

RATSIONAL VA IRRATSIONAL IFODALAR

Mamatova Sitora Nematullayevna

Toshkent shahar Olmazor tumani

243-maktabning Matematika fani o'qituvchisi

Butun ko'rsatkichli daraja. Har qanday a haqiqiy sonning α butun ko'rsatkichli darajasi yoki α -darajasi deb, a^α songa aytilishini bilamiz, bunda a -daraja asosi, α -daraja ko'rsatkichi.

Har qanday $a \neq 0$ haqiqiy sonning nolinch darajasi 1 ga teng, $a^0 = 1$

Nolning nolinch darajasi, ya'ni 0^0 ma'noga ega emas.

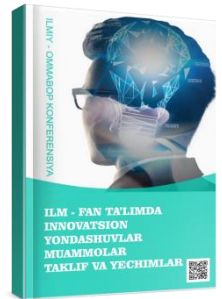
Ixtiyoriy $a \neq 0$ haqiqiy sonning butun manfiy ko'rsatkichli darajasi sonidan iborat, a^{-n} . Lekin 0^{-n} belgi ma'noga ega emas.

Butun ko'rsatkichli darajaning x o s s a l a r i (a, b - noldan farqli haqiqiy sonlar, α, β - butun sonlar):

1) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$ (1). Haqiqatan, $\alpha = n \in \mathbb{N}$ bo'lsa, haqiqiy sonlarni ko'paytirishning asosiy qonunlariga muvofiq: $(ab)^\alpha = (ab)^n = (ab)(ab) \dots (ab)$ (n ta ko'payuvchi) $= aa \dots a$ (n marta) $\cdot bb \dots b$ (n marta) $= a^n \cdot b^n = a^\alpha b^\alpha$; agar $\alpha = 0$ bo'lsa, $(ab)^\alpha = (ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0 = a^\alpha \cdot b^\alpha$;

agar $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}$, bo'lsa, $(ab)^\alpha = (ab)^{-n} =$ Xususan, (2).

2) $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ (3). Haqiqatan, agar $\alpha = n$, $\beta = m$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, bo'lsa, u holda: .



$\alpha=n, \beta=-m$ va $\alpha=-n, \beta=m$ bo'lgan hollar ham shu kabi isbotlanadi. $\alpha=-n, \beta=-m$ holining isbotini quyidagicha bajarish mumkin:

$$a^{\alpha}a^{\beta}=a^{-n}a^{-m}=a^{-(n+m)}=a^{-n-m}=a^{(-n)+(-m)}=a^{\alpha+\beta}.$$

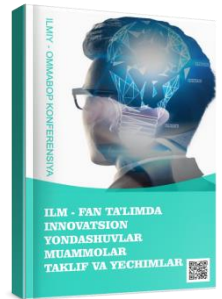
3) . (4)

4) $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$. (5). Xususan, $\alpha=n, \beta=m, n,m \in \mathbb{N}$, bo'lganda: $(a^{\alpha})^{\beta}=(a^n)^m=a^n \cdot a^n \dots a^n$ (m ta) $=aa \dots a$ (nm ta) $=a^{nm}=a^{\alpha\beta}$.

2. Ratsional ifodalarni ayniy shakl almashtirish. Biror $X(x_1, \dots, x_n)$ algebraik ifodani *aynan almashtirish* deb, uni, umuman olganda, X ga o'xshamaydigan shunday $Y(x_1, \dots, x_n)$ algebraik ifodaga almashtirish tushuniladiki, barcha x_1, \dots, x_n qiymatlarda X va Y qiymatlari teng bo'lsin. Masalan, $A(x)=B(x)=C(x)=$ lardan $A(x)$ ifoda barcha $x \neq -1, x \neq 1$ qiymatlarda, $V(x)$ ifoda $x \neq -1$ qiymatlarda, $S(x)$ esa $x \neq -1, x \neq 1, x \neq -3$ qiymatlarda aniqlangan. Ularning umumiy mavjudlik sohasi $x \neq \pm 1, x \neq -3$ qiymatlardan iborat, unda ular bir xil qiymatlar qabul qilishadi, ya'ni *aynan tengdir*. Umumiy mavjudlik sohasida bir ratsional ifodani unga aynan teng ifoda bilan almashtirishga shu ifodani *ayniy almashtirish* deyiladi. Ayniy almashtirishlardan tenglamalarni yechishda, teoremlar va ayniyatlarni isbotlash, masala va misollarni yechishda foydalaniladi. Ayniy almashtirishlar kasrlarni qisqartirish, qavslarni ochish, umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarish, o'xshash hadlarni ixchamlash va shu kabilardan iborat bo'ladi. Ayniyalmashtirishlarda arifmetik amallarning xossalariidan foydalaniladi. Quyidagi ayniyatlar o'rinli:

