УДК 372.851.2; 519.83
DOI 10.5281/zenodo.7446977

О. О. Одінцова
ORCID ID 0000-0002-9948-3801
О. В. Кіблицька
Т. І. Захарченко
Сумський державний педагогічний
університет імені А.С.Макаренка

ДО ПИТАННЯ ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ ІГОР У ГУРТКОВІЙ РОБОТІ З МАТЕМАТИКИ

Здатність до математичного моделювання та опрацювання математичних моделей реальних процесів є однією з цілей сучасної математичної освіти. Проте під час проведення уроків досить часто не вистачає часу на формування та розвиток знань та навичок такого виду навчальної діяльності.

Результати проходження ЗНО з математики у розрізі розв’язування задач практичного змісту, міжнародного оцінювання PISA в Україні для дітей 14-15 років у 2018 році є доволі поганими. Тому доцільно для збільшення відсотку тих, хто з легкістю зможе застосовувати математику у своєму повсякденному житті, майбутній професійній діяльності, розглядати компетентнісні задачі, задачі практичного змісту також і в позакласній роботі, зокрема на заняттях математичного гуртка.

Нами розроблено програму математичного гуртка для учнів від 9 до 11 класів, яка базується на вивченні елементів теорії ігор. Мета цієї програми - створення умов розвитку інтересу учнів до математики, отримання знань щодо прийняття рішень в умовах неповної інформації чи ризику та розширення загального світогляду здобувачів освіти у процесі живого розгляду різних практичних завдань. У результаті учні повинні набути навичок створювати математичні моделі реальних життєвих ситуацій, зокрема конфліктних ситуацій, аналізувати їх, знаходити рішення в них за допомогою критеріїв. Програма гуртка, розрахована на 1 годину на тиждень. Вона враховує вимоги Державного стандарту базової середньої освіти та цілей програми з математики для базової та старшої шкіл.

У статті розглянуто знаходження оптимальної стратегії в іграх з природою, коли отримаємо як відповідь одну й ту саму стратегію за різними критеріями прийняття рішень, чи різні.

Розглянутий у статті зміст гурткової роботи демонструє застосування математики до реальних процесів у різних галузях стосовно прийняття рішень в умовах ризику чи невизначеності, поглиблюючи

розуміння самих процесів, а отримані при цьому знання є сучасними та актуальними.

Ключові слова: *позакласна робота з математики, математичний гурток, математичне моделювання, теорія ігор, критерії прийняття рішень, математична задача, учні закладів загальної середньої освіти, математика.*

Постановка проблеми. Здатність до математичного опису реальних процесів через математичне моделювання, оперування моделями, їх аналіз, розв'язування задач практичного змісту є невід'ємною складовою сучасної шкільної природничо-математичної освіти. Про важливість такої здатності свідчить закон України «Про освіту», Державний стандарт базової середньої освіти, зміст програми зовнішнього незалежного оцінювання з математики, концепція Нової української школи [1], [2], [3], [4], [5].

У сучасній програмі з математики зазначено, що однією з цілей навчання є: «…формування ставлення до математики як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови її повноцінного життя в сучасному суспільстві на основі ознайомлення з ідеями і методами математики як універсальної мови науки і техніки, ефективного засобу моделювання і дослідження процесів і явищ навколишнього світу» [6], [7].

На жаль, під час проведення уроків не вистачає часу на формування і розвиток вміння створювати математичні моделі та на вміння оперування ними. Саме через це результати ЗНО з математики у розрізі розв'язування задач практичного змісту є доволі поганими. Аналогічна ситуація мала місце і при проходженні міжнародного оцінювання PISA для дітей 14-15 років у 2018 році [8], [9], [10]. Тому доцільно для збільшення відсотку тих, хто з легкістю зможе застосовувати математику у своєму повсякденному житті, майбутній професійній діяльності, розглядати компетентнісні задачі, задачі практичного змісту також і в позакласній роботі, зокрема на заняттях математичного гуртка.

Серед сучасних математичних теорій та їх розділів є такі, що можуть бути зрозумілими і застосовуваними навіть учнями основної школи. Прикладом можуть бути задачі окремих розділів теорії ігор, ідеї розв'язування яких на сьогодні активно використовується при плануванні у промисловості, оцінці ризиків у діяльності страхових компаній, при проведенні лотерей, виборчих кампаній, азартних ігор та багато іншого. Теорія ігор пропонує математичні інструменти для передбачення дій опонента, а у повсякденному житті – для будь-якого прийняття рішення в умовах невизначеності.

