Situaciones de modelación matemática para el aula

Aportes para diferentes niveles formativos

Olga Emilia Botero Hernández
Alexander Castrillón-Yepes
Julián Andrés Galeano-Ocampo
Lennys Gaviria-Quintana
Ana Carolina González-Grisales
Ana María Jiménez Echavarría
Sebastián Mejía Arango
Lina María Muñoz Mesa
Mónica Marcela Parra-Zapata
María Camila Patiño-Henao
William David Patiño Ríos
Luis Fernando Plaza Gálvez
Fabián Arley Posada-Balvin
María Camila Ocampo-Arenas
Paula Andrea Rendón-Mesa

Medellín – Antioquia

Situaciones de modelación matemática para el aula

Aportes para diferentes niveles formativos

Edición 1

Olga Emilia Botero Hernández
Alexander Castrillón-Yepes
Julián Andrés Galeano-Ocampo
Lennys Gaviria-Quintana
Ana Carolina González-Grisales
Ana María Jiménez Echavarría
Sebastián Mejía Arango
Lina María Muñoz Mesa
Mónica Marcela Parra-Zapata
María Camila Patiño-Henao
William David Patiño Ríos
Luis Fernando Plaza Gálvez
Fabián Arley Posada-Balvin
María Camila Ocampo-Arenas
Paula Andrea Rendón-Mesa

Compiladores
Alexander Castrillón-Yepes
Paula Andrea Rendón-Mesa
Jonathan Sánchez-Cardona

Editor
Edgar Serna M.

ISBN: 978-628-95135-0-9

Medellín – Antioquia

Catalogación en la publicación – Biblioteca Nacional de Colombia

Botero Hernández, Olga Emilia, autor
Situaciones de modelación matemática para el aula: Aportes para diferentes niveles formativos / Olga Emilia Botero Hernández [y otros catorce]; compiladores, Alexander Castrillón-Yepes, Paula Andrea Rendón-Mesa, Jonathan Sánchez-Cardona; editor, Edgar Serna M. -- Medellín: Editorial Instituto Antioqueño de Investigación, 2022.
1 recurso en línea: archivo de texto: PDF

Incluye referencias bibliográficas

ISBN 978-628-95135-0-9

1. Modelos matemáticos - Enseñanza - Investigaciones 2. Matemáticas - Enseñanza – Investigaciones. I. Castrillón-Yepes, Alexander, autor, compilador. II. Galeano-Ocampo, Julián Andrés, autor. III. Gaviria-Quintana, Lennys, autor. IV. González-Grisales, Ana Carolina, autor. V. Jiménez Echavarría, Ana María, autor. VI. Mejía Arango, Sebastián, autor. VII. Muñoz Mesa, Lina María, autor. VIII. Parra-Zapata, Mónica Marcela, autor. IX. Patiño-Henao, María Camila, autor. X. Patiño Ríos, William David, autor. XI. Plaza Gálvez, Luis Fernando, autor. XII. Posada-Balvin, Fabián Arley, autor. XIII. Ocampo-Arenas, María Camila, autor. XIV. Rendón-Mesa, Paula Andrea, autor, compilador. XV. Sánchez Cardona, Jonathan, compilador. Serna M., Edgar, editor

CDD: 511.8071 ed. 23 CO-BoBN– a1094931

Investigación Científica
ISBN: 978-628-95135-0-9
DOI:
Hecho el depósito legal digital

Situaciones de modelación matemática para el aula: Aportes para diferentes niveles formativos
Serie: Innovación Educativa
Editorial Instituto Antioqueño de Investigación
Edición 1: septiembre 2022
Publicación electrónica gratuita

Maquetación: Instituto Antioqueño de Investigación IAI
Diseño, edición y publicación: Editorial Instituto Antioqueño de Investigación
Editor: Edgar Serna M.
Compiladores: Alexander Castrillón-Yepes, Paula Andrea Rendón-Mesa y Jonathan Sánchez-Cardona
Financiador de la publicación: Universidad de Antioquia

Instituto Antioqueño de Investigación IAI
http://fundacioniai.org
contacto@fundacioniai.org

Editorial Instituto Antioqueño de Investigación
http://fundacioniai.org/index.php/editorial.html
editorial@fundacioniai.org

Universidad de Antioquia
https://www.udea.edu.co
alexander.castrillony@udea.edu.co
paula.rendon@udea.edu.co
jonathan.sanchezc@udea.edu.co

Medellín, Antioquia

CONTENIDO

Presentación

Jhony Alexander Villa-Ochoa
Universidad de Antioquia
Colombia

En el ámbito de la educación matemática, la modelación se reconoce como un dominio de investigación próspero en el que se discute el uso, la aplicación, las oportunidades y la producción de conocimientos matemáticos, articulados a los contextos sociales y de otras áreas. Asimismo, se estudia el desarrollo de competencias y de las dimensiones cognitiva, cultural y afectiva del aprendizaje. Como dominio de investigación ha generado áreas interdisciplinares (por ejemplo, con la ingeniería y la física), el uso de la tecnología y la formación de profesores, entre otras. Al respecto, en la literatura se publican experiencias sobre cómo la modelación les permite a los estudiantes y profesores generar conocimiento [1, 2]; adicionalmente, en el caso de los profesores, generar reflexiones didácticas que reflejan un nivel de preparación y potencial que puede favorecer la integración de la educación STEM en su futuro ejercicio profesional [3].

A lo largo de la historia de la investigación educativa sobre modelación matemática, se han configurado varios usos del término, temáticas y perspectivas [4, 5]. En especial, y por tratarse de las contribuciones de este libro, quiero llamar la atención sobre el diseño de tareas, situaciones o problemas de modelación. En la literatura estos términos a veces se usan indiscriminadamente para referirse a lo mismo y, en otras, el parece tener varios significados. Sin embargo, para ser coherentes con los autores de este libro, utilizaré la denominación *situaciones de modelación*, para referirme a sus producciones, es decir, un conjunto de enunciados con propósitos definidos, nivel educativo, contextos, contenidos y acciones para promover procesos de modelación en general, o para promover el desarrollo de una o varias habilidades (otros dirían competencias) a lo largo del proceso.

El análisis de las situaciones de modelación llama especial atención pues, por un lado, es una forma casi directa de dar vida a la modelación en la cotidianidad escolar y, por otro lado, porque los alcances y las posibilidades que se le atribuyen a la modelación están en correspondencia con el tipo de situación que se diseña y el ambiente de aprendizaje en el cual se integra [6]. Además, las situaciones de modelación son las que pueden fomentar la comprensión, descripción, intervención, generación de respuestas y reflexiones, sobre una situación en el mundo real [7].

En el reciente estudio de Guerrero y Camacho [7], los autores estudiaron las situaciones de modelación (usaron el término *tasks*) que diseñan los futuros profesores para enseñar matemáticas en entornos digitales y de modelización. Este estudio arrojó como resultados un conjunto de características de este tipo de tareas y de los tipos de actividad que fomentan en los estudiantes. Observaron dos elementos relevantes asociados al contexto de las tareas que definen sus características: el primero radica en el uso de la modelación como contenido y vehículo [8], y en el segundo observaron que los sistemas de geometría dinámica DGS influyen en las características del diseño de las tareas y la actividad, que los estudiantes realizan dentro de las limitaciones del software y la configuración construida. Con respecto al primer elemento, los autores señalan que las tareas diseñadas por los futuros profesores pueden atender a cinco objetivos principales: descripción, predicción, comprensión, representación e intervención. En relación con el segundo elemento, los investigadores observaron la presencia de modelos computacionales y modelos matemáticos, que reflejan las intenciones de la persona que diseña la tarea.

Por su parte, Villa-Ochoa et al. [6] realizaron una revisión de la literatura e identificaron un conjunto de categorías y subcategorías de tareas de modelación: enunciados verbales (realistas, auténticos), construcción de modelos (construcción de gráficas o modelación de formas), proyectos de modelación (diseñados por el profesor o desarrollados con base en los intereses de los estudiantes), y uso y análisis de modelos. Para los autores, cada tipo de tarea refleja diferentes usos y énfasis de la modelación, con base en el diseño de la tarea y de los ambientes en que se integren para el curso de matemáticas. Cada tipo de tarea pone de relieve propósitos diferentes, que se pueden ajustar a las condiciones variantes de las instituciones escolares. Los lectores interesados se pueden remitir al trabajo de Maass [9], quien construyó un detallado esquema de tareas de modelación matemática para ofrecer orientaciones sobre los procesos de diseño y selección de tareas con objetivos, fines y grupos de destinatarios específicos.

Este libro se compone de ocho capítulos con tareas/situaciones de modelación matemática. Sus autores son, sin excepción, profesores de los niveles de educación primaria, secundaria y universitaria. La mayoría tiene experiencia en investigación, bien sea por su formación en posgrado o por participar en proyectos, grupos de estudio y otras actividades que se realizan en el marco de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática RECOMEM, o en el Grupo MATHEMA-FIEM de la Universidad de Antioquia. Por tanto, algunas de estas tareas han sido implementadas en establecimientos educativos. En cada capítulo se informa sobre las acciones que los profesores y los estudiantes emprendieron, y los posibles resultados de dicha intervención.