1) $(AB)^n=A^nB^n$; 2) $A^mA^n=A^{m+n}$; 3) $(A^m)^n=A^{mn}$; 4) $B \neq 0, D \neq 0$; 5) $B \neq 0, D \neq 0$; 6) $B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$; 7) $B \neq 0, C \neq 0$; 8) $= da$; 9) $|AB|=|A| \cdot |B|$; 10) $|A^n|=|A|^n$.

Ratsional ifodalarning kanonik shakli qisqarmas kasrdan iborat bo'ladi. Bu yerda $P(x)$ va $Q(x)$ lar ko'phadlar bo'lib, $Q(x)$ ko'phadning bosh koeffitsiyenti esa 1 ga teng.



IRRATSIONAL IFODALARNI AYNIY ALMASHTIRISHLAR

Arifmetik ildiz. Ratsional ko'rsatkichli daraja. a musbat sonning natural n - darajali *arifmetik ildizi* deb n - darajasi a ga teng bo'lgan b musbat songa aytiladi va $b = a^n$ orqali belgilanadi. Ta'rif bo'yicha: $(a^n)^m = a^{nm}$.

$a > 0$ sonning *ratsional ko'rsatkichli darajasi* deb, $b = a^r$ tenglik o'rinli bo'ladigan b musbat songa aytiladi, ya'ni $b = a^r = a^{r/q}$. Xususan $b = a^r$ bo'ladi.

Ratsional ko'rsatkichli darajaning xossalari butun ko'rsatkichli daraja xossalariiga o'xshash. a, b - ixtiyoriy musbat sonlar, r va q - ixtiyoriy ratsional sonlar bo'lsin. U holda:

1) $(ab)^r = a^r b^r$ (1'). Haqiqatan, bo'lsin. U holda:

(ras.ko'rsatkich ta'rifi)(arifmetik ildiz ta'rifi) $(ab)^m = (a^m b^m)$ munosabat) $a^m b^m = (a^m)^1 (b^m)^1$ (aritm.ild.) = (natur.ko'rs.ta'rifi) demak, (1') o'rinli.

Xususan (2')

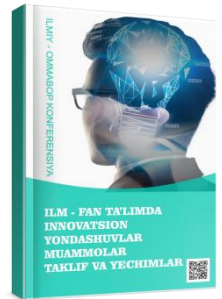
2) $a^r \cdot a^q = a^{r+q}$, bunda $r = r/k$ (3'). Haqiqatan,

3) (4') ((2') kabi isbotlanadi).

4) $(a^r)^q = a^{rq}$, bunda $r = r/k$, $q = m/n$. (5'). Haqiqatan, $((a^{p/k})^{m/n})^{nk} = (((a^{p/k})^{m/n})^n)^k = ((a^{p/k})^m)^k = (a^p)^m = a^{pm}$ Bundan (5') ning o'rinli ekani ma'lum bo'ladi.

Misol. 5 hisoblang.

Yechish. $5 \cdot 0,6^{0,5} - 0,5 \cdot 10 \cdot 0,6^{0,5} + 6 = 5 \cdot 0,6^{0,5} - 5 \cdot 0,6^{0,5} + 6 = 6$.



