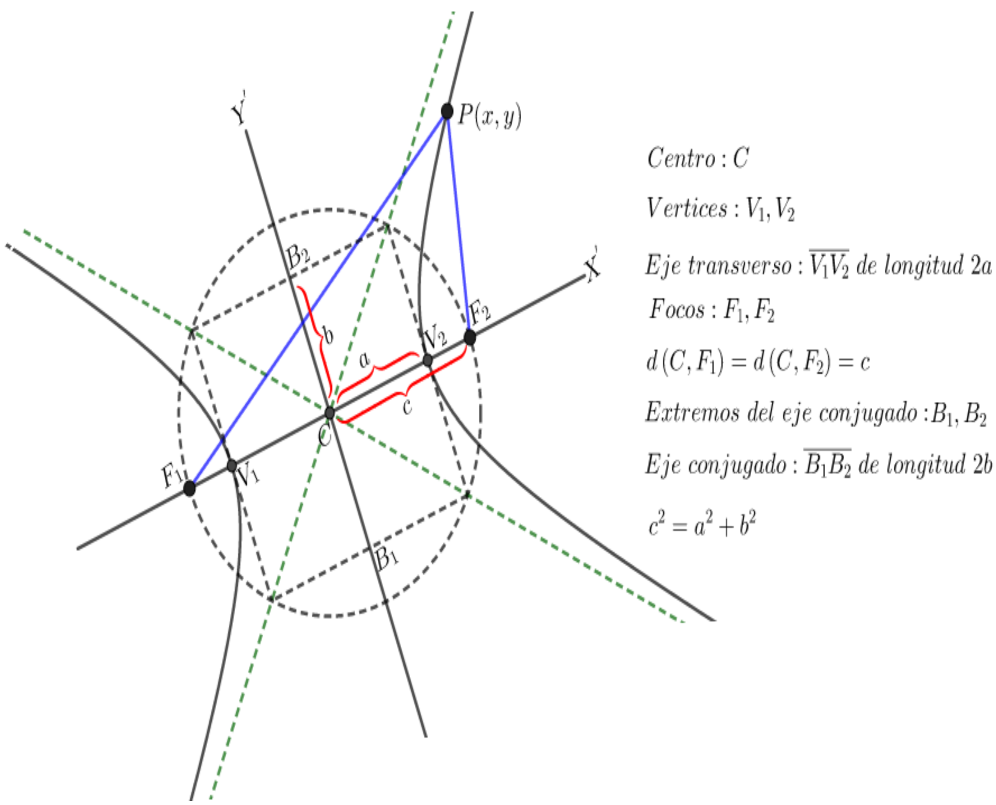
2.3.3 La Hipérbola

Dados dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados focos, separados por una distancia $2c$,y dada una contante a tal que $0 < a < c$, se define Ia hipérbola como el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ tales que la diferencia de las distancias de P a los focos F_1 y F_2 en valor absoluto, es igual a $2a$, es decir:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

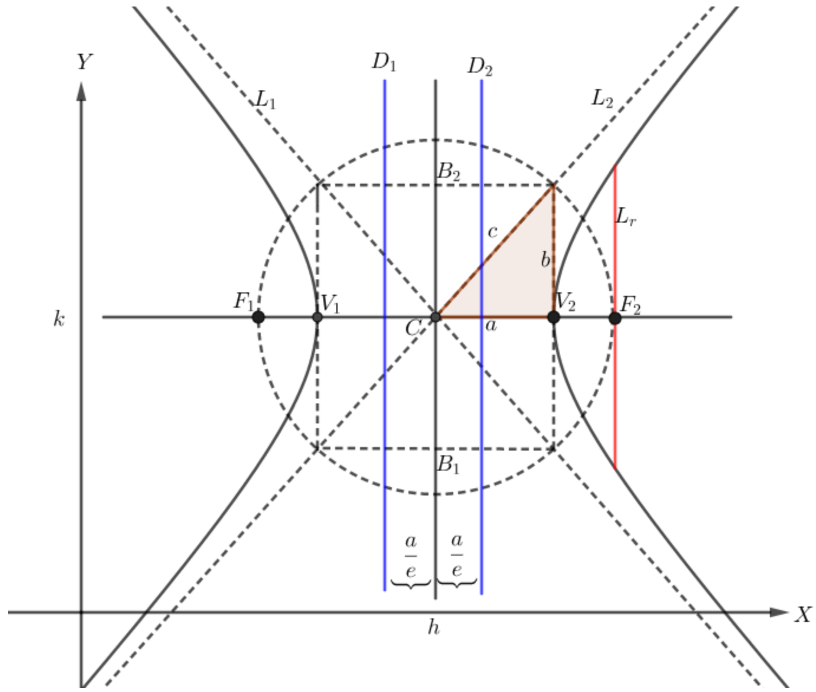
Luego tenemos que:

$$\mathcal{H} = \{P(x, y) \in R^2 / |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Ecuación ordinaria o por traslación de la hipérbola horizontal



Elementos de la hipérbola horizontal

Centro: $C(h,k)$

Vértices: $V_1(h-a,k), V_2(h+a,k)$

Focos: $F_1(h-c,k), F_2(h+c,k)$

Extremos del eje conjugado:$B_1(h,k-b), B_2(h,k+b)$

Excentricidad: $e=\frac{d(P,F_1)}{d(P,D_1)}=\frac{d(P,F_2)}{d(P,D_2)}$

$e=\dfrac{c}{a},\ \ e>1;\quad d(C,D_1)=d(C,D_2)=\dfrac{a}{e}$

Longitud del eje transverso: $d(V_1,V_2)=2a$

Longitud del eje conjugado: $d(B_1,B_2)=2b$

Longitud del lado recto: $L_r=\frac{2b^2}{a}$

Directrices: $D_1\!: x=h-\frac{a}{e},\quad D_2\!: x=h+\frac{a}{e}$

Asíntotas: $L_1\!: y=k-\frac{b}{a}(x-h),\quad L_2\!: y=k+\frac{b}{a}(x-h)$

Para determinar la ecuación de la hipérbola, partiremos de la definición

$$\mathcal{H}=\{P(x,y)\in R^2/|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a\}$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$$

$$\left|\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}-\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}\right|=2a$$

$$\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}-\sqrt{\big(x-(h+c)\big)^2+(y-k)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{\big(x-(h+c)\big)^2+(y-k)^2}$$

Elevando al cuadrado

$$\big(x-(h-c)\big)^2+(y-k)^2=$$

$$4a^2+4a\sqrt{\big(x-(h+c)\big)^2+(y-k)^2}+\big(x-(h+c)\big)^2+(y-k)^2$$

$$\big(x-(h-c)\big)^2=4a^2+4a\sqrt{\big(x-(h+c)\big)^2+(y-k)^2}+\big(x-(h+c)\big)^2$$

$$\big((x-h)+c\big)^2=4a^2+4a\sqrt{\big((x-h)-c\big)^2+(y-k)^2}+\big((x-h)-c\big)^2$$

$$\big((x-h)+c\big)^2-\big((x-h)-c\big)^2=4a^2+4a\sqrt{\big((x-h)-c\big)^2+(y-k)^2}$$

$$4c(x-h)=4a^2+4a\sqrt{\big((x-h)-c\big)^2+(y-k)^2}$$

$$c(x-h)-a^2=a\sqrt{\big((x-h)-c\big)^2+(y-k)^2}$$

Elevando al cuadrado nuevamente

$$c^2(x-h)^2-2ca^2(x-h)+a^4=a^2\left[\big((x-h)-c\big)^2+(y-k)^2\right]$$

$$c^2(x-h)^2-2ca^2(x-h)+a^4=$$

$$a^2(x-h)^2-2ca^2(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$

$$c^2(x-h)^2+a^4=a^2(x-h)^2+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$

$$c^2(x-h)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$

$$(x-h)^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

De $c^2=a^2+b^2$, tenemos que $b^2=c^2-a^2$

$$b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\frac{b^2(x-h)^2}{a^2b^2} - \frac{a^2(y-k)^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación ordinaria de la hipérbola horizontal

Observación: Si el centro de la hipérbola es el origen, $C(h,k) = (0,0)$

Entonces la ecuación de la hipérbola se llama **Canónica,** y se reduce a:

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vértices: $V_1(-a,0),\ V_2(a,0)$

Focos: $F_1(-c,0),\ F_2(c,0)$

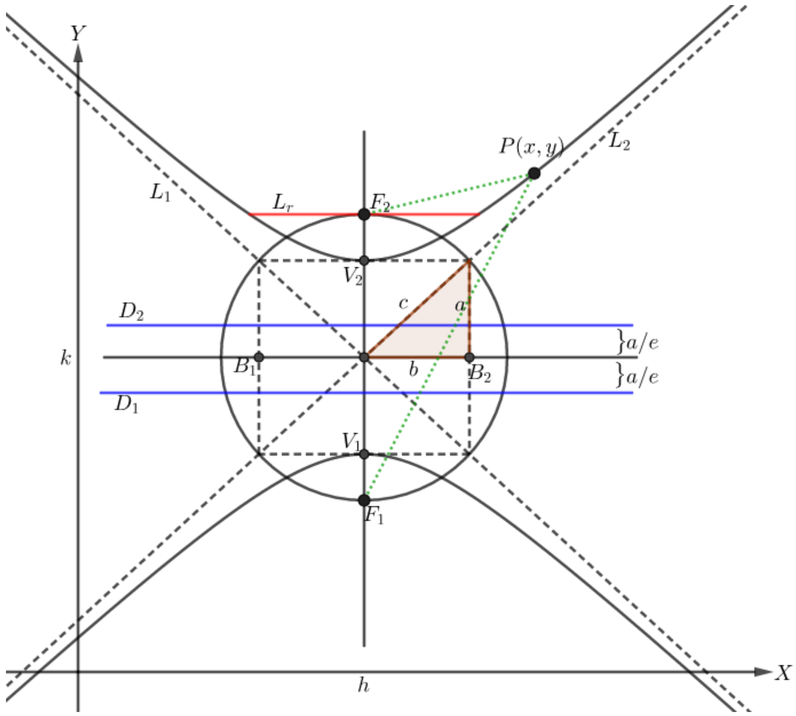
Extremos del conjugado: $B_1(0,-b),\ B_2(0,b)$

Directrices: $D_1: x = -\frac{a}{e}\ ,\ D_2: x = \frac{a}{e}$

Asíntotas: $L_1: y = -\frac{b}{a}x\ ,\ L_2: y = \frac{b}{a}x$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Ecuación ordinaria o por traslación de la hipérbola vertical



Elementos de la hipérbola vertical

Centro: $C(h,k)$

Vértices: $V_1(h,k-a), V_2(h,k+a)$

Focos: $F_1(h,k-c), F_2(h,k+c)$

Extremos del eje conjugado: $B_1(h-b,k), B_2(h+b,k)$

Excentricidad: $e=\frac{d(P,F_1)}{d(P,D_1)}=\frac{d(P,F_2)}{d(P,D_2)}$

$e=\dfrac{c}{a},\quad e>1;\quad d(C,D_1)=d(C,D_2)=\dfrac{a}{e}$

Longitud del eje transverso: $d(V_1,V_2)=2a$

Longitud del eje conjugado: $d(B_1,B_2)=2b$

Longitud del lado recto: $L_r=\frac{2b^2}{a}$

Directrices: $D_1\colon y=k-\frac{a}{e},\quad D_2\colon y=k+\frac{a}{e}$

Asíntotas: $L_1\colon y=k-\frac{a}{b}(x-h),\quad L_2\colon y=k+\frac{a}{b}(x-h)$

Para determinar la ecuación de la hipérbola, se parte de la definición

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\mathcal{H} = \{P(x,y) \in R^2 / |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a\}$$

Y se desarrolla de la misma forma que se hizo para encontrar la ecuación ordinaria de la hipérbola horizontal, llegando a:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación ordinaria de la hipérbola vertical

Observación: Si el centro de la hipérbola es el origen, $C(h,k) = (0,0)$

Entonces la ecuación de la hipérbola se llama **Canónica,** y se reduce a:

$$\mathcal{H}: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Vértices: $V_1(0,-a),\ V_2(0,a)$

Focos: $F_1(0,-c),\ F_2(0,c)$

Extremos del conjugado: $B_1(-b,0),\ B_2(b,0)$

Directrices: $D_1: y = -\frac{a}{e}$, $D_2: y = \frac{a}{e}$

Asíntotas: $L_1: y = -\frac{a}{b}x$, $L_2: y = \frac{a}{b}x$

Ecuación general de la hipérbola

La ecuación de una hipérbola puede expresarse de la siguiente manera.

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, donde: A y B tienen signos diferentes y son también diferentes de cero. Si la ecuación de una hipérbola está expresada de manera general, se puede obtener la ecuación ordinaria utilizando el método de completar cuadrados.

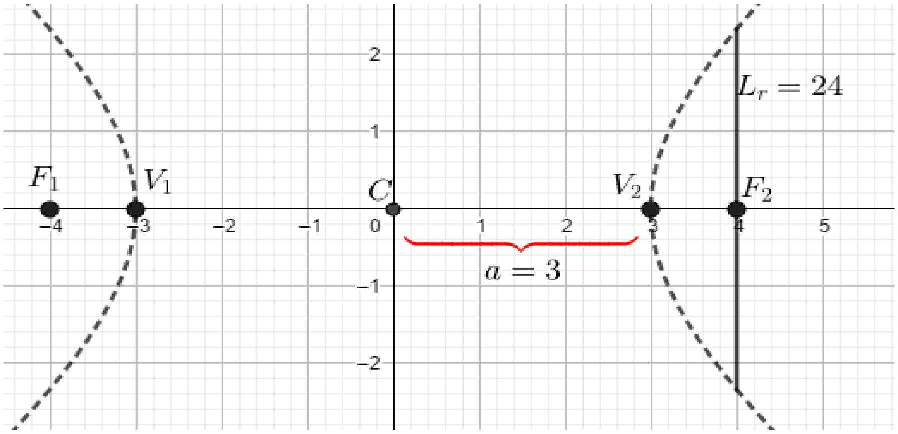
Ejemplos

1. Hallar la ecuación de la hipérbola con vértice $(\pm 3,0)$ y lado recto igual a 24.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Resolución

Con los datos, hacemos un bosquejo de la gráfica que nos dará la idea si la hipérbola es horizontal o vertical



Como podemos observar en el grafico se trata de una hipérbola canónica horizontal, cuya ecuación es:

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como $a = 3$ tenemos:

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para encontrar b, usamos el dato que $L_r = \frac{2b^2}{a} = 24$

$$\frac{2b^2}{3} = 24 \Longrightarrow b^2 = 36$$

Luego tenemos:

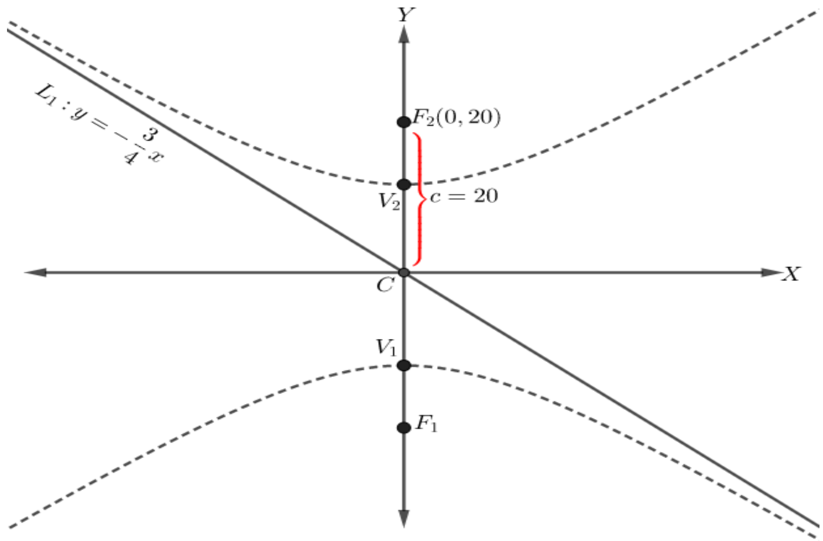
$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$$

2. Hallar la ecuación de una hipérbola, si una asíntota es $3x + 4y = 0$ y un foco es$(0,20)$

Resolución

Con los datos, hacemos un bosquejo de la gráfica que nos dará la idea si la hipérbola es horizontal o vertical

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k



Como podemos observar en el grafico se trata de una hipérbola canónica vertical, cuya ecuación es:

$$\mathcal{H}\colon \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Sabemos que $d(C, F_2) = c = 20$, tenemos por dato una recta asíntota,

$$L_1\colon y = -\frac{3}{4}x$$

Comparándolo con la ecuación de la recta asíntota $L_1\colon y = -\frac{a}{b}x$

Así tenemos

$$\frac{3k}{4k} = \frac{a}{b}$$

$$a = 3k \text{ y } b = 4k$$

De $\quad c^2 = a^2 + b^2 \implies \quad (20)^2 = 9k^2 + 16k^2$

$$400 = 25k^2$$

$$k^2 = 16$$

$$k = 4$$

Luego $a = 12$ y $b = 16$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Así la ecuación canónica de la hipérbola vertical $\mathcal{H}: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, en nuestro caso es:

$$\mathcal{H}: \frac{y^2}{12^2} - \frac{x^2}{16^2} = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{256} = 1$$

3. Hallar su centro, focos, lado recto, excentricidad y graficar la hipérbola: $16x^2 - 9y^2 + 96x - 36y - 36 = 0$

Resolución

Como tenemos la ecuación general de la hipérbola, completaremos cuadrados para transformar la ecuación a ordinaria

$$16x^2 - 9y^2 + 96x - 36y - 36 = 0$$

$$16x^2 + 96x - 9y^2 - 36y - 36 = 0$$

$$16(x^2 + 6x) - 9(y^2 + 4y) - 36 = 0$$

$$16[(x+3)^2 - 9] - 9[(y+2)^2 - 4] - 36 = 0$$

$$16(x+3)^2 - 144 - 9(y+2)^2 + 36 - 36 = 0$$

$$16(x+3)^2 - 9(y+2)^2 = 144$$

$$\frac{16(x+3)^2}{144} - \frac{9(y+2)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{3^2} - \frac{(y+2)^2}{4^2} = 1$$

Deducimos entonces que $a = 3$, $b = 4 \Longrightarrow c^2 = 3^2 + 4^2$

$$c = 5$$

Luego tenemos:

Centro: $C(h, k) = (-3, -2)$

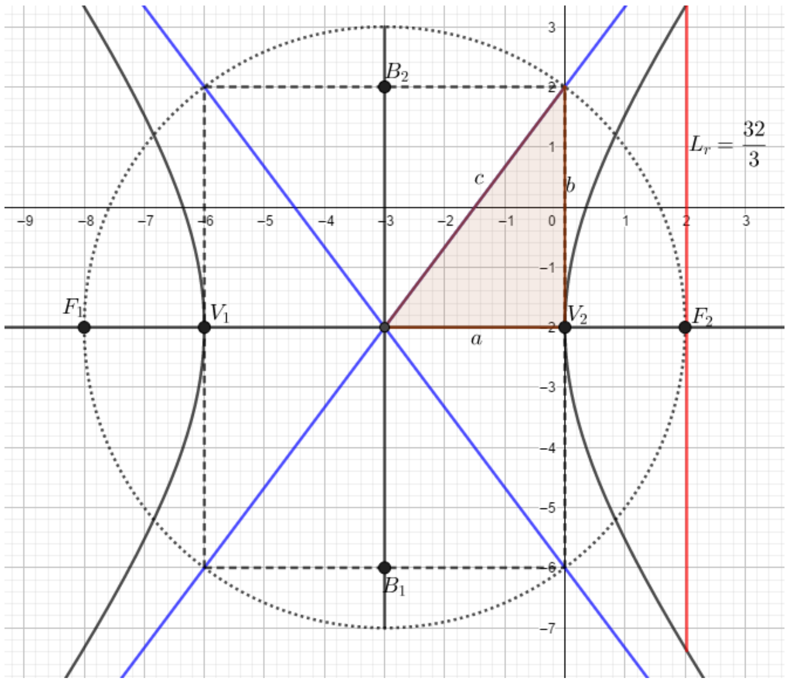
Focos: $F_1(h - c, k) = (-3 - 5, -2) \Longrightarrow F_1(-8, -2)$,

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$F_2(h+c,k)=(-3+5,-2)\Longrightarrow F_2(2,-2)$$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$

Longitud del lado recto: $L_r=\frac{2b^2}{a}=\frac{32}{3}$



4. Los extremos del eje conjugado de una hipérbola con los puntos $(0,\pm3)$ y la longitud de cada lado recto es 6. Hallar la ecuación de la hipérbola y su excentricidad.

