land International Scientific Journal of Education, Social Science & Humanities, 10(12). 2022. Publishing centre of Finland. C.152-157.

15. Urinov A.K., Farmonov S.R. An analog of the Frankl problem for a second-kind mixed-type equation //Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – Т. 194. – №. 5. – С. 573-583.

16. Галимянов А.Ф., Горская Т.Ю. Обобщенный метод Бубнова-Галеркина для уравнений с дробно-интегральным оператором// Известия КГАСУ, 2014,3(30). С. 398-402.

17. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416

18. Karimov S. T., Shishkina E. L. Some methods of solution to the Cauchy problem for a inhomogeneous equation of hyperbolic type with a Bessel operator //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2019. – Т. 1203. – №. 1. – С. 012096.

19. Каримов Ш. Т., Комилова З. Х. Задача Гурса для одного неклассического уравнения четвёртого порядка с оператором Бесселя //Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. – 2021. – С. 141-145.

20. Karimov S. T., Oripov S. A. On a Method for Constructing the Riemann Function for Partial Differential Equations with a Singular Bessel Operator //Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Т. 41. – №. 6. – С. 1087-1093.

21. Фармонов Ш.Р., Жалолхужаев М.А. Сравнительный анализ аналитического и численного решения задачи для уравнения теплопроводности //Актуальные исследования. – 2021. – С. 6.

22. Tojiyev T., Boynazarov A., Farmonov S. pharmacokinetics is a description of drugs and their behavior in the human body by building a mathematical model //Eurasian Journal of Medical and Natural Sciences. – 2022. – Т. 2. – №. 13. – С. 146-149.

SOLUTION OF EQUATIONS WITH P-LAPLACIAN

Rustamova M.,
Doctor of Philosophy (PhD) in Physical and Mathematical Sciences, assistant professor, head of department, Department of "Economic and Mathematical Modeling", Jointly Belarusian-Uzbek Institute of Applied and Technical Qualifications, Tashkent
Safarov R.
master, Novosibirsk State University, Novosibirsk

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С P-ЛАПЛАСИАНОМ

Рустамова М.С.
доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам, доцент, заведующий кафедры, кафедра «Экономико-математического моделирования», Совместно Белорусско-Узбекский институт прикладно -технических квалификаций, г. Ташкент
Сафаров Р.Ч.
магистр, Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
https://doi.org/10.5281/zenodo.7494988

Abstract
The solution for the equation with p-Laplasion is obtained in the work.
Аннотация
В работе получено решение для уравнения с p-лапласионом.

Keywords: Dirichlet problem, divergence, Laplace operator.
Ключевые слова: задача Дирихле, дивергенция, оператор Лапласа.

Рассмотрим шар B_R из пространство R^n, где B_R −шар радиуса R, ∂B_R − его граница.
Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$-\text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x)\,, \tag{1}$$

$$u=0 \text{ на } \partial B_R \tag{2}$$

Уравнение (1) является нелинейным выраждающимся дифференциальным уравнением . Пусть p=3.
Определение. Дивергенция вектора F=$(F_1, F_2, \dots \dots \dots F_n)$ равна следующему выражению
div F=$F_{1\,x_1} + F_{2\,x_2} + \cdots \dots \dots . F_{n\,x_n}$.
Нас интересует существование решений задачи (1), при условии (2).
Если мы изменим переменную как r=|x|, где r$\epsilon(0, R)$, то получаем следующее:

1) f(x)=2|x|=2r;
2) div(|∇u| ∇u) $= div(|\nabla u|(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots \dots u_{x_n}) = |\nabla u|(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots \dots \dots . . +u_{x_nx_n})$.

Используя замену r=|x|=$\sqrt{x^2{}_1 + x^2{}_2 + \dots\dots\dots\dots + {x_n}^2}$

$$u_{x_1} = u_r\, r_{x_1}$$
$$u_{x_2} = u_r r_{x_2} \qquad (3)$$
$$u_{x_n} = u_r\, r_{x_n}$$
$$|\nabla u| = \sqrt{{u_{x_1}}^2 + u^2{}_{x_2} + \ldots\ldots {u_{x_n}}^2}$$
$$r_{x_1} = \frac{x_1}{r}$$
$$r_{x_2} = \frac{x_2}{r} \qquad (4)$$
$$r_{x_n} = \frac{x_n}{r}$$

Используя уравнения (3) и (4) составим следующие уравнения:

$$|\nabla u| = \sqrt{u^2{}_r\, \frac{x^2{}_1 + x^2{}_2 + \ldots\ldots + {x_n}^2}{r^2}} = \sqrt{u^2{}_r\, \frac{r^2}{r^2}} = |u_r|$$
$$u_{x_1 x_1} = u_{rr} r^2{}_{x_1} + u_r r_{x_1 x_1}$$
$$u_{x_2 x_2} = u_{rr} {r_{x_2}}^2 + u_r r_{x_2 x_2} \qquad (5)$$
$$u_{x_n x_n} = u_{rr} {r_{x_n}}^2 + u_r r_{x_n x_n}$$

Из уравнений (5) находим следующие результаты :