El contenido de cada capítulo puede suscitar ampliaciones o consideraciones contextuales para su desarrollo en otros ambientes, contextos o instituciones educativas. Otras situaciones propuestas tienen fundamentación teórica en la modelación y son producto de discusiones y procesos investigativos de los autores. Bien sea teórica o con implementación empírica, los capítulos ofrecen oportunidades para que los lectores, principalmente profesores, estudiantes para profesor e investigadores, se inspiren para que, de manera crítica, adapten o diseñen sus propias tareas.

Cada capítulo cuenta con independencia temática, pero presenta una estructura similar en su diseño, que incluye elementos teóricos, metodológicos y curriculares relacionados con la modelación matemática. Además, incluyen metas de aprendizaje, habilidades y actitudes que se esperan desarrollar, lo mismo que las relaciones de la propuesta con las orientaciones curriculares expedidas por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia MEN [10-12]. También se presenta una descripción de la situación propuesta, sugerencias metodológicas y evaluativas, posibilidades de ampliar la situación a otros contextos y de usar material complementario. Finalmente, se presentan reflexiones o ideas de cierre para mostrar posibilidades de la propuesta y la modelación en las aulas.

En el Capítulo 1, las autoras llevan a cabo una revisión de los resultados de pruebas externas en estadística y de la organización curricular de una institución educativa, a partir de la cual proponen una modificación del currículo con el desarrollo de situaciones que implican la recolección y análisis de datos. El trabajo presenta un ambiente de modelación matemática en estadística de una problemática centrada en la cantidad de zancudos con los que conviven estudiantes de grado 5, en el salón y en sus hogares. Esta situación movilizó el estudio de factores de riesgo asociados al dengue en la población estudiantil mediante modelación matemática, al tiempo que generó propuestas para contrarrestar posibles riesgos. La situación se reporta como una experiencia de aula con reflexiones y sugerencias para su implementación, y cuenta con soportes teóricos y metodológicos que sugieren contextos para la modelación matemática en clase.

En el Capítulo 2, los autores presentan la situación denominada *Una casa para las Mascotas*, en la cual brindan una serie de orientaciones y sugerencias para elaborar modelos o diseños de casas para mascotas de una institución educativa, o para los hogares de los estudiantes. La propuesta presenta un contexto amplio de recursos y posibilidades de abordar elementos matemáticos y extra matemáticos, donde resaltan cuestiones como que se pueden establecer relaciones entre disciplinas y ajustar su propuesta a diferentes contextos educativos. La noción de modelación se soporta con documentos curriculares en Colombia y aportes de algunos investigadores; además, se promueve una evaluación formativa y preguntas que posibilitan rutas diferentes para emprender una propuesta en el aula.

En el Capítulo 3, se utiliza la modelación matemática para promover un ambiente de aprendizaje centrado en el consumo de alimentos. La autora propone reconocer el contexto de la situación a través de un *picnic*, donde las estudiantes conocen los productos que consumen sus compañeras de clase, al tiempo que presentan conceptos relacionados con los productos procesados. Propone elaborar una tabla para registrar la cantidad de azúcar añadida a cada producto. Las estudiantes contaron con el acompañamiento de un especialista en salud para responder a sus preguntas, realizar un proceso de investigación de productos del mercado y divulgar su estudio por medio de pósteres y un comercial de televisión. La autora afirma que la modelación en educación primaria permite un análisis crítico del aprendizaje y del uso de las matemáticas.

El Capítulo 4, propone una situación en la que se buscan vínculos entre las matemáticas y las experiencias culturales. La situación tiene que ver con determinar la mayor cantidad de empaques que se pueden elaborar a partir de un pliego de cartón industrial, contando con el plano del empaque. Las autoras esperan que con esta situación se generen discusiones y procesos, como aquellos que pueden ser matemáticamente correctos, pero que no aportan una solución adecuada para la situación propuesta. Además, sugieren que en el proceso se pueden evaluar los modelos que se utilizan y transferir los desarrollos de la solución a contextos similares, donde sugieren, como posibilidad de ampliación, el diseño de empaque para un disco compacto CD y el diseño de una cartuchera. Además, se presentan sugerencias para la evaluación de los aprendizajes a través de rúbricas: para ingeniería de diseño de producto y para secundaria.

En el Capítulo 5, se presenta un ambiente de modelación matemático enmarcado en una perspectiva sociocrítica. Este ambiente se construye alrededor de la consulta anticorrupción que se realizó en Colombia en 2018, y contempla cinco momentos y diferentes tareas que requieren elementos matemáticos, interpretación de resultados, análisis y cuestionamientos frente al modelo matemático que se elabora, entre otros. Las tareas que se presentan en el capítulo implican el uso de procesos y conceptos matemáticos, que no fueron previamente establecidos, sino que emergen como una posibilidad para atender la situación que se presenta a los estudiantes. La problematización de los datos, la participación y la discusión son aspectos centrales en el trabajo, porque se espera que los estudiantes expresen sus opiniones, reconozcan problemáticas sociales y generen argumentos a través de las matemáticas. En el contenido hay evidencias de la implementación, reconocimiento de posibles errores durante la misma, sugerencias evaluativas y reflexiones generales frente a la situación y el rol de las matemáticas, cuando se emplea la modelación bajo una perspectiva sociocrítica.

En el Capítulo 6, se presentan posibilidades de la modelación y la experimentación en clases de matemáticas a través del uso de tecnologías digitales. Los autores exponen referentes teóricos y curriculares provenientes de la educación matemática y de la enseñanza de las ciencias para soportar la propuesta. A partir del uso de sistemas masa-resorte en el simulador PhET, se plantean dos situaciones: una relacionada con la Ley de Hooke y otra con el Movimiento Armónico Simple MAS. A través del simulador se espera reconocer variables presentes en el fenómeno, utilizar diferentes registros de representación y de análisis de modelos. Además, se proponen tareas para que los estudiantes comuniquen, no solo sus desarrollos matemáticos y experimentales, sino también el reconocimiento de lo que aprendieron y los retos que asumieron en el proceso. Se recomienda el uso de una rúbrica para la evaluación y se plantean algunas situaciones y recursos que podrían servir como ampliación-exploración de modelos, como el estudio del péndulo simple y su relación con el MAS. Finalmente, plantean ideas alrededor del uso del simulador, el establecimiento de relaciones entre variables y el uso de diferentes sistemas de representación.

En el Capítulo 7, los autores aportan elementos a la formación de ingenieros, en especial, por promover el uso de la modelación matemática para darle sentido a las matemáticas en esta disciplina. Presentan una manera de abordar las ecuaciones diferenciales, a partir de la modelación de situaciones o fenómenos de la vida cotidiana que suelen depender del tiempo. El crecimiento poblacional, los procesos de llenado y vaciado de tanques y la verificación de leyes, son algunos de los contextos sugeridos por los autores para implementar la propuesta. Proponen el diligenciamiento de tablas para tener un registro histórico del fenómeno, utilizar elementos de la teoría de los mínimos cuadrados y el apoyo de hojas de cálculo para generar modelos y representaciones, para tener una comprensión del fenómeno y solucionar las problemáticas que involucran ecuaciones diferenciales.

En el Capítulo 8, se presentan cuestionamientos frente al valor utilitario de las matemáticas, que suele darse en los contextos educativos, y se hace un llamado a la creación de alternativas pedagógicas que permitan la producción de sentidos y significados de las matemáticas. Entre estas opciones, el autor presenta los Proyectos Pedagógicos de Modelación, una propuesta que procura la creación de proyectos por parte de los estudiantes. Describe una experiencia desarrollada con estudiantes de una universidad brasileña, en un curso de cálculo, y cómo generaron sentidos y significados matemáticos a partir de ella. En este documento, el desarrollo de los Proyectos Pedagógicos de Modelación se presenta en diferentes momentos que permiten identificar la necesidad de asociar conocimientos de las matemáticas con otros tipos de conocimiento, para generar significados.

Los compiladores estructuraron el libro en tres secciones, de acuerdo con el nivel educativo: Educación primaria (6-11 años), educación secundaria o postsecundaria (12-18 años) y universitaria. Sin embargo, con base en la descripción presentada previamente, otras organizaciones también serían posibles. Por ejemplo, reconocer que todas las situaciones se sitúan en contextos auténticos, es decir, reflejan condiciones posibilidades o necesidades en la cotidianidad de los sujetos (capítulos 1 al 5), u ofrecen posibilidades de estudiar conceptos de otras áreas o profesiones (capítulos 6 al 8). Algunas de estas situaciones están directamente organizadas para darle sentido a temáticas particulares de la matemática o la estadística (capítulo 1 y 8), de la física (capítulo 6) o de la ingeniería (capítulo 7).

