SCIENCE AND INNOVATION
INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL VOLUME 1 ISSUE 8
UIF-2022: 8.2 | ISSN: 2181-3337

КВАЗИЧИЗИҚЛИ ТЕМПЕРАТУРАВИЙ ЖАРАЁНЛАРНИ САМАРАЛИ ЕЧИШ МЕТОДИ

Тоғаймуродов Х.Э
Термиз давлат университети “Амалий математика (соҳалар бўйича)” мутахассислиги магистранти

https://doi.org/10.5281/zenodo.7371465

Аннотация. *Кўпгина реал физик жараёнларини тавсифлашда чизиқли бўлмаган ҳусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ҳосил бўлади. Чизиқсиз тенгламаларнинг умумий хоссалари ва уларни ечиш методларини тадқиқ этиш ҳисоблаш технологиялари соҳасидаги долзарб йўналиши ҳисобланади. Бундай тенгламаларни ечиш ва тадқиқ этишга қаратилган қизиқарли тадқиқотлар ва кўпгина самарали методлар мавжудлигига қарамасдан, амалий математиканинг ушбу соҳаси чизиқли тенгламалар назариясидаги каби етарлича назарий асосларга эга эмас.*

Калит сўзлар: *ошкормас схема, ошкормас итерация схемаси, итерациялар сони, арифметик амаллар сони, тўр қатламлари сони, тўр қадамлари, чизиқли ва чизиқлимас айирмали схема, иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти, квазичизиқли тенглама, бошланғич ва чегаравий шартлар.*

МЕТОД ЭФФЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Аннотация. *При описании многих реальных физических процессов формируются нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными. Исследование общих свойств нелинейных уравнений и методов их решения является актуальным направлением в области вычислительных технологий. Хотя существуют интересные исследования и много эффективных методов решения и исследования таких уравнений, эта область прикладной математики не имеет достаточной теоретической базы, как в теории линейных уравнений.*

Ключевые слова: *неявная схема, неявная итерационная схема, количество итераций, количество арифметических операций, количество слоев сетки, шаги сетки, линейная и нелинейная дифференциальная схема, коэффициент теплопередачи, квазилинейное уравнение, начальные и граничные условия.*

METHOD FOR EFFICIENT SOLUTION OF QUASI-LINEAR TEMPERATURE PROCESSES

Abstract. *When describing many real physical processes, nonlinear differential equations with partial derivatives are formed. The study of the general properties of nonlinear equations and methods for their solution is an important direction in the field of computing technologies. Although there are interesting studies and many effective methods for solving and investigating such equations, this area of applied mathematics does not have a sufficient theoretical basis, as in the theory of linear equations.*

Keywords: *implicit scheme, implicit iterative scheme, number of iterations, number of arithmetic operations, number of grid layers, grid steps, linear and nonlinear differential scheme, heat transfer coefficient, quasilinear equation, initial and boundary conditions.*

I. Кириш.

Чизиқли бўлмаган ва квазичизиқли хусусий ҳосилали тенгламаларни ечишга мўлжалланган самарали ҳисоблаш методларини яратиш, ҳисоблаш технологиялари йўналишидаги долзарб масалалардан ҳисобланади. Квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасини иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти температурасининг чизиқли, квадратик ва кубик функциялари кўринишида бўлганда айирмали итерация схемаларини қўллаб ечиш муҳим аҳамиятга эга. Ҳудди шунингдек, қўлланилаётган методларнинг самарадорлигини арифметик амаллар сони бўйича асослаш, методларнинг чизиқли бўлмаган параметрга боғлиқ равишда арифметик амаллар сони бўйича тадқиқ этиш кўзда тутилади.

II. Масаланинг қўйилиши

Чизиқли бўлмаган коэффициентга эга бўлган иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун қуйидаги чегаравий масалани қарайлик

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(k(u)\frac{\partial u}{\partial x})+f(u)\ \ ,0<x<1\ ,0<t\le T, \qquad (1)$$

$$u(x,0)=u_0(x)\ , \qquad 0\le x\le 1, \qquad (2)$$

$$u(0,t)=\mu_1(t)\ , \quad u(1,t)=\mu_2(t), \quad 0\le t\le T, \qquad (3)$$

бу ерда $k(u)=k_0u$ - иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти температуранинг чизиқли бўлмаган функцияси бўлсин, $\sigma\ge 1$.