Resolución

Con los extremos del eje conjugado que nos dan como datos $B_1(0,-3)$ y $B_2(0,3)$, tenemos que $b=3$ y podemos notar que la ecuación de la hipérbola que queremos encontrar es la canónica horizontal

$$\mathcal{H}:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Además, tenemos como dato la longitud del lado recto

$$L_r=\frac{2b^2}{a}=6$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\frac{2(3)^2}{a} = 6 \Longrightarrow a = 3$$

Luego tenemos

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Para encontrar la excentricidad usamos el hecho $c^2 = a^2 + b^2$

$$c^2 = 3^2 + 3^2$$

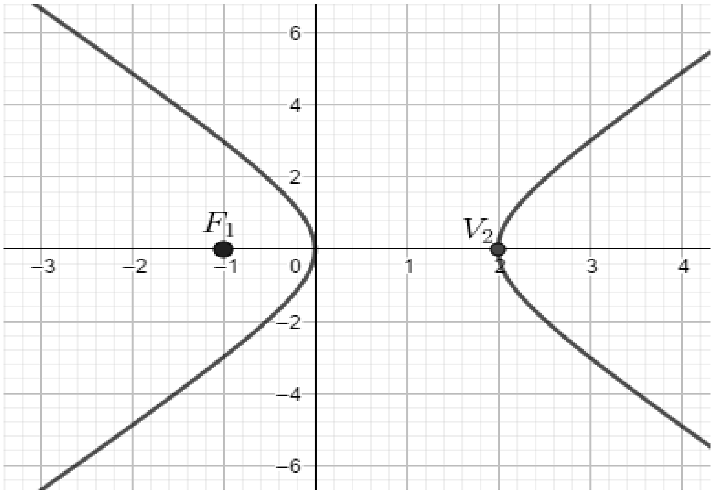
$$c^2 = 18$$

$$c = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Luego la excentricidad es: $e = \frac{3\sqrt{2}}{3}$

$$e = \sqrt{2}$$

5. Encontrar la ecuación de la hipérbola que satisface las condiciones dada en el grafico



Resolución

Según el grafico nos dan el foco $F_1(-1,0)$ y el vertice $V_2(2,0)$, pero del gráfico podemos deducir el centro de la hipérbola, $C(1,0)$, luego tenemos:

$$|\overline{CV_2}| = a = 1$$

$$|\overline{CF_1}| = c = 2$$

De $\quad c^2 = a^2 + b^2$, tenemos $4 = 1 + b^2 \Longrightarrow b^2 = 3$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$b = \sqrt{3}$$

Así tenemos de la ecuación ordinaria de la hipérbola horizontal,

$$\mathcal{H}: \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{(x-1)^2}{1} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = 1$$

$$\mathcal{H}: (x-1)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$$

Ejercicios

1. Hallar la ecuación de una hipérbola que tiene como Focos $(0, \pm 4)$ y Vértices $(0, \pm 1)$

2. Hallar la ecuación de la hipérbola con Focos $(\pm 4{,}0)$ y rectas directrices $x = \pm 1$

3. Determinar el centro, focos, lado recto, excentricidad y graficar la hipérbola:

a) $y^2 - 3x^2 - 6y = 0$

b) $16x^2 - 9y^2 - 64x + 54y - 161 = 0$

c) $16x^2 - 9y^2 + 96x - 36y + 252 = 0$

4. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(0, \pm 4)$ y su excentricidad es $\frac{3}{2}$. Hallar la ecuación de la hipérbola y las coordenadas de sus focos.

5. Para cada una de las ecuaciones de las hipérbolas dadas, hallar las coordenadas de los vértices y los focos, la longitud del semilado recto, la excentricidad, las ecuaciones de las directrices y las de las asíntotas. Trazar la curva de la hipérbola.

a) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

b) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$

c) $x^2 - y^2 = 16$

d) $4y^2 - 3x^2 = 48$

e) $64y^2 - 225x^2 - 14400 = 0$

f) $16x^2 - 9y^2 - 2304 = 0$

6. Los focos de una hipérbola están en $(-8{,}1)$ y $(10{,}1)$ respectivarnente, la diferencia de las distancias de un punto $P(x, y)$ de la hipérbola a los focos, es igual a 6. Hallar la ecuación de la hipérbola.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

7. El eje conjugado de una hipérbola mide 8 y coincide con el eje Y y las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm\frac{2}{3}x$. Hallar la ecuación de la hipérbola, sus ejes, focos y vértices.

8. Determinar la ecuación de la hipérbola cuyos focos están ubicados en las coordenadas $F_1(3,-4)$ y $F_2(3,6)$, el eje transverso es 8 y su centro es $C(3,1)$. Indicar su excentricidad, lado recto y escribe las ecuaciones de las asíntotas además trazar su gráfica.

9. El par de hipérbolas

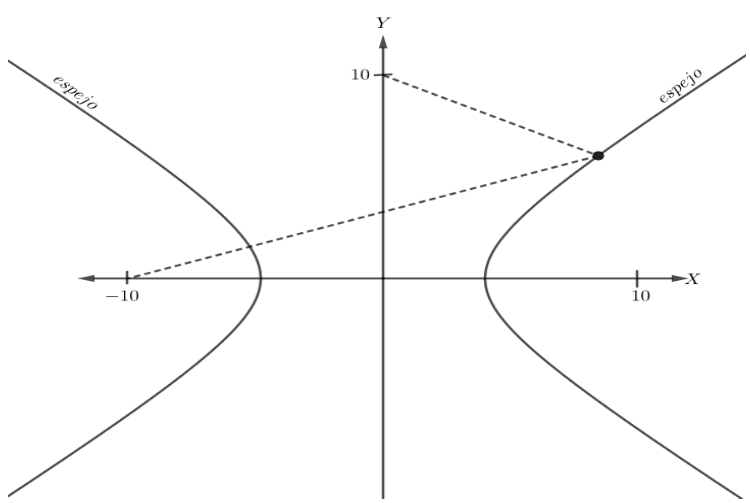
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \wedge \qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

Se llaman **hipérbolas conjugadas**. Verificar que estas hipérbolas tienen las mismas asíntotas.

10. Los espejos hiperbólicos tienen la propiedad que cada rayo dirigido a un foco se refleja hacia el otro foco. El espejo de la figura tiene ecuación

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$$

¿En qué punto del espejo se reflejará la luz procedente del punto $(0,10)$ hacia el otro foco?



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

CAPÍTULO III: FUNCIONES

Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una regla de correspondencia, que nos transporta de un conjunto a otro de manera que asociamos a cada elemento $x \in A$ exactamente **un único** elemento

$y = f(x) \in B.$

Dominio: conjunto de todos los valores x de entrada.

Dominio de $f = Dom(f)$ denominado también pre-imagen.

Rango: Conjunto de todos los valores $y = f(x)$ de salida.

Rango de $f = Ran(f)$ denominado también imagen.

La notación de la función $y = f(x)$ se lee: y es igual a f de x; donde x es la variable independiente, y es la variable dependiente.

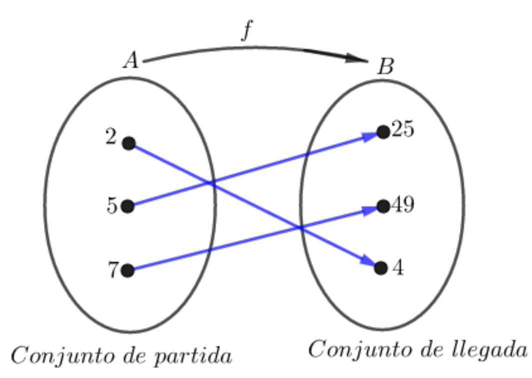
Ejemplos:

1. En la función $f = \{(2,6), (3,9), (4,12), (5,15)\}$

$$Dom(f) = \{2,3,4,5\}$$

$$Ran(f) = \{6,9,12,15\}$$

2. f es una función y sus pares ordenados son: $f = \{(2,4), (5,25), (7,49)\}$



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Propiedad:

f es una función si se verifica:

$i)\ f \subseteq A \times B$

$ii)\ (a,b) \wedge (a,c) \in f \Longrightarrow b = c$

Esto quiere decir que dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente.

Ejemplos

1. ¿Cuál de las siguientes relaciones son funciones?

$\mathrm{R}_1 = \{(2;1),(9;3),(-1{,}5)\}$

$\mathrm{R}_2 = \{(3;0),(4;0),(5;0)\}$

$\mathrm{R}_3 = \{(5;1),(4;-2),(4;2)\}$

Resolución:

De acuerdo con la definición se observa que:

R_1 es función

R_2 es función

R_3 no es función, porque $(4;-2)$y $(4;2) \in \mathrm{R}_3$ siendo pares ordenados distintos tienen la misma primera componente.

2. David es vendedor de una empresa de productos químicos en el contrato firmado por David se indica que su sueldo depende del número de unidades que vende a la semana. Si la ecuación para determinar su sueldo semanal en \$. está dada por $y = f(x) = 5x + 18$.

Si David vende a la semana 70 unidades ¿Cuánto será su ingreso?

Resolución:

Unidades que vende por semana; x	Sueldo semanal; $y = f(x) = 5x + 18$
Si $x = 70$	$y = f(70) = 5(70) + 18$ $y = \$368$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

3. Suponga que la ecuación $p = \frac{100}{q}$ describe la relación entre el precio por unidad p de cierto producto, y el número de unidades q que los consumidores comprarán (demanda) por semana a ese precio. Si la demanda en cierta semana es 25 unidades, ¿Cuál será el precio por esa demanda?

Resolución:

Unidades que compra los consumidores, por semana: **Demanda (variable independiente);** q	Precio por la demanda semanal: **Variable dependiente;** $p = f(q) = \frac{100}{q}$
Si $q = 25$	$p = f(25) = \frac{100}{25}$ $p = 4$

4. La tabla muestra un programa de oferta. Donde se indica una correspondencia entre el precio p de cierto producto y la cantidad q que los fabricantes surtirán por semana a ese precio. A cada precio le corresponde exactamente una cantidad y viceversa.

PROGRAMA DE OFERTA	
$\boldsymbol{q}$: cantidad ofrecida por semana	$\boldsymbol{p}$: precio por unidad en dólares
11	500
14	600
17	700
20	800

Analizar la correspondencia si q es la variable independiente y viceversa.

Resolución

Si q es la variable independiente, entonces p es una función de q, es decir: $p = f(q)$

$$f(11) = 500, \quad f(14) = 600, \quad f(17) = 700, \quad f(20) = 800$$

Ahora sí, p es la variable independiente, entonces q es una función de p, es decir: $q = g(p)$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Eidec EDITORIAL

$$g(500) = 11, \qquad g(600) = 14, \qquad g(700) = 17, \qquad g(800) = 20$$

3.1. Función Real de Variable Real

Dada una función $f: A \longrightarrow B$, si A y B son subconjuntos de $\mathcal{R}$(números reales), entonces f está definida en $\mathcal{R}$, es decir: $f: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$

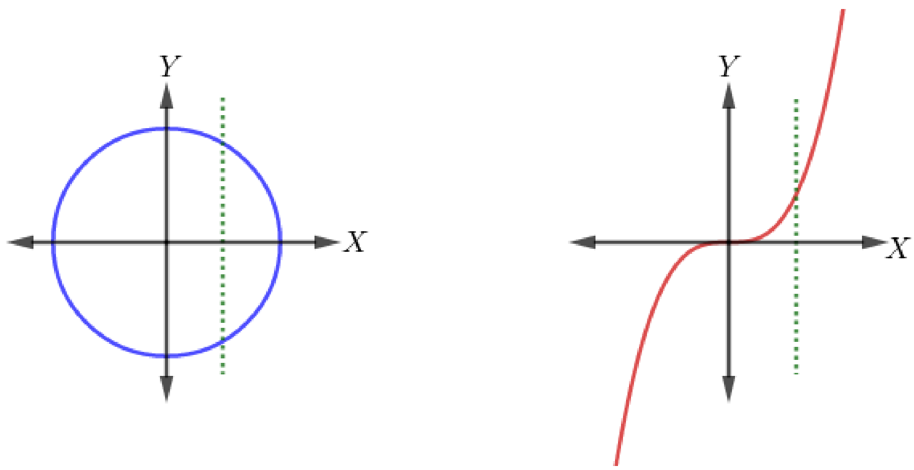
Una función estará bien definida cuando se especifique su dominio y su regla de correspondencia que asigna a cada elemento $x \in Dom(f)$ un **único elemento** $y = f(x) \in \mathcal{R}$.

Gráfica de una función real de variable real

Es la representación geométrica de los pares ordenados que pertenecen a la función en el plano cartesiano. Una curva corresponde a la gráfica de una función si y solo si cualquier recta perpendicular al eje X corta al gráfico en un solo punto.

Ejemplo

Determinar si las siguientes gráficas corresponden a una función.



Resolución

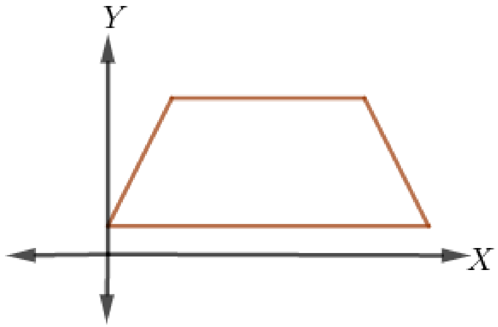
En el primer gráfico no corresponde a una función ya que la recta vertical corta a la gráfica en dos puntos, en el segundo grafico si corresponde a una función ya que la recta vertical corta solo en un punto de la gráfica.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

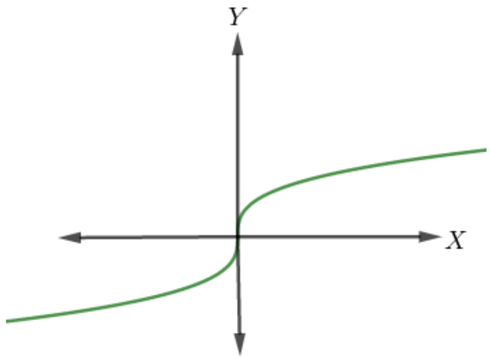
Ejercicios:

1. En los gráficos dados: determinar ¿cuáles son funciones y cuáles no lo son?

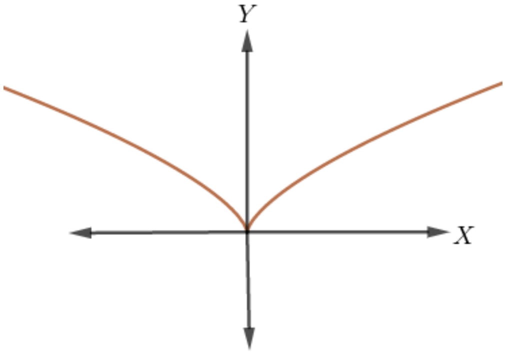
I.



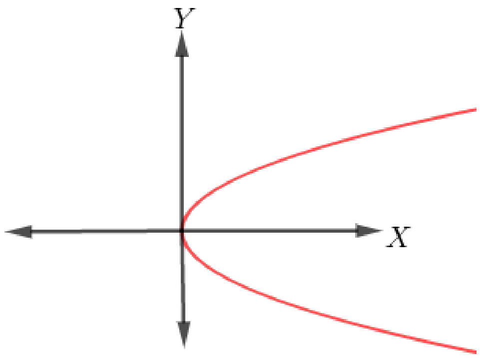
II.



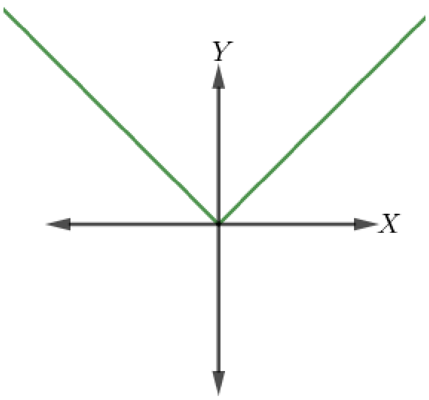
III.



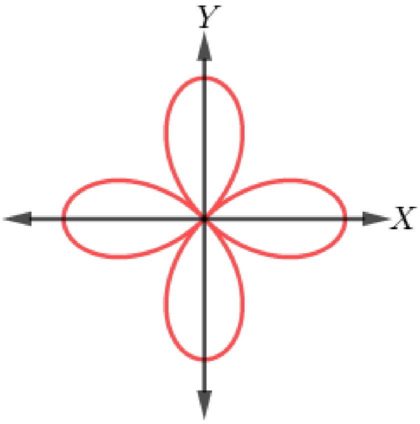
IV.



V.

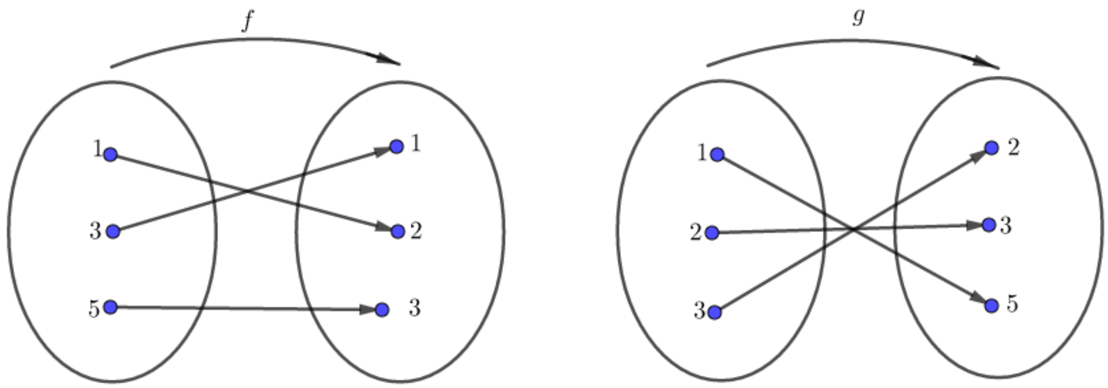


VI.



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

2. Dadas las funciones:



Calcular: $E = \frac{f(1)+g(3)}{f(g(1))+f(g(2))}$

Criterios para determinar el dominio y rango

Para determinar el dominio despejamos la variable y, y analizamos la existencia de su equivalente, frecuentemente es necesario reconocer la existencia de expresiones como:

$$\frac{A}{B} \in \mathcal{R} \leftrightarrow B \neq 0$$

$$\sqrt{A} \in \mathcal{R} \leftrightarrow A \geq 0$$

Para determinar el rango se despeja la variable x, luego se analiza la existencia de su equivalente, a veces se determina a partir del dominio.

Ejemplos:

Determinar el dominio y rango de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

Resolución

Tenemos $y = \frac{2x+1}{x-3} \Leftrightarrow x - 3 \neq 0$

$$\Longrightarrow x \neq 3$$

Así tenemos que $Dom(f) = \mathcal{R} - \{3\}$

Para determinar el rango despejamos la variable x

$$y = \frac{2x+1}{x-3} \Leftrightarrow xy - 3y = 2x + 1$$

$$xy - 2x = 3y + 1$$

$$x(y-2) = 3y + 1$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$x = \frac{3y+1}{y-2} \Leftrightarrow y-2 \neq 0$$
$$\Longrightarrow y \neq 2$$

Luego tenemos que $Ran(f) = \mathcal{R} - \{2\}$

2. $f(x) = \sqrt{4x-1}$

Resolución

Tenemos $y = \sqrt{4x-1} \Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$
$$\Longrightarrow 4x \geq 1$$
$$x \geq \frac{1}{4}$$

Luego tenemos que:$Dom(f) = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$

Para determinar el rango lo construiremos a partir del dominio,

$$x \in \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$$
$$\Longrightarrow x \geq \frac{1}{4}$$
$$4x \geq 1$$
$$4x - 1 \geq 0$$

$$\underbrace{\sqrt{4x-1}}_{y} \geq 0$$
$$\Longrightarrow y \geq 0$$

Luego tenemos que $Ran(f) = [0, +\infty[$

3. $f(x) = \frac{x}{x^2-x-2}$

Resolución

Tenemos $y = \frac{x}{x^2-x-2} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \neq 0$
$$\Longrightarrow (x-2)(x+1) \neq 0$$
$$x - 2 \neq 0 \ \vee \ x + 1 \neq 0$$
$$x \neq 2 \ \vee \ x \neq -1$$

Luego tenemos que: $Dom(f) = \mathcal{R} - \{-1,2\}$

Para determinar el rango despejamos la variable x
$$y = \frac{x}{x^2 - x - 2}$$
$$yx^2 - yx - 2y = x$$
$$yx^2 - yx - x - 2y = 0$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$yx^2 - (y+1)x - 2y = 0$$

Tenemos una ecuación cuadrática entonces aplicamos la formula cuadrática:

$$x = \frac{y + 1 \pm \sqrt{(y+1)^2 - 4(y)(-2y)}}{2y}$$

$$x = \frac{y + 1 \pm \sqrt{(y+1)^2 + 8y^2}}{2y}$$

Analizando en la raíz tenemos que$(y+1)^2 + 8y^2 > 0,\ \forall y \in \mathcal{R}$

Ahora analizando el denominador se tiene que $2y \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$

Luego tenemos que $Ran(f) = \mathcal{R} - \{0\}$

4. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Resolución

Tenemos $y = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0$

$$\Rightarrow x^2 \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

Luego tenemos el $Dom(f) = [-1,1]$

Para determinar el rango lo construiremos a partir del dominio,

$$x \in [-1,1]$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$-1 \leq x < 0 \ \vee \ 0 \leq x \leq 1$$

Elevando al cuadrado tenemos: $0 < x^2 \leq 1 \ \vee \ 0 \leq x^2 \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \geq -x^2 \geq -1$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - x^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{\sqrt{1 - x^2}}_{y} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq y \leq 1$$

$$y \in [0,1]$$

Luego tenemos que $Ran(f) = [0,1]$

Ejercicios

I. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{5}{x}$
2. $g(x) = \sqrt{x - 5}$
3. $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