Otros están explícitamente enfocados en el desarrollo de capacidades como la indagación (capítulo 3), pensamiento crítico (capítulo 5), y diseño y argumentación (capítulo 4). Algunos capítulos permiten ver el impacto que tendrían las situaciones de modelación en la comprensión del contexto mismo (capítulos 5 y 6), en las implicaciones que tendría para los sujetos (capítulos 1 y 5), y las reflexiones sobre el cuidado propio y de los demás (capítulos 1 al 4).

Serían muchas otras las posibilidades del análisis de estas situaciones para reconocer sus contribuciones, sin embargo, a nivel general, resalto su flexibilidad, es decir, la posibilidad que ofrece a los profesores para usar, adaptar o crear nuevas situaciones para sus propias necesidades institucionales. También se resalta que los capítulos no se agotan en un conjunto de enunciados para ser transcritos a los estudiantes, sino que proporcionan orientaciones sobre los ambientes de las clases, que guardan coherencia con los propósitos de la misma. Estoy seguro de que este libro es un material importante para profesores y futuros profesores, en tanto que ofrece orientaciones y ejemplos sobre lo que es posible hacer en la clase de matemáticas. A los investigadores les ofrece oportunidades para diseñar e investigar los ambientes de sus propias investigaciones, y a los mismos autores la posibilidad de reorganizar sus producciones en tanto que, a medida que se interactúe con la comunidad, nuevas ideas, preguntas, alcances y acciones que surgen para enriquecer sus situaciones.

Invito a la comunidad en generar a revisar, debatir e implementar de manera crítica las propuestas y las experiencias plasmadas en este texto, a nutrir la discusión académica que permita avanzar en la revisión y mejoramiento continuo de estos materiales y de hacer realidad el deseo de que la modelación pueda ser integrada en la cotidianidad escolar.

REFERENCIAS

[1] Trelles C., Toalongo X. y Alsina Á. (2022). Una actividad de modelización matemática en primaria con datos auténticos de la Covid-19. Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas 40(2), 193–213.

[2] Villa-Ochoa J., Sánchez-Cardona J. y Rendón-Mesa P. (2021). Formative assessment of pre-service teachers' knowledge on mathematical modeling. Mathematics, 9(8), 851.

[3] Carmona-Mesa J., Cardona M. y Castrillón-Yepes A. (2020). Estudio de fenómenos físicos en la formación inicial de profesores de matemáticas. Una experiencia con enfoque STEM. Uni-pluriversidad, 20(1), e2020101.

[4] Kaiser G. y Sriraman B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. ZDM - Mathematics Education, 38(3), 302–310.

[5] Villa-Ochoa J. y Alencar E. (2019). Un panorama de investigaciones sobre modelación matemática: Colombia y Brasil. Revista de Educação Matemática, 16(21), 18–37.

[6] Villa-Ochoa J., Castrillón-Yepes A. y Sánchez-Cardona J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. Espaço Plural, 18(36), 219–251.

[7] Guerrero-Ortiz C. y Camacho-Machín M. (2022). Characterizing tasks for teaching mathematics in dynamic geometry system and modelling environments. Mathematics, 10(8), 1239.

[8] Julie C. y Mudaly V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En Blum W. et al. (eds.), Modelling and applications in mathematics education (pp. 503–510). Springer.
[9] Maass K. (2010). Classification Scheme for modelling tasks. Journal Für Mathematik-Didaktik, 31(2), 285–311.
[10] MEN (1998). Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional. Magisterio.
[11] MEN (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Ministerio de Educación Nacional.
[12] MEN (2016). Documento fundamentación teórica de los derechos básico de aprendizaje (V2) y de las mallas de aprendizaje para el área de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional.

Agradecimientos

La publicación de este libro contó con el apoyo del Comité para el Desarrollo de la Investigación CODI, de la Universidad de Antioquia, a través del proyecto: *La modelación matemática escolar como eje de integración interdisciplinar en un currículo basado en las áreas STEM+H: Un camino para la transformación educativa de la primaria en la ciudad de Medellín*.

Parte I
Situaciones para educación básica primaria

C 1

El dengue como contexto: Trabajar conceptos estadísticos a partir de la modelación

María Camila Ocampo-Arenas[1]
Lennys Gaviria-Quintana[2]
Universidad de Antioquia
Colombia

La enseñanza-aprendizaje de la estadística es un tema de debate nacional e internacional [1] y, particularmente, en la educación primaria es preocupante la poca importancia que se le da a su enseñanza en diferentes países. En Colombia las investigaciones demuestran que menos del 15% de las clases de matemáticas se destinan a la enseñanza-aprendizaje de la estadística en este nivel [2]. Gracias a los debates y la preocupación de los investigadores y profesores de matemáticas, se presenta un crecimiento de las investigaciones que demuestran la importancia del área en un mundo permeado por los datos [1, 3].

En la institución donde se llevó a cabo el ambiente de modelación que se presenta en este capítulo, se analizaron los resultados de las pruebas saber, estandarizadas por el gobierno colombiano, para estudiantes de grados 3, 5 y 9. Los profesores de matemáticas identificaron que sus estudiantes tenían debilidad en el pensamiento aleatorio, lo que los llevó a analizar las causas que se relacionan con el rendimiento de los estudiantes en estas pruebas.

El factor que llamó la atención fue la organización del currículo, que propone las temáticas de la estadística al final del curso. Este asunto hace que los profesores dediquen las dos últimas semanas del periodo académico a la apropiación de la estadística, incluso a reemplazar con el desarrollo de talleres y guías, el estudio de la probabilidad, las medidas de tendencia central y la graficación de datos, entre otras cuestiones que plantea el Ministerio de Educación Nacional MEN en los Estándares Básicos de Competencias EBC para los diferentes grados de escolaridad.

Para contrarrestar esta situación se propuso una hora semanal de estadística dentro de la asignatura académica de matemáticas. En el currículo se generaron estrategias y competencias específicas para fomentar en los estudiantes, que se desarrollaron con una intensidad de 10 horas en el periodo y que contaron con una situación que propicia el razonamiento y la comunicación, a través del pensamiento aleatorio y situaciones cercanas al contexto de los estudiantes. Esto posibilitó que los profesores crearán situaciones para vincular una visión del mundo a partir de la recolección y el análisis de datos [2].

Para lograrlo se planteó el estudio de la estadística por medio un ambiente de modelación para explicar, describir, estimar y predecir una problemática del contexto [1]. El ambiente se desarrolló en el grado 5 y participan niños entre 9 y 11 años en una institución educativa privada en el área de matemáticas. La experiencia busca cumplir la exigencia de la institución además de fomentar el estudio de la estadística, a partir de la participación de los estudiantes y de la comprensión del mundo por medio de datos [4].

El ambiente de Modelación Matemática se desarrolla a partir de una tarea que propicia la participación de los profesores y estudiantes, y genera el planteamiento de preguntas, mediaciones de las discusiones, trabajo en grupo, argumentaciones, proposición de ideas y conjeturas [5, 6]. En esta mirada de la Modelación Matemática, los sujetos inmersos en el ambiente identifican un fenómeno para estudiarlo y se plantean ideas para la comprensión y la búsqueda de posibles soluciones [3, 5].

[1] Contacto: *camila.ocampo@udea.edu.co*
[2] Contacto: *lennys.gaviria@udea.edu.co*

1. METODOLOGÍA

1.1 Identificación de la situación

La situación que origina el ambiente de Modelación en estadística fue la afectación de la comunidad por la cantidad de mosquitos con los que conviven los niños de 5, tanto en la institución como en el hogar. La propuesta nace del interés de uno de los estudiantes que manifiesta en una clase de matemáticas que los mosquitos en el aula son portadores del dengue, lo cual alarmó a los demás al reconocer que en la mayoría de sus casas también los había. Gracias a estos comentarios la profesora de matemáticas les propuso realizar un estudio para determinar el riesgo de que existan criaderos de mosquitos en el entorno.

Por medio del ambiente de Modelación se esperaba, en primer lugar, que los niños identificarán aspectos como posibilidad de ocurrencia y cómo podría convertirse en un indicio para alarmarse por la cantidad de mosquitos en la zona; en segundo lugar, que los niños construyeran gráficos y tablas para organizar la información obtenida y llegar a conclusiones sobre la ocurrencia y, por ende, de la probabilidad de la misma; en tercer lugar, se esperaba que, a partir de los análisis estadísticos, los niños tomaran y generarán conciencia de la importancia de las medidas para evitar la propagación del dengue.

En la Tabla 1 se relacionan las metas propuestas por el MEN en los Derechos Básicos de Aprendizaje DBA[3], que tienen que ver con la situación del estudio.