2. Ildiz. Yuqorida arifmetik ildizga ta'rif berilgan edi. $a > 0$ da $x = a^n$ musbat son $x^n = a$ tenglamaning yagona yechimi sifatida, $a < 0$ bo'lsa faqat n toq bo'lgandagina n -darajali ildiz $x^n = a$ tenglamaning yagona manfiy yechimi sifatida aniqlanadi.

a soni n ta teng ko'paytuvchilarga ajratilishi ham mumkin: $a = (n \text{ ta ko'paytuvchi})$.

1 - t e o r e m a. Har qanday $a \geq 0$ haqiqiy son uchun har doim $x^n = a$ tenglikni qanoatlantiruvchi yagona $x \geq 0$ haqiqiy son mavjud.

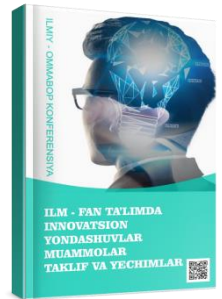
I s b o t. Nomanfiy butun sonlarning $0, 1^n, 2^n, \dots, k^n, \dots$ n -darajalari ketma-ketligini qaraylik. Unda albatta n - darajasi a dan katta butun sonlar mavjud bo'ladi. Ulardan eng kichigi $(r+1)$ soni bo'lsin: $p^n \leq a < (p+1)^n$.

Endi $[p; p+1]$ oraliqni $r; r, 1; r, 2; \dots, r, 9; r+1$ o'nli kasr qiymatli nuqtalar bilan teng o'n bo'lakka ajratamiz. Bu qiymatlar ichida a dan kattalaridan eng kichigi $r, (q_1+1)$ bo'lsin:

$(p, q_1)^n \leq a \leq (p, (q_1+1))^n$, bunda q_1 -o'ndan birlar raqami. Bu oraliq x ning qiymatini $[r; p+1]$ oraliqqa nisbatan aniq ifodalaydi. Endi bu oraliqni o'nga bo'lamiz va ikkinchi yaqinlashishni topamiz: $(p, q_1 q_2)^n \leq a \leq (p, q_1 (q_2+1))^n$, q_2 -yuzdan birlar raqami. Shu yo'l bilan m - iadamdan so'ng $(p, q_1 q_2 \dots q_m)^n \leq a \leq (p, q_1 q_2 \dots (q_m+1))^n$ yoki $a_1^n \leq a \leq a_2^n$ ga ega bo'lamiz, bunda a_1 orqali a ning quyi (kami bilan olingan) va a_2 orqali a ning yuqori (ortig'i bilan olingan) chegaraviy qiymatlari, ya'ni o'nli yaqinlashishlari belgilangan.

Ikkinchi tomondan, ko'paytirish qoidasiga muvofiq $a_1^n \leq x^n \leq a_2^n$ tengsizligini qanoatlantiruvchi yagona x haqiqiy soni mavjud. Demak, $x^n = a$. Boshqacha bo'lishi, ya'ni x dan farqli biror y uchun $y^n = a$ bo'lishi mumkin emas. Masalan, $y < x$ bo'lsa, ko'paytirishning monotonlik xossasiga muvofiq $y^n < x^n$ ya'ni $y^n < a$ bo'lardi. Shu kabi $u > x$ bo'lganda $u^n > a$ ga ega bo'lar edik. Demak, teorema to'g'ri.

2 - t e o r e m a. Agar A natural soni boshqa hech qanday natural sonning n - darajasi bo'lmasa, soni irratsional sondir.



Isbot. Shart bo'yicha A soni nomanfiy sonlarning

$$0^n, 1^n, 2^n, \dots, k^n, \dots$$

n - darajalar ketma - ketligida uchramaydi, demak, butun son emas. U kasr ham emas. Haqiqatan, $=$ bo'lsin, deb faraz qilaylik, bunda p va q lar o'zaro tub va $q \neq 1, q \neq 0$. U holda $A =$ va p^n va q^n - o'zaro tub, $q^n \neq 1$ bo'lganidan A soni qisqarmas kasr bo'ladi. Bu esa shartga zid. Demak, soni faqat irratsionaldir. Isbot qilindi.