4. $g(x) = \frac{5x-5}{2x+7}$

5. $h(t) = \frac{4-t^2}{2t^2-7t-4}$

6. $g(x) = \frac{x}{5}$

7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

8. $g(x) = \frac{2}{x^2+1}$

9. $f(x) = \sqrt{4x+3}$

10. $f(x) = \frac{4x^2-1}{2x+1}$

II. Determinar el dominio y rango de las siguientes funciones:

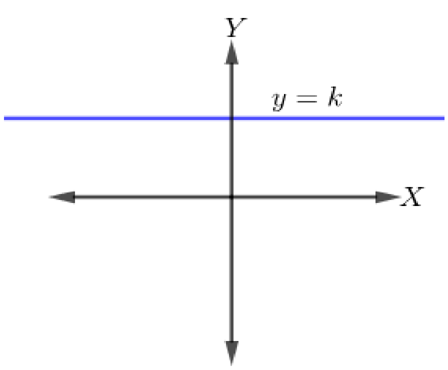
1. $f(x) = \frac{4x^2-1}{2x+1}$
2. $g(x) = \frac{5x-1}{3x+2}$
3. $h(x) = \sqrt{x^2-1}$
4. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$
5. $g(x) = \frac{2}{x^2+9}$
6. $h(x) = x^2 - 6x + 5$
7. $f(x) = 16 - x^2$
8. $g(x) = \sqrt{2x-4}$
9. $f(x) = 2x - 3 \;\; ; \;\; x \in \langle 5,10 \rangle$
10. $h(x) = \frac{x^3+4x^2+x-6}{x^2+2x-3}$

3.2 Funciones Especiales

1. Función Constante

$$\boxed{y = f(x) = k, \;\; k \; constante}$$

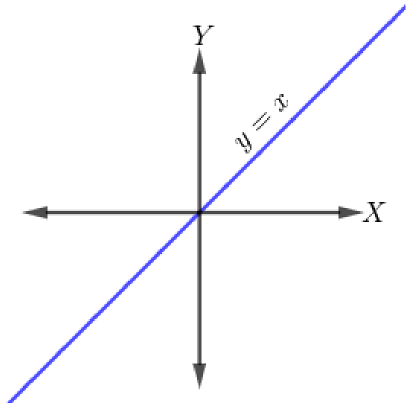
$Dom(f) = \mathcal{R}, \;\; Ran(f) = \{k\}$



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

2. Función Identidad

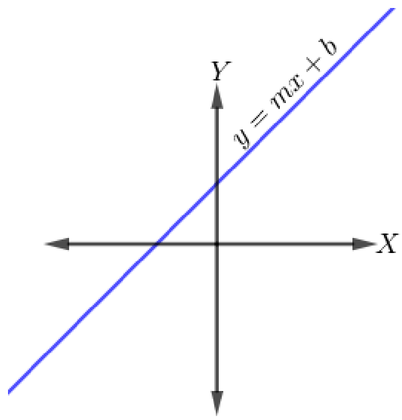
$$\boxed{y = f(x) = x}$$



$$Dom(f) = \mathcal{R},\ \ Ran(f) = \mathcal{R}$$

3. Función Lineal

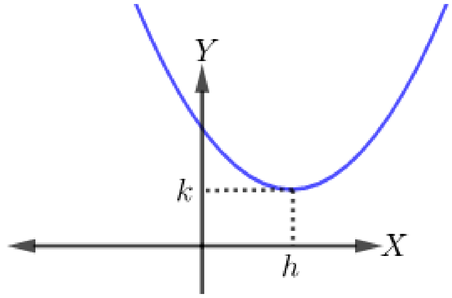
$$\boxed{y = f(x) = mx + b, \qquad m \neq 0}$$



$$Dom(f) = \mathcal{R},\ \ Ran(f) = \mathcal{R}$$

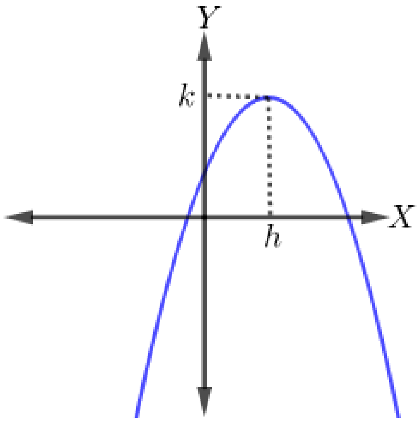
4. Función Cuadrática

$$\boxed{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$$



Si $a > 0$,tenemos

$$Dom(f) = \mathcal{R},\ \ Ran(f) = [k, +\infty[$$



Si $a < 0$,tenemos

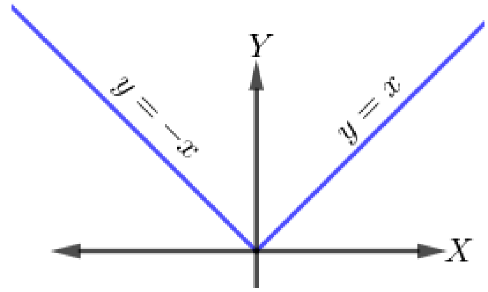
$$Dom(f) = \mathcal{R},\ \ Ran(f) =]-\infty, k]$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Para graficar una parábola completamos cuadrados, para obtener una ecuación de la forma $y - k = a(x - h)^2$, así tenemos el vértice (h, k).

5. Función Valor Absoluto

$$\boxed{y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}}$$



$$Dom(f) = \mathcal{R}, \;\; Ran(f) = [0, +\infty[$$

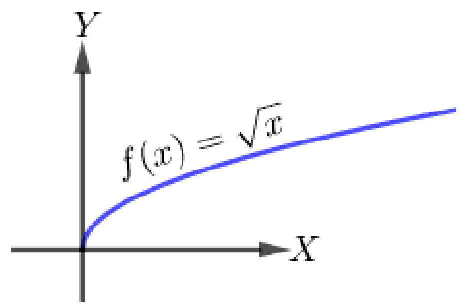
6. Función Raíz Cuadrada

Proviene de la parábola

$$x = y^2 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{x}$$

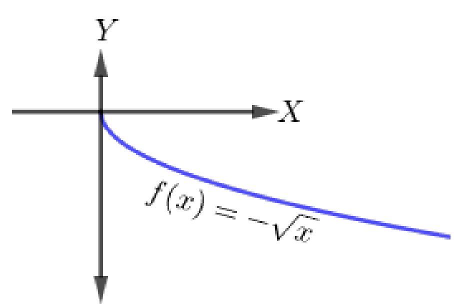
Obtenemos dos funciones

$$\boxed{y = f(x) = \sqrt{x}}$$



$$Dom(f) = [0, +\infty[, \;\; Ran(f) = [0, +\infty[$$

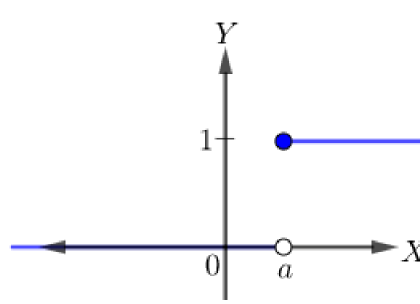
$$\boxed{y = f(x) = -\sqrt{x}}$$



$$Dom(f) = [0, +\infty[, \;\; Ran(f) =]-\infty, 0]$$

7. Función Escalón Unitario

$$f(x) = U(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$$



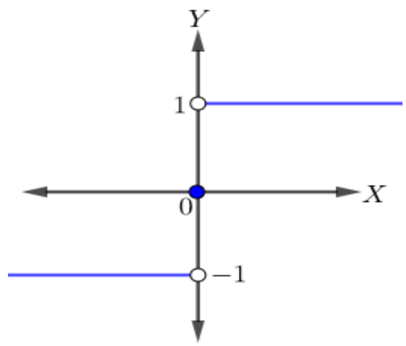
$$Dom(f) = \mathcal{R}, \;\; Ran(f) = \{0,1\}$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

8. Función Signo

$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$Dom(f) = \mathcal{R}, \;\; Ran(f) = \{-1,0,1\}$



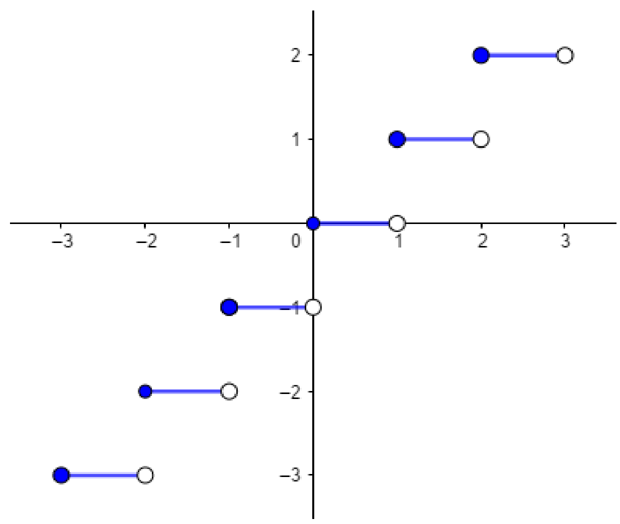
9. Función Máximo Entero

$$f(x) = [\![x]\!] = \lfloor x \rfloor = n, \qquad si \;\; n \le x < n+1, n \in \mathcal{Z}$$

Es decir

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ 2, & 2 \le x < 3 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 0, & 0 \le x < 1 \\ -1, & -1 \le x < 0 \\ -2, & -2 \le x < -1 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$Dom(f) = \mathcal{R}, \;\; Ran(f) = \mathcal{Z}$



Propiedades

a) $\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathcal{Z}$

b) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n, \;\; n \in \mathcal{Z}$

c) $\lfloor x \rfloor \le n \Leftrightarrow x < n+1, \;\; n \in \mathcal{Z}$

d) $\lfloor x \rfloor < n \Leftrightarrow x < n, \;\; n \in \mathcal{Z}$

e) $\lfloor x \rfloor \ge n \Leftrightarrow x \ge n, \;\; n \in \mathcal{Z}$

f) $\lfloor x \rfloor > n \Leftrightarrow x \ge n+1, \;\; n \in \mathcal{Z}$

10. Función Racional

Es el cociente de dos polinomios.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\boxed{y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}}$$

$$Dom(f) = \mathcal{R} - \{x/h(x) = 0\}$$

11. Función a Trozos

Son funciones que tienen dominios que están compuestos de varios trozos, para diferentes ecuaciones.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in Dom(f_1) \\ f_2(x), & x \in Dom(f_2) \\ f_3(x), & x \in Dom(f_3) \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x), & x \in Dom(f_n) \end{cases}$$

Donde

$Dom(f) = Dom(f_1) \cup Dom(f_2) \cup Dom(f_3) \cup \cdots \cup Dom(f_n)$

y $\cap Dom(f_i)$ son disjuntos dos a dos.

$Ran(f) = \cup Ran(f_i)$

Ejemplos

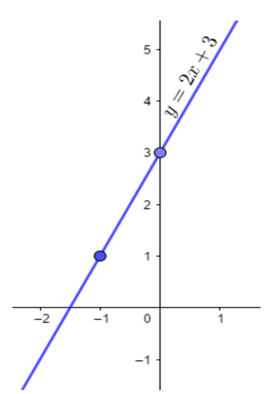
1. Determinar el dominio y rango de la función lineal $f(x) = 2x + 3$, hacer un bosquejo de la gráfica.

Resolución

Como es una función lineal, tenemos que $Dom(f) = \mathcal{R}$ y $Ran(f) = \mathcal{R}$

Para trazar la gráfica es suficientes tabular dos valores para x

x	$y = 2x + 3$
0	3
-1	1



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

2. Un hospital de una ciudad pequeña estudia la compra de una ambulancia. Los analistas del hospital estiman que el costo de la ambulancia, completamente equipado es de $\$ \, 25\,000$. También han estimado un costo promedio de traslado del patrullero a la ciudad pequeña de $\$ \, 0.50$ por milla. Determinar la función matemática que representa el costo total.

Resolución

Sea $x = número\ de\ millas$

Luego $f(x) = 25\,000 + 0.50x$

3. Dada la función racional $f(x) = \frac{x^2+5x-17}{x^2-5x+6}$. Hallar el dominio.

Resolución

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 17}{x^2 - 5x + 6} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \neq 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-2) \neq 0$$

$$\Rightarrow x - 3 \neq 0 \ \vee \ x - 2 \neq 0$$

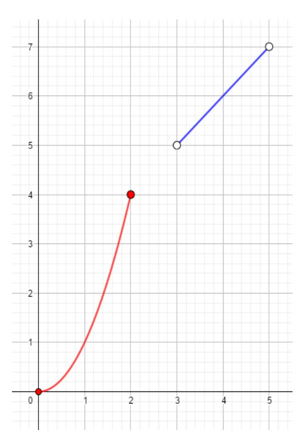
$$\Rightarrow x \neq 3 \vee \ x \neq 2$$

$$\Rightarrow Dom(f) = \mathcal{R} - \{2,3\}$$

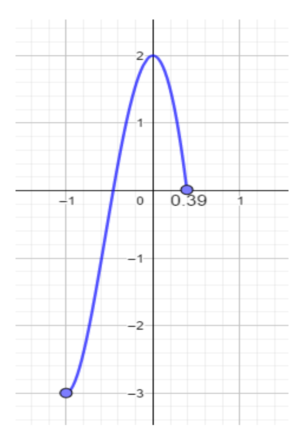
Ejercicios

I. En cada caso, hallar el dominio y el rango de cada función representada en los gráficos siguientes:

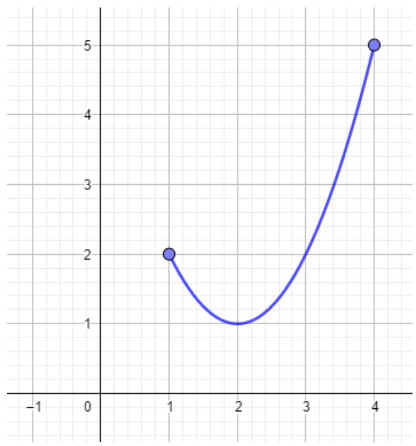
a)

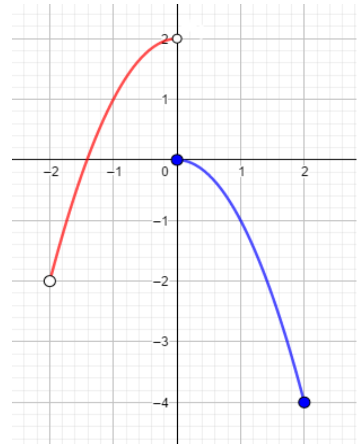


b)



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

c) 

d) 

II. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 6$	11. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-5}}$
2. $f(x) = \frac{3}{x}$	12. $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x+1}$
3. $f(x) = x^2 - 2x$	13. $f(t) = \frac{t}{5}$
4. $f(x) = \sqrt{4x-1}$	14. $f(t) = -\sqrt{3t}$
5. $f(x) = \sqrt{5-2x}$	15. $g(x) = \frac{2x}{2x-5}$
6. $f(x) = x^2 - 4x + 2$	16. $g(x) = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}$
7. $f(x) = \sqrt[3]{27}$	17. $g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
8. $f(t) = 9 - t$	18. $f(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x^2}$
9. $f(t) = \frac{3t-1}{\sqrt{t-3}}$	19. $h(x) = \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$
10. $f(t) = \frac{t^2-4t+2}{t}$	20. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2-x-1}{x^2+3x}}$

III. Determinar el dominio y rango de cada función a trozos.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & si \;\; x > 5 \\ 6-3x, & si \;\; x < 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x+1, & si \;\; x < 2 \\ -x+3, & si \;\; x \geq 2 \end{cases}$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

c) $f(x)=\begin{cases}4x+3\,, & si\ -2\le x<0\\ 1+x^2, & si\quad 0\le x\le 2\\ 7\ , & si\quad x>2\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}3x-2, & si\ -4\le x\le 4\\ x\quad , & si\quad 4<x<6\end{cases}$

IV. Determinar el valor de la función, para cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x)=10$, $\qquad f(3);\ f(h);\ f(-3)$
2. $f(x)=2x^2-5$, $\qquad f(-1)\ ;\ f(a)\ ;\ f(x+h)$
3. $f(x)=\frac{x+4}{x+3}$, $\qquad f(-1)\ ;\ f(0)\ ;\ f(x+h)$
4. $f(x)=3x^2-x+4$, $\qquad f(h); f(0); f(-\sqrt{3})$
5. $f(x)=\sqrt{2x^2+6x-1}$, $\qquad f\left(\frac{1}{2}\right); f(1); f(12)$

V. En las siguientes funciones determinar $f(1)$; $f(-2)$; $f(a+b)$

1. $f(x)=-3x^2+10x+1$
2. $f(x)=4x^2-x+5$
3. $f(x)=\frac{3x}{2}-1$
4. $f(t)=-t^3+\ 2t^2$
5. $f(x)=mx+3$

Aplicaciones con Funciones Lineales

1. En una tienda de relojes, cuando el precio es de $S/80$ se vende 10 relojes y vende 20 cuando el precio es de $S/60$ ¿Cuál es la ecuación de la demanda?

Resolución

Sea $x=la\ oferta$ y $y=la\ demanda$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Teniendo como datos dos puntos $(10{,}80)$ y $(20{,}60)$ entonces tenemos que la pendiente es $m = \frac{60-80}{20-10} = -2$

Luego usando la ecuación punto pendiente de la recta tenemos:

$$y - 80 = -2(x - 10)$$

$$y = -2x + 20 + 80$$

$$y = -2x + 100$$

que será la ecuación demanda.

2. El costo variable de fabricar una mesa es de $\$10$ y los costos fijos son de $\$150$ al día. Determinar el costo total de fabricar x mesas al día. ¿Cuál es el costo de fabricar 100 mesas al día?

Resolución

$$Costo\ total = Costo\ variables + Costos\ fijos$$

Sea x el número de mesas fabricadas al dia

$$Costo\ Total = f(x) = 10x + 150$$

El costo de fabricar 100 mesas al día será:

$$f(100) = 10(100) + 150$$

$$f(100) = \$\,1\,150$$

3. Una empresa tiene costos fijos de $S/18\,600$ y por artículo que produce tiene un gasto de $S/150$. Además, la empresa vende cada artículo en $S/380$.

a) Escriba la función de costos.

b) Escriba la función de ingreso.

c) Determine la función de utilidad.

Resolución

a) $Costo\ total = Costo\ variables + Costos\ fijos$

Sea x el número de artículos que produce la empresa

$$Costo\ total = f(x) = 150x + 18\,600$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$f(x) = 150x + 18\,600$$

b) $Ingreso = (precio\ de\ venta\ de\ artículo)(número\ de\ articulos\ vendidos)$

Sea x el número de artículos vendidos

$$Ingreso = g(x) = 380x$$

$$g(x) = 380x$$

c) $Utilidad = Ingreso - Costo\ total$

$$Utilidad = h(x) = g(x) - f(x)$$

$$h(x) = 380x - (150x + 18\,600)$$

$$h(x) = 230x - 18\,600$$

4. Suponer que f es una función lineal con pendiente 2 y $f(4) = 8$.

Hallar $f(x)$

Resolución

Como $f(x)$ es una función lineal, entonces tiene la forma:

$$f(x) = mx + b$$

Donde m es la pendiente, entonces $m = 2 \Longrightarrow f(x) = 2x + b$

$$f(4) = 2(4) + b = 8$$

$$b = 0$$

Luego tenemos $f(x) = 2x$

5. Para calcular el monto de la depreciación se considera: Reducir el valor cada año en una cantidad constante de forma tal que el valor se reduzca a un valor de desecho al final del tiempo de vida útil estimado del equipo.

Así tenemos:

$$T = \frac{V_i - V_f}{n}$$

Donde:

$T = Tasa\ de\ depreciación\ anual$

$V_i = Valor\ inicial$

$V_f = Valor\ final\ o\ de\ desecho$

$n = tiempo\ de\ vida\ en\ años$

Si $t = 0 \Longrightarrow V = V_i$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Si $t = n \Longrightarrow V = V_f$

Entonces, V es el valor del equipo para un tiempo cualquiera.

Aplicando la ecuación punto pendiente, tenemos.

$$V - V_i = \frac{V_f - V_i}{n - 0}(t - 0) \implies V(t) = Vi - \left(\frac{Vi - Vf}{n}\right)t$$

Ejemplo

Una empresa compra maquinaria por $S/150\ 000$. Se espera que el tiempo de vida útil de la maquinaria sea $12\ años$ con un valor de desecho de cero. Determinar el monto de depreciación anual y una fórmula para el valor depreciado después de x años.

Resolución

$$T = Tasa\ de\ depreciación\ anual$$

$$T = \frac{V_i - V_f}{n}$$

$V_i = 150\ 000$

$V_f = 0$

$n = 12\ años$

Entonces tenemos el monto de depreciación anual:

$$T = \frac{150\ 000 - 0}{12}$$

$$T = \frac{150\ 000}{12}$$

$$T = 12\ 500$$

El valor de depreciación después de $x\ años$, será:

Utilizando $V(x) = Vi - \left(\frac{Vi-Vf}{n}\right)x$

$$V(x) = 150\ 000 - 12\ 500x$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Problemas para desarrollar

1. Cuando el precio es 50 soles hay disponible 50 cámaras de un tipo dado para el mercado; cuando el precio es 75 soles hay disponibles 100 cámaras. ¿Cuál es la ecuación de la oferta?
2. Hallar el punto de equilibrio de las siguientes ecuaciones de oferta y demanda. Graficar.

$$y = 10 - 2x$$
$$y = \frac{3}{2}x + 1$$

3. El costo de producir 10 $unidades$ de cierto artículo es de $S/75$ y $S/120$ de producir 25 $unidades$ del mismo artículo al día. Determinar la ecuación de costo. ¿Cuál es el costo de producir 20 artículos al día? ¿Cuál es el costo variable y el costo fijo por artículos?