Аналіз актуальних досліджень. Гурткова робота є одним з видів позакласної роботи, дослідженню характерних особливостей якої присвячені роботи науковців загальної дидактики, зокрема Є. Рапацевича, М. Фіцули (2002), М. Гельфанда (1965), Л. Орел (2005), В. Павловича, З. Слєпкань (2006) та інших.

Формування компетентностей учнів на гуртках математики розглядалось у роботах Салань Н., Салань О. (2018, 2020). Розгляду того як в умовах позакласної роботи формувати здатність учнів до математичного моделювання присвячена робота Матяш О., Катеренюк Д. (2018).

Мета статті. Демонстрація одного зі шляхів модернізації змісту позакласної роботи з математики, зокрема застосування елементів теорії ігор (критеріїв прийняття рішень) у гуртковій роботі.

Виклад основного матеріалу. У сучасній дидактиці привалює думка, що математичні гуртки є доцільною формою позакласної роботи для учнів 1 - 8 класів, а для школярів старших класів кращою формою буде факультатив. Відомо, що факультатив відрізняється від гуртка тим, що другий передбачає роботу зі здобувачами освіти, які мають початкову цікавість до предмета, а перший – стійку [11, с. 140-141], самі ж заняття факультативу будуть продуктивними лише для учнів, які виявляють глибинний інтерес і мають здібності до предмета [12, с. 135-136], також під час занять факультативу найчастіше розглядаються питання, що відповідають програмі з математики певного класу. Про те для більш широкого охоплення учнів, популяризації серед них математичних знань, підтримки інтересу до науки, для формування та розвитку математичної компетентності, варто продовжувати гуртову роботу і серед школярів 9 - 11 класів.

Зазвичай на заняттях гуртка пропонуються такі завдання як: прийоми швидкого рахунку, софізми, фокуси, розв’язування логічних задач, ознайомлення із досягненнями та історією математики тощо. Цей набір роками не змінювався. Виходячи з цього можна зробити висновок, що сучасна гурткова робота вимагає змін. Зокрема варто до розгляду долучати посильні для учнів теми сучасної математики.

Нами розроблено програму математичного гуртка, яка базується на вивченні елементів теорії ігор. Мета цієї програми - створення умов розвитку інтересу учнів до математики, отримання знань щодо прийняття рішень в умовах неповної інформації чи ризику та розширення загального світогляду здобувачів освіти у процесі живого розгляду різних практичних завдань.

Дана програма складена для роботи з учнями від 9 до 11 класів. У результаті учні повинні набути навичок створювати математичні моделі реальних життєвих ситуацій, зокрема конфліктних ситуацій, аналізувати їх, знаходити рішення в них за допомогою критеріїв. Програма гуртка, розрахована на 1 годину на тиждень. Вона враховує вимоги Державного стандарту базової середньої освіти та цілей програми з математики для базової та старшої шкіл.

Орієнтовне календарне планування занять гуртка наведено у табл. 1.

Таблиця 1

Орієнтовне календарне планування занять гуртка

№ заняття	Тема	Дата

1.	Основні поняття теорії ігор	
2.-3.	Класичні задачі теорії ігор	
4.	Матричні ігри. Ігри в чистих стратегіях	
5. - 6.	Матричні ігри з природою. Матриця ризиків	
7. - 9.	Прийняття рішень в умовах ризику. Критерії прийняття рішень в умовах ризику.	
10. -12.	Прийняття рішень в умовах повної невизначеності. Критерії прийняття рішень в умовах повної невизначеності.	
13 - 18.	Розв'язування задач за допомогою критеріїв.	

Слід зауважити, що починаючи із заняття 5, слід ввести учням деякі базові поняття теорії ймовірностей, наприклад, класичне означення ймовірності випадкової величини, неможливої та достовірної події, повної групи ймовірностей, застосовуючи елементи випереджального навчання. Це пов’язано з тим, що найчастіше матричні ігри мають розв’язок у змішаних стратегіях, безпосередньо пов’язаних із поняттям ймовірності.

Важливим моментом при вивченні будь-якого розділу математики є з’ясування термінологічного апарату, яким там послуговуються.