III.Ечиш методи

Дифференциал масала (1)-(3) қаралаётган узлуксиз

$$\overline{D}=\{0\le x\le 1,\ \ 0\le t\le T\}$$

соҳада айирмали тўр киритамиз

$$\overline{\omega}_{h\tau}=\left\{(x_i,t_j),\begin{matrix} x_i=ih\ ,i=0,1,2,...,\ N, \quad h=1/N, \\ t_j=j\tau,\ j=0,1,2,...,M\ ,\tau=T/M\end{matrix}\right\}.$$

Айирмали $\overline{\omega}_{h\tau}$ тўрда дифференциал масалага мос қуйидаги айирмали масалаларни қўямиз [1]:

Схема а):

$$\frac{\hat{y}_i-y}{\tau}=\frac{1}{h}\left[a_{i+1}(y)\frac{\hat{y}_{i+1}-\hat{y}_i}{h}-a_i(y)\frac{\hat{y}_i-\hat{y}_{i-1}}{h}\right]+f(y_i), \quad \begin{matrix}0<i<N\ , \\ 0\le j<M,\end{matrix}$$

$$y_i^0=u_0(x_i), \qquad 0\le i\le N, \qquad (4)$$

$$y_0^{j+1}=\mu_1(t_{j+1})\ , \qquad y_N^{j+1}=\mu_2(t_{j+1})\ , \qquad 0\le j<M.$$

Схема б):

$$\frac{\hat{y}_i - y}{\tau} = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}(\hat{y})\frac{\hat{y}_{i+1}-\hat{y}_i}{h} - a_i(\hat{y})\frac{\hat{y}_i-\hat{y}_{i-1}}{h}\right] + f(\hat{y}_i)\ , \quad \begin{array}{l} 0 < i < N, \\ 0 \le j < M, \end{array}$$

$$y_i^0 = u_0(x_i)\ , \qquad 0 \le i \le N, \qquad (5)$$

$$y_0^{j+1} = \mu_1(t_{j+1})\ , \quad y_N^{j+1} = \mu_2(t_{j+1})\ , \qquad 0 \le j < M.$$

Бу айирмали масалаларни ечиш учун прогонка методига олиб келамиз.

$$\hat{y}_i - \frac{\tau}{h}\left[a_{i+1}(y)\frac{\hat{y}_{i+1}-\hat{y}_i}{h} - a_i(y)\frac{\hat{y}_i-\hat{y}_{i-1}}{h}\right] = y_i + f(y_i)\tau;$$

$$\hat{y}_i - \frac{\tau}{h^2}a_{i+1}(y)\hat{y}_{i+1} + \frac{\tau}{h^2}a_{i+1}(y)\hat{y}_i + \frac{\tau}{h^2}a_i(y)\hat{y}_i - \frac{\tau}{h^2}a_i(y)\hat{y}_{i-1} = y_i + \tau f(y_i);$$

$$-\frac{\tau}{h^2}a_i(y)\hat{y}_{i-1} + (1+\frac{\tau}{h^2}(a_{i+1}(y)+a_i(y)))\hat{y}_i - \frac{\tau}{h^2}a_{i+1}(y)\hat{y}_{i+1} = y_i + \tau f(y_i);$$

Энди (-1) га кўпайтирамиз ва қуйидагига эга бўламиз

$$\frac{\tau}{h^2}a_i(y)\hat{y}_{i-1} - (1+\frac{\tau}{h^2}(a_{i+1}(y)+a_i(y)))\hat{y}_i + \frac{\tau}{h^2}a_{i+1}(y)\hat{y}_{i+1} = -(y_i + \tau f(y_i));$$

Схема а) ва б) да $\hat{y}_i = y_i^{j+1}$, $y_i = y_i^j$ ҳамда $a_i(\vartheta) = a(\vartheta_{i-1}, \vartheta_i)$ коэффициентлар қуйидаги формулалардан бирортаси билан ҳисобланиши мумкин:

$$a_i(\vartheta) = 0{,}5[k(\vartheta_{i-1}) + k(\vartheta_i)],\ a_i(\vartheta) = k\left(\frac{\vartheta_{i-1}+\vartheta_i}{2}\right),\ a_i(\vartheta) = \frac{2k(\vartheta_{i-1})k(\vartheta_i)}{k(\vartheta_{i-1})+k(\vartheta_i)}\ .$$

Температуравий тўлқинни ҳисоблаш аниқлиги коэффициентлар $a_i(\vartheta)$ нинг қандай йўл билан ҳисобланишидан кучли боғлиқ бўлади.