4. José compró un automóvil por $\$10\ 000$ ¿Cuál es el valor V del automóvil después de t $años$, suponiendo que se deprecia linealmente cada año a una tasa del 12% de su costo original? ¿Cuál es el valor del automóvil después de 5 $años$?
5. Si $y = f(x)$ es una función lineal tal que $f(-2) = 6$ y $f(1) = -3$. Hallar $f(x)$
6. Una impresora tiene un valor original de $100 y se deprecia en forma lineal durante 5 $años$, con el valor de desecho de $30:

a) Determinar una expresión que de un valor contable al final del año t.

b) ¿Cuál será el valor contable de la impresora al final del segundo año?

c) ¿Cuál es la tasa de depreciación de la Impresora?

7. En un experimento para una dieta para gallinas, se determinó que el peso promedio $p(en\ gramos)$de una gallina fue, según las estadísticas, una función lineal del número de días d después de que se inició la dieta, donde $0 \leq d \leq 50$. Suponer que el peso promedio de una gallina al inicio de la dieta fue de 40 $gramos$ y 25 $dias$ después fue de 675 $gramos$.

a) Determinar p como una función lineal de d.

b) Determinar el peso promedio de una gallina cuando $d = 10$ dias.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

8. Determinar $f(x)$ cuando f es una función lineal que tiene las condiciones dadas.

a) $f(0) = 3,\ f(4) = -5$

b) $pendiente = -6,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$

c) $f(-2) = -1\ ,\ f(-4) = -3$

d) $pendiente = 0.01\ ,\ f(0.1) = 0.01$

9. Un fabricante de detergente se da cuenta que las ventas son de $100\ 000\ paquetes$ a la semana cuando el precio es de \$1.20 por paquete. Pero, las ventas se incrementan a $120\ 000\ paquetes$ cuando el precio se reduce a \$1.10por paquete. Determinar la relación de demanda, suponiendo que es lineal.

10. Cuando el precio por unidad de un producto sea \$$10$ la oferta será de $80\ unidades$ diarias, mientras que será de $90\ unidades$ a un precio unitario de \$$10.50$. Determinar la ecuación de oferta, suponiendo que es lineal.

11. Cuando se terminó en el año $2\ 000$, un edificio de oficinas tenía un valor de \$$1\ 000\ 000$ y se deprecia linealmente durante $50\ años$ ¿Cuál será el valor contable del edificio en $2\ 005$ y $2\ 010$? (suponga que el desecho es \$0).

12. La gerencia de la compañía de controles debe decidir entre dos procesos de producción de su termostato electrónico modelo C. El costo mensual en dólares del primer proceso está dado por $C_1(x) = 20x + 10\ 000;$ donde x es la cantidad de termostatos producidos, y el costo mensual del segundo proceso en dólares, está dado por $C_2(x) = 10x + 30\ 000$. Si las ventas proyectadas son de 800 termostatos a un precio unitario de \$40.

a) ¿Cuál proceso debe elegir la gerencia para maximizar las ganancias?

b) ¿Cuál proceso debe elegir la gerencia si las ventas proyectadas son de $1\ 500\ unidades$?

13. Sea la función de oferta $p = \frac{1}{300}q + 8$ y la función de demanda $p = -\frac{1}{180}q + 12$, hallar el precio de equilibrio y el número correspondiente de unidades que se ofrecieron y demandaron.

14. Sea $p = \frac{8}{100}q + 50$ la ecuación de oferta para el producto de un fabricante y sea la ecuación de la demanda $p = -\frac{7}{100}q + 65$.

ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

a) Si se carga un impuesto de $1.50 por unidad al fabricante, ¿cómo será afectado el precio de equilibrio original si la demanda permanece igual?

b) Determinar el ingreso total obtenido por el fabricante en el punto de equilibrio antes y después del impuesto.

15. Una fábrica de piqueos tiene costos fijos diarios de $1 800, además, producir cada bolsa de piqueos cuesta $0.50. Una bolsa de piqueos se vende a $1.20.

a) Encontrar el costo diario total de producir x bolsas de piqueos.

b) Encontrar el ingreso diario por vender x bolsas de piqueos.

c) Encontrar la ganancia diaria por vender x bolsas de piqueos.

Ejemplos de Aplicaciones con Funciones Cuadráticas

1. Dada la función cuadrática $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$, determinar el vértice de la parábola, las intersecciones con el eje X con la parábola y bosquejar la Parábola. Determinar el dominio y rango.

Resolución

$$y = f(x) = -2x^2 + 5x - 2$$

Completaremos cuadrados, para obtener una ecuación de la forma

$y - k = a(x - h)^2$, así tendremos el vértice (h, k).

$$y = -2x^2 + 5x - 2$$

$$y = -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) - 2$$

$$y = -2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] - 2$$

$$y = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{8} - 2$$

$$y = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

$$y - \frac{9}{8} = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2$$

Luego tenemos el vértice $V(h, k) = \left(\frac{5}{4}, \frac{9}{8}\right)$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Para encontrar la intersección con el eje X, hacemos $y = 0$, entonces

$$-2x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$(2x - 1)(x - 2) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \ \vee \ x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \ \vee \ x = 2$$

Luego los puntos de intersección con el eje X, son: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $(2,0)$

Ahora para determinar el dominio y rango, consideramos la teoría de la función especial cuadrática, tener en cuenta que en $y - k = a(x - h)^2$

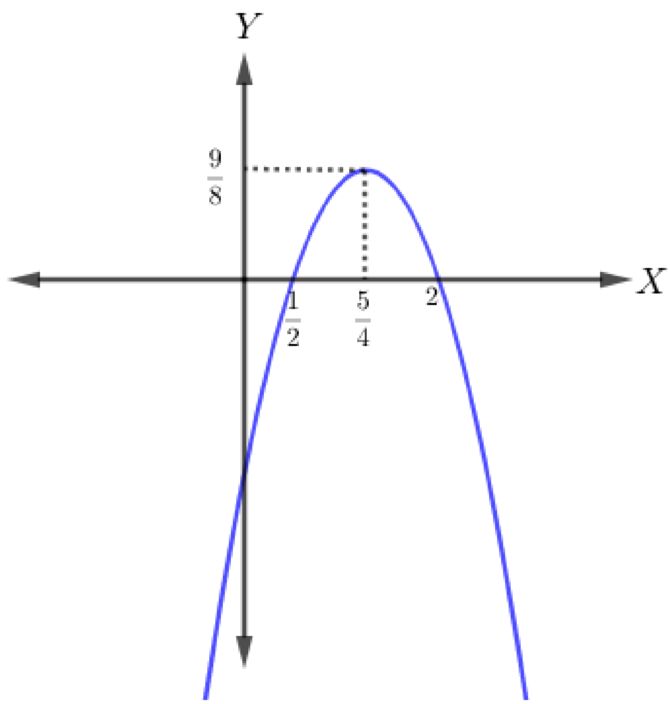
$$y - \frac{9}{8} = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2$$

$$a = -2 < 0 \Longrightarrow la\ parábola\ se\ abre\ para\ abajo$$

$$Dom(f) = \mathcal{R}$$

$$Ran(f) =]-\infty, k] = \left]-\infty, \frac{9}{8}\right]$$

$$Ran(f) = \left]-\infty, \frac{9}{8}\right]$$



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

2. Las ganancias mensuales obtenidas por la empresa Cannon al producir y vender x unidades de cámaras modelo M1, en dólares es:
$f(x) = -0.04x^2 + 240x - 10\ 000$ Encontrar ¿Cuántas cámaras debe producir cada mes para maximizar sus ganancias?

Resolución

Para saber la máxima ganancia tenemos que encontrar el vértice de la parábola, puesto es una parábola que se abre para abajo, para ello completaremos cuadrados.

$$y = f(x) = -0.04x^2 + 240x - 10\ 000$$

$$y = -\frac{4}{100}x^2 + 240x - 10\ 000$$

$$y = -\frac{1}{25}x^2 + 240x - 10\ 000$$

$$y = -\frac{1}{25}(x^2 - 6\ 000x) - 10\ 000$$

$$y = -\frac{1}{25}[(x - 3\ 000)^2 - 9\ 000\ 000] - 10\ 000$$

$$y = -\frac{1}{25}(x - 3\ 000)^2 + 360\ 000 - 10\ 000$$

$$y = -\frac{1}{25}(x - 3\ 000)^2 + 350\ 000$$

$$y - 350\ 000 = -\frac{1}{25}(x - 3\ 000)^2$$

Luego el vértice es $V(h, k) = (3\ 000, 350\ 000)$

Entonces debe producir 3 000 cámaras modelo M1, para obtener una ganancia máxima de $350 000

3. Las funciones de oferta y demanda semanales de una tienda de autopartes de vehículos están dadas por

$$p = -0.1x^2 - x + 40$$
$$p = 0.1x^2 + 2x + 20$$

respectivamente, donde p se mide en dólares y x en unidades de centena. Determinar la cantidad y el precio de equilibrio.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Resolución

Para encontrar el punto de equilibrio, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} p = -0.1x^2 - x + 40 \\ p = 0.1x^2 + 2x + 20 \end{cases}$$

Igualamos las ecuaciones $-0.1x^2 - x + 40 = 0.1x^2 + 2x + 20$

$$0.2x^2 + 3x - 20 = 0$$
$$\frac{1}{5}x^2 + 3x - 20 = 0$$
$$\frac{1}{5}x^2 + 3x - 20 = 0$$
$$x^2 + 15x - 100 = 0$$
$$(x + 20)(x - 5) = 0$$
$$x + 20 = 0 \ \vee \ x - 5 = 0$$
$$x = -20 \ \vee x = 5$$

Como x, representa las unidades de centenas de autopartes, consideramosi $x = 5 \Longrightarrow$ $p = 0.1(5)^2 + 2(5) + 20 = 32.5$

$$p = 32.5$$

Así el punto de equilibrio $(5, 32.5)$

4. La función de demanda para la línea de laptops de una compañía de electrónica es $p = 2\,400 - 6q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (diarias). Determinar el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determinar el ingreso.

Resolución

La función ingreso será $I = pq = (2\,400 - 6q)q$

$$I = 2\,400q - 6q^2$$

Completaremos cuadrados para encontrar su vértice;

$$I = -6(q^2 - 400)$$
$$I = -6[(q - 200)^2 - 40\,000]$$
$$I = -6(q - 200)^2 + 240\,000$$
$$I - 240\,000 = -6(q - 200)^2$$

Luego para tener un ingreso máximo de $I = \$240\,000$ se debe tener una producción $q = 200\ laptps\ diario$.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Problemas para desarrollar

1. Dada la función cuadrática $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$, determinar el vértice de la parábola, las intersecciones con el eje X con la parábola y bosquejar la Parábola. Determinar el dominio y rango.
2. La ganancia trimestral de la empresa YAKU está dada por:

   $P(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 7x + 30$ (en miles de soles), donde $0 \leq x \leq 50$ (en miles de soles) es la cantidad de dinero que YAKU gasta en publicidad cada trimestre. Determinar la cantidad que YAKU debería invertir en publicidad para obtener una ganancia trimestral máxima. ¿Cuál es la máxima ganancia trimestral que puede lograr YAKU?
3. Dada las funciones cuadráticas, determinar el vértice de la parábola, las intersecciones con el eje X y la parábola y bosquejar la gráfica de la parábola. Determinar el dominio y rango.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x - 3$

b) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

c) $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$

4. La utilidad diaria de la venta de zapatillas para el departamento de calzado de un almacén, está dado por $f(x) = -x^2 + 22x + 104$; donde x es el número de zapatillas vendidas. Determine el vértice y las intersecciones con los ejes de la función y bosqueje la gráfica.

5. La función de demanda de cierta marca de celulares está dada por:

   $y = -0.01x^2 - 0.2x + 8$ y la función de oferta correspondiente está dada por $y = 0.01x^2 + 0.1x + 3$, donde y se expresa en soles y x se mide en unidades de millar. Determinar la cantidad y el precio de equilibrio.
6. La función de demanda para una línea de lápices de una compañía de artículos escolares es $p = 0.5 - 0.0002q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (diarias). Determine el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.
7. Celimar, dueña de una pastelería. Contrató un consultor para analizar las operaciones del negocio. Él consultor dice que sus ganancias G de la venta de x unidades de pasteles, están dadas por:

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$G = 120x - x^2$$

Trazar gráfica G.¿Cuántos pasteles debe vender para maximizar las ganancias? ¿Cuál es la ganancia máxima?

8. La función de oferta para cierta marca de cámaras está dada por $p = s(x) = 0.01x^2 + 0.1x + 3$, p es el precio unitario al mayoreo, en dólares y x representa la cantidad que el proveedor pondrá en el mercado (medidas en unidades de millar). Trazar la curva de oferta correspondiente. ¿Cuál es el precio mínimo para el cual el proveedor colocara las cámaras en el mercado?

9. Una compañía de investigación de mercados estima que "n" meses después de la introducción de un nuevo producto, $f(n)$ miles de familias lo usaran, en donde $f(n) = \frac{8}{3}n(18 - n)$, $0 \leq n \leq 18$;

Estimar el número máximo de familias que usaran el producto.

10. El ingreso de una empresa algodonera se estima a través del tiempo de acuerdo a la siguiente función $I = -24t^2 + 288t - 64$, donde I es el ingreso en miles de dólares y t es el tiempo en años.

¿En qué año se alcanzará el máximo ingreso y cuánto será? Graficar.

3.3 Álgebra y Composición de Funciones

Álgebra de Funciones

Si f y g son funciones con dominio D_f y D_g, respectivamente.

$\forall x \in D_f \cap D_g \neq \emptyset$, se define:

$i)\ (kf)(x) = k.f(x),\ k\ constante$ $\qquad D_{kf} = D_f$

$ii)\ (f+g)(x) = f(x) + g(x),$ $\qquad D_{f+g} = D_f \cap D_g$

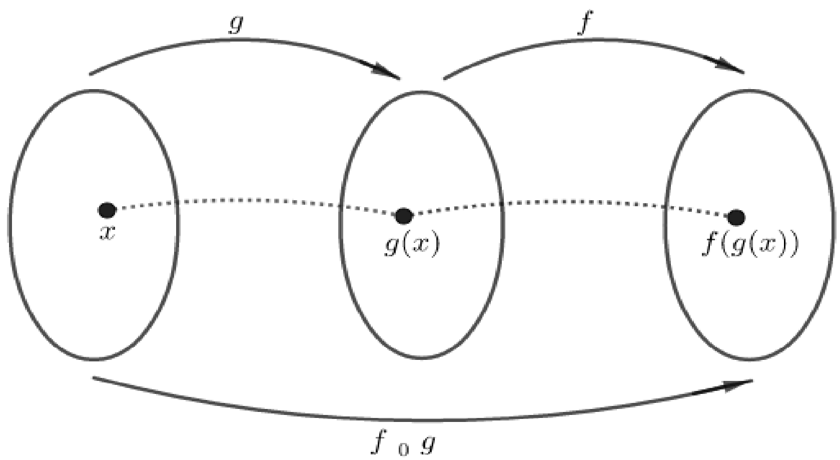
$iii)\ (f-g)(x) = f(x) - g(x),$ $\qquad D_{f-g} = D_f \cap D_g$

$iv)\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$ $\qquad D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

$v)\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$ $\qquad D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{g(x) = 0\}$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Composición de funciones



Si f y g son funciones, la composición de f y g, representada por $f \circ g$, está definida:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big), \qquad D_{f \circ g} = \{x \in D_g \ \wedge \ g(x) \in D_f\}$$

Observación. Tener en cuenta que no necesariamente se cumple:

$f \circ g = g \circ f$

Ejemplos

1. Encontrar $f + g, f - g, f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$; y sus dominios, donde $f(x) = x^2 + 2x$ y $g(x) = \sqrt{3x^2 - 1}$

Resolución

Para ver si existen las operaciones $f + g, f - g, f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$, determinaremos $D_f \cap D_g$.

$D_f = R$

$D_g: 3x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq \dfrac{1}{3} \Rightarrow x \geq \dfrac{1}{\sqrt{3}} \vee x \leq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$D_g = \left]-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$

Luego tenemos que

$$D_f \cap D_g = R \cap \left]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[= \left]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+2x+\sqrt{3x^2-1},\qquad x\in\left]-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right[$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^2+2x-\sqrt{3x^2-1},\qquad x\in\left]-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right[$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x^2+2x)\sqrt{3x^2-1},\qquad x\in\left]-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right[$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x^2+2x)}{\sqrt{3x^2-1}},\qquad x\in\langle-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\rangle\cup\langle\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\rangle$$

2) Hallar $f\circ g$ y $g\circ f$; Si $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\in[0,2]\\ x+1, & x\in\langle 3,5\rangle\end{cases}$ y $g(x)=\sqrt{x-1}$

Resolución

- Para hallar $f\circ g$, primero determinaremos $D_{f\circ g}$

Tener en cuenta $D_{f_1}=[0,2]$, $D_{f_2}=\langle 3,5\rangle$ y $D_g=[1,+\infty[$

$$D_{f_1\circ g}=\{x\in D_g\ \wedge\ g(x)\in D_{f_1}\}\Rightarrow x\in[1,+\infty[\wedge g(x)=\sqrt{x-1}\in[0,2]$$

$$\Rightarrow x\in[1,+\infty[\wedge 0\le\sqrt{x-1}\le 2$$

$$x\in[1,+\infty[\wedge 0\le x-1\le 4$$

$$x\in[1,+\infty[\wedge 1\le x\le 5$$

$$x\in[1,5]\Rightarrow D_{f_1\circ g}=[1,5]$$

$$D_{f_2\circ g}=\{x\in D_g\ \wedge\ g(x)\in D_{f_2}\}\Rightarrow x\in[1,+\infty[\wedge g(x)=\sqrt{x-1}\in\langle 3,5\rangle$$

$$\Rightarrow x\in[1,+\infty[\wedge\ 3<\sqrt{x-1}<5$$

$$x\in[1,+\infty[\wedge\ 9<x-1<25$$

$$x\in[1,+\infty[\wedge\ 10<x<26$$

$$\Rightarrow D_{f_2\circ g}=\langle 10,26\rangle$$

Luego $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=\begin{cases}f_1\big(g(x)\big), & x\in D_{f_1\circ g}\\ f_2\big(g(x)\big), & x\in D_{f_2\circ g}\end{cases}$

$$f\big(g(x)\big)=\begin{cases}f_1\big(\sqrt{x-1}\big), & x\in[1,5]\\ f_2\big(\sqrt{x-1}\big), & x\in\langle 10,26\rangle\end{cases}$$

$$f\big(g(x)\big)=\begin{cases}2\sqrt{x-1}-1, & x\in[1,5]\\ \sqrt{x-1}+1, & x\in\langle 10,26\rangle\end{cases}$$

- Para hallar $g\circ f$, primero determinaremos

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$D_{g\circ f_1} = \{x \in D_{f_1} \ \wedge \ f_1(x) \in D_g\} \Rightarrow x \in [0,2] \wedge f_1(x) = 2x - 1 \in [1, +\infty[$$

$$\Rightarrow x \in [0,2] \wedge \ 1 \leq 2x - 1$$

$$\Rightarrow x \in [0,2] \wedge x \geq 1$$

$$\Rightarrow D_{g\circ f_1} = [1,2]$$

$$D_{g\circ f_2} = \{x \in D_{f_2} \ \wedge \ f_2(x) \in D_g\} \Rightarrow x \in \langle 3,5\rangle \wedge f_2(x) = x + 1 \in [1, +\infty[$$

$$\Rightarrow x \in \langle 3,5\rangle \wedge \ 1 \leq x + 1$$

$$\Rightarrow x \in \langle 3,5\rangle \wedge x \geq 0$$

$$\Rightarrow D_{g\circ f_2} = \langle 3,5\rangle$$

Luego $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(f_1(x)), & x \in D_{g\circ f_1} \\ g(f_2(x)), & x \in D_{g\circ f_2} \end{cases}$

$$g(f(x)) = \begin{cases} g(2x - 1), & x \in [1,2] \\ g(x + 1), & x \in \langle 3,5\rangle \end{cases}$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} \sqrt{2x - 1 - 1}, & x \in [1,2] \\ \sqrt{x + 1 - 1}, & x \in \langle 3,5\rangle \end{cases}$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} \sqrt{2x - 2}, & x \in [1,2] \\ \sqrt{x}, & x \in \langle 3,5\rangle \end{cases}$$

Función Par e Impar

Función Par: Una función f es par; si cumple:

$i)$ $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

$ii)$ $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$

Observación**.** La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje Y. Es decir $(x, y) \in Graf(f) \Leftrightarrow (-x, y) \in Graf(f)$

Función Impar: Una función f es impar; si cumple:

$\boldsymbol{i})$ $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

$ii)$ $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$

Observación. La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen. Es decir $(x, y) \in Graf(f) \Leftrightarrow (-x, -y) \in Graf(f)$

Función periódica: una función f es periódica, si existe un número $p \neq 0$, sí cumple:

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$i)\ x \in D_f \Longrightarrow (x+p) \in D_f$

$ii)\ x \in D_f \Longrightarrow f(x+p) = f(x), \forall x \in D_f$

Observación.