Теорії ігор – це розділ математичної економіки, що вивчає розв’язання конфліктів між гравцями та оцінює дії (стратегії) гравців на оптимальність [13; 5]. Історія розвитку цього розділу математики бере початок від робіт Дж. Неймана та О. Моргенштерна (1944), Дж. Неша (1953). Під *конфліктом* розуміють будь-яку ситуацію, в якій порушені інтереси двох і більше учасників, яких називають *гравцями.* В конфліктній ситуації кожен гравець має певний набір дій – *стратегій*, при застосуванні яких створюється певна «ігрова ситуація», а кожен гравець отримує результат (позитивний чи негативний), який називають *виграшем* [13]. При виборі стратегії важливо враховувати не тільки отримання максимальної користі для себе, але і можливі кроки супротивника, та їх вплив на ситуацію в цілому.

Гра з природою це парна матрична гра, в якій свідомий гравець виступає проти учасника байдужого до результату гри [14]. Такого учасника називають *природою*. У подібних іграх розв'язок полягає в знаходженні оптимальної стратегії першого гравця. Стани природи реалізуються під впливом багатьох випадкових і невипадкових факторів і в рекомендаціях природа не потребує.

В іграх з природою платіжна матриця формується з виграшів свідомого гравця. Природа в даних іграх не програє, вона дозволяє або не дозволяє отримати в результаті визначеної стратегії в бізнесі, інвестуванні і тощо якийсь виграш свідомому гравцеві. Методи прийняття рішень у матричних іграх з природою залежать від того відомі чи ні ймовірності станів природи.

Серед критеріїв, що застосовуються для прийняття рішень в умовах повної невизначеності, розглядаються такі:

- критерій Байєса – це критерій, в якому визначаються максимальний показник серед показників ефективності стратегії A_i відносно виграшів як середнє значення, або математичне сподівання виграшу $i-$го рядочку з врахуванням ймовірностей всіх можливих станів природи;
- критерій Лапаласа – аналогічний критерію Байєса, але в ситуації коли гравець не має можливості визначити ймовірності станів природи, тому відбувається суб'єктивна оцінка таких ймовірностей. Гравець не можемо віддати перевагу тому чи іншому стану природи, і просто вважаємо їх всі рівноймовірними;
- критерій максимакса (крайнього оптимізму) – це критерій крайнього оптимізму, вважається, що природа буде найбільш сприятлива для людини;
- критерій Вальда – максимінний критерій. З позиції цього критерію природа розглядається як агресивно налаштована і свідомо діючим супротивником. критерій є песимістичним;

– критерій Ходжа - Лемана – комбінація критерію Байєса та критерію Вальда Показник ефективності за критерієм Ходжа - Лемана знаходиться за формулою.

$$HL_i = (1-h)a_{ij} + h\sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij}, i = \overline{1,n}, 0 \le h \le 1.$$

У правій частині формули коефіцієнт h – це кількісний показник ступеня довіри свідомого гравця даному розподілу ймовірностей $q_j, j = \overline{1,n}$, а коефіцієнт відповідно $1-h$ характеризує кількісний ступень песимізму свідомого гравця. Чим більше довіри гравця даному розподілу станів природи, тим менше песимізм і навпаки;

– критерій Севіджа – критерій мінімаксного ризику. Як і критерій Вальда, він є критерієм крайнього песимізму, оскільки і тут гравець 1 вважає, що природа реалізує найбільш несприятливі свої стани. Критерій Севіджа рекомендує вибирати як оптимальну ту чисту стратегію A_i, при якій величина максимального ризику буде найменшою;
– критерій Гурвіца – це критерій песимізму-оптимізму, це регульований компроміс між крайнім песимізмом та повним оптимізмом. Показник оптимізму λ показує те, наскільки гравець 1 може керувати ситуацією і чи може він розраховувати на гарний результат. Цей критерій дозволяє свідомому гравцю самостійно визначити рівень песимізму-оптимізму за допомогою параметра $\lambda \in [0;1]$. При $\lambda = 1$ критерій Гурвіца збігається з критерієм Вальда, а при $\lambda = 0$ отримаємо критерій крайнього оптимізму.

Застосування цих критеріїв до задач теорії ігор може дати однозначну відповідь, а може навпаки: різні критерії – різні стратегії. І тоді остаточний вибір буде за свідомим гравцем, який враховуватиме потрібний сценарій розвитку подій.