Tabla 1. Metas propuestas por el MEN en los Derechos Básicos de Aprendizaje

<table>
<tr><th>Metas de aprendizaje</th><th>Grado</th><th>Relación con DBA y EBC</th><th>Habilidades</th><th>Actitudes</th></tr>
<tr><td>Formula preguntas y elabora encuestas para obtener los datos que se requieren, e identifica quiénes deben responder.</td><td rowspan="3">5 de primaria</td><td rowspan="3">Las metas que se presentan equivalen a los DBA que se relacionan con la situación de Modelación.
Se reconoce la recolección, tabulación, graficación y análisis de datos como eje central del ambiente, y se utilizan con el fin de tomar conciencia en torno a este fenómeno que afecta a la comunidad educativa, incluyendo vecinos cercanos.
De igual forma, las metas de aprendizaje que se relacionan con los DBA y los EBC permiten abordar un contexto que, al final, resulta necesario analizar para la prevención de enfermedades.</td><td rowspan="3">Por medio de estas relaciones los estudiantes analizan aspectos de la cotidianidad por medio de la estadística, en este caso, por medio de datos, gráficos y tablas para utilizar el razonamiento, para determinar una o varias posibles soluciones y mejorar de alguna manera la calidad de vida de las personas.
La habilidad comunicativa se trabaja al divulgar los resultados y compartirlos con las personas encuestadas, con el fin de mostrar los riesgos a los que están expuestas.</td><td rowspan="3">Con la implementación del ambiente los estudiantes logran afianzar aspectos de la autonomía, en términos de recolectar los datos, enfrentarse a la búsqueda de personas y de información necesarias para llevar a cabo los objetivos, en ocasiones y espacios por fuera del horario escolar.
De igual forma se logra que los niños realicen un análisis de datos que va más allá de los aspectos matemáticos, y así propiciar estrategias para el cuidado personal.</td></tr>
<tr><td>Interpreta la información obtenida y produce conclusiones que le permiten comparar dos grupos de datos de una misma población.</td></tr>
<tr><td>Anticipa la ocurrencia de un evento simple.</td></tr>
</table>

1.2 Desarrollo de la situación

La situación se propuso a partir de los planteamientos de Ocampo-Arenas [6], quien pretende ver la Modelación Matemática como un ambiente que cuenta con unos momentos que no se dan de manera lineal sino dinámica, acorde con las necesidades del fenómeno, tal como se muestra en la Figura 1 donde se presentan los elementos que responden a este ciclo.

1.2.1 Reconocer el contexto y el fenómeno

Dada la cantidad de mosquitos en las aulas se llegó al acuerdo de estudiar el fenómeno del dengue, ya que es una problemática latente en el país y, en particular, en la zona donde se encuentra el colegio. Luego, para la introducción del fenómeno, se realiza la lectura de una noticia nacional [7]. Se discuten con los

[3] Derechos Básicos de Aprendizaje es un documento propuesto por el MEN, que permite orientar a la comunidad educativa en cuanto a los conocimientos mínimos en cada grado de escolaridad en matemáticas, ciencias naturales, lenguaje y sociales.

estudiantes preguntas respecto a qué es el dengue, qué lo ocasiona y cuáles deben ser los cuidados que se deben tener en los hogares y en el colegio.

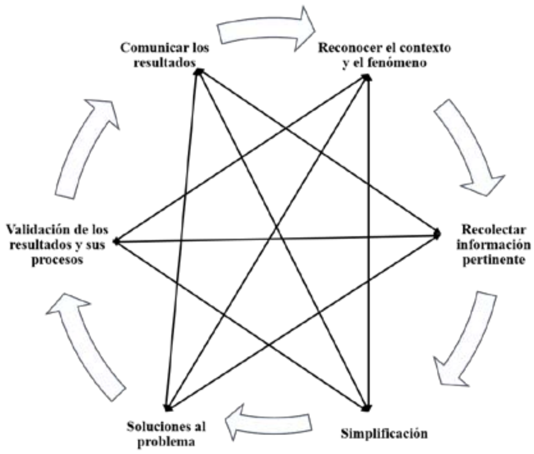


Figura 1. Momentos de un ambiente de Modelación Matemática [6]

1.2.2 Recolectar información pertinente

A partir de la lectura de la noticia y de los conocimientos que adquieren, los estudiantes proponen preguntas para realizar, por medio de una encuesta, al 10% de la población estudiantil, y determinar cuál es la probabilidad de que dicha población esté en riesgo de tener criaderos del mosquito que transmite el dengue. Para la elección de las preguntas de la encuesta los estudiantes realizan preguntas por equipos, las cuales son recogidas, compiladas y elegidas, de tal manera que no se repitan preguntas y que apunten a determinar la probabilidad de que ellos mismos estén en riesgo de tener criaderos del mosquito. Luego de los acuerdos y de complementar algunas preguntas se consolida la encuesta que se muestra en la Figura 2.

Comité anti dengue CEDBOS

Encuesta diagnóstica

Pregunta	Si	No	No responde
¿En su casa tiene aguas estancadas?			
¿Se debe lavar los lugares donde están las aguas estancadas?			
¿Ha identificado en el colegio aguas estancadas?			
Conoce ¿qué es el dengue y sus síntomas?			
¿Puedo contagiarme de dengue por estar en contacto con una persona que tiene dengue?			

Figura 2. Encuesta anti-dengue consolidada

1.2.3 Simplificación

Los estudiantes realizan la encuesta a sus compañeros y, a partir de las respuestas, identificaron elementos que no fueron significativos en el estudio, tales como la cantidad de muertes por dengue en el país, los diferentes tipos de mosquitos que existen o estadísticas en otros países. También eligieron centrarse en los síntomas del dengue, en la prevención y en la importancia de conocer los riesgos en el colegio y los hogares.

1.2.4 Propuestas de solución al problema y validación

Los estudiantes analizan en equipos la información recolectada en las encuestas por medio de tablas o gráficas estadísticas, que utilizaron para compilar la información y dar a conocer algunas conclusiones, que tienen que ver con las posibilidades de que las familias estuvieran en riesgo de tener criaderos de mosquitos y, por ende, de ser picados y contraer la enfermedad.

Luego escribieron un informe que expusieron a sus compañeros, en el que proponen estrategias para contrarrestar la alta probabilidad que encontraron con respecto al riesgo que corren sus compañeros de tener en sus casas criaderos de mosquitos. Los resultados y las soluciones propuestas fueron discutidas y mejoradas con el semillero de riesgos de la institución. Lo anterior cobró importancia dado que, en compañía con el Departamento Administrativo de Gestión del Riesgo de Desastres DAGRD, la institución había desarrollado un estudio acerca de la cantidad de mosquitos en el colegio y que había exterminado algunos de sus criaderos.

1.2.5 Comunicación de los resultados

Los grupos que realizaron las encuestas presentan una propuesta formativa en torno al dengue, la manera de evitarlo y la alta probabilidad que informaron los resultados con respecto al riesgo que corren en sus hogares. Entre las acciones que se realizaron estuvieron obras de teatro que dan cuenta de la información analizada, plegables y exposiciones con tablas y gráficas estadísticas para fundamentar sus hallazgos. En la Figura 3 se muestran evidencias de estas actividades.

Figura 3. Intervención de los niños en los diferentes momentos del Ambiente de Modelación

En el desarrollo del ambiente se designaron roles a los estudiantes con el fin de organizar su trabajo y propender por el trabajo en equipo:

- Los Encuestadores: que realizan el trabajo de campo.
- Los Digitadores: que pasan en limpio la información recolectada por Los Encuestadores.
- Los Observadores: que acompañan a Los Encuestadores en el trabajo de campo con el fin de reconocer elementos que puedan servir para el análisis, tales como gestos o datos adicionales que los encuestados verbalizaron y que no se registran en las encuestas.
- Los Revisores: una vez finalizan los análisis hacen una revisión general del trabajo.
- Los Expositores: encargados de dar a conocer los resultados a la comunidad educativa.

Al momento de designar los roles también se asignaron los grupos del colegio a los que se debía realizar la encuesta, lo cual es necesario para contar con una organización y garantizar que no se encueste varias veces a la misma persona. Finalmente, y para generar una identidad y reconocimiento, los niños usaron chalecos amarillos en medio de la comunidad educativa.

2. RESULTADOS Y ANÁLISIS

El Ambiente de Modelación posibilitó que los estudiantes construyeran encuestas a partir del objetivo de estudio, recolectarán datos, los tabularan, graficaran y analizaran. De acuerdo con esto, el ambiente generó espacios para explicar, describir, estimar y predecir [1], sin embargo, estas acciones no se dieron de manera separada, ya que tenían una finalidad y se dieron de manera paulatina a medida que las necesidades del grupo lo demandaban. En este caso fue necesario realizar gráficas de barras y circulares para que los equipos, que aún con la tabulación no comprendían el comportamiento de los datos y no sabían qué conclusiones podrían sacar de allí, identificaran los aspectos sobresalientes que mostraron evidencias de qué tan expuesta estaba la población frente al dengue.

Este ambiente permitió que los niños recolectaran su propia información y se les posibilitó la comprensión del contexto y el uso de la estadística para brindar soluciones a una problemática que afecta a la comunidad [3]. Esto difiere de algunas actividades propuestas en libros de texto, en las que los estudiantes organizan y grafican datos sin un contexto claro y, sobre todo, sin un contexto cercano; la diferencia radica en su motivación para el análisis de datos que ellos mismos recolectan, en sus conocimientos del contexto y en la facultad para proponer soluciones que se espera puedan contribuir a mejorar su calidad de vida.