- Al menor número $p > 0$ se le llama periodo de f.
- La gráfica de la función periódica f se repite en forma idéntica cada p unidades.

Ejemplos

1. Determinar si la función f es par o impar.

a) $f(x) = 5x^2 - x^4$

Resolución

$D_f = \mathcal{R}$

$i)\ x \in D_f \Longrightarrow -x \in D_f$

$ii)\ f(-x) = 5(-x)^2 - (-x)^4 = 5x^2 - x^4 = f(x)$

$f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$

Luego f es par.

b) $f(x) = 3x^3 - x$

Resolución

$D_f = \mathcal{R}$

$i)\ x \in D_f \Longrightarrow -x \in D_f$

$ii)\ f(-x) = 3(-x)^3 - (-x) = -3x^3 + x = -(3x^3 - x) = -f(x)$

$f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$

Luego f es impar.

c) $f(x) = \sqrt[3]{x(3+|x|)}$

Resolución

$D_f = \mathcal{R}$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$i)\ x \in D_f \Longrightarrow -x \in D_f$

$ii)\ f(-x) = \sqrt[3]{(-x)(3+|-x|)} = -\sqrt[3]{x(3+|x|)} = -f(x)$

$f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$

Luego f es impar.

d) $f(x) = |x^3 + 3x|, x \in \langle -3,3 \rangle$

Resolución

$D_f = \langle -3,3 \rangle$

$i)\ x \in D_f = \langle -3,3 \rangle \Longrightarrow -3 < x < 3$

$\Longrightarrow 3 > -x > -3 \Longrightarrow -x \in \langle -3,3 \rangle = D_f$

$ii)\ f(-x) = |(-x)^3 + 3(-x)| = |-x^3 - 3x| = |(-1)(x^3 + 3x)| =$

$|-1||x^3 + 3x| = |x^3 + 3x| = f(x)$

$f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$

Luego f es par.

2. Dada la función $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, probar que f es periódica, bosquejar su gráfica.

Resolución

Probaremos que f es periódica, luego el $D_f = \mathcal{R}$, entonces tenemos que

$i)\ x \in D_f = \mathcal{R} \Longrightarrow (x+p) \in D_f = \mathcal{R}$

$ii)\ f(x+p) = x + p - \lfloor x+p \rfloor, \forall x \in D_f$

Supongamos $f(x+p) = f(x),\ p \neq 0$, entonces

$$x + p - \lfloor x+p \rfloor = x - \lfloor x \rfloor$$

$$p = \lfloor x+p \rfloor - \lfloor x \rfloor$$

Donde nos resulta que p es la diferencia de dos números enteros entonces, tenemos que $p \in \mathcal{Z}$.

Luego podemos aplicar la propiedad de máximo entero

$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n,\ n \in \mathcal{Z}$; así tenemos en

$ii)\ f(x+p) = x + p - \lfloor x+p \rfloor = x + p - \lfloor x \rfloor - p = x - \lfloor x \rfloor = f(x)$

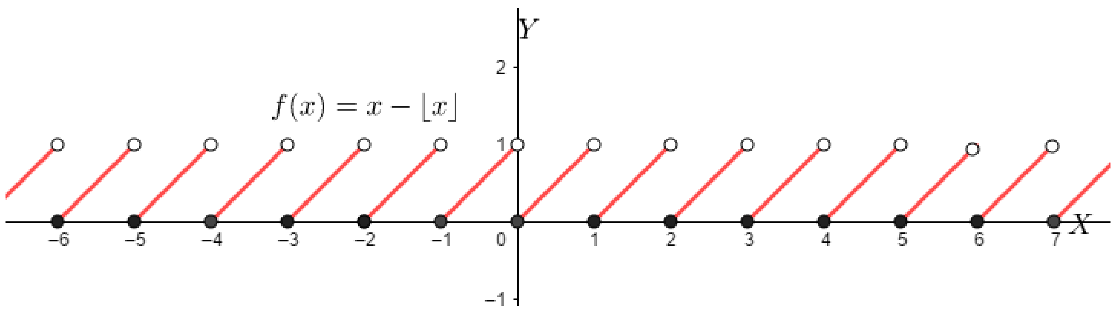
$$f(x+p) = f(x), \forall x \in D_f$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Por lo tanto f es periódica.

Para graficar, tomaremos el periodo $p > 0$, donde $p = min\{1,2,3, ...\} = 1$, es decir que la gráfica se va a repetir cada intervalo de longitud igual a la unidad.

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor = x - n = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ x-3, & 3 \le x < 4 \\ x-2, & 2 \le x < 3 \\ x-1, & 1 \le x < 2 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ x+1, & -1 \le x < 0 \\ x+2, & -2 \le x < -1 \\ x+3, & -3 \le x < -2 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$



3.4 Función inyectiva y Sobreyectiva

Función Inyectiva: Una función f es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in D_f$, se tiene que; $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

Equivalentemente, f es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2$ se tiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Observación: Una gráfica de una función f es inyectiva si una recta horizontal (paralela al eje X) corta a la gráfica de f solo en un punto.

Función Sobreyectiva: Una función $f: A \longrightarrow B$ es sobreyectiva,

si $\forall y \in B, \exists x \in A \; tal \; que \; y = f(x)$

es decir $f: A \longrightarrow B$ es sobreyectiva si y solo si $R_f = B$.

Función Biyectiva: Una función f es biyectiva si f es inyectiva y sobreyectiva.

Función Inversa: Si $f: A \longrightarrow B$ es una función inyectiva, entonces existe la función inversa de f, denotada por f^{-1}, donde

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$f^{-1}: B \longrightarrow A$, tal que $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

Observación: Si f es una función inyectiva y $f(x) = y$, es decir cuando resolvemos la ecuación anterior para x, en términos de y, obtenemos la función inversa de f; $x = f^{-1}(y)$. Donde $D_{f^{-1}} = R_f$ y $R_{f^{-1}} = D_f$.

Propiedades de la Función Inversa:

$i)\ (f^{-1} \circ f)(x) = x, \qquad \forall x \in D_f$

$ii)\ (f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

$iii)(f \circ f^{-1})(y) = y, \qquad \forall y \in D_{f^{-1}}$

$iv)(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$

Ejemplos

1. Determinar si $f(x) = 3 - 4x - x^2$ es inyectiva.

Resolución

El $D_f = \mathcal{R}$ ya que es una función cuadrática, además completando cuadrados tenemos

$f(x) = 7 - (x + 2)^2$

f es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in D_f = \mathcal{R}$, se tiene que; $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$7 - (x_1 + 2)^2 = 7 - (x_2 + 2)^2$$

$$(x_1 + 2)^2 = (x_2 + 2)^2$$

$$|x_1 + 2| = |x_2 + 2|$$

$$x_1 + 2 = x_2 + 2 \ \vee \ x_1 + 2 = -(x_2 + 2)$$

$$x_1 = x_2 \ \vee \ x_1 + 2 = -x_2 - 2$$

$$x_1 = x_2 \ \vee \ x_1 = -x_2 - 4$$

Como el $D_f = \mathcal{R}$, x_1 toma dos valores, luego f no es inyectiva.

2. Determinar si $f(x) = 5x^2 + 3$ es inyectiva, $D_f =]-\infty, 0]$

Resolución

f es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in D_f$, se tiene que; $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$5{x_1}^2 + 3 = 5{x_2}^2 + 3$$
$$5{x_1}^2 = 5{x_2}^2$$
$${x_1}^2 = {x_2}^2$$
$$|x_1| = |x_2|$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 \ \vee \ x_1 = -x_2$$

Pero $x_1, x_2 \in D_f =]-\infty, 0]$ entonces solo se cumple que $x_1 = x_2$, lo que quiere decir que f es inyectiva.

3. Determinar si $f(x) = \frac{x-3}{x+3}, x \neq -3$ es inyectiva.

Resolución

El $D_f = \mathcal{R} - \{-3\}$

f es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in D_f$, se tiene que; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\frac{x_1 - 3}{x_1 + 3} = \frac{x_2 - 3}{x_2 + 3}$$
$$(x_1 - 3)(x_2 + 3) = (x_2 - 3)(x_1 + 3)$$
$$x_1x_2 + 3x_1 - 3x_2 - 9 = x_1x_2 + 3x_2 - 3x_1 - 9$$
$$3x_1 - 3x_2 = 3x_2 - 3x_1$$
$$6x_1 = 6x_2$$
$$x_1 = x_2$$

Luego $f(x) = \frac{x-3}{x+3}, x \neq -3$ es inyectiva.

4. Determinar si la función f es sobreyectiva.

$a)$ $f\colon [1, +\infty\rangle \longrightarrow \mathcal{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$

Resolución

$$\text{Como } x \in [1, +\infty\rangle \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow y = \sqrt{x-1} \geq 0$$
$$\Rightarrow R_f = [0, +\infty\rangle \neq \mathcal{R}$$

Luego f no es sobreyectiva.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

b) $f: [-2,2] \longrightarrow [0,4]$, definida por $f(x) = x^2$

Resolución

Como $x \in [-2,2] \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x < 0 \ \vee \ 0 \leq x \leq 2$

$$\Rightarrow 4 \geq x^2 > 0 \ \vee \ 0 \leq x^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow y = x^2 \in [0,4]$$

$$R_f = [0,4]$$

Luego f es sobreyectiva.

c) $f: \mathcal{R} - \{0\} \longrightarrow [-1,1]$, definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$

Resolución

Tenemos que $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1, & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1, & x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$R_f = \{-1,1\} \neq [-1,1]$$

Luego f no es sobreyectiva.

5. Sea $f: [1,4] \longrightarrow [a,b]$, definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Probar que f es inyectiva y hallar los valores de a y b, para que f sea biyectiva.

Resolución

El $D_f = [1,4]$, además completando cuadrados tenemos que

$$f(x) = (x-1)^2 + 1$$

- Probaremos que f es inyectiva

f es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in D_f = [1,4]$, se tiene que; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$(x_1 - 1)^2 + 1 = (x_2 - 1)^2 + 1$$

$$(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2$$

$$|x_1 - 1| = |x_2 - 1|$$

Como $x_1, x_2 \in [1,4] \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

Luego f es inyectiva.

- Para que f, sea sobreyectiva debe cumplirse que $R_f = [a, b]$

  Partiremos de $x \in [1,4] \Rightarrow 1 \leq x \leq 4$

$$0 \leq x - 1 \leq 3$$

$$0 \leq (x-1)^2 \leq 9$$

$$1 \leq \underbrace{(x-1)^2 + 1}_{y} \leq 10$$

$$1 \leq y \leq 10$$

$$\Rightarrow y \in [1,10]$$

  Tenemos entonces el $R_f = [1,10]$

  Luego $[1,10] = [a, b] \Rightarrow a = 1,\ \ b = 10$

- Como f es inyectiva y sobreyectiva, entonces f es biyectiva.

6. Hallar y graficar la función inversa de $f(x) = x^2 - 2x - 1,\ x \geq 2$

Resolución

Completando cuadrado tenemos $f(x) = (x-1)^2 - 2,\ x \in [2, +\infty\rangle$

- Veremos si f es inyectiva,

  f es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in D_f = [2, +\infty\rangle$, se tiene que;

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$(x_1 - 1)^2 - 2 = (x_2 - 1)^2 - 2$$

$$(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2$$

$$|x_1 - 1| = |x_2 - 1|$$

  Como $x_1, x_2 \in [2, +\infty\rangle \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

  Luego f es inyectiva.

- Como f es inyectiva, podemos determinar f^{-1}, la cual se obtiene despejando x

  tenemos $y = (x-1)^2 - 2 \Rightarrow y + 2 = (x-1)^2$

$$\Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{y+2}$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$\Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y+2}$$

Como $x \in [2,+\infty\rangle \Rightarrow x = 1 + \sqrt{y+2}$

Luego $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+2}$

- Ahora para determinar el $D_{f^{-1}}$, encontraremos el R_f

  Tenemos que $x \geq 2 \Rightarrow x - 1 \geq 1$

$$\Rightarrow (x-1)^2 \geq 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x-1)^2 - 2}_{y} \geq -1$$

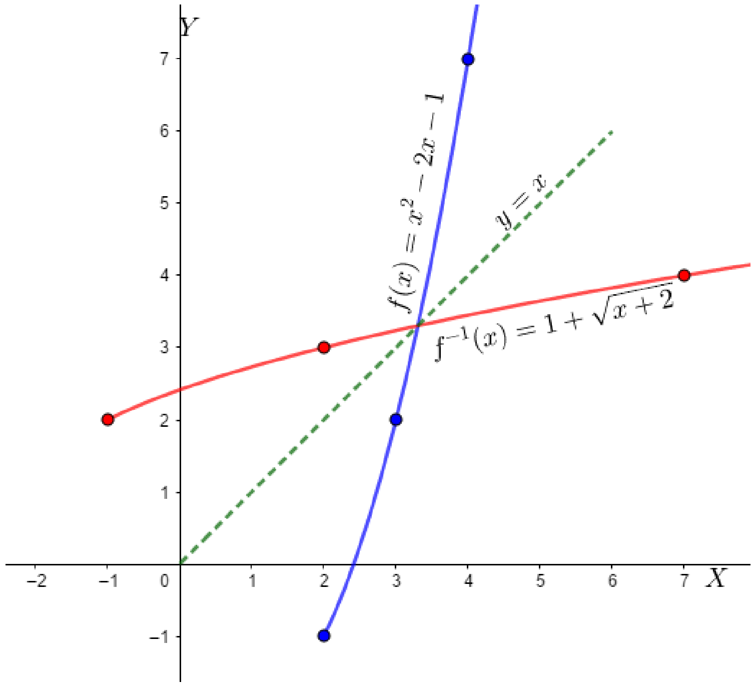
$$\Rightarrow y \geq -1$$

$$\Rightarrow R_f = [-1,+\infty\rangle = D_{f^{-1}}$$

Por tanto $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+2},\ x \in [-1,+\infty\rangle$

- Para graficar tabularemos algunos puntos, teniendo en cuenta el dominio:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = f(x) = (x-1)^2 - 2}$		$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+2}}$
2	-1		-1	2
3	2		2	3
4	7		7	4



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Observa en el grafico que f y f^{-1}, se reflejan suponiendo que $y = x$, funciona como espejo.

Ejercicios

1. Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in]-4,8] \\ x^3 + 2x^2, & x \in \langle 8,16 \rangle \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 3-x, & x \in [5,12[\\ 5, & x \in \langle 12,16 \rangle \end{cases}$$

Encontrar $f+g, f-g, f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$

2. Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 1 \\ x^2 - 2, & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 3x+1, & x \leq 9 \\ x^3, & x \geq 10 \end{cases}$$

Hallar $f+g, f-g, f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$

3. Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} [\![-2x]\!] + 3x, & x \in]-3,-2] \\ |x^2 - 3|, & x \in \langle -2,3 \rangle \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} |x+3|, & x \in]-5,-2] \\ \sqrt{x^2+6}, & x \in \langle 0,3 \rangle \end{cases}$$

Hallar $f - g$.

4. Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \in [0,4] \\ 0, & x \in \langle 4,7 \rangle \end{cases}$$

Determinar $f \circ g$ y $g \circ f$.

5. Encontrar $f+g, f-g, f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$

a) $f(x) = x - 4$ y $g(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 + 2x$ y $g(x) = 3x^2 - 1$

c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{1 + x}$

d) $f(x) = \frac{2}{1+x}$ y $g(x) = \frac{x}{1+x}$

6. Determinar las funciones $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$ y sus dominios.

a) $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = 4x - 1$

b) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

c) $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = 2x + 4$

e) $f(x) = |x|$ y $g(x) = 2x + 3$

f) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ y $g(x) = 2x - 1$

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ y $g(x) = x^2 - 4x$

7. Sean las funciones $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = x + a$. Determinar el valor de a de modo que $(f \circ g)(3) = (g \circ f)(a - 1)$.

8. Si $(g \circ f)(x + 2) = 2x^2 - x$ y $f(x - 1) = x - 2$, Calcular $g(x)$.

9. Dadas las funciones $f, g: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$, tales que $f(x - 1) = 3x^2 + ax + 12$ y $g(x + 1) = 5x + 7$. Hallar el valor de a de modo que $(f \circ g)(-2) = -4a$.

10. Sean $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$ y $h(x) = x - 5$. Si se sabe que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$; Hallar los valores de x tales que $\big(h \circ f \circ (g + h)\big)(x) = 0$.

11. Determinar si la función f es inyectiva.

a) $f(x) = x^2 + 4x - 1$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}, x \neq -2$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3}, & x \geq 3 \\ x^2 + 2x - 3, & x \in [-1,1[\end{cases}$

12. Sean $f(x) = x^3 + 2$, $g(x) = \frac{x-2}{x+3}$, si $g^{-1}\big(f^{-1}(a)\big) = -\frac{4}{3}$, hallar $g^{-1}(a + 5)$.

13. Hallar la función inversa, si existe, para $f(x) = \frac{|x+4|}{|x-1|-1}$, $x \in \langle -2,0 \rangle \cup \langle 0,1 \rangle$

14. Dadas las funciones reales $f(x) = \frac{|x|+1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$. Hallar el dominio de $f^{-1} \circ g^{-1}$

15. Demuestre que la función $f(x) = \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ es periódica.

16. Encontrar la función inversa, si existe:

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

a) $f(x) = x^2 - 2x + 4$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}, x \in [1, +\infty\rangle$

c) $f(x) = -\sqrt{x^2 + 6x - 7}, x \in \langle -\infty, -7]$

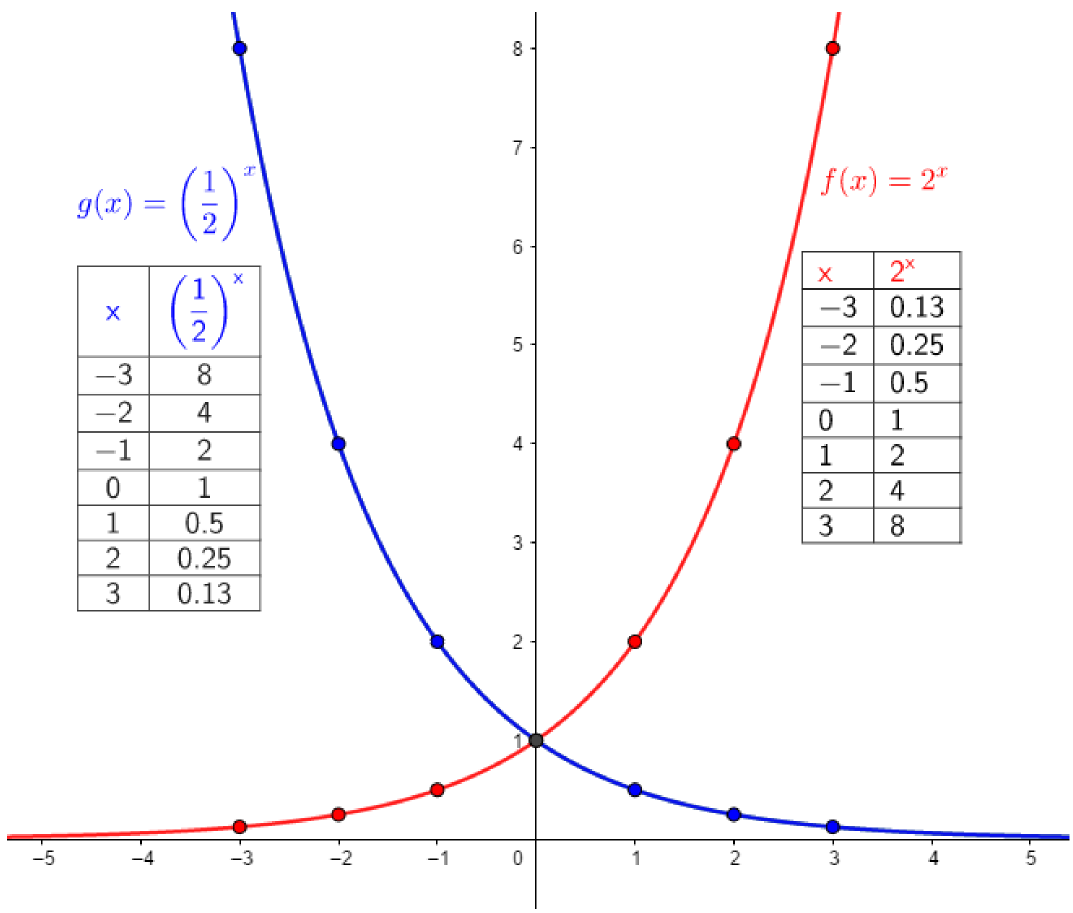
d) $f: \langle -1,1\rangle \longrightarrow \mathcal{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1-|x|}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 1, & x \in [-4, -2\rangle \\ \sqrt{x+2}, & x \in [-2,2] \\ 1 - \frac{x}{2}, & x \in \langle 2, 6] \end{cases}$

3.5 Funciones Trascendentes

3.5.1 Funciones Exponenciales

Trazar las gráficas de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, en el mismo plano y analiza su dominio y rango.



