Open Journal of Mathematics and Physics | Volume 3, Article 237, ISSN: 2674-5747
https://doi.org/10.31219/osf.io/by4p6 | published: 15 Mai 2021 | https://ojmp.org
JH

[white paper]
Diamond Open Access
[awaiting peer review]

Sistemas dinâmicos discretos: um passeio aleatório

Colaboração Matemática Aberta[1]

9 de Fevereiro de 2023

Resumo

Este passeio aleatório em sistemas dinâmicos discretos passa por iteração de funções, condição inicial, órbita, ponto fixo, mapa logístico, efeito borboleta, exponente de Lyapunov, bifurcação, ergodicidade, conjuntos de Julia e Mandelbrot, entre outros tópicos. Vale ressaltar, especialmente, um importante resultado, que a estabilidade estatística de um sistema caótico é a fonte da aleatoriedade.

palavras-chave: sistema dinâmico, caos, fractal, mapa logístico, conjuntos de Julia e de Mandelbrot

A versão mais atualizada deste artigo está disponível em
https://osf.io/by4p6/download
https://zenodo.org/record/7626140

Introdução

1. Apresentamos alguns resultados importantes de `sistemas dinâmicos discretos`.

2. Mais detalhes podem ser encontrados em [1–7].

[1] Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste artigo.

Função, condição inicial e órbita

3. [1, 8]

4. Considere a `função` $f(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{R}$.

5. Seja x_0 a `condição inicial` (ou `semente`).

6. Considere a seguinte notação:
$$f^1 := f(x_0), \quad f^2 := f(f^1), \quad f^3 := f(f^2), \quad ...$$

7. Faremos iterações de $f(x)$, o que significa calcular f^1, f^2, f^3, ...

8. A `órbita` (ou `itinerário`) de x_0 é dada(o) por
$$x_0 \longrightarrow f^1 \longrightarrow f^2 \longrightarrow f^3 \longrightarrow \cdots$$

9. Em palavras, diz-se *a órbita de x_0 sob f*.

10. A órbita depende de f e x_0.

11. Por exemplo, a órbita de 2 sob $f(x) = x^2$ é
$$2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 16 \longrightarrow 256 \longrightarrow \cdots$$

12. A órbita (11) `diverge`, isto é, *vai para o infinito*.

13. Por outro lado, a órbita de 0 sob $f(x) = x^2$,
$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$
é um `ponto fixo` porque *não é alterado pela função*.

14. `sistema dinâmico discreto` := *função iterada nela mesma*

15. Note que, embora a variável x seja real, o `sistema dinâmico` (4) é **discreto**, pois os *índices* em (7) são *números inteiros positivos*.

16. Sistemas discretos mudam repentinamente dos estados 1 para 2, de 3 para 4, e assim sucessivamente.

17. Lembrando que estamos considerando funções determinísticas.

Função probabilística

18. Esta seção é apenas informativa para mostrar que existem definições de funções envolvendo probabilidades.

19. Seja a seguinte definição

$$f_p(x) = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p, \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - p. \end{cases}$$

20. f_p é uma `função probabilística`.

Iteração é importante?

21. *Muitos sistemas físicos podem ser modelados por equações aplicadas nelas mesmas* [2].

22. A linha de raciocínio envolvida em (21) é a seguinte:
`objetos` $\rightsquigarrow$ `alteram sua dinâmica` $\rightsquigarrow$ `por leis matemáticas` $\rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow$ `que atuam nos próprios objetos alterados`

23. Iteração é um *loop fechado* no sentido de que um *input* gera um *output* e este, por sua vez, torna-se o novo *input*.

Racionais

24. Como é usual que sistemas dinâmicos sejam simulados no computador e como o computador só consegue lidar com números racionais, é importante termos em mente que os irracionais (que constituem a maioria dos números reais) são desconsiderados nas simulações computacionais.

25. No entanto, existem demonstrações formais de sistemas dinâmicos que incluem os números irracionais.

26. Ainda não sabemos se o espaço-tempo é discreto ou contínuo; se for discreto, há bons indicativos de que o comprimento de Planck seria a menor escala [9–11].