De igual modo, los niños reflexionan y problematizan aspectos de la vida que causan problemas a la sociedad y que se pueden evitar. Reconocen a la estadística como parte del área de matemáticas, como una herramienta que los lleva a analizar y proponer soluciones a partir de aspectos que antes se centraban en un cumplimiento de deberes sin sentido; es decir, comprendieron la importancia de una gráfica y su interpretación, más allá de la parte estética que siempre tenían como eje principal, y utilizaron las tablas como herramienta para organizar información y la encuesta como posibilidad de generar conocimiento.

Otro aspecto a reflexionar con el ambiente tiene que ver con el trabajo en equipo que los niños realizaron y, aunque se presentaron varias situaciones que se debieron atender, descubrieron cómo las capacidades y habilidades de los demás pueden complementarse, de modo que todos aporten al proceso académico. Dialogar y escuchar para resolver diferencias trascendió lo estadístico, fue el eje central del proceso, fue lo que permitió que los análisis, la construcción de las gráficas, la organización y la recolección de la información se dieran de manera ordenada y sin pretender competir, sino como complemento.

Además, los aprendizajes que los niños dieron a conocer a la comunidad educativa permitieron ver a las matemáticas como un área que se puede utilizar para rescatar y discutir problemas sociales, y no solo para tratar operaciones y números, a veces sin sentido. Específicamente, en los primeros grados, donde se da la mono docencia (un profesor que asiste todas las asignaturas), los profesores reconocieron el trabajo de los estudiantes y manifestaron la importancia de realizar este tipo de actividades, donde las experiencias se convierten en vivencias significativas que es fácil recordar.

Las directivas también reconocieron en esta actividad una manera dinámica y significativa de desarrollar las situaciones genéricas que, aparte de desarrollar procesos comunicativos, posibilitan que los estudiantes de grado 5 hablaran de la posibilidad de ocurrencia para ayudar a una población en riesgo.

3. EVALUACIÓN

La profesora evaluó de manera continua el desarrollo del ambiente teniendo en cuenta las falencias que tanto ella como los estudiantes identificaron, y que había que fortalecer para finalizar el proceso. A medida que se desarrollan las actividades de recolección y análisis de datos se realizan preguntas como: ¿qué aprendimos hoy? ¿Cómo podremos aplicarlo a otros contextos? ¿Qué se nos dificultó? ¿Cómo podremos afianzar el conocimiento que aún no comprendemos? Y a partir de allí la profesora propone algunos ejercicios que permiten poner en práctica lo que se aprende y reforzar conceptos o procesos que aún no eran claros.

Escribe de 1 a 4 la valoración de cada ítem teniendo en cuenta que 1: no lo cumple, 2: pocas veces lo cumple, 3: Casi siempre lo cumple, 4: Siempre lo cumple						
Ítem	Valoración del compañero 1	Valoración del compañero 2	Valoración del compañero 3	Valoración del compañero 4	Mi valoración	Valoración de la docente
Cumple con las tareas del rol asignado						
Ayuda a los demás compañeros a alcanzar su objetivo del rol asignado						
En el proceso aporta conocimientos del fenómeno tratado						
En el proceso aporta conocimientos estadísticos para analizar la información						
El equipo cumple con la entrega de los informes						
Realizan el análisis de la información a partir de tablas y gráficas estadísticas						

Figura 4. Rúbrica para evaluación del proceso

De igual manera, a lo largo del ambiente se realizan exposiciones de cómo va el proceso de cada equipo, para que los demás compañeros y la profesora aporten apreciaciones y propongan elementos a mejorar; a partir de allí se logra articular una coevaluación de cada colectivo.

Al final del ambiente la profesora propuso diligenciar una rúbrica (Figura 4) para evaluar el proceso en los estudiantes. Es importante señalar que en la institución la evaluación es cualitativa, por lo que los números en la rúbrica solo representan una característica y, por ningún motivo, se promedian, sino que en conjunto se hace un análisis para llegar a una valoración final. Sin embargo, en otros contextos escolares los números se pueden utilizar en las rúbricas de acuerdo con la escala valorativa utilizada en cada institución.

4. TRANSFERENCIA O AMPLIACIÓN DE LA EXPERIENCIA A OTRAS SITUACIONES O CONTEXTOS

Aunque el ambiente que se presenta surge de un contexto propio de los estudiantes, se puede utilizar en torno a otras problemáticas que se viven en el barrio o ciudad; aspectos como la violencia, el índice de pobreza o el maltrato intrafamiliar podrían ser contextos para analizar y en los que se puede utilizar el mismo proceso que se presenta en la Figura 1.

Es importante tener en cuenta que en el diseño de las encuestas las preguntas son cerradas y permiten hacer una tabulación que indique datos que se puedan cuantificar para el análisis. Esto se debe a que es una posibilidad de medir la ocurrencia que más adelante lleve a la comprensión de la probabilidad, que en la escuela se limita a aplicar una fórmula. En este sentido es interesante cuando los mismos niños recolectan los datos, dado que garantiza que no sean sin contexto, o que no tengan significado alguno para ellos [3].

En caso de no identificar una problemática en el barrio que les interese a los niños, se invita a ver los vídeos que permitirán reflexionar en torno a cuestiones genéricas que vive el mundo:

- Calentamiento global: https://www.youtube.com/watch?v=6RtHJdYO5Y0
- Deshielo de los glaciares: https://www.youtube.com/watch?v=OCkQj-4aQaU
- Violencia intrafamiliar: https://www.youtube.com/watch?v=2Ht8Z7xGbuc

Luego de la visualización de los vídeos se debe motivar a los estudiantes con preguntas como: ¿qué aspecto llama más su atención? ¿Es posible estudiar alguno de estos fenómenos por medio de las matemáticas? ¿Cómo lo harían? Y a partir de allí llegar a un acuerdo del fenómeno elegido y tomar el ambiente que se presenta en este capítulo para dinamizar el proceso.

5. CONCLUSIONES

Se resalta que la experiencia, los conocimientos previos y las predicciones que los estudiantes realizaron en cada uno de los momentos, generaron un ambiente en el que la estadística cobró sentido con respecto a un fenómeno real, lo cual dejó de lado contextos comunes que se usan, como la tienda o el acto de regalar cosas. Lo anterior llevó a los estudiantes a comprender que las matemáticas pueden ayudarlos en determinados casos para realizar análisis de una problemática y su prevención, en este caso el dengue y la afección de salud que provocan los mosquitos.

Otra cuestión significativa en este proceso es que los conocimientos estadísticos que los estudiantes utilizaron aparecieron como herramienta para explicarles un fenómeno a las demás personas de la comunidad. Además, con el ambiente se evidenció que el papel del estudiante, aunque debe ser activo, también requiere la guía del profesor en todo momento, porque en varios equipos el conocimiento estadístico se utilizó de manera equivocada o requirió de más explicación, para que los análisis y explicaciones de los niños cumplieran con el objetivo del ambiente y llegaran a soluciones del fenómeno.

Resulta importante señalar que para los momentos en los que se necesitó que los estudiantes realizarán producción escrita en el ambiente de modelación matemática, como en el planteamiento de las preguntas para la encuesta y la escritura del informe para los compañeros, se necesitó el apoyo de la profesora de lengua castellana, ya que se identificaron falencias en el proceso de escritura. Lo anterior deja un tema abierto en cuanto a lo que permite la Modelación en la transversalización de las áreas, y cómo en la educación primaria se puede convertir en un asunto significativo, porque articula los conocimientos de cada una de ellas.

REFERENCIAS

[1] Zapata-Cardona L. (2018). Students' construction and use of statistical models: A socio-critical perspective. ZDM 50(7), 1213-1222.

[2] Ruíz N. (2014). La enseñanza de la estadística en educación primaria en América Latina. Revista iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación 13(1), 103-121.

[3] English L. (2015). Learning through modelling in the primary years. En Hoe N. and Kit D. (Eds.), Mathematical modelling: From theory to practice (pp. 99-124). World Scientific Publishing.

[4] Campos C. et al. (2015). Mathematical modelling in the teaching of statistics in undergraduate courses. En Stillman G. et al. (Eds.), Mathematical modelling in education research and practice (pp. 501-512). Springer.

[5] Parra-Zapata M. (2015). Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. Reflexiones a partir de la perspectiva sociocrítica de la modelación matemática. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia.

[6] Ocampo-Arenas M. (2020). Caracterización de la actividad matemática de los estudiantes de educación primaria en un ambiente de modelación matemática. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia.

[7] El Heraldo. (2019). Minsalud declara alerta nacional por dengue. Recuperado: https://www.elheraldo.co /colombia/minsalud-declara-alerta-nacional-por-dengue-608096

C 2

Una casa para la mascota: Acercamiento al proceso de modelación en el aula

Lina María Muñoz Mesa[1]
William David Patiño Ríos[2]
Universidad de Antioquia
Colombia

Este capítulo tiene como objetivo invitar a los profesores a la indagación de diferentes contextos, que pueden surgir de los estudiantes o que se pueden simular o construir, para que se conviertan en situaciones motivadoras para trabajar en el aula. Tal como lo indican los Lineamientos curriculares en matemáticas en Colombia [1], la aproximación de los estudiantes a las matemáticas a través de situaciones-problema, procedentes de la vida diaria, le imprime el carácter cultural para el desarrollo del pensamiento y a la construcción de significado y sentido, para darles uso a las matemáticas escolares.