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \cdots \ldots + u_{x_n x_n} = u_{rr}\left({r_{x_1}}^2 + r^2{}_{x_2} + \cdots \ldots + {r_{x_n}}^2\right) + u_r\left(r_{x_1 x_1} + r_{x_2 x_2} + \cdots \ldots + r_{x_n x_n}\right) =$$
$$u_{rr}\frac{x^2{}_1 + x^2{}_2 + \ldots\ldots + {x_n}^2}{r^2} + u_r\frac{r - x_1 r_{x_1} + r - x_2 r_{x_2} + \ldots\ldots + r - x_n r_{x_n}}{r^2} = u_{rr} + u_r\frac{nr - \frac{x^2{}_1 + x^2{}_2 + \ldots\ldots + {x_n}^2}{r}}{r^2} = u_{rr} + u_r\frac{nr - r}{r^2} =$$
$$u_{rr} + \frac{n-1}{r}u_r\,.$$

Согласно предыдущему результату приходим к следующему равенству;

-div$(|\nabla u|\nabla u) = -|\nabla u|(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \cdots \ldots + u_{x_n x_n}) = -|u_r|\, u_{rr} - \frac{n-1}{r}|u_r| u_r$.

Известно, что решение удовлетворяют уравнению

$$-(|u_r| u_r)_r - \frac{n-1}{r}|u_r| u_r = 2r \qquad (6)$$

и граничным условиям

$$u_r = 0, u(R) = 0\,. \qquad (7)$$

Чтобы решить это упрощенное дифференциальное уравнение, мы делаем следующую замену**:**

$$-|u_r|\, u_r = z\,, z = z(r),$$

тогда

$$z' + \frac{z}{r} = 2r$$
$$y' = c(x)y + d(x) \qquad (8)$$

Теорема. Пусть функции $c(x)$ и $d(x)$ непрерывны в интервале (a, b). Тогда через каждую точку (x_0, y_0) полосы, определенной неравенствами $a < x < b, -\infty < y < \infty$, проходит одна и только одна интегральная линия этого уравнения, определенная при всех x на интервале (a, b).

Доказательство. Разберем прежде всего более простой случай – линейное однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = c(x)y \qquad (9)$$

Это уравнение получается из предыдущего при $d(x) \equiv 0$ и является уравнением с разделяющимся переменными. Поэтому, замечая, $\int_k^y \frac{d\mu}{\mu}$ расходится при $y \to 0$, заключаем, что уравнение (9) имеет единственное решение, проходящее через точку (x_0, y_0). Легко видеть, что это решение дается формулой

$$y(x) = y_0 exp\left[\int_{x_0}^x c(\tau)d\tau\right] (\exp a \equiv e^a)\,,$$

Вернемся теперь к уравнению (8). Применим так называемый метод вариации постоянной. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$y(x) = z\ exp\left[\int_{x_0}^x c(\tau)d\tau\right] \qquad (10)$$

где z есть некоторая функция от x. Несложными вычислениями можно показать, что для того чтобы (10) было решением уравнения (8), необходимо и достаточно, чтобы функция $z(x)$ была дифференцируема и удовлетворяла уравнению

$$\frac{dz}{dx} = d(x)\ exp\left[-\int_{x_0}^x c(\tau)d\tau\right].$$

Для выполнения условия $y(x_0) = y_0$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы $z(x_0)$ также равнялось y_0. Поэтому из последнего уравнения находим

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x d(s)\ exp\left[-\int_{x_0}^x c(\tau)d\tau\right]ds.$$

Следовательно, функция

$$y = z(x)\ exp\left[\int_{x_0}^x c(\tau)d\tau\right] = y_0\ exp\left[\int_{x_0}^x c(\tau)d\tau\right] + \int_{x_0}^x d(s)\ exp\left[\int_{x_0}^x c(\tau)d\tau\right]ds$$

является единственным решением уравнения (8), которое обращается в y_0 при $x = x_0$**.**

Как известно из курса дифференциальных уравнений , решение этого уравнения выглядит следующим образом:

$$z = e^{-\int\frac{dr}{r}}\left(c_1 + \int 2re^{\int\frac{dr}{r}}\, dr\right) = \frac{1}{r}\left(c_1 + 2\int r^2\, dr\right) = \frac{1}{r}\left(c_1 + \frac{2}{3}r^3\right) = \frac{c_1}{r} + \frac{2}{3}r^2$$

а) если $u_r \geq 0$

$$-{u_r}^2 = \frac{c_1}{r} + \frac{2}{3}r^2$$

$$u_r = \pm\sqrt{-\frac{c_1}{r} - \frac{2}{3}r^2}$$

в этом случае решение будет равен

$$u=\pm\int\sqrt{-\frac{c_1}{r} - \frac{2}{3}r^2}\,dr$$

б) если $u_r < 0$

$${u_r}^2 = \frac{c_1}{r} + \frac{2}{3}r^2$$

$$u_r = \pm\sqrt{\frac{c_1}{r} + \frac{2}{3}r^2}$$

в этом случае решение будет равен

$$u=\pm\int\sqrt{\frac{c_1}{r} + \frac{2}{3}r^2}\,dr.$$

Список литературы:

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд **.** 5-е. М. «Наука»**,** 1964**.**

2. Терсенов А.С. О достаточных условиях существования радиально-симметричного решения уравнения p-Лапласа // Нелинейный анализ. 2014. В. 95. П. 362-373