Tipos de pontos fixos

27. Existem três tipos de pontos fixos em um sistema dinâmico discreto.

28. Um `ponto fixo` é **instável** quando *uma condição inicial suficientemente próxima* a ele é **repelida**.

29. Um `ponto fixo` é **estável** quando *uma condição inicial suficientemente próxima* a ele é **atraída**.

30. Um `ponto fixo` é **neutro** quando *uma condição inicial suficientemente próxima* a ele <u>não</u> é **repelida**, <u>nem</u> `atraída`.

Mapa logístico

31. A `equação logística` é dada por [1, 12]

$$f(x) = rx(1-x),$$

com $x \in [0,1]$.

32. r é a `taxa de crescimento` e $1-x$ é a `taxa de decrescimento`.

33. Note que em (31) há duas forças opostas.

34. O mapa logístico e suas generalizações descrevem modelos populacionais observados na natureza.

35. Note que (31) é a parábola

$$f(x) = rx - rx^2.$$

Taxa de crescimento <u>menor</u> do que 1

36. As condições iniciais do mapa logístico com $r < 1$ são atraídas para o `ponto fixo estável` $x = 0$ [1].

Taxa de crescimento <u>maior</u> do que 1

37. O mapa logístico com $r > 1$ gera uma dinâmica bem mais rica do que o caso anterior, contendo além de pontos fixos, órbitas periódicas e aperiódicas (regime caótico).

38. Por exemplo, para o mapa logístico com $r = 1,5$, temos a seguinte parábola
$$f(x) = 1,5x - 1,5x^2.$$

39. (38) tem um `ponto fixo repulsor` em $x = 0$ e um `ponto fixo estável` em $x \approx 0,33$ [1].

Taxa de crescimento <u>maior</u> do que 3

40. O mapa logístico com $r = 3,2$ é dado por
$$f(x) = 3,2x - 3,2x^2.$$

41. A órbita (40) oscila entre <u>dois</u> valores, $x \approx 0,5$ e $x \approx 0,8$; trata-se de um **atrator estável** com `período 2`.

42. Período 2 significa que a cada duas iterações, a órbita visita novamente os mesmos pontos.

Taxa de crescimento <u>igual</u> a 3,5

43. O mapa logístico com $r = 3,5$ é dado por
$$f(x) = 3,5x - 3,5x^2.$$

44. A órbita (43) oscila entre quatro valores, $x \approx 0,38$, $x \approx 0,50$, $x \approx 0,83$ e $x \approx 0,87$.

45. (44) é um **atrator estável** com `período 4`.

46. Período 4 significa que a cada quatro iterações, a órbita visita novamente os mesmos pontos.

Caos no mapa logístico

47. O caos aparece no mapa logístico, por exemplo, em $r = 4$, em que

$$f(x) = 4x - 4x^2.$$

48. As órbitas, neste caso, não são periódicas.

49. Para o regime (47), existem provas rigorosas de que as órbitas, de fato, não se repetem [13].

Definição de Caos

50. Um sistema dinâmico é caótico quando tem todas as seguintes propriedades:

    (a) A **regra** da **dinâmica** é **determinística**;

    (b) As **órbitas** são **aperiódicas** e **limitadas**;

    (c) O sistema apresenta **sensibilidade às condições iniciais**.

51. (50.c) é conhecido como `efeito borboleta`.

O efeito borboleta

52. Pequenas alterações nas condições iniciais de um sistema dinâmico no regime caótico leva a uma grande diferença no `comportamento das órbitas`.

Expoente de Lyapunov

53. Antes de definir o `expoente de Lyapunov`, vamos iniciar com algumas definições preliminares.

54. x_0, x'_0 := condições iniciais distintas

55. $D(n) = |x_n - x'_n|$:= separação de (54) após n iterações

56. A separação $D(n)$ é dada, para n pequeno, por

$$D(n) \approx D_0 2^{\lambda n},$$

sendo λ o `expoente de Lyapunov`.