Estructurar diferentes contextos en los cursos de matemáticas les permite a los profesores planear una enseñanza-aprendizaje *haciendo*, entendido como las acciones relacionadas entre sí en la construcción de conocimiento. En consecuencia, en este capítulo se concibe a la Modelación como *una manera de construir* y se define a partir de los Lineamientos curriculares en matemáticas como el *juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas* [1]. En palabras de Biembengut y Hein [2], podríamos decir que la matemática y la realidad son dos conjuntos disjuntos y que el modelado es un medio para vincularlos. Se propone entonces el contexto particular *Las mascotas*, donde se evidencia la interrelación y promoción del conocimiento matemático y las diferentes soluciones que pueden ofrecer los estudiantes, resaltando un pensamiento creativo y de múltiples alternativas en el escenario cotidiano, donde las matemáticas y otras ciencias se ven aplicadas.

La modelación matemática puede resaltarse entonces como una manera de acercar las matemáticas escolares a la realidad de los estudiantes y su entorno, lo cual propicia la oportunidad de generar experiencias de aprendizaje. Así mismo, los Lineamientos curriculares en matemáticas [1] también mencionan la modelación como un proceso general, que parte de una situación problema real hasta la formulación de un modelo matemático, y resalta que el aprendizaje de las matemáticas debe proporcionarle al estudiante la aplicación de sus conocimientos por fuera del ámbito escolar. El término *real* se considera como *contextos cotidianos sociales, culturales de consumo o de otras ciencias* [3], donde se coloca de manifiesto la importancia de los estudiantes con el medio y los seres que están en escena en dicho medio, en este caso los animales.

Para el desarrollo de esta situación contextualizada en el mundo de las mascotas, y de acuerdo con las definiciones de modelación, se resalta que los Lineamientos curriculares en matemáticas [1] expresan que *la modelación puede hacerse de modos diferentes, que simplifican la situación y seleccionan una manera de representarla mentalmente, gestualmente, gráficamente o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos, para formular y resolver los problemas relacionados con ella*. Bajo esta perspectiva, este trabajo les muestra a los profesores una situación recreada: *Las mascotas: Una amistad para toda la vida*, que parte de un escenario cercano a los estudiantes y los lleva a visualizar diferentes maneras de representación al momento de responder a un reto, tarea o problema, y de construir significados asociados entre el mundo que los rodea y las matemáticas escolares que les enseñan.

---

[1] Contacto: *limamu07@gmail.com*
[2] Contacto: *wdavid0@gmail.com*
Grupo de Investigación MATHEMA - FIEM

La diversidad de situaciones-problema o de modelación permite que los estudiantes pongan en escena los diferentes estilos de aprendizaje y el aula pueda convertirse en un espacio donde se aprende a partir de los diferentes contextos sociales, para hacer análisis y estructurar soluciones alternas, así como los muestra la vida. En esta idea, la situación promueve que cada estudiante determine una solución y que se genere la relación entre los saberes previos, familiares y sociales, entre otros, que hacen parte de la reflexión al momento de tomar una decisión y dar respuesta con un modelo o representación, que se ajuste a las condiciones de la situación en el contexto particular. Es por esto que se hace necesario mencionar que *un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible* [4]. Teniendo en cuenta esta visión, la situación es ejemplo de uno de estos sistemas representativos que dan respuestas diversas y de manera contextualizada a la idea de casa y a las relaciones sociales de ella, con los diferentes seres vivientes que pueda referenciar cada estudiante.

Las áreas que componen el plan de estudios deben contribuir al desarrollo integral de los estudiantes y, particularmente, la educación matemática propone *un aprendizaje de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, que no sólo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos sino en procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender* [1]. En el desarrollo del pensamiento matemático, este capítulo expone una situación que implica aportes al desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos, del pensamiento métrico y sistemas de medidas y del pensamiento aleatorio y sistemas de datos, pero no quiere decir que no se aborden los demás, ya que no se pueden ver de manera separada, sino complementaria. Es de aclarar que esta situación no desarrolla el pensamiento matemático, sino que realiza aportes a la comprensión de algunos conceptos que se abordan en cada sistema y, con el estudio de otras, puede contribuir a que al finalizar el ciclo escolar el estudiante tenga un pensamiento más estructurado y con las bases para que resuelva situaciones al considerar la cotidianidad y su edad.

Para la lectura de este capítulo es importante que el profesor se sienta en libertad de mirar sus aportes a la situación cuando la desarrolle en el aula, como eje necesario para que los resultados se centren en los estudiantes y sus necesidades. Lo que se presenta aquí es una oportunidad para el desarrollo de la modelación como una competencia, donde los estudiantes sean protagonistas y produzcan razonamientos a partir de situaciones que viven o escuchan en los ámbitos social, escolar y familiar, dándole al profesor la libertad de modificar, complementar y ajustar las actividades según su propio escenario. En este sentido, y como lo expresan Biembengut y Hein [5], en la modelación se debe tener *como premisa la promoción del conocimiento matemático y la habilidad para aplicarlo en otras áreas del conocimiento, es decir, proporcionar elementos para que el alumno desarrolle sus potencialidades, propiciando el pensamiento crítico e independiente*.

Asimismo, se resalta que el desarrollo de clases basadas en situaciones de modelación (contextos dados en situaciones cercanas a los estudiantes o a la institución), promueve que los aprendizajes en matemáticas se vean en y para una funcionalidad, utilidad o necesidad de comprender mejor el mundo que rodea a los estudiantes y la resolución de problemas, en conjunto con otras competencias generales o habilidades como la argumentación, comunicación, descripción y toma de decisiones, entre otras, que el estudiante desarrolla y emplea para ser crítico frente a situaciones que lo involucran de manera directa.

1. METODOLOGÍA

1.1 Identificación de la situación

- *Presentación de la situación.* Las Mascotas: Una amistad para toda la vida. En los hogares, y en ocasiones las escuelas, se tienen mascotas para darles alegría y como compañía de las personas. Hay evidencia de que las mascotas acompañan a las personas y les ayudan a superar algunas dificultades emocionales, por lo que los humanos son responsables de su sostenimiento y cuidados permanentes.

  En los últimos años se incrementado en Colombia las ventas y la adopción de todo tipo de mascotas, tales como perros, gatos y aves, entre las más comunes. Los especialistas aseguran que los beneficios en los niños van desde un adecuado desarrollo social hasta la adquisición de valores importantes como la responsabilidad y la amistad. Asimismo, se ha promovido normas y grupos que velan por sus derechos y bienestar de manera conjunta. En este sentido, en la escuela y en los hogares se debe conocer los cuidados y resaltar que dentro de las responsabilidades está el aseo del lugar donde duermen, darles los alimentos adecuados y necesarios, sacarlos a pasear y tratarlos de manera adecuada, entre otros. Y es aquí donde el profesor puede aprovechar esta situación como una oportunidad para llevar las matemáticas al contexto vivencial de los estudiantes, planear el diseño y la construcción de una casa para mascotas (conceptos geométricos y espaciales), cantidad de alimento según raza (conceptos numéricos y propiedades), edad, peso y muchos otros aspectos que para su comprensión los estudiantes necesiten conceptos particulares que desarrollen cercanía a las matemáticas.

La situación de *Las Mascotas: Una amistad para toda la vida* busca como reto principal que los estudiantes propongan una casa para la mascota en la escuela. Construir con los estudiantes una variedad de esquemas de casas, es una oportunidad de aprender conceptos de los pensamientos geométrico y métrico, principalmente. Además de las relaciones que se generan con otros pensamientos y áreas del conocimiento, que se especifican en las metas de aprendizaje.

La situación se desarrolla en tres momentos: inicio, desarrollo y cierre. En el primero se presenta a los estudiantes experiencias de exploración, motivación y saberes previos. En el segundo se plantean actividades de construcción conjunta e individual de una casa para la mascota, y se generan esquemas y conceptos diversos en el camino, para dar respuestas al reto principal. Y en el tercero se proponen ideas de consolidación para exponer las construcciones y soluciones al reto.

- *Metas de aprendizaje.* Se proponen varias metas de aprendizaje, pero será el profesor quien les dará alcance o no, según el contexto particular que tenga en el aula. La invitación es a que retome de la situación los elementos que considere pertinentes, de acuerdo con las características de los estudiantes, el contexto institucional propuesto en el plan de área y de aula, entre otros. Asimismo, se seleccionan ciertos Derechos Básicos de Aprendizaje DBA [9] y evidencias de aprendizaje, susceptibles de complementar según el grado o relaciones matemáticas y de otras ciencias que el profesor proponga. Estos aprendizajes y competencias se mencionan en el desarrollo de la situación, en la medida en que se relacione con las actividades propuestas.