3- te o r y m a. Agar $p/q, q \neq 1$, qisqarmas kasrning surati va maxraji aniq n - daraja bo'lmasa, ildiz irratsional sonidir.

Isbot. Teskaricha, ildiz ratsional son, deb faraz qilaylik, ya'ni U holda va bundan $r=a^n, q=b^n$ bo'lishi kelib chiqadi. Lekin shart bo'yicha p va q, n - daraja emas. Demak, - irratsional son. Isbot qilindi.

4 - t e o r e m a. Haqiqiy sonlar sohasida toq darajali ildiz faqat bir qiymatli va uning uchun ushbu tenglik o'rinli:

Isbot. Haqiqiy sonlar sohasida $x^{2n+1}=a, a \geq 0$, tenglama yagona $|x| =$ yechimga ega. Shunga ko'ra:

$$|x| =$$

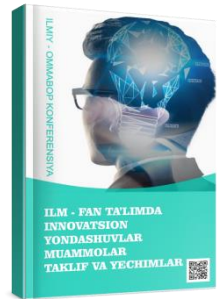
$x < 0$ bo'lgan hol uchun quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$x = -$$

yoki Teorema isbot qilindi.

Teoremadan ko'rinadiki, $\sqrt[n]{a^n} = a$ ayniyat n ning 1 dan katta toq natural qiymatlarida, ixtiyoriy $a \in \mathbb{R}$ uchun o'rinli. Agar $n=2m$ (bu yerda $m \in \mathbb{N}$) bo'lsa, bo'ladi. Demak, $a \geq 0$ bo'lsa, $=a$ tenglik, $a < 0$ bo'lganda esa $=-a$ tenglik o'rinli.

1 - m i s o l.



Agar $a \leq 0$, $b \leq 0$ bo'lsa, $ab \geq 0$ va bo'ladi.

2 - m i s o l .

. Arifmetik ildizlarni shakl almashtirish. Ko'paytmaning n - darajali ildizi ko'payuvchilar n - darajali ildizlarining ko'paytmasiga teng:

(1)

Haqiqatan,

Xususan,

Ko'paytuvchini ildiz ishorasi ostiga kiritish:

(3)

Kasrdan ildiz chiiarish:

(4)

Ildizni darajaga ko'tarish uchun ildiz ostidagi ifodani shu darajaga ko'tarish kifoya:

(5)

Haqiqatan,

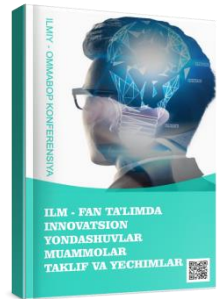
a soni m -darajasining ildizini topish uchun a dan chiqadigan ildizni m -darajaga ko'tarish kifoya, ya'ni

(6)

Ildizdan ildiz chiqarish uchun ildiz ostidagi ifoda o'zgartirilmay qoldiriladi, ildizlar ko'rsatkichlari esa ko'paytiriladi:

(7)

Haqiqatan,



Har xil ko'rsatkichli ildizlarni bir xil ko'rsatkichli ildizlarga aylantirish uchun n, m, \dots, k sonlarining umumiy karralisi (bo'linuvchisi) bo'lgan α soni topiladi. $\alpha = nu = mv = \dots = kw$ bo'lsin, bunda u, v, \dots, w – qo'shimcha ko'paytuvchilar. Natijada ildizlar quyidagi ko'rinishga keladi:

4.Irratsional ifodalarni soddalashtirish. Sonlar, harflar va algebraik amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish va ildiz chiqarish) bilan berilgan ifodaga *algebraik ifoda* deyiladi. Argumentli ifodalardan ildiz chiqarish amaliyatlashgan ifodaga shu argumentga nisbatan *irratsional ifoda* deyiladi.