57. λ mede a taxa média com que as distâncias entre duas órbitas próximas mudam.

58. Se $\lambda > 0$, então o regime do sistema dinâmico é caótico.

Ingredientes do caos

59. Um *sistema caótico* tem *duas propriedades*,

    (a) `sensibilidade às condições iniciais`,

    (b) `órbitas limitadas` (finitas).

60. Ambas as propriedades (59) vêm dos aspectos geométricos do sistema dinâmico.

61. Geometricamente, a `sensibilidade às condições iniciais` pode ser vista como um **alongamento**, já que *pontos próximos são distanciados*.

62. Como as `órbitas são limitadas`, *o distanciamento das condições iniciais não ocorre indefinidamente*; em algum momento (iteração), as órbitas são trazidas mais próximas novamente, o equivalente geométrico de **dobrar**.

63. Assim, temos o seguinte fluxograma em um sistema dinâmico caótico [14],

$$\texttt{esticar} \rightsquigarrow \texttt{dobrar} \rightsquigarrow \texttt{repetir}.$$

64. Todos os sistemas caóticos compartilham essas duas operações (*esticar* e *dobrar*).

Diagrama de bifurcação

65. A tabela a seguir ilustra o número de órbitas para alguns valores de r do mapa logístico [1].

r	órbitas
$r = 0,50$	1
$r = 2,00$	1
$r = 3,20$	2
$r = 3,50$	4
$r = 3,56$	8
$r = 3,84$	3
$r = 4,00$	∞

66. A tabela (65) sugere que existe um padrão de bifurcação de órbitas no mapa logístico dependendo da taxa de crescimento r.

67. Na bifurcação, o número de órbitas dobra.

68. Um `diagrama de bifurcação` mais detalhado para o *mapa logístico* pode ser encontrado em `https://bit.ly/3bsknRU`.

69. Se olharmos o diagrama de bifurcação do mapa logístico com $3,630 < r < 3,634$ [1], percebemos que a figura parece uma *réplica do diagrama todo*, com $2,4 < r < 4,0$, por exemplo.

Janelas periódicas

70. Existe pelo menos uma janela periódica em qualquer intervalo dos valores de r em que o mapa logístico é caótico.

71. Em outras palavras, há uma alternância entre órbitas periódicas e órbitas aperiódicas (caóticas).

Ordenamento de Sharkovsky

72. Em 1964, o matemático ucraniano Oleksandr Sharkovsky provou que os números inteiros podem ser ordenados de uma maneira bastante peculiar, envolvendo potências de 2 multiplicadas por números ímpares [15].

73. Considere o seguinte ordenamento:

$$
\begin{array}{cl}
3,\ 5,\ 7,\ 9,\ ... & \text{(números ímpares)} \\
2\times 3,\ 2\times 5,\ 2\times 7,\ 2\times 9,\ ... & \text{(2 vezes os números ímpares)} \\
4\times 3,\ 4\times 5,\ 4\times 7,\ 4\times 9,\ ... & \text{(4 vezes os números ímpares)} \\
8\times 3,\ 8\times 5,\ 8\times 7,\ 8\times 9,\ ... & \text{(8 vezes os números ímpares)} \\
\vdots & \\
...,\ 2^4,\ 2^3,\ 2^2,\ 2,\ 1,\ ... & \text{(potências decrescentes de 2).}
\end{array}
$$

74. O teorema de Sharkovsky diz que (73) é uma forma de ordenar os números inteiros.

Periodicidade e o teorema de Sharkovsky

75. As primeiras aparições de regiões periódicas no diagrama de bifurcação do mapa logístico ocorrem na ordem de Sharkovsky reversa [1].

76. Portanto, além das regiões caóticas no mapa logístico, existem regiões periódicas de todos os períodos possíveis.

77. Essa relação mostra como existe uma ordem na forma como o número de órbitas periódicas duplica.

78. Vale ressaltar que algumas características do diagrama de bifurcação valem para uma ampla classe de funções.

79. (78) é conhecido como `universalidade`.