  El desarrollo de clases basadas en situaciones o tareas de modelación (contextos dados a partir de situaciones cercanas a los estudiantes o a la institución), promueve que los aprendizajes en matemáticas se vean en y para una funcionalidad, utilidad o necesidad de comprender mejor el mundo; y la resolución de problemas determina el conjunto de habilidades o competencias que el estudiante desarrolla y emplea para ser crítico frente a situaciones que lo incluyen. En este sentido, se busca promover con la implementación de los diferentes contextos habilidades como: representar, modelar, argumentar y comunicar, entre otras. El profesor puede determinar las que considere necesarias.

  Los aprendizajes, los DBA y los Estándares Básicos de Competencias EBC que se presentan en la Tabla 1, los pueden ampliar o analizar los profesores con base en el desarrollo que se da en el contexto particular del aula.

Tabla 1. Metas de aprendizaje

Metas de aprendizaje	Ciclo o Grado	Relación con DBA y EBC	Habilidades	Actitudes
Los estudiantes establecen relaciones entre medidas como longitud, área y volumen, de acuerdo con las necesidades y requerimientos que consideren apropiados para la casa de la mascota.	El contexto de las mascotas tiene múltiples posibilidades de establecer relaciones en el aula con diversas áreas del conocimiento, tales como lenguaje, matemáticas, sociales, ciencias naturales,	Las diferentes posibilidades de aplicación de la situación puedes llevar a evidenciar los siguientes aprendizajes u otros que cada profesor considere: *EBC ciclo uno. Pensamiento métrico*: Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se pueden medir, como longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, y en los eventos su duración.	Modelar Representar Resolver problemas Argumentar Calcular Comunicar Medir	Trabajo cooperativo. Expresar ideas con respeto. Cooperar y compartir en tareas. Iniciar, permanecer y contribuir a

Los estudiantes desarrollan procesos de medición y estimación usando patrones arbitrarios e instrumentos estandarizados, para la construcción de una casa para la mascota. Los estudiantes comparan diferentes unidades de medida, seleccionando la que consideren más apropiada según la situación. Los estudiantes proponen diferentes procedimientos para realizar cálculos aritméticos al resolver retos en diferentes contextos.	ética y, dependiendo del grado de profundidad, puede planear actividades para diferentes niveles de escolaridad. Esta situación se sugiere para los grados tercero (ciclo uno) y cuarto (ciclo dos), no queriendo decir que no se pueda aplicar en otro grado de la básica secundaria.	Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo con el contexto. *DBA Grado tercero. DBA Cinco*: Realiza estimaciones y mediciones de volumen, capacidad, longitud, área y peso de objetos, o la duración de eventos como parte del proceso para resolver diferentes problemas. *Evidencias de aprendizaje*: Compara objetos según su longitud, área, capacidad, volumen, etc. Hace estimaciones de volumen, área y longitud en presencia de los objetos y los instrumentos de medida, y en ausencia de los mismos. *EBC. Ciclo Uno. Pensamiento espacial*: Realiza construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales. *EBC. Ciclo dos. Pensamiento espacial*: Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas. Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y realizo el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura. *DBA Grado cuarto. DBA Cinco*: Elige instrumentos y unidades estandarizadas y no estandarizadas para estimar y medir longitud, área y volumen, y a partir de ellos hace los cálculos necesarios para resolver problemas *Evidencia de aprendizaje*: Expresa una misma medida en diferentes unidades, establece equivalencias entre ellas y toma decisiones de la unidad más conveniente, según las necesidades de la situación. *DBA Seis*: Identifica, describe y representa figuras bi y tridimensionales, y establece relaciones entre ellas. *Evidencia de aprendizaje*: Arma, desarma y crea formas bidimensionales y tridimensionales. Reconoce, entre un conjunto de desarrollos planos, los que corresponden a determinados sólidos, atendiendo a las relaciones entre la posición de las diferentes caras y aristas. *EBC Ciclo uno. Pensamiento aleatorio y sistemas de datos*: Clasifico y organizo datos de acuerdo con las cualidades y atributos y los presento en tablas. *DBA Grado tercero.* *DBA diez*: Lee e interpreta información contenida en tablas de frecuencia, gráficos de barras o pictogramas con escala, para formular y resolver preguntas de situaciones de su entorno. *Evidencia de Aprendizaje*: Construye tablas y gráficos que representan los datos a partir de la información dada.		conversaciones de calidad. Resolver conflictos de manera conjunta. Comunicación asertiva.

Nota: Con esta propuesta de modelación no se garantiza el desarrollo total de las metas de aprendizaje, pero se garantiza que puede empezarse a trabajar con los estudiantes, como una alternativa que no debe ser la única que el profesor aborde en el transcurso del año escolar.

1.2 Descripción de la situación: Las Mascotas: Una amistad para toda la vida

Las mascotas mueven los más lindos sentimientos, en especial en los niños que se identifican y desarrollan gran empatía por los animales desde sus primeros años de vida. En la actualidad, son un miembro más de la familia, por lo que se presenta un caso que puede pasar en los colegios y que se convierte en una situación de modelación escolar, además de motivante para los estudiantes y su proceso de aprendizaje (Figura 1).

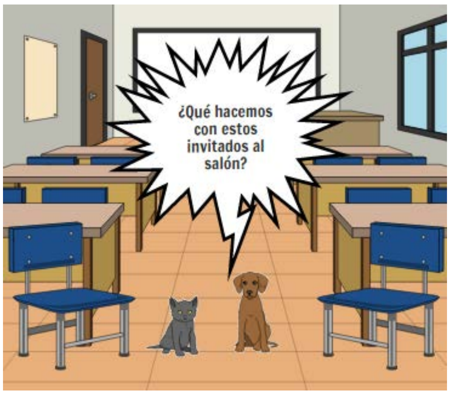


Figura 1. Las mascotas en el aula

1.2.1 Momento de inicio

Con motivo de la aparición de un gato en la escuela, que cautivó la atención de estudiantes, profesores y demás integrantes de la comunidad académica, los profesores de grado tercero decidieron, a partir de esta situación particular, trabajar el pensamiento métrico y sistemas de medida con los estudiantes. Los grupos del grado tercero están en el tercer piso del colegio y al parecer, a esta nueva mascota, le encantan las alturas, pues suele caminar por el techo de los salones y, de vez en cuando, acompaña a los estudiantes en las clases.

De esta situación surge el proyecto: *Las Mascotas, una amistad para toda la vida*, que fue creado por los estudiantes debido a que quieren que el gato se vuelva un integrante más de la escuela. Con el fin de motivar a los estudiantes se propuso la lectura del cuento: *Un gato en el colegio*, de J. Patrick Lewis, e ilustrado por Ailie Busby. El texto puede aportar otros elementos iniciales que el profesor considere apropiados para motivar el proyecto en los estudiantes: lectura en vos alta, trabajo con palabras, dibujo de animales, estructura de un colegio, cualidades de los gatos y del grupo al que pertenece, entre otros. A continuación, se comparte la letra, sin embargo, la invitación es a que se tenga el libro para su lectura con las respectivas ilustraciones.

En el aula del colegio
y en un cálido rincón
se estaba echando la siesta
un gatito dormilón.
Marisa, la profesora
de los niños de Infantil,
señaló al gato dormido
y dijo: -Mirad allí.
Lo encontró el señor Botones
en el patio del recreo,
y cuando lo acariciaba
notaba su ronroneo.
Es un gatito perdido
o tal vez lo abandonaron.
Por eso lo trajo dentro.
Estaba muy asustado.
Es lo mismo que un peluche:
dulce, suave, mimosón ...
y sus patas son tan blandas,
como bolas de algodón.

¿Y qué nombre le ponemos?
Puede llamarse Rubito.
Pienso que le va a gustar.
Es un nombre muy bonito.
-Rubio, ven, ¡Siéntate aquí!
-dijeron Ana y Raquel.
-No, no. ¡Ven aquí Rubito!,
-Gritaron Luis y Manuel.
Pero la Laura lo llevó
cerca de la profesora
y se sentaron los dos
muy juntos sobre la alfombra
Vanessa dijo de pronto:
-Rubito no va a aprender.
No conoce los colores
y nunca sabrá leer
-Tampoco puede sumar
-aclaró entonces David-.
Los gatos no saben nada,
solo jugar y dormir.

Como ha venido al colegio
tiene la oportunidad
de aprender como vosotros

porque es un gato escolar.
¿Cómo se llama el felino
que estoy dibujando yo?
Son sus platos preferidos
el pájaro y el ratón.
<<Miau>> el gato contestó.
-Cinco conejos dormían
en su cama calentitos.
Uno se cayó y quedaron...
<< ¡Miau!>>, le contestó el gatito.