Схемалар а) ва б) ни назарий жиҳатдан таққослаш [1] да амалга оширилган, ҳамда схема б) чизиқли бўлмаганлиги сабабли, уни ечиш учун қуйидаги итерация жараёнидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ эканлиги таъкидланган

$$\frac{\overset{(s+1)}{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}(\overset{(s)}{y})\frac{\overset{(s+1)}{y}_{i+1} - \overset{(s+1)}{y}_i}{h} - a_i(\overset{(s)}{y})\frac{\overset{(s+1)}{y}_i - \overset{(s+1)}{y}_{i-1}}{h}\right] + f(\overset{(s)}{y}_i), \quad \begin{array}{l} 0 < i < N, \\ 0 \le s < 3\ , \\ 0 \le j < M, \end{array}$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \qquad 0 \le i \le N, \qquad (6)$$

$$\overset{(s+1)}{y}_0 = \mu_1(t_{j+1})\ , \quad \overset{(s+1)}{y}_N = \mu_2(t_{j+1}), \qquad 0 \le j < M.$$

Ушбу схема $\overset{(s+1)}{y}$ га нисбатан чизиқли кўринишда бўлади.

Дастлаб қараганда, схема а) итерация талаб қилмаганлиги сабабли ундан фойдаланиш, итерация талаб қиладиган схема б) дан фойдаланганга қараганда афзалдек туюлади. Аммо, амалий ҳисоблашлар схема б) нинг самарали эканлигини кўрсатади.

Шу сабабли, иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти температуранинг чизиқли бўлмаган функцияси бўлган ҳолда, яъни $k(u)=k_0u$, $\sigma=1$ бўлган ҳолда а) ва б) схемаларнинг самарадорлигини ҳисоблаш эксприменти нуктаи - назаридан таққослаш муҳим амалий аҳамиятга эга. Муаллифларга ушбу йўналишда бажарилган бирор - бир тадқиқот ишлари маълум эмас.

Маълумки, ихтиёрий сонли методларнинг самарадорлигини баҳолашда асосий кўрсаткич сифатида арифметик амаллар сони қаралади. Ушбу мақолада а) ва б) схемаларнинг самарадорлиги иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти $k(u)=k_0u$, $\sigma=1.$ кўринишда бўлганда арифметик амаллар сони бўйича таққосланади, ҳамда схема б) нинг ўта самарали метод эканлиги кўрсатилади.

Ўтказилган ҳисоблаш эксприменти натижаси параметр $\sigma=1$ нинг схема а) бўйича маълум аниқликка эришиши учун вақт бўйича жуда кичик τ қадам танлаш зарурлигини, бу эса ўз навбатида арифметик амаллар сонининг кескин ортиб кетишига олиб келишини кўрсатади. Схема б) бўйича маълум аниқликни таъминлаш учун вақт бўйича ҳар бир қатлам оралиғида атиги учта итерация бажариш кифоя эканлиги намойиш этилган, натижада арифметик амаллар сони сезиларли даражада камайишига эришиш мумкинлиги кўрсатилган.

Таъкидлаш лозимки, айирмали схемалар (4) ва (6) прогонка методи билан ечилади. Маълумки прогонка методини битта қатламда бажариш учун 8N арифметик амал сарфланади, бу ерда N тўрнинг тугунлари сони.

Схема а) ни амалга ошириш учун зарур бўлган арифметик амаллар сони $Q_1=8N*N1$ га, ушбу амаллар сони айирмали схема б) учун $Q_2=8N*IT*N2$ га тенг бўлади, бунда $8N$ прогонка методини амаллар сони, $N1$ ва $N2$ лар мос равишда а) ва б) схемалардаги вақт бўйича қатламлар сони, IT эса схема б) да битта қатламда амалга оширилиши лозим бўлган итерациялар сонидан иборат.