A estabilidade estatística do caos

80. *Sistemas caóticos têm regularidades estatísticas* [1].

81. (80) pode ser visto por meio de histogramas.

82. Um histograma mostra a quantidade de estados finais (órbitas) que o sistema dinâmico visita em função de x.

83. O mapa logístico com $r = 4$ apresenta comportamento caótico, isto é, sensibilidade às condições iniciais e órbitas limitadas.

84. Veja o histograma de (31) com $r = 4$ e $x_0 = 0,3$ em [1] (p. 133).

85. A órbita passa mais tempo próximo das extremidades (0 e 1) e menos tempo na região central, um comportamento inverso de uma gaussiana (em seus extremos), por exemplo.

86. Variando-se as condições iniciais, obtém-se o mesmo histograma [1].

87. Pelo efeito borboleta, variar as condições iniciais significa produzir órbitas distintas.

88. Assim, diferentes órbitas caóticas produzem histogramas equivalentes.

89. Por mais que as <u>órbitas</u> sejam <u>distintas</u>, **na média**, *elas se comportam de modo similar.*

Ergodicidade

90. O regime caótico do mapa logístico com $r = 4$, por exemplo, é `ergódico`, isto é, sua órbita se aproxima de forma arbitrariamente próxima a qualquer ponto do intervalo x.

91. Isso significa que *órbitas distintas visitam igualmente as mesmas regiões do espaço.*

92. A evolução de um milhão de condições iniciais do sistema (90) converge para uma distribuição uniforme entre 0 e 1 (exceto nos extremos) em apenas 5 iterações [1] (p. 137).

93. Essa `distribuição invariante` é **estável**, *quase todas as condições iniciais são atraídas a ela.*

94. Em (93), a exceção são os `atratores`, pontos com probabilidade próxima de zero de se constituírem estados finais do sistema.

95. Pode-se provar analiticamente por meio da `dinâmica simbólica` que *os sistemas caóticos são as fontes da aleatoriedade* [1].

Função complexa

96. [1, 8]

97. Considere a seguinte `função` $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = z^2 + c$$

com $z, c \in \mathbb{C}$.

Conjunto de Julia para a família quadrática

98. Considere as condições iniciais $z_i \in \mathbb{C}$, sendo $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

99. O `conjunto de Julia` para a família quadrática é definido como sendo

$$J = \{z_i \mid g^n < \infty,\ n \to \infty\},$$

com a função $g(z)$ dada por (97).

100. Em palavras, J é formado por todas as condições iniciais z_0 tal que sua órbita é finita.

Conectado ou desconectado

101. O conjunto de Julia é dito `conexo (desconexo)` quando seus pontos estão `conectados (desconectados)`.

102. *Pontos desconectados não formam um único objeto contínuo.*

Conjunto de Mandelbrot

103. O `conjunto de Mandelbrot` é definido como

$$\mathcal{M} = \{z_0 \mid J(z_0) \text{ é } \texttt{conexo}\}.$$

104. Assim, $\mathcal{M}$ inclui apenas os conjuntos de Julia (99) que são **conectados**.

Exemplos

105. [1, 5, 16, 17]

106. As cores que aparecem nos exemplos tem a ver com a taxa com que as condições iniciais vão para o infinito, isso está muito bem explicado em [1].

Trabalho futuro

107. Construir o conjunto de Julia, iniciando a condição inicial $z_0 = a + bi$ com $a = b = 0$, e variando-se a e b em múltiplos do comprimento de Planck.

Considerações Finais

108. A parábola $f(x) = rx - rx^2$ (mapa logístico) possui órbitas periódicas e caóticas (aperiódicas), dependendo do valor da taxa de crescimento r.

109. A ergodicidade do regime caótico apresentado mostra que o sistema é estatisticamente estável.

110. Por isso, sistemas caóticos determinísticos geram a aleatoriedade.

111. A afirmação de que o caos gera aleatoriedade tem muita força, especialmente levando-se em consideração a teoria quântica, que é totalmente fundamentada em probabilidades [12].