Приклад 1. На фізико-математичному факультеті є студент, який зазвичай отримує хороші оцінки. Це стається передусім через те, що у ніч перед іспитом він може повторити необхідний матеріал. Однак перед одним із іспитів студент зіткнувся з проблемою, яка полягала в тому, що його однокурсники організували вечірку на всю ніч. У нього є три стратегії: A_1 – піти на вечірку і бути там всю ніч; A_2 – відвідати половину вечірки, а іншу частину ночі готуватися до іспиту; A_3 – проігнорувати вечірку та готуватися.

Екзамен може бути або легким, або середньої складності, або важким. Залежно від того, якої складності буде екзамен і часу, який студент витратить на повторення, можна чекати такі бали:

$$A = \begin{pmatrix} 85 & 70 & 50 \\ 93 & 80 & 87 \\ 100 & 89 & 84 \end{pmatrix},$$

де перший стовпчик відповідатиме оцінкам при застосуванні стратегії A_1, другий - A_2, третій - A_3 відповідно, рядки відповідають ступеню складності екзамену по зростанню.

Слід визначитись із оптимальною стратегією для студента, якщо: ймовірності станів природи дорівнюють 0,1; 0,5; 0,4 відповідно; показник ступеня довіри свідомого гравця h = 0,6; показник оптимізму λ = 0,7.

Розв’язання. 1. Критерій Байєса. Середні виграші кожної зі стратегій:

$\overline{a_1} = 85 \cdot 0{,}1 + 70 \cdot 0{,}5 + 50 \cdot 0{,}4 = 8{,}5 + 35 + 20 = 63{,}5.$

$\overline{a_2} = 93 \cdot 0{,}1 + 80 \cdot 0{,}5 + 87 \cdot 0{,}4 = 9{,}3 + 40 + 34{,}8 = 84{,}1.$

$\overline{a_3} = 100 \cdot 0{,}1 + 89 \cdot 0{,}5 + 84 \cdot 0{,}4 = 10 + 44{,}5 + 33{,}6 = 88{,}1.$

$\overline{a_3}$ – максимальний середній виграш. Отже, стратегія A_3 оптимальна за критерієм Байєса, тобто щоб отримати найкращу оцінку слід готуватися до екзамену.

2. Критерій Лапласа. Нехай стани природи рівноймовірнісні $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$. Тоді середні виграші

$$\left.\begin{aligned}\overline{a_1} &= \frac{1}{3}\cdot(85+70+50) = \frac{1}{3}\cdot 205 = 68\frac{1}{3}\\ \overline{a_2} &= \frac{1}{3}\cdot(93+80+87) = \frac{1}{3}\cdot 260 = 86\frac{2}{3}\\ \overline{a_3} &= \frac{1}{3}\cdot(100+89+84) = \frac{1}{3}\cdot 273 = 91\end{aligned}\right| \Rightarrow \overline{a_{\iota 0}} = max_{1\le i\le m}\overline{a_\iota} = \overline{a_3}.$$

І відповідно до критерію Лапласа оптимальною буде реалізація стратегії A_3.

3. Критерій Ходжа-Лемана. Обчислимо показники ефективності для кожної зі стратегій:

$HL_1 = (1-0{,}6)\cdot 50 + 0{,}6\cdot 63{,}5 = 0{,}4\cdot 50 + 38{,}1 = 20 + 38{,}1 = 58{,}1.$

$HL_2 = (1-0{,}6)\cdot 80 + 0{,}6\cdot 84{,}1 = 0{,}4\cdot 80 + 50{,}46 = 32 + 50{,}46 = 82{,}46.$

$HL_3 = (1-0{,}6)\cdot 84 + 0{,}6\cdot 88{,}1 = 0{,}4\cdot 84 + 52{,}86 = 33{,}6 + 52{,}8 = 86{,}46.$

Звідси $HL = maxHL_i = HL_3 = 86{,}46$, тоді за критерієм Ходжа-Лемана A_3 – оптимальна стратегія.