IV Ҳисоблаш натижалари

Дифференциал масала (1)-(3) қаралаётган

$$\overline{D}=\{0\le x\le 1,\ \ 0\le t\le T\}$$

соҳада қуйидаги айирмали тўрни киритамиз

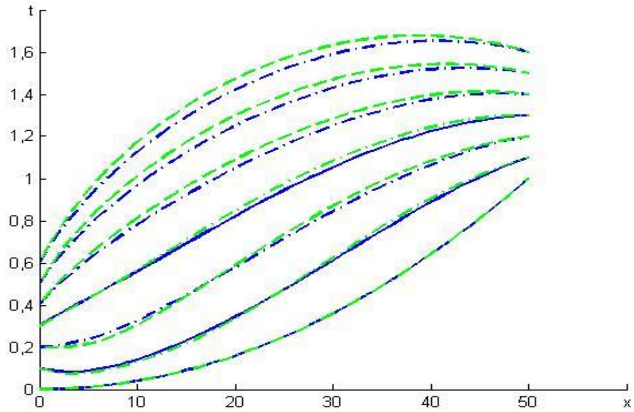
$$\overline{\omega}_{h\tau}=\left\{(x_i,t_j),\begin{matrix} x_i=ih\,,i=0,1,2,...,N, \quad h=1/N, \\ t_j=j\tau,\,j=0,1,2,\dots,M\,,\tau=T/M \end{matrix}\right\}.$$

Ҳисоблаш эксприменти олиб бориш учун масала параметрларини қуйидагича танлаймиз :

$N=50$, $M=6$, $T=0.6$, $k(u)=k_0u^{\sigma}$, $\sigma=1$

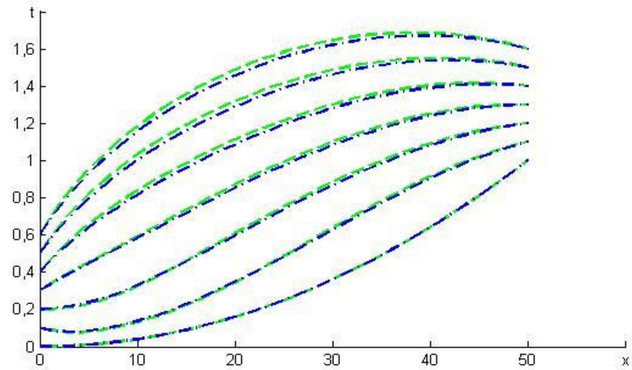
$\sigma=1$ бўлган ҳолни, яъни $k(u)=k_0u$ - иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти температуранинг чизиқли функцияси бўлган ҳолни қараймиз. Тўрнинг қадамлари учун $h=0.02$ ва а) схема учун $\tau=0.02$ ҳамда б) схема учун $\tau=0.05$ қийматлар танланган бўлсин. Схема а) ва б) орқали ҳисоблаш эксприменти ўтказилган ва олинган натижалар 1-расмда келтирилган. $\sigma=1$ бўлган ҳолда тўр қадамлари юқоридагидек танланганда а) схема учун тўр қатламлари сони N1=30, б) схема учун эса N2=12 тадан иборат бўлади.

SCIENCE AND INNOVATION
INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL VOLUME 1 ISSUE 8
UIF-2022: 8.2 | ISSN: 2181-3337



1-расм. Схемалар бўйича олинган қийматларнинг график кўринишида таққосланиши, бунда схема а) узлукли чизиқ, схема б) нуқтали узлукли чизиқ.

Ҳисоблаш экспременти ўтказиш натижасида олинган 1-расмдан кўринадики, а) ва б) схемалар бўйича олинган натижалар бироз фарқланади. Схема а) нинг аниқлигини ошириш учун вақт бўйича тўр қадамини кичрайтирамиз, схема б) ни ўз ҳолатида қолдирамиз, яъни схема а) да $(\tau = 0.002, N1 = 300)$ ва схема б) да $(\tau = 0.02, N1 = 30)$ бўлганда тўр тугунларида ҳисоблаш натижалари 2-расмда келтирилган.



2-расм. Схема а) узлукли чизиқ, схема б) нуқтали узлукли чизиқ.