Masalan

3- ifodalar irratsional ifodalardir.

Irratsional ifodalar ustida amallar arifmetik amal qonunlariga va ildizlar ustida amal qoidalariga muvofiq bajariladi.

1 - m i s o l. Darajani ildiz ostidan chiqarishda daraja ko'rsatkichi ildiz ko'rsatkichiga bo'linadi. Chiqqan bo'linma va qoldiq mos tartibda ildiz ostidan chiqqan va ildiz ostida qolgan sonlarning daraja ko'rsatkichlarini beradi, .

2 - m i s o l. $a^u b^v \dots c^w$ ifodali maxrajni m -darajali ildiz ostidan chiqarish (kasrni irratsionallikdan qutqazish) uchun ildiz ostidagi kasrning surat va maxraji $a^{m-u} b^{m-v} \dots c^{m-w}$ ga ko'paytirilishi kifoya.

$x = \dots$

3 - m i s o l. ($a \geq 0$) ildizni m -darajaga ko'taramiz: Agar $m = kn + l$ bo'lsa, bo'ladi.

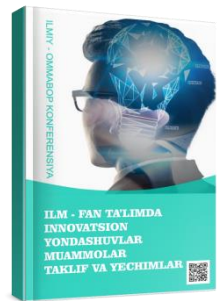
4 - m i s o l. O'xshash ildizlarni keltiramiz:

5 - m i s o l. Ildizlarni ko'paytirish va bo'lish:

; .

6 - m i s o l. Murakkab kvadrat ildizni almashtirish (1)

formulasini isbotlaymiz.



I s b o t. $x =$ belgilash kiritib, uni kvadratga ko'tarsak: $x^2 = 2A + 2$, $x = U$ holda. Shu kabi Keyingi ikki tenglikni io'shsak va ayirsak, (1) formula hosil bo'ladi.

$S =$ irratsional ifodadagi ildizlarni yo'qotish uchun $x^3 + u^3 = (x + y)(x^2 - xu + u^2)$ ayniyatdan foydalanish mumkin. Bizda $x =$, $y =$ Shunga ko'ra S ni $M =$ ifodaga ko'paytirish kerak bo'ladi.

7 - m i s o l. $x =$ ifodani soddalashtiramiz.

Ye ch i sh. Oldin kvadrat ildizlar ostidagi ifodalarning musbat ekanini, ya'ni ildizlar haqiqiy sonlar sohasida ma'noga egaligini bilishimiz kerak.

a)

$$12 \Rightarrow 720 > 400 (!) ;$$

(!)

Demak, haqiqiy sonlar sohasida almashtirishlarni bajarish mumkin.

b) Murakkab ildiz formulasidan foydalanamiz :

$$=, x =.$$

8 - m i s o l. x ning qanday qiymatlarida tenglik o'rinli bo'lishini aniqlaymiz.

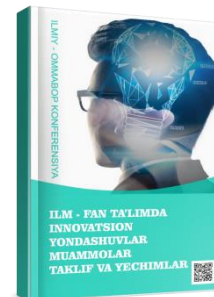
Yechish. Bo'lgani uchun, berilgan tenglik $x - 8 \geq 0$ bo'lganda, ya'ni $x \in [8; +\infty)$ larda o'rinli bo'ladi.

9 - m i s o l. x ning qanday qiymatlarida tenglik o'rinli bo'lishini aniqlaymiz.

Yechish. Tenglik $\{x - 3 \geq 0, x + 3 \geq 0, x^2 - 9 \geq 0\}$ bo'lsa, ya'ni $[3; +\infty)$ da o'rinli.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

ILM – FAN TA’LIMDA INNOVATSION YONDASHUVLAR, MUAMMOLAR, TAKLIF VA YECHIMLAR



1. Algebra va matematik analiz asoslari. 1-qism.

A.A.Abduhamidov , H. A. Nasimov , U.M. Nosirov , J. H. Husanov

2. [Www.ziyonet.uz](http://www.ziyonet.uz)