4. Максимінний критерій Вальда. Для стратегій A_1, A_2, A_3 мінімальними W_i відповідних рядках є:

$$W_1 = min_{1\le j\le n}a_{1j} = 50, W_2 = min_{1\le j\le n}a_{2j} = 80,$$

$$W_3 = min_{1\le j\le n}a_{3j} = 84.$$

Знайдемо серед отриманих W_i максимальне

$$W = max_{1\le i\le m}min_{1\le j\le n}a_{ij} = \max\{50{,}80{,}84\} = 84.$$

Отже, за критерієм Вальда оптимальною є стратегія A_3 – проігнорувати вечірку та готуватися до іспиту.

5. Критерій максимакса. Показники ефективності стратегій A_1, A_2, A_3 відповідно рівні

$$max_{1\le j\le n}a_{1j} = 85, max_{1\le j\le n}a_{2j} = 93, max_{1\le j\le n}a_{3j} = 100.$$

Знайдемо серед отриманих показників максимальне

$$M = max_{1\le i\le m}max_{1\le j\le n}a_{ij} = \max\{85, 93, 100\} = 100.$$

Можемо зробити висновок, що за критерієм максимакса найбільш сприятливою стратегією для студента буде не піти на вечірку та готуватися до іспиту , тобто A_3.

6. Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца. Відповідно до критерію Гурвіца знайдемо показники ефективності кожної стратегії, якщо λ = 0,7:

$H_1 = \lambda \cdot \max\{85{,}70{,}50\} + (1 - \lambda) \cdot \min\{85{,}70{,}50\} = 0{,}7 \cdot 85 + 0{,}3 \cdot 50 = 59{,}5 + 15 = 74{,}5.$

$H_2 = \lambda \cdot \max\{93{,}80{,}87\} + (1 - \lambda) \cdot \min\{93{,}80{,}87\} = 0{,}7 \cdot 93 + 0{,}3 \cdot 80 = 65{,}1 + 24 = 89{,}1.$

$H_3 = \lambda \cdot \max\{100{,}89{,}84\} + (1 - \lambda) \cdot \min\{100{,}89{,}84\} = 0{,}7 \cdot 100 + 0{,}3 \cdot 84 = 70 + 25{,}2 = 95{,}2.$

Максимальним серед отриманих значень є H_3, який відповідає стратегії A_3 - проігнорувати вечірку та готуватися до іспиту, тобто є оптимальною за критерієм песимізму-оптимізму Гурвіца.

7. Критерій мінімаксного ризику Севіджа. Матриця ризиків має наступний вигляд

$$R = \begin{pmatrix} 100-85 & 89-70 & 87-50 \\ 100-93 & 89-80 & 87-87 \\ 100-100 & 89-89 & 87-84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 19 & 37 \\ 7 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до критерію Севіджа маємо

$$\left.\begin{array}{r} max_{1\le j\le n} r_{1j} = 37 \\ max_{1\le j\le n} r_{2j} = 9 \\ max_{1\le j\le n} r_{3j} = 3 \end{array}\right| \Rightarrow S = min_{1\le i\le m} max_{1\le j\le n} r_{ij} = 3.$$

Отже, за критерієм мінімаксного ризику Севіджа стратегія A_3 – проігнорувати вечірку та готуватися до екзамену є оптимальною, тобто такою, що гарантує, що величина максимального ризику буде найменшою.

Таким чином, ми отримали, що за усіма розглянутими критеріями оптимальною стратегією є тільки одна A_3 – не піти на вечірку і готуватися до екзамену.

Приклад 2. Необхідно закупити вугілля для обігріву будинку. Кількість вугілля обмежена і протягом холодного періоду має бути повністю витрачено, оскільки після зими воно стає непридатним для подальшого використання. Купувати вугілля можна в будь-який час, проте влітку воно дешевше, ніж узимку. Невизначеність полягає в тому, що невідомо, якою буде зима: суворою, тоді доведеться докуповувати вугілля або м'якою, тоді частина вугілля може залишитися невикористаною.

Дані про кількості та ціни вугілля, необхідного взимку для опалення наведені у табл. 2.

Таблиця 2

Зима	Кількість вугілля, т	Середня ціна, у.о.
М’яка	4	7
Середня	5	7,5
Холодна	6	8

Ці ціни стосуються до купівлі вугілля взимку. Влітку ціна становить 6 у.о. за 1 т. і є місце для зберігання запасу вугілля до 6 т., заготовленого влітку. Якщо потрібно взимку докупити вугілля, якого бракує, докупівля буде за зимовими цінами.