Ҳисоблаш эксприменти натижалари кўрсатадики, $\sigma = 1$ бўлган ҳолда схема б) бўйича олинган натижаларга яқин қийматларни олиш учун схема а) да вақт бўйича тўр қадамини 10 марта кичрайтиришга тўғри келади. Бу ҳолда схема а) да арифметик амаллар сони Q_1=120 000 га, схема б) да эса Q_2=36 000 га тенг.

V. Хулоса

1. Квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасида иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти температуранинг чизиқли бўлмаган функцияси кўринишида бўлгандаги сонли ечимлари ошкормас ва ошкормас итерация схемалари билан аниқланди.

2. Ошкормас ва ошкормас итерация схемалари арифметик амаллар сони бўйича таққосланди, арифметик амаллар сонини ҳисоблаш формулалари чиқарилди.

3. Қўйилган дифференциал масалани ечишда ошкормас итерация схемасининг ўта самарали эканлиги кўрсатилди.

REFERENCES

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики — М.: Наука, 1978. 591 с.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики — М.: Наука, 1976. 528 с.
3. *Самарский А. А.* Теория разностных схем — М.: Наука, 1977. 656 с.
4. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем — М.: Наука, 1971. 553 с.
5. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем — М.: Наука, 1973. 415 с.
6. Самарский А. А., Николаев В. С. Методы решения сеточных уравнений — М.: Наука, 1978. 589 с.
7. Нармурадов Ч. Б. Математическое моделирование гидродинамических задач для двухфазных плоскопараллельных течений //Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19. – №. 6. – С. 53-60.
8. Normurodov C., Toyirov A., Yuldashev S. Numerical modeling of a wave in a nonlinear medium with dissipation //AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing LLC, 2022. – Т. 2637. – №. 1. – С. 040005.
9. Normurodov C. et al. Numerical simulation of the inverse problem for the vortex-current equation //AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing LLC, 2022. – Т. 2637. – №. 1. – С. 040018.
10. Normurodov C. B., Toyirov A. X., Yuldashev S. M. Numerical modeling of nonlinear wave systems by the spectral-grid method //International Scientific Journal Theoretical & Applied Science, Philadelphia, USA. – 2020. – Т. 83. – №. 3. – С. 43-54.
11. Narmuradov C. B. et al. MATHEMATICAL MODELING OF MOVEMENT OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE LIQUID BY THE SPECTRAL-GRID METHOD //Theoretical & Applied Science. – 2020. – №. 4. – С. 252-260.
12. Begaliyevich N. C., Khasanovich T. A. Spectral-grid method for solving evolution problems with high gradients //EPRA International Journal of Multidisciplinary Research (IJMR). – Т. 67.
13. Нармурадов Ч. Б., Тойиров А. Х. Математическое моделирование нелинейных волновых систем //Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2018. – №. 1. – С. 21-31.
14. BEGALIYEVICH N. C. et al. Mathematical Modeling of the Hydrodynamic Stability Problem by the Spectral-grid Method //International Journal of Innovations in Engineering Research and Technology. – Т. 7. – №. 11. – С. 20-26.
15. Toyirov A. K., Yuldashev S. M., Abdullayev B. P. Numerical modeling the equations of heat conductivity and burgers by the spectral-grid method //НАУКА 2020. ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА. – 2020. – С. 30-31.
16. Нармурадов Ч. Б., Гуломкодиров К. А. Математическое моделирование уравнений Навье-Стокса в системе вихря и функции тока //Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2017. – №. 3. – С. 29-32.
17. Нармурадов Ч. Б., Холияров Э. Ч., Гуломкодиров К. А. Численное моделирование обратной задачи релаксационной фильтрации однородной жидкости в пористой среде //Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2017. – №. 2. – С. 12-19.

18. Abdirasulovna Z. S., Majidovna N. M. Evaluation of Errors in Numerical Solution of Problems //CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES. – 2021. – Т. 2. – №. 9. – С. 45-47.
19. Abdirasulovna Z. S. Conducting a Computational Experiment using Test Functions //CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES. – 2021. – Т. 2. – №. 9. – С. 51-53.
20. Shavkatovna D. Z. Solving Cauchy Problems Using Euler Methods Using the C# Programming Language and Method Mapping //International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. – 2021. – Т. 1. – №. 4. – С. 74-77.