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

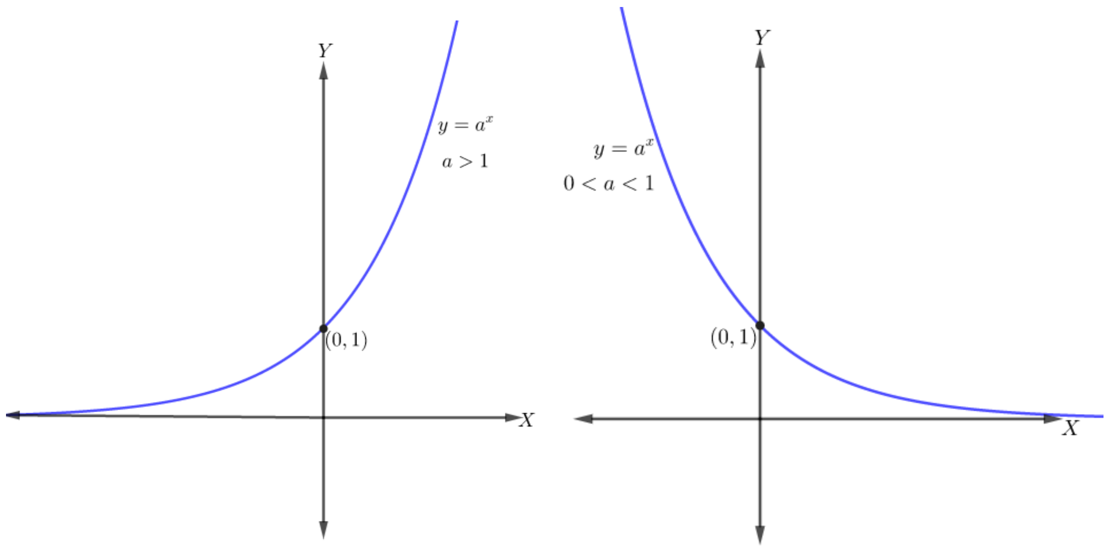
$Dom(f) = \mathcal{R}$ y $Ran(f) = \langle 0, +\infty \rangle$

$Dom(g) = \mathcal{R}$ y $Ran(g) = \langle 0, +\infty \rangle$

Definición de Funciones Exponenciales

Una función exponencial de base a, está definida por $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$; donde $Dom(f) = \mathcal{R}$ y $Ran(f) = \langle 0, +\infty \rangle$

Para la gráfica de $f(x)$ tiene dos formas.



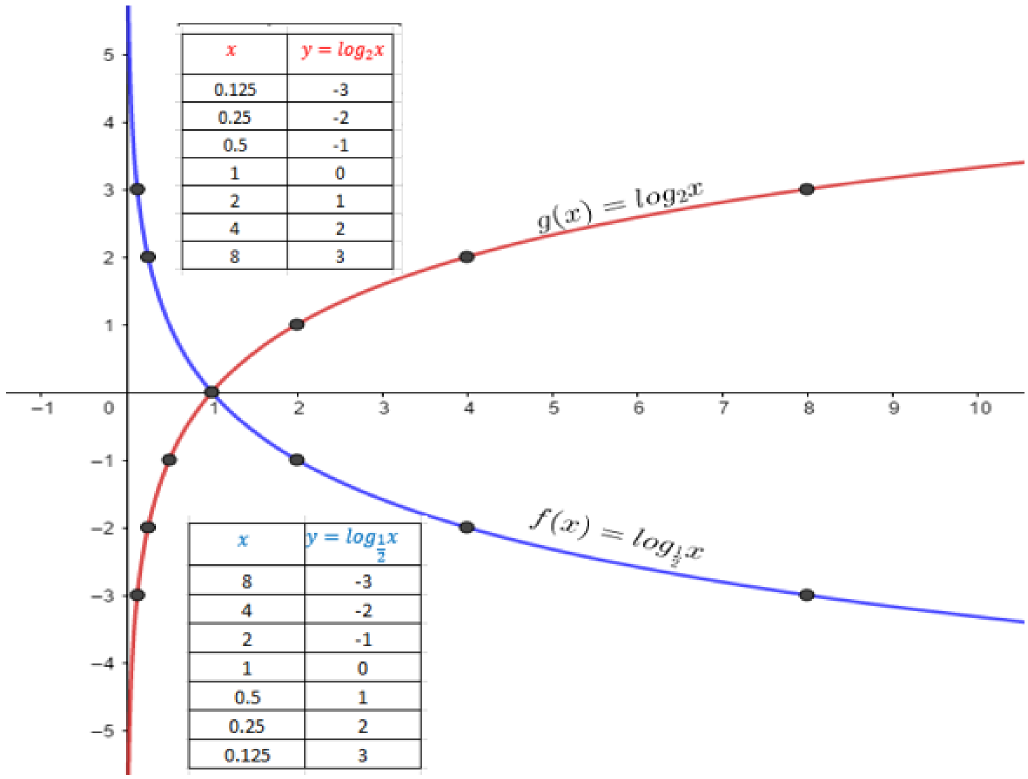
Propiedades

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$
5. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
6. $a^x = a^z \Longrightarrow x = z$, ya que la función exponencial es inyectiva

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

3.5.2 Funciones Logarítmicas

Trazar las gráficas de las funciones $f(x) = log_2 x$ y $g(x) = log_{\frac{1}{2}} x$ y analizar su dominio y rango.



x	$y = log_2 x$
0.125	-3
0.25	-2
0.5	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

x	$y = log_{\frac{1}{2}} x$
8	-3
4	-2
2	-1
1	0
0.5	1
0.25	2
0.125	3

$Dom(f) = \langle 0, +\infty \rangle$ y $Ran(f) = \mathcal{R}$

$Dom(g) = \langle 0, +\infty \rangle$ y $Ran(g) = \mathcal{R}$

Definición de Funciones Logarítmicas

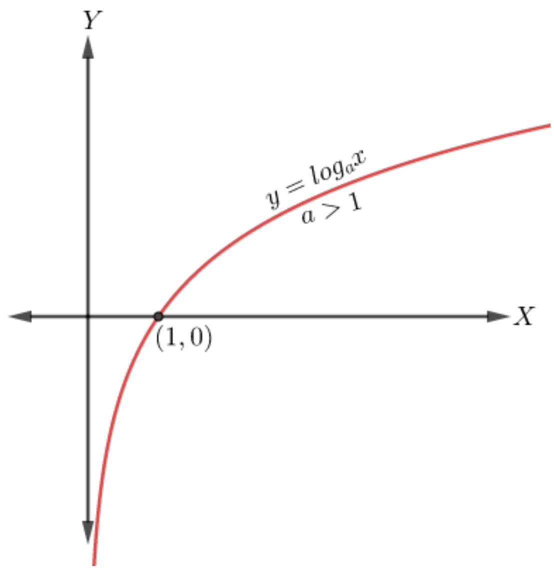
Para $a > 0$ y $a \neq 1$, la función logaritmo de base a se define como

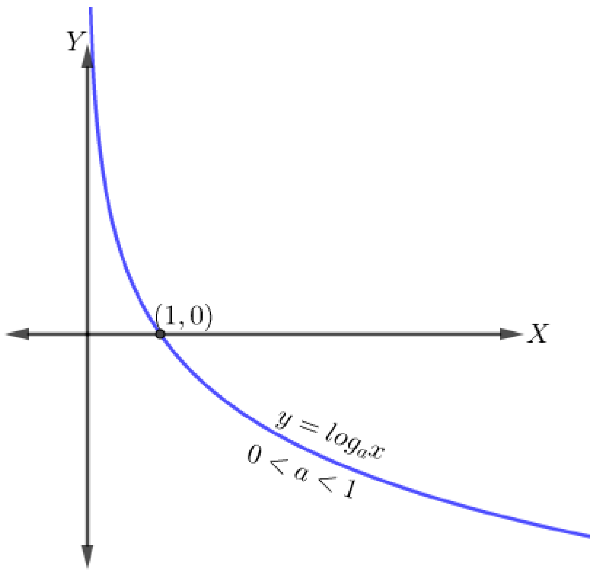
$f(x) = log_a x$; donde $Dom(f) = \langle 0, +\infty \rangle$ y $Ran(f) = \mathcal{R}$, y se cumple que:

$$y = log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

Para la gráfica de $f(x)$ tiene dos formas.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k





Propiedades

1. $log_a(xy) = log_a x + log_a y$
2. $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$
3. $log_a x^n = nlog_a x$
4. $log_a a = 1$
5. $log_a(a^x) = x$
6. $log_{a^b}(x) = \frac{1}{b} log_a x$
7. $log_b a = \frac{log_c a}{log_c b}$
8. $a^{log_a x} = x$
9. $ln(e^x) = x$
10. $e^{lnx} = x, \quad x > 0$
11. $lne = 1, \ \ln(1) = 0$
12. $log_a x = log_a z \Rightarrow x = z,$ ya que la función logaritmo es inyectiva

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

3.5.3 Funciones Trigonométricas

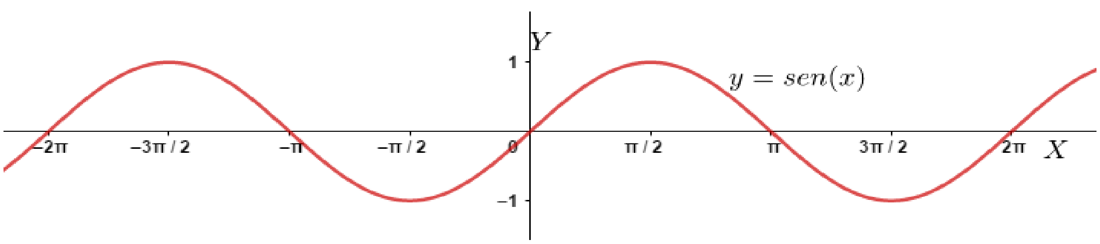
Identidades Trigonométricas

1. $cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1$
2. $1 + tan^2(\theta) = sec^2(\theta)$
3. $1 + cot^2(\theta) = csc^2(\theta)$
4. $sen(\alpha \pm \beta) = sen(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot sen(\beta)$
5. $cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp sen(\alpha) \cdot sen(\beta)$
6. $cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$
7. $sen^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$
8. $sen(2\theta) = 2sen(\theta) \cdot \cos(\theta)$
9. $\cos(2\theta) = cos^2(\theta) - sen^2(\theta)$

Función Seno

$f(x) = sen(x)$

$Dom(f) = \mathcal{R}, \qquad Ran(f) = [-1,1]$



Observación: La función $f(x) = sen(x)$ es impar, es decir;

$f(-x) = sen(-x) = -sen(x) = -f(x)$

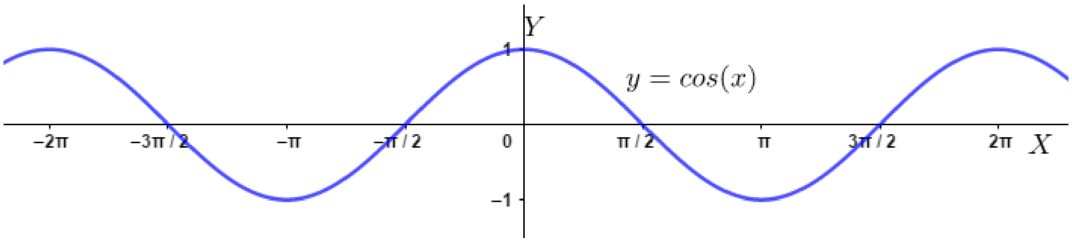
Ejemplo: $sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Función Coseno

$f(x) = cos(x)$

$Dom(f) = \mathcal{R}, \;\; Ran(f) = [-1,1]$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k



Observación: La función $f(x) = cos(x)$ es par, es decir;

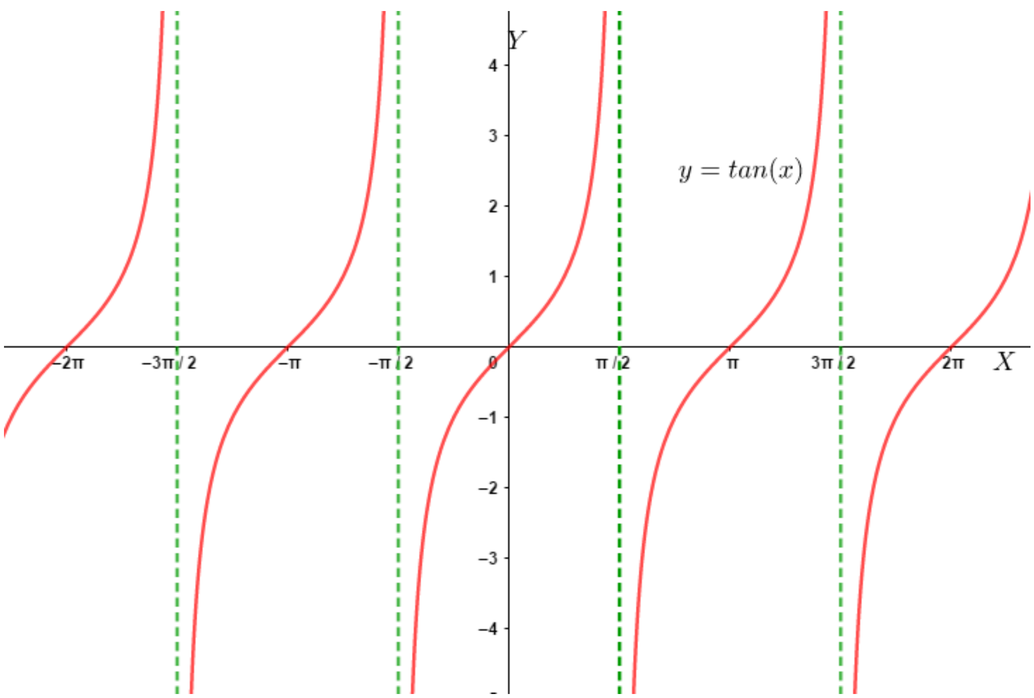
$f(-x) = cos(-x) = cos(x) = f(x)$

Ejemplo: $cos(-\pi) = cos(\pi)$

Función Tangente

$f(x) = tan(x)$

$Dom(f) = \mathcal{R} - \left\{n\pi + \dfrac{\pi}{2}, n \in Z\right\}, \; Ran(f) = \mathcal{R}$

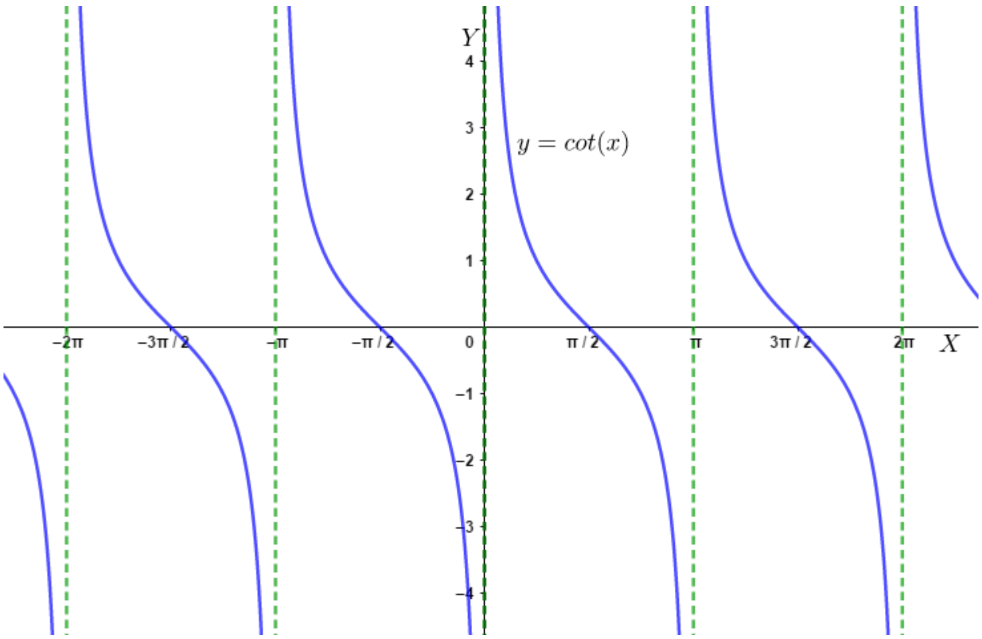


Función Cotangente

$f(x) = cot(x)$

$Dom(f) = \mathcal{R} - \{n\pi, n \in Z\}, \; Ran(f) = \mathcal{R}$

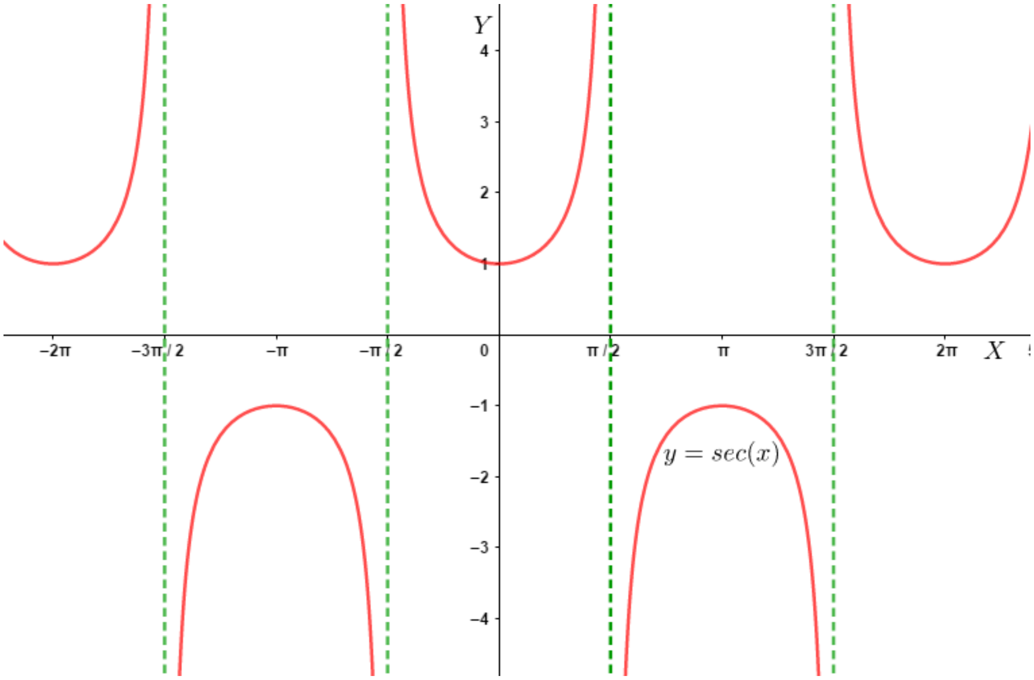
Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k



Función Secante

$f(x) = sec(x)$

$Dom(f) = \mathcal{R} - \left\{n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in Z\right\}$, $Ran(f) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle$

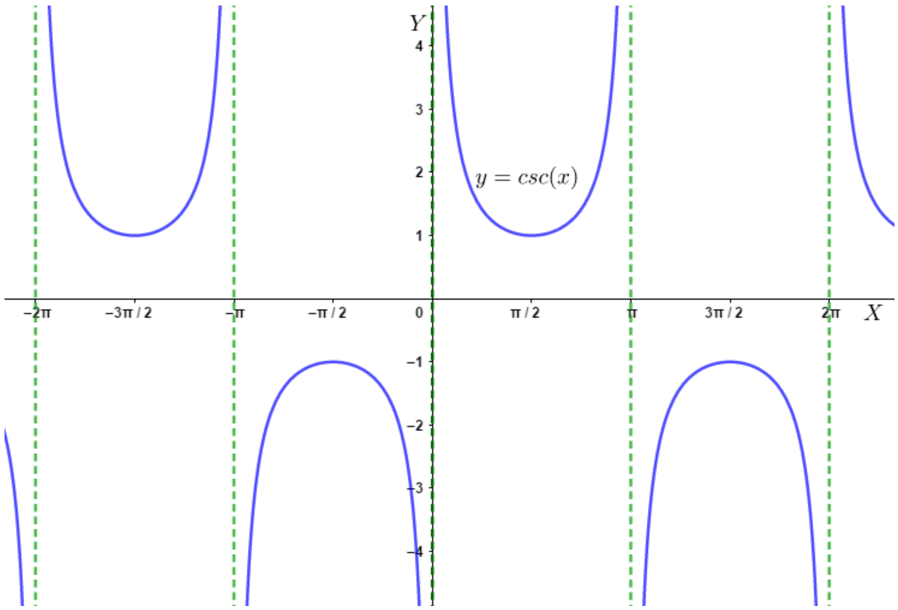


Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Función Cosecante

$$f(x) = csc(x)$$

$$Dom(f) = \mathcal{R} - \{n\pi,\ n \in Z\},\ \ Ran(f) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle$$



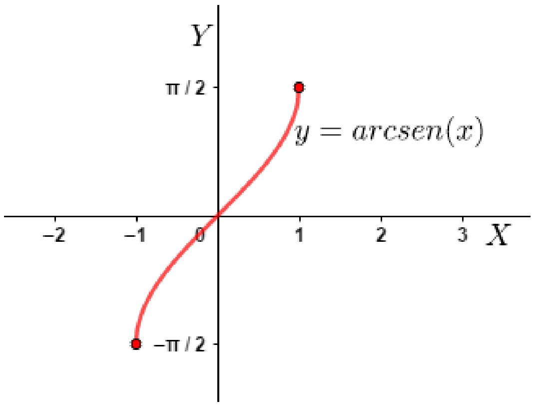
3.5.4 Funciones Trigonométricas Inversas

Las funciones trigonométricas son periódicas, por ende, no son inyectivas; pero restringiendo el dominio adecuadamente, se consigue que sean inyectivas en ese dominio restringido. Luego admitirá la inversa en ese dominio restringido.