Потрібно за допомогою критеріїв визначити скільки вугілля влітку потрібно закупити на зиму з урахуванням наступних припущень:

– відомі ймовірності настання кожної зими: для м'якої зими – 0,35, для середньої зими – 0,5, холодної – 0,15;
– наявний досвід свідчить про рівну ймовірності настання відповідних станів;
– показник ступеня довіри $h = 0{,}4$;
– про можливості настання відповідних станів нічого певного сказати не можна;
– критерій опитмізму $\lambda = 0{,}7$.

Дана гра є парною матричною грою з природою. Перший гравець – людина, яка закуповує вугілля. Її можливі стратегії: $A_1 -$ купити 4 т вугілля; $A_2 -$ купити 5 т вугілля; $A_3 -$ купити 6 т вугілля. Другий гравець –

природа. Можливі стани природи такі: N_1 − зима буде м'якою; N_2 − зима буде середньою; N_3 − зима буде холодною.

Складемо платіжну матрицю (знаки мінус означає, що гравець 1 витрачає кошти):

	N_1	N_2	N_3
A_1	$-4*6=24$	$-(4*6+1*7{,}5)=-31{,}5$	$-(4*6+2*8)=-40$
A_2	$-5*6=-30$	$-5*6=-30$	$-(5*6+1*8)=-30$
A_3	$-6*6=-36$	$-6*6=-36$	$-6*6=-36$

Якщо гравець 1 застосовує стратегію A_1, то він закупить 4 т за ціною 6 у.о. - цього буде достатньо для м'якої зими, якщо ж зима буде середньою, то прийдеться докупити ще 1 т за ціною 7,5 у.о., а якщо холодною, то - докупити 2 т за ціною 8 у.о. При застосуванні стратегії A_2 буде закуплено 5 т за ціною 6 у.о. - цього достатньо і для м'якої та середньої зими, а в умовах холодної - слід докупити 1 т за ціною 8 у.о. Аналогічно обчислюються елементи третього рядка.

Якщо даної задачі застосувати критерії то отримаємо такі результати:

– стратегія A_1 буде оптимальною за критеріями Байєса, Лапласа, Гурвіца, Севіджа:
– стратегія A_2 - за критерієм Ходжа - Лемана;
– стратегія A_3 - за критеріями Вальда та максимакса.

Отже, не дивлячись на домінування стратегії A_1 - купити влітку 4т за ціною 6 у.о., вибір оптимальної стратегії залишається за гравцем 1 у залежності від його початкового налаштування: чи готовий він щоб частина вугілля пропала після зими чи - ні.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Розглянутий у статті зміст гурткової роботи демонструє застосування математики до реальних процесів у різних галузях стосовно прийняття рішень в умовах ризику чи невизначеності, поглиблюючи розуміння самих процесів, а отримані при цьому знання є сучасними та актуальними. Слід зазначити, що теоретичний та задачний матеріал може варіюватися в залежності від контингенту учасників математичного гуртка, їх рівня математичних знань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Закон України «Про освіту». Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text. (Law of Ukraine "On Education". Retrieved from: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text).
2. Державний стандарт базової середньої освіти. Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrayinska-shkola/derzhavnij-standart-bazovoyi-serednoyi-osviti. (State standard of basic secondary education. Retrieved from: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrayinska-shkola/derzhavnij-standart-bazovoyi-serednoyi-osviti).
3. Програма ЗНО з математики. Режим доступу: https://testportal.gov.ua/progmath/ (ZNO program in mathematics. Retrieved from: https://testportal.gov.ua/progmath/).
4. Нова українська школа. Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/tag/nova-ukrainska-shkola. (New Ukrainian school. Retrieved from: https://mon.gov.ua/ua/tag/nova-ukrainska-shkola).
5. Нова українська школа. Концептуальні засади реформування середньої школи. Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf. (New Ukrainian school. Conceptual principles of secondary school reform. Retrieved from: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf).
6. Програма з математики 6-9 класи: Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas. (Program in mathematics grades 6-9: Program for general educational institutions. Retrieved from: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas).
7. Програма з математики 10-11 класи: Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv. (Program in mathematics 10-11 grades: Program for general educational institutions. Retrieved from:

https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv).