Ciência Aberta

O **arquivo latex** para este artigo, juntamente com outros *arquivos suplementares*, estão disponíveis em [18,19]. Seja coautor(a) deste artigo, envie sua contribuição para `mplobo@uft.edu.br`.

Consentimento

112. O autor concorda com [20].

Licença

Referências

[1] Feldman, David P. *Chaos and fractals: an elementary introduction*. Oxford University Press, 2012.
http://books.google.com/books?vid=exnWM_ZHK0MC

[2] Mandelbrot, Benoit B. *The fractal geometry of nature*. Vol. 1. New York: WH freeman, 1982.

[3] Edgar, Gerald. *Measure, topology, and fractal geometry*. Springer Science & Business Media, 2007.
http://books.google.com/books?vid=dk2vruTv0_gC

[4] Barnsley, Michael F. *Fractals everywhere*. Academic press, 2014.
http://books.google.com/books?vid=PbMAAQAAQBAJ

[5] Lesmoir-Gordon, Nigel, ed. *The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals*. Springer Science & Business Media, 2010.
http://books.google.com/books?vid=ahOe6w3RnP4C

[6] Stewart, Ian. *Does God play dice?: The new mathematics of chaos*. Penguin UK, 1997.
http://books.google.com/books?vid=wMhsGlFH8OEC

[7] Stewart, Ian. *Do Dice Play God?: The Mathematics of Uncertainty*. Hachette UK, 2019.
http://books.google.com/books?vid=fESDDwAAQBAJ

[8] Lobo, Matheus P. "Ensaio Didático Sobre Os Conjuntos De Julia E De Mandelbrot." *OSF Preprints*, 7 May 2021.
https://doi.org/10.31219/osf.io/fkvrt

[9] Smolin, Lee. *Three roads to quantum gravity*. Basic books, 2008.
http://books.google.com/books?vid=niTvAgAAQBAJ

[10] Smolin, Lee. *Time reborn: From the crisis in physics to the future of the universe*. HMH, 2013.
http://books.google.com/books?vid=l8WTFHshUZcC

[11] Smolin, Lee. *The trouble with physics: the rise of string theory, the fall of a science, and what comes next*. HMH, 2007.
http://books.google.com/books?vid=d6MIUlxY-qwC

[12] Lobo, Matheus P. "The Logistics of Quantum Spacetime." *OSF Preprints*, 10 May 2021. https://doi.org/10.31219/osf.io/s2dnt

[13] Hirsch, Morris W., Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2012.
http://books.google.com/books?vid=INYJuKGmgd0C

[14] Strogatz, Steven H. *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, 2018.
http://books.google.com/books?vid=wUBvDwAAQBAJ

[15] Sharkovskii, A. N. "Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself." Urain. Mat. Zh. 16.1 (1964): 61-71.

[16] Wikipedia. "Julia set."
https://en.wikipedia.org/wiki/Julia_set

[17] Wikipedia. "Mandelbrot set."
https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set

[18] Lobo, Matheus P. "Open Journal of Mathematics and Physics (OJMP)." *OSF*, 21 Apr. 2020.
https://doi.org/10.17605/osf.io/6hzyp

[19] https://zenodo.org/record/7626140

[20] Lobo, Matheus P. “Simple Guidelines for Authors: Open Journal of Mathematics and Physics.” *OSF Preprints*, 15 Nov. 2019. `https://doi.org/10.31219/osf.io/fk836`

[21] CC. Creative Commons. *Attribution 4.0 International* (CC BY 4.0) `https://creativecommons.org/licenses/by/4.0`

Colaboração Matemática Aberta

Matheus Pereira Lobo[1,2] (`autor principal`, `mplobo@uft.edu.br`)
`https://orcid.org/0000-0003-4554-1372`

[1]Universidade Federal do Tocantins (Brasil)
[2]Universidade Aberta (UAb, Portugal)