Función Seno Inverso (arco seno)

$$y = arcsen(x) \Leftrightarrow x = sen(y)$$

$$Dom(f) = [-1,1], \qquad Ran(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

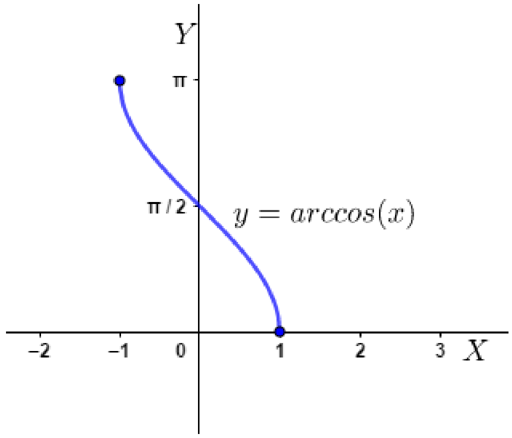


Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Función Coseno Inverso (arco coseno)

$$y = arccos(x) \Leftrightarrow x = cos(y)$$

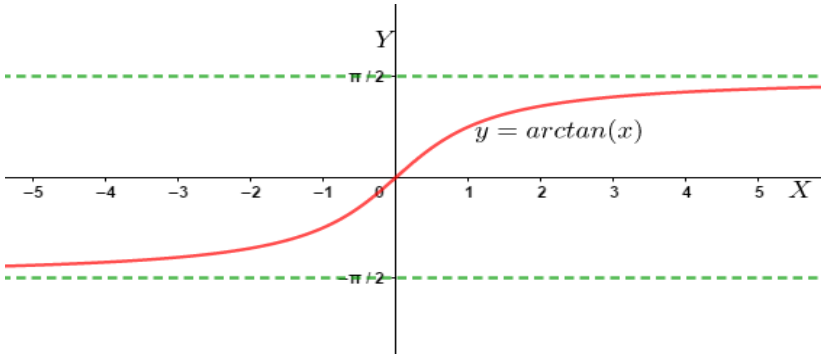
$$Dom(f) = [-1,1], \qquad Ran(f) = [0, \pi]$$



Función Tangente Inversa (arco tangente)

$$y = arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)$$

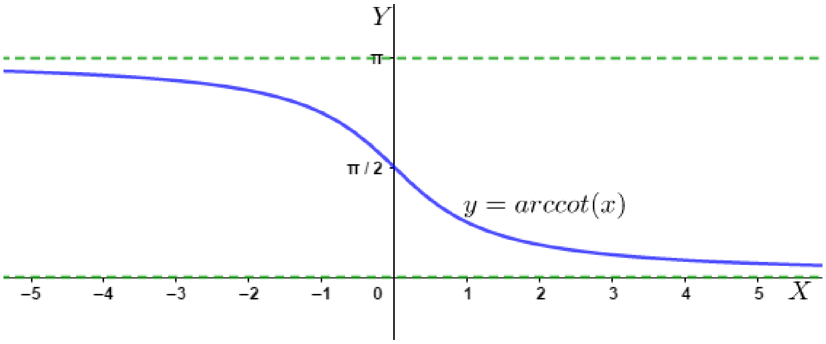
$$Dom(f) = \mathcal{R}, \;\; Ran(f) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$$



Función Cotangente Inversa (arco cotangente)

$$y = arccot(x) \Leftrightarrow x = cot(y)$$

$$Dom(f) = \mathcal{R}, \;\; Ran(f) = \langle 0, \pi \rangle$$

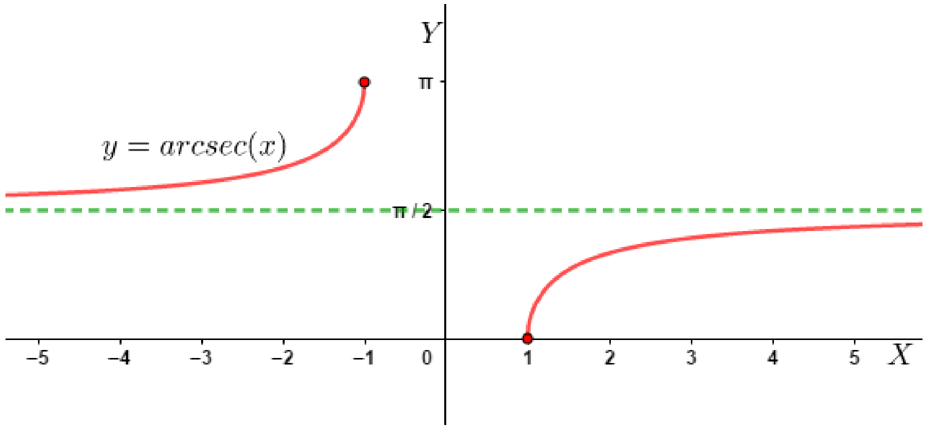


Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Función Secante Inversa (arco secante)

$y = arcsec(x) \Leftrightarrow x = sec(y)$

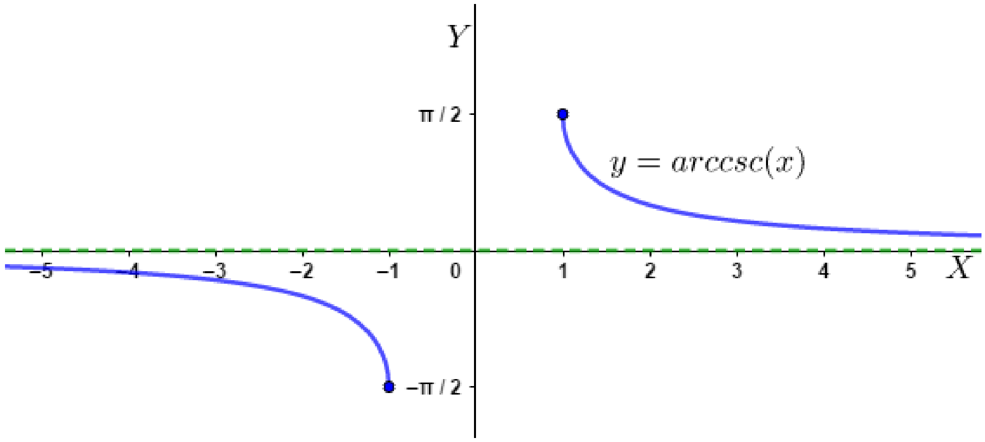
$Dom(f) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle,\ \ Ran(f) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right]$



Función Cosecante Inversa (arco cosecante)

$y = arccsc(x) \Leftrightarrow x = csc(y)$

$Dom(f) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle,\ \ Ran(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right\rangle \cup \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right]$



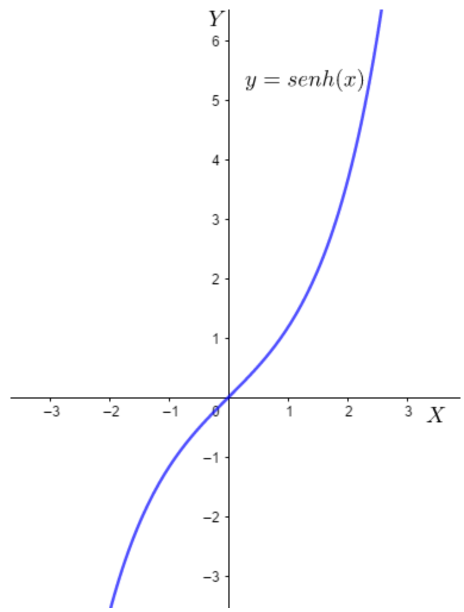
Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

3.5.5 Funciones Hiperbólicas

Función Seno Hiperbólico

$$f(x) = senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

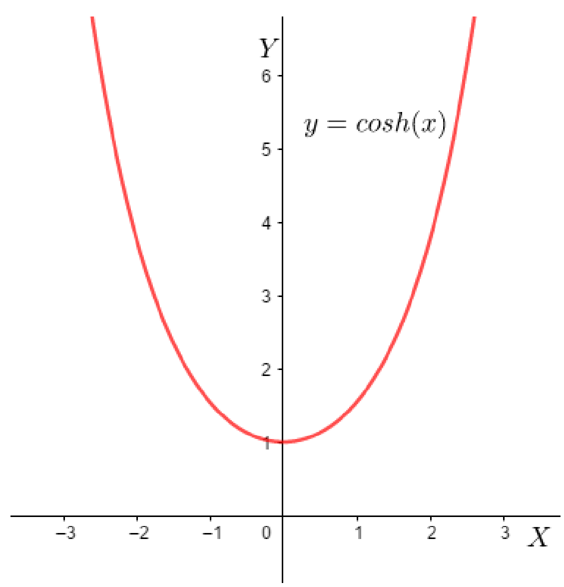
$$Dom(f) = \mathcal{R}, \ \ Ran(f) = \mathcal{R}$$



Función Coseno Hiperbólico

$$f(x) = cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$Dom(f) = \mathcal{R}, \ \ Ran(f) = [1, +\infty\rangle$$

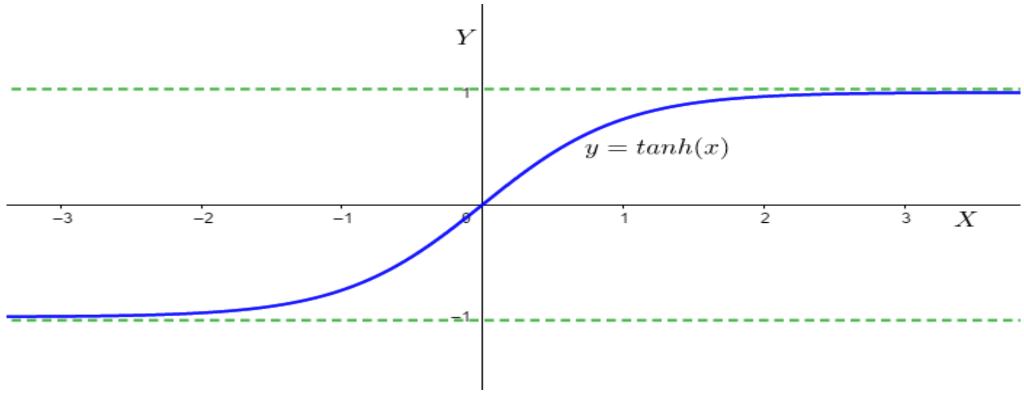


Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Función Tangente Hiperbólica

$$f(x) = tanh(x) = \frac{senh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

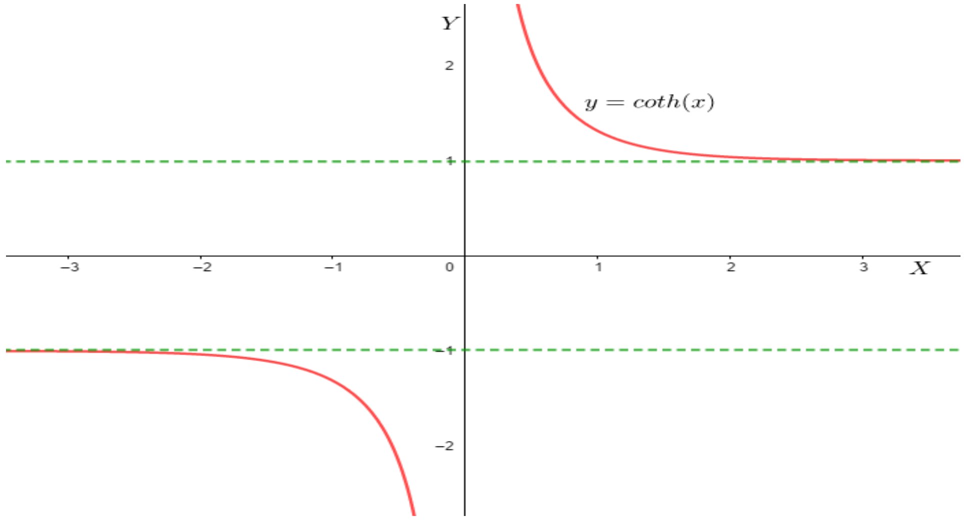
$$Dom(f) = \mathcal{R}, \;\; Ran(f) = \langle -1,1 \rangle$$



Función Cotangente Hiperbólica

$$f(x) = coth(x) = \frac{cosh(x)}{\text{senh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$Dom(f) = \mathcal{R} - \{0\}, \quad Ran(f) = \mathcal{R} - [-1,1]$$

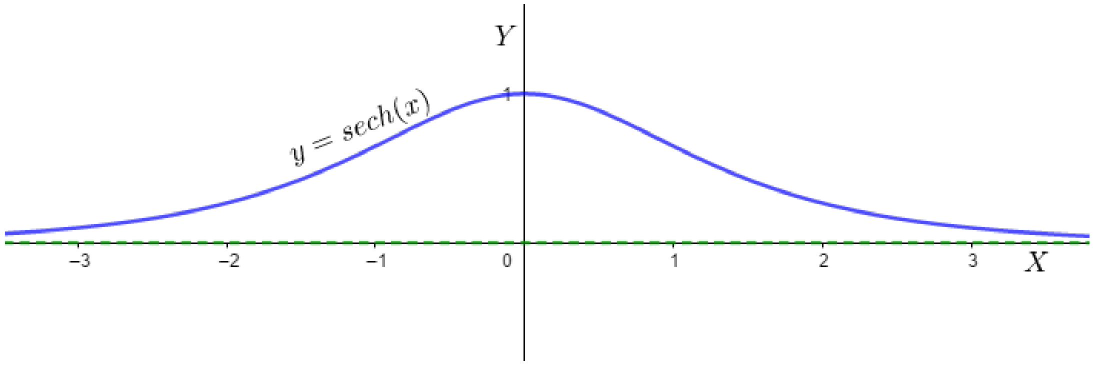


Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Función Secante Hiperbólica

$$f(x) = sech(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

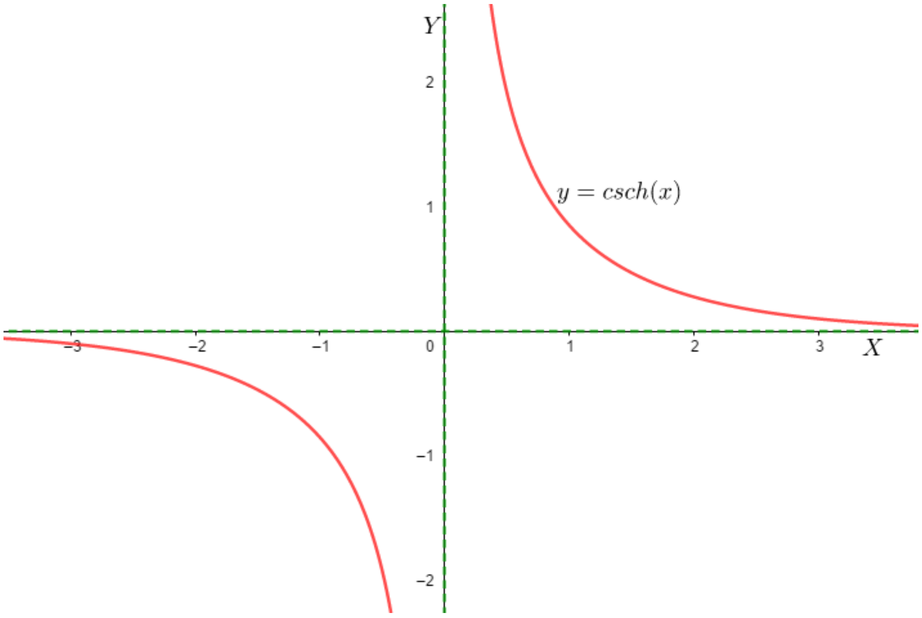
$$Dom(f) = \mathcal{R}, \quad Ran(f) = \langle 0, 1]$$



Función Cosecante Hiperbólica

$$f(x) = csch(x) = \frac{1}{\text{senh}(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$Dom(f) = \mathcal{R} - \{0\}, \quad Ran(f) = \mathcal{R} - \{0\}$$



Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Identidades Hiperbólicas

1. $cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$
2. $sech^2(x) + tanh^2(x) = 1$
3. $coth^2(x) - csch^2(x) = 1$
4. $senh(x \pm y) = senh(x) \cdot \cosh(y) \pm \cosh(x) \cdot senh(y)$
5. $cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) \pm senh(x) \cdot senh(y)$
6. $tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x) \cdot \tanh(y)}$
7. $senh(2x) = 2senh(x) \cdot \cosh(y)$
8. $cos\,h(2x) = cosh^2(x) + senh^2(x)$
9. $sen\,h(-x) = -senh(x)$
10. $cos\,h(-x) = cosh(x)$
11. $senh(x) \pm senh(y) = 2senh\left(\frac{x \pm y}{2}\right) cosh\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$
12. $cosh(x) + cosh(y) = 2cosh\left(\frac{x+y}{2}\right) cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$
13. $2senh^2(x) = \cosh(2x) - 1$
14. $2cosh^2(x) = \cosh(2x) + 1$
15. $\left(senh(x) + cosh(x)\right)^n = senh(nx) + cosh(nx)$

Ejemplos

1. Determinar el dominio de definición de las funciones dadas:

   a) $f(x) = log\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$

Resolución

$$y = log\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$$

Para que este definida y, se debe cumplir

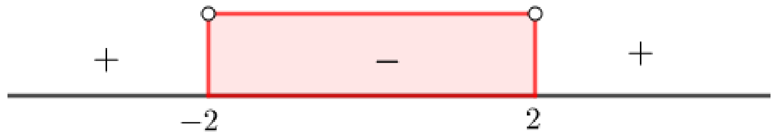
$$\frac{2-x}{2+x} > 0$$

$$\frac{x-2}{x+2} < 0$$

Aplicando el método de los puntos críticos tenemos

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k



Luego tenemos que el dominio de definición es $D_f = \langle -2{,}2\rangle$

b) $f(x) = \sqrt{log_{1/2}\left(\frac{3-x}{1-x}\right)}$

Resolución

$$y = \sqrt{log_{1/2}\left(\frac{3-x}{1-x}\right)}$$

Para que y este definida, se debe cumplir

$$log_{1/2}\left(\frac{3-x}{1-x}\right) \geq 0 \text{ y } \frac{3-x}{1-x} > 0$$

Como la base del logaritmo esta entre $\langle 0{,}1\rangle$ ya que es $1/2$, el logaritmo decrece, entonces $0 < \frac{3-x}{1-x} \leq 1$

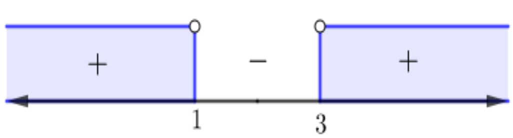
$$0 < \frac{3-x}{1-x} \ \wedge\ \frac{3-x}{1-x} \leq 1$$

$$0 < \frac{x-3}{x-1} \ \wedge\ \frac{x-3}{x-1} - 1 \leq 0$$

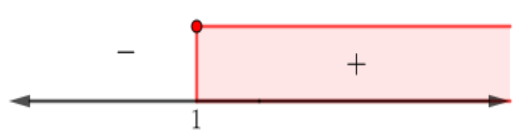
$$0 < \frac{x-3}{x-1} \ \wedge\ \frac{x-3-x+1}{x-1} \leq 0$$

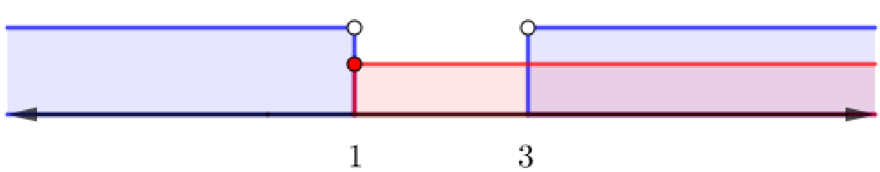
$$0 < \frac{x-3}{x-1} \ \wedge\ \frac{-2}{x-1} \leq 0$$

$$0 < \frac{x-3}{x-1} \ \wedge\ \frac{2}{x-1} \geq 0$$



$\wedge$





Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Luego tenemos que el dominio de definición es $D_f = \langle 3, +\infty \rangle$

2. Determinar el dominio de la inversa de la función $f(x) = \frac{3^x}{1+3^x}$

Resolución

$$y = \frac{3^x}{1+3^x}$$

Para determinar f^{-1}, despejaremos x

$$y(1+3^x) = 3^x$$

$$y + 3^x y = 3^x$$

$$y = 3^x - 3^x y$$

$$y = 3^x(1-y)$$

$$3^x = \frac{y}{1-y}$$

Aplicando a ambos lados el log_3, luego la propiedad $log_a(a^x) = x$

$$log_3(3^x) = log_3\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

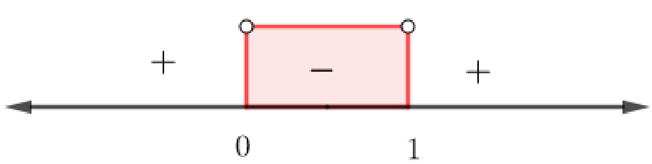
$$x = log_3\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