8. Офіційний звіт про проведення в 2021 році зовнішнього незалежного оцінювання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. Том 1. Режим доступу: https://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2021/11/ZVIT-ZNO_2021-Tom_1_-1.pdf. (Official report on conducting in 2021 an external independent evaluation obtained on the basis of complete general secondary education. Volume 1. Retrieved from: https://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2021/11/ZVIT-ZNO_2021-Tom_1_-1.pdf).
9. Офіційний звіт про проведення в 2021 році зовнішнього незалежного оцінювання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. Том 2. Режим доступу: https://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2021/11/ZVIT_ZNO_2021-Tom_2_.pdf. (Official report on the 2021 external independent assessment of the results obtained on the basis of full general secondary education. Volume 2. Retrieved from: https://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2021/11/ZVIT_ZNO_2021-Tom_2_.pdf.
10. Десять запитань від учителів математики… і як PISA може допомогти відповісти на них. Український центр якості освіти. Київ: УЦОЯО. (Ten questions from maths teachers... and how PISA can help answer them. Ukrainian Center for the Quality of Education. Kyiv: UTSOYAO).
11. Слєпкань. З. І. (2000). Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних вузів. Київ: Зодіак-ЕКО. (Slepkan. Z. I. (2000). Methods of teaching mathematics: Textbook for students of mathematical specialties of pedagogical universities. Kyiv: Zodiac-ECO).
12. Бевз, Г. П. (1989). Методика викладання математики: Навчальний посібник. Київ: Вища школа. (Beves, H. P. (1989). Methods of teaching mathematics: Study guide. Kyiv: Vyscha Shckola).
13. Васин, А. А., Морозов, В. В. (2005). Теория игр и модели математической экономики. Москва: Издательство Московского университета. (Vasyn, A. A., Morozov, V. V. (2005). Game theory and models of mathematical economics. Moscow: Moscow University Publishing House).
14. Де Гроот, М. (1971). Оптимальные статистические решения. Москва: Мир. (De Groot, M. (1971). Optimal statistical solutions. Moscow: Mir).
15. Keeney, R, L., Raiffa, H. (1980). Decisions with multiple objectives: John Wiley & Sons: New York, Santa Barbara, London, Sydney, Toronto. (Keeney, R, L., Raiffa, H. (1980). Decisions with multiple objectives: John Wiley & Sons: New York, Santa Barbara, London, Sydney, Toronto).
16. Шапкин, А. С., Шапкин, В. А. (2005). Теория риска и моделирование рисковых ситуаций: Учебник. Москва: Дашков и К°. (Shapkin, A. S.,

Shapkin, V. A. (2005). Theory of risk and modeling of risk situations: Textbook. Moscow: Dashkov and K°).

Odintsova O. O., Kiblyts'ka O. V., Zakharchenko T. I. On the issue of using game theory elements in Math Club.

Summary. *The ability to mathematically model and develop mathematical models of real processes is one of the goals of modern mathematical education. However, during the lessons, teachers often not enough time for the formation and development of knowledge and skills of this type of educational activity.*

The results of passing the external examination in mathematics in terms of solving problems of practical content and the PISA international assessment in Ukraine for children aged 14-15 in 2018 are quite bad. Therefore, in order to increase the percentage of those who can easily apply mathematics in their everyday life and future professional activities, it is advisable to consider competence tasks, tasks of practical content also in extracurricular work, in particular, in the classes of the math club.

We developed a math club's program for students from grades 9 to 11, which is based on the study of game theory's elements. The purpose of this program is to create conditions for the development of students' interest in mathematics, the acquisition of knowledge about decision-making in conditions of incomplete information or risk, and the expansion of the general outlook of education seekers in the process of live consideration of various practical tasks. As a result, students should acquire the skills to create mathematical models of real life situations, particularly conflict situations, analyze them, and find solutions in them using criteria. The circle program is designed for 1 hour per week. It takes into account the requirements of the State Standard of Basic Secondary Education and the goals of the mathematics program for basic and high schools.

There are consider the finding the optimal strategy in games with nature, when we receive as an answer the same strategy according to different decision-making criteria, or different ones. article.

The content of the math club's activities which are considered in the article demonstrates the application of mathematics to real processes in various fields regarding decision-making in conditions of risk or uncertainty, deepening the understanding of the processes themselves, and the knowledge obtained at the same time is modern and relevant.

Key words: *extracurricular work in mathematics, mathematical circle, mathematical modeling, game theory, decision-making criteria, mathematical problem, students of general secondary education institutions, mathematics.*