Luego la función inversa es $f^{-1}(x) = log_3\left(\frac{x}{1-x}\right)$

Para determinar el dominio de f^{-1}, resolveremos

$$\frac{x}{1-x} > 0$$

$$\frac{x}{x-1} < 0$$



Así tenemos que el $D_{f^{-1}} = \langle 0, 1 \rangle$

3. Hallar el dominio, rango y graficar la función

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x \text{ no es entero} \\ 3 + (-1)^x, & \text{si } x \text{ es un entero} \end{cases}$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Resolución

- El $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2}$

Donde $D_{f_1} = \{x / \ x \ \notin \mathcal{Z}\}$ y $D_{f_2} = \{x / \ x \ \in \mathcal{Z}\}$

Entonces el $D_f = \mathcal{R}$

- El $R_f = R_{f_1} \cup R_{f_2}$

Donde $R_{f_1} = \{3\}$

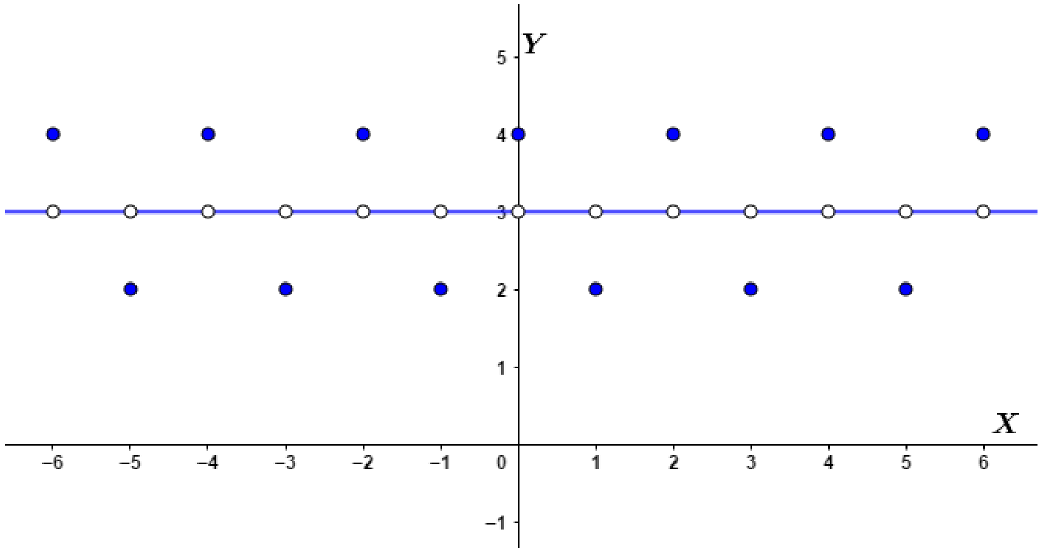
$R_{f_2} = \{2, 4\}$

Puesto que $f_2(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x \text{ es par} \\ 2, & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$

Entonces el $R_f = \{3\} \cup \{2,4\}$

$R_f = \{2, 3, 4\}$

- Para graficar consideramos $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x \notin \mathcal{Z} \\ 4, & \text{si } x \in \mathcal{Z} \ \wedge \text{ es par} \\ 2, & \text{si } x \in \mathcal{Z} \ \wedge \text{ es impar} \end{cases}$



4. Calcular la función inversa de las funciones dadas:

a) $y = log_x 5$

Resolución

La función logaritmo es inyectiva, por lo que existe la función inversa que lo encontraremos despejando la variable x.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$y = log_x 5$$

Aplicamos la función exponencial con base x, luego aplicamos la propiedad $a^{log_a x} = x$

$$x^y = x^{log_x 5}$$

$$x^y = 5$$

$$x = \sqrt[y]{5}$$

Luego tenemos la función inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[x]{5},\ x \neq 0$

b) $y = 1 + log(x+3)$

Resolución

La función logaritmo es inyectiva, por lo que existe la función inversa que lo encontraremos despejando la variable x.

$$y = 1 + log(x+3)$$

$$y - 1 = log(x+3)$$

Aplicamos la función exponencial con base 10, luego aplicamos la propiedad $a^{log_a x} = x$

$$10^{y-1} = 10^{log(x+3)}$$

$$x + 3 = 10^{y-1}$$

$$x = 10^{y-1} - 3$$

Luego tenemos la función inversa $f^{-1}(x) = 10^{x-1} - 3$

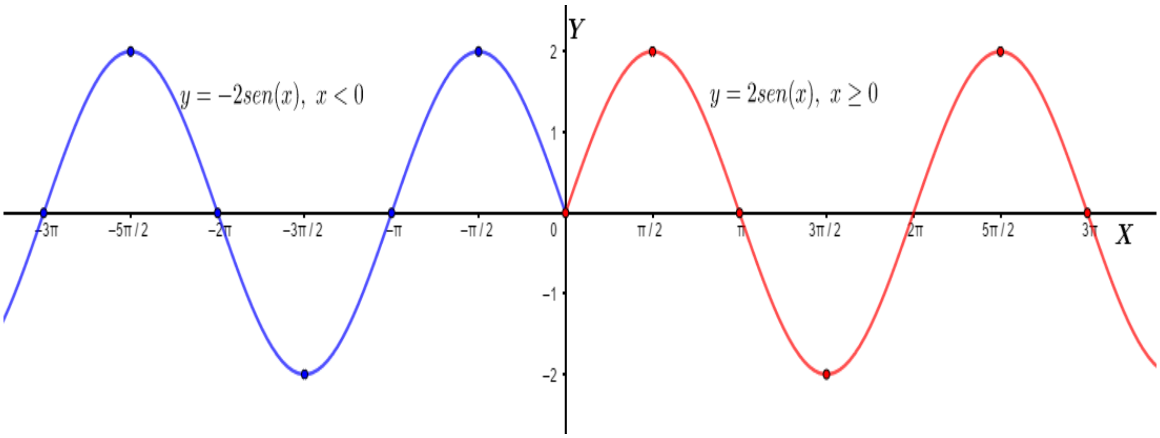
5. Graficar la función $f(x) = 2sen|x|$

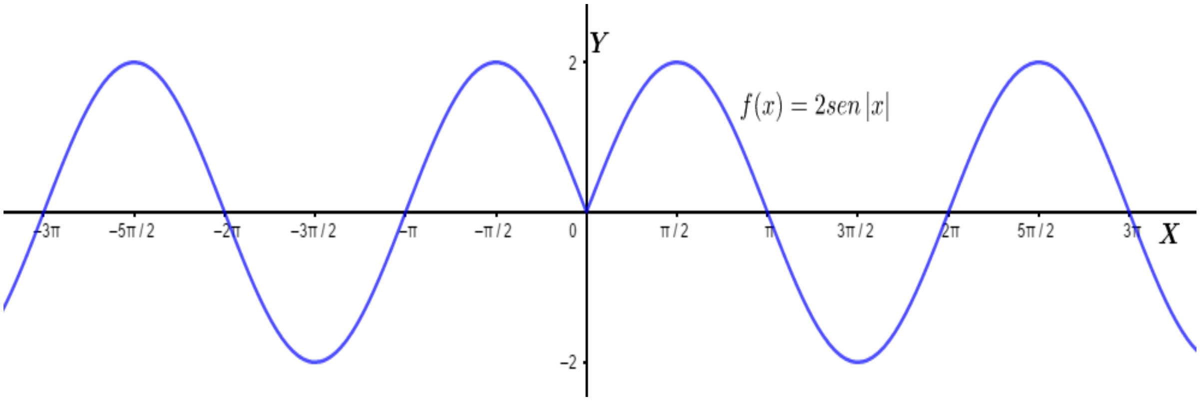
Resolución

$$f(x) = 2sen|x| = \begin{cases} 2sen(x), & x \geq 0 \\ 2sen(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2sen(x), & x \geq 0 \\ -2sen(x), & x < 0 \end{cases}$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k





6. Determinar el dominio de la inversa de la función $y=\frac{senx+2}{3-5senx}$

Resolución

Para encontrar la inversa despejaremos la variable x,

$$y=\frac{senx+2}{3-5senx}$$

$$y(3-5senx)=senx+2$$

$$3y-5ysenx=senx+2$$

$$senx+5ysenx=3y-2$$

$$senx(1+5y)=3y-2$$

$$senx=\frac{3y-2}{1+5y}$$

Aplicando el $arcsen$ y la propiedad $(f^{-1}\circ f)(x)=x,\ \forall x\in D_f$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$arcsen(senx) = arcsen\left(\frac{3y-2}{1+5y}\right)$$

$$x = arcsen\left(\frac{3y-2}{1+5y}\right)$$

Luego $f^{-1}(x) = arcsen\left(\frac{3x-2}{1+5x}\right)$, para encontrar el dominio resolvemos la desigualdad

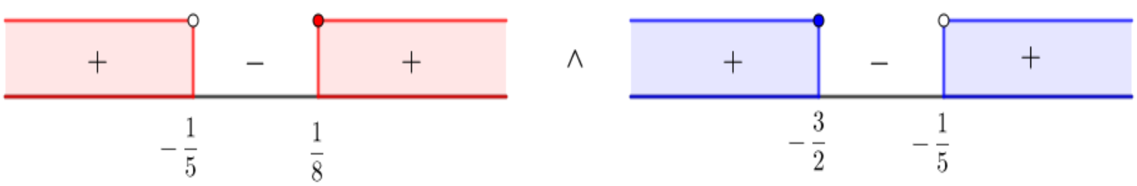
$$-1 \leq \frac{3x-2}{1+5x} \leq 1$$

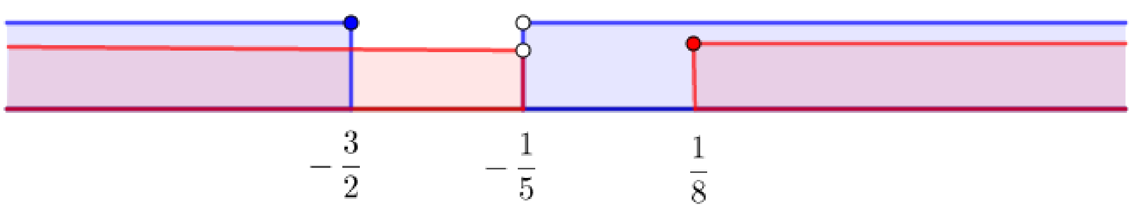
$$-1 \leq \frac{3x-2}{1+5x} \quad \wedge \quad \frac{3x-2}{1+5x} \leq 1$$

$$1 + \frac{3x-2}{1+5x} \geq 0 \quad \wedge \quad 1 - \frac{3x-2}{1+5x} \geq 0$$

$$\frac{1+5x+3x-2}{1+5x} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{1+5x-3x+2}{1+5x} \geq 0$$

$$\frac{8x-1}{5x+1} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{2x+3}{5x+1} \geq 0$$





Así tenemos que el $D_{f^{-1}} = \langle -\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{1}{8}, +\infty\rangle$

7. Si $f(x) = (1 - cos2x)secx$ y $g(x) = secx$, hallar $h(x)$ tal que

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$f(x) = h(g(x)).$$

Resolución

Simplificaremos la función $f(x)$ en términos de $secx$

$$f(x) = (1 - cos2x)secx = (1 - (cos^2x - sen^2x))secx$$

$$= (1 - cos^2x + sen^2x)secx$$

$$= (1 - cos^2x + 1 - cos^2x)secx$$

$$= 2(1 - cos^2x)secx$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{sec^2x}\right)secx$$

$$f(x) = 2\left(secx - \frac{1}{secx}\right)$$

Luego tenemos que $f(x) = h(g(x))$

$$2\left(secx - \frac{1}{secx}\right) = h(g(x))$$

$$2\left(secx - \frac{1}{secx}\right) = h(secx)$$

Sea $z = secx$ entonces tenemos

$$h(z) = 2\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

por lo que tenemos $h(x) = 2\left(x - \frac{1}{x}\right)$

8. Hallar la función inversa de $f(x) = 1 + sen\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

Resolución

Para hallar la inversa de f, despejamos la variable x

$$y = 1 + sen\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$$

$$y - 1 = sen\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$$

Aplicamos el $arcsen$ y la propiedad $(f^{-1} \circ f)(x) = x,\ \forall x \in D_f$

$$arcosen(y-1) = arcsen\left(sen\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right)$$

$$arcosen(y-1) = \frac{x-2}{x+2}$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

$$1-\frac{4}{x+2}=arcosen(y-1)$$

$$\frac{4}{x+2}=1-arcosen(y-1)$$

$$\frac{4}{1-arcosen(y-1)}=x+2$$

$$x=\frac{4}{1-arcosen(y-1)}-2$$

$$x=\frac{2+arcsen(y-1)}{1-arcosen(y-1)}$$

Luego tenemos la función inversa:

$$f^{-1}(x)=\frac{2+arcsen(x-1)}{1-arcosen(x-1)}$$

Para determinar el dominio, resolvemos

$$-1\leq x-1\leq 1 \ \wedge \ 1-arcosen(x-1)\neq 0$$

$$0\leq x\leq 2 \quad \wedge \ arcosen(x-1)\neq 1$$

$$0\leq x\leq 2 \quad \wedge \ x-1\neq sen(1)$$

$$0\leq x\leq 2 \quad \wedge \ x\neq 1+sen(1)$$

Así tenemos el $D_{f^{-1}}=[0,2]-\{1+sen(1)\}$

9. Si un móvil describe en su trayectoria un lugar geométrico dada por las ecuaciones: $x=2\sqrt{cosh(2t)}+4$, $y=\sqrt{6}senh(t)-1$. Determinar el lugar geométrico.

Resolución

$$x=2\sqrt{cosh(2t)}+4 \Longrightarrow x-4=2\sqrt{\cosh(2t)}$$

Elevando al cuadrado $(x-4)^2=4cosh(2t)$

$$\frac{(x-4)^2}{4}=cosh^2(t)+senh^2(t) \qquad (1)$$

$$y=\sqrt{6}senh(t)-1 \Longrightarrow y+1=\sqrt{6}senh(t)$$

Elevando al cuadrado $(y+1)^2=6senh^2(t)$

$$\frac{(y+1)^2}{3}=2senh^2(t) \qquad (2)$$

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Hacemos la diferencia de (1) y (2)

$$\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{3}=cosh^2(t)+senh^2(t)-2senh^2(t)$$

$$\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{3}=cosh^2(t)-senh^2(t)$$

$$\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{3}=1$$

El lugar geométrico es una hipérbola horizontal con centro $C(h,k)=(4,-1)$

Ejercicios

1. Determinar el dominio de definición de las funciones dadas:
   a) $f(x)=log\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{7-x}\right)$
   b) $f(x)=log\left(\frac{\sqrt{x^2-x-2}-2}{2-\sqrt{x+4}}\right)$
   c) $f(x)=\sqrt{\log(senx)}$
2. Hallar el dominio de definición de la función $y=\sqrt{1-log_2(x-1)}$ y determinar su correspondiente función inversa.

   Mostrar que la gráfica de la función $f(x)=log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ es simétrica respecto al origen de coordenadas y hallar su correspondiente función inversa. (La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen).
3. Determinar el rango y graficar la función $f(x)=\lfloor cosx\rfloor, x\in[0,2\pi]$
4. Dadas las funciones f y g definidas por:

   $f(x)=\begin{cases}1-2x, & x\in[-2,-1\rangle\\ \lfloor 4+cosx\rfloor, & x\in[0,\pi]\end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases}x^2-5, & x\in\langle-\infty,0\rangle\\ senx-5, & x\in[0,\pi]\end{cases}$

   Hallar y graficar la función $h=f+g$.
5. Determinar si la función f es par o impar, donde $f(x)=\left(x|x|-\frac{1}{x}\right)sen(x^6)$.
6. Hallar la función inversa de las funciones dadas:
   a) $f(x)=2sen5x$
   b) $f(x)=2arcsen\sqrt{1-x^2},\ x\in[0,1]$
   c) $f(x)=log_2(x+1)+log_2(x-1),\ x>1$
7. Si $tanh(lnx)=-\frac{1}{4}$, hallar el valor de x.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

8. Trazar la gráfica de las funciones dadas:

a) $y = -sen(x)$

b) $y = sen\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $y = 1 - cos(x)$

d) $y = |sen(x)|$

e) $y = arccos\sqrt{1 - x^2}$

9. Dadas las funciones f y g; Determinar $f + g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = cos(x^2)$

b) $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = tan(x)$

10. Trazar la gráfica de las funciones dadas:

a) $y = 4^x$

b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c) $y = e^{-x}$

d) $y = e^{-x^2}$

11. Trazar la gráfica de las funciones dadas:

a) $y = \log(x)$

b) $y = log(x^2)$

c) $y = log_2(x + 1)$

d) $y = \ln(x + 1)$

12. El incremento vegetativo de una población viene dado por la diferencia entre nacimientos y fallecimientos, que está dada por la función $P(t) = P_0(1 + i)^t$; donde la población inicial es P_0, que tiene un índice de crecimiento i, y t el tiempo. Si en un pueblo que tiene 600 habitantes y su población crece anualmente un 3%. ¿Cuántos habitantes habrá al cabo de 9 años?

13. El interés compuesto está dado por la función $C = C_0\left(1 + \frac{i}{t}\right)^{tn}$, donde C es el capital final, C_0 es el capital inicial, n número de años,i es el interés anual (interés anual en %), t el periodo de capitalización. Si Un capital de $\$\,7\,000$, colocado a interés

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

compuesto del 2% anual, se ha convertido al cabo de unos años en $ 8 201,61. ¿Cuántos años han transcurrido?

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

SEMBLANZA

FRIDA ESMERALDA FUENTES BERNEDO

Maestro en Docencia Universitaria y Gestión Educativa –Universidad Alas Peruanas.

Licenciado en Matemáticas – Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa.

Docente – Universidad Nacional José María Arguedas.

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8731-4621

Correo electrónico Institucional: ffuentes@unajma.edu.pe

Correo electrónico Personal: fridaefb@hotmail.com

ANA MARÍA BERNEDO FUENTES

Candidato a Maestría en Economía-Universidad del Pacifico.

Economista – Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa.

Asistente Académico – Universidad Nacional José María Arguedas.

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2635-0351

Correo electrónico Institucional: AM.BernedoF@alum.up.edu.pe

Correo electrónico Personal: abernedo.fuentes@gmail.com

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CANTORAL, RICARDO Y MONTIEL, GISELA. (2014) *Precálculo, Un Enfoque Visual*. (1^{ra} Edición) PEARSON EDUCACIÓN, México.

CARPINTEYRO EDUARDO (2016) *Geometría Analítica*. (1^{ra} Edición) 2016, GRUPO EDITORIAL PATRIA, S.A. DE. México.

DEMANA, FRANKLIN D. Y Cols. (2007) *Precálculo. Gráfico, Numérico, Algebraico*. (7^{ma} Edición) PEARSON EDUCACIÓN, México.

DENNIS G. ZILL & JACQUELINE M. DEWAR. (2008) Precálculo. *Con Avances De Cálculo* (4^{ta}. Edición) Mcgraw-Hill Interamericana, México.

DOCENTES DEL DEPARTAMENTO ACADEMICO DE MATEMÁTICA Y ESTADISTICA (2005). *Calculo En Una Variable.* (2^{da} Edición) Universidad Nacional De San Agustín-Perú.

ESPINOZA EDUARDO. (2005). *Matemática Básica*. (3^{ra} Edición). Servicios Gráficos JJ. Lima-Perú

FIGUEROA RICARDO. (2006). *Geometría Analítica*. (7^{ma} Edición). EDIGRA.Lima-Perú.

FIGUEROA RICARDO. (2006). *Matemática Básica I*. (6^{ta} Edición). EDIGRA.Lima-Perú.

G. FULLER Y D. TARWATER. (1995) *Geometría Analítica*. (7^{ma} Edición) PEARSON EDUCACIÓN, México.

LÁZARO, MOISÉS. (2007) *Matemática Básica.* (1^{ra} Edición) Moshera S.R.L. Lima-Perú

JIMÉNEZ, RENÉ. (2011) Matemáticas III, Geometría Analítica. (2^{da} Edición) PEARSON EDUCACIÓN. México.

JIMÉNEZ, RENÉ. (2011) Matemáticas IV, Funciones. (2^{da} Edición) PEARSON EDUCACIÓN. México.

SOTO APOLINAR, EFRAÍN. (2011). *Diccionario Ilustrado De Conceptos Matemáticos.* (3^{ra} Edición). Monterrey, N.L., México. Recuperado De Http://Www.Aprendematematicas.Org.Mx/

STEWART, J, REDLIN, L. Y WATSON, S. (2017) *Precálculo Matemáticas Para El Cálculo.* (7^{ma} Edición) Cengage Learning Editores, S.A. De C.V. México.

VERA, CARLOS. (2003) *Matemática Básica*, (1^{ra} Edición) Moshera S.R.L. Lima-Perú.

Matemática Básica
ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Universidad De Talca (S.F. *) Problemas De Ecuaciones.* Recuperado De Http://Www.Edu.Xunta.Gal/Centros/Iescastroalobrevilagarcia/System/Files/Problemas%20de%20ecuaciones%20-%20universidad%20de%20TALCA.Pdf

GEORGE, P. (1945). *Como plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas. Serie de Matemáticas. México.

ISBN: 978-958-53965-7-9 DOI: https://doi.org/10.34893/r4514-8213-9481-k

Eidec
EDITORIAL