-El gorro va en la cabeza;
el pie, dentro del zapato.
¿Hacemos otra pareja?
<< ¡Miau!>>, dijo entonces el gato.
Rubito era inteligente
todos los niños lo vieron
Y estaban muy orgullosos
de su nuevo compañero.
-Este gato es muy listo.
Es muy listo este gato.
Es dulce y cariñoso
Y, además, es muy guapo.
Antes vivía en la calle;
ahora, sin duda, prefiere
el colegio y su camita
del cajón de los pinceles.
La profesora llevaba
su abrigo de color rosa
y se acercó a la pizarra
para escribir esta nota,
Vamos todos a cantar
Esta bonita canción:
¡Adiós, Rubito, nuestro amigo!
¡Hasta luego!
¡Adiós, adiós!
Cuando los niños se iban,
el gato les despidió
con un maullido amistoso
y se salió del cajón.
Luego se estiró dos veces
y tres veces bostezó
Como le llegaba el sueño,
sobre la C se durmió.
Soñó con un cueco lleno
de leche bien calentita.
Con un plato donde estaba
su comida favorita.
Con los gatos vagabundos
que en la calle frecuentaba...
Y el mejor sueño que tuvo
fue el del colegio: su casa.

Nota: También pueden visualizar el cuento con actividades sugeridas para trabajar con los estudiantes, según el nivel donde se encuentren, en el enlace: Https://www.youtube.com/watch?v=-E1wum000jQ

Luego de la lectura o visualización del anterior cuento, se les plantea a los estudiantes algunas preguntas literales, inferenciales o intertextuales, que darán cuenta de elementos que componen la comprensión de los estudiantes frente al texto. Estas preguntas pueden ser ampliadas según las necesidades de cada profesor, el grupo o el contexto.

- ¿Cuál será el nombre del gato? ¿Cómo podemos elegir su nombre?
- ¿Saben otro cuento sobre gatos? ¿Cuál?
- ¿Quiénes tienen gatos en sus casas? ¿Cómo lo consiguieron? ¿Cómo se llaman? ¿Cuáles son los comportamientos más comunes de los gatos?
- ¿Cómo puede ser el sitio donde duerma el gato? ¡Debemos protegerlo del frío!
- ¿Qué datos debemos saber para construir la casa del gato?

Nota: En las dos últimas preguntas debe surgir la idea de medir al gato para saber qué tan grande puede ser la casa, además de las maneras y materiales posibles y otros elementos que los estudiantes mencionen y que permitan la identificación de algunas medidas: alto, ancho, largo, por ejemplo.

Con la respuesta a la primera pregunta se propone realizar una lluvia de ideas y seleccionar determinados nombres que proponen los estudiantes, para que se genere una votación y así elegir el nombre para el gato. Se sugiere: recolectar, organizar y presentar los datos en diferentes representaciones como tablas y pictogramas. De esta manera se podrá evidenciar el aprendizaje: Construye tablas y gráficos que representan los datos a partir de la información dada (DBA 10 – Grado tercero V2). Además, se realizarán conclusiones y tomarán las decisiones para el nombre del gato. También se puede aprovechar para repasar los nombres propios, las características, la historia de los nombres de los estudiantes, entre otros (lengua castellana - sociales).

Con la respuesta a las dos últimas preguntas se incentiva un concurso para diseñar una casa para el gato. Las condiciones las diseña cada profesor, de acuerdo con las particularidades del grupo o contexto escolar (materiales, colores, ganadores, entre otros). Y para las medidas requeridas en la construcción de la casa del gato, el profesor tendrá en cuenta las siguientes orientaciones:

1. Dividir el grupo en subgrupos, según la cantidad de estudiantes (se sugiere organizarlos de 3 o 4). Propiciar preguntas o la oportunidad para que los estudiantes determinen el número de integrantes o el número de grupos que se pueden formar, dada la cantidad total en el grupo y viceversa, y dados los grupos se podrían formar con la cantidad de estudiantes que son (estructura multiplicativa).

2. Cada subgrupo debe elegir el color o lápiz más grande que tengan en sus cartucheras (bolsas para guardar los colores y lápices). Esta sería la medida arbitraria.
3. Cada subgrupo determinará con el color o lápiz que se eligió, el cumplimiento de las siguientes relaciones entre el largo, ancho y alto de la casa para el gato que construirán.

La Tabla 2 les permite a los profesores hacer una explicación inicial de la necesidad de medir que, durante el desarrollo de la humanidad, ha pasado por diferentes tipos de medidas y que se consolida en la utilización de medidas estandarizadas para establecer algunas tareas.

Tabla 2. Relación ente las unidades de medida (arbitrarias)

				Medida del lápiz o color elegido por cada grupo
				Ancho: Dos veces la medida que tiene el lápiz o color elegido
				Alto: Tres veces la medida que tiene el lápiz o color elegido
				Largo: Cuatro veces la medida que tiene el lápiz o color elegido

Nota: Las medidas que se toman con objetos no estandarizados permite una construcción de la noción de unidades de medidas estandarizadas, dando prioridad a la estimación.

Se sugiere que se les presente a los estudiantes uno de los siguientes vídeos, que indican cómo medir y sirven para introducir el concepto de medida estandarizada:

- La escuela de herramientas de Manny: Cómo medir cosas: https://www.youtube.com/watch?v=SYd9yQxWqRk
- Las unidades de medida videos educativos para niños: https://www.youtube.com/watch?v=wk6WSiILWvU

Esta actividad acerca a evidenciar el aprendizaje: Compara objetos según su longitud, área, capacidad, volumen, etc. (DBA 5 – Grado tercero. V2). La invitación es a que se pase de la medida elegida (lápiz o color) a la estandarizada (metro o centímetro). Es por esto que se les pide a los estudiantes que realicen una relación de equivalencia entre el lápiz o color con la regla o el metro, se sugiere para esto ampliar la Tabla 2, como se muestra con la Tabla 3.

Tabla 3. Relación entre unidades de medida estandarizada

				Medida en centímetros del lápiz o color seleccionado:
				Medida en cm:
				Medida en cm:
				Medida en cm:

Nota: La relación entre las medidas no estandarizadas y estandarizadas permite avanzar en la construcción del pensamiento métrico. Así como se expresa en [4]): *Históricamente, el pensamiento métrico se perfeccionó con el refinamiento de las unidades de medida de longitud, tomadas al comienzo de partes del cuerpo y por tanto muy diversas en cada región y cultura, que fueron luego estandarizadas para el comercio y la industria*.

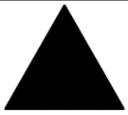
Los estudiantes deben acercarse a elegir instrumentos, unidades estandarizadas y no estandarizadas para estimar y medir longitud, área, volumen, y establecer relaciones entre ellas. En esta primera parte es importante que se construya con ellos la correspondencia a partir de la longitud, más adelante se puede establecer las medidas de área y de volumen, dados los datos de las Tablas 2 y 3.

En la idea de acercamiento a la estructura que tiene una casa para el gato, y de establecer relaciones entre medidas y figuras, se proponen las siguientes actividades complementarias que permiten evidenciar el aprendizaje de hacer estimaciones de volumen, área y longitud en presencia de los objetos y los instrumentos de medida, y en ausencia de ellos, en este caso de longitudes y áreas.

- *Actividad 1*. Para la construcción de una casa podemos emplear las figuras planas de la Tabla 4.

  En este espacio se puede aprovechar, para repasar las características que tiene cada figura en perspectiva, los lados, vértices y ángulos. Identificar elementos del entorno compuestos por las figuras. Además de acercarse a la identificación de la semejanza y congruencia entre ellas. En esta primera actividad el profesor puede recurrir a libros de texto, vídeos, esquemas de dibujo con tiza en el piso, definición con cinta de colores en el piso, entre otras herramientas, que le permitan y estén a disposición para el repaso de las tres figuras.

Tabla 4. Identificación de algunas figuras geométricas

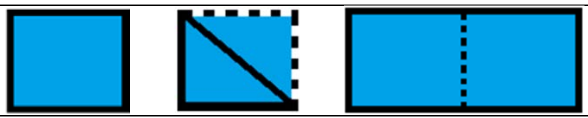
Triángulo	Cuadrado	Rectángulo
		

Ahora se le pide al estudiante que realice esquemas que tengan las siguientes relaciones de área (se puede emplear material concreto para la realización de esta actividad o dibujarlo en el plano):

- Construye un cuadrado que el lado mida 6 centímetros (puede variar la medida).
- Construye un triángulo que sea la mitad del cuadrado anterior (área).
- Construye un rectángulo que tenga el doble del área del cuadrado inicial.

El anterior ejercicio, les permitirá a los estudiantes comparar figuras geométricas y establecer relaciones entre ellas, como se muestra en la Tabla 5.

Tabla 5. Relación entre las áreas de algunas figuras geométricas



Cuando tengan las figuras construidas (en el caso de que sea con material concreto), se puede solicitar a los estudiantes que respondan:

- ¿Cuántos triángulos puede contener el cuadrado?
- ¿Cuántos triángulos puede contener el rectángulo?
- ¿Cuántos cuadrados puede contener el rectángulo?

Nota: Es importante que el profesor amplíe las preguntas, dependiendo de las medidas o las figuras que seleccione, en el caso de que decida colocar otras en el ejercicio, esto con el fin de identificar la relaciones que se pueden establecer entre diferentes figuras.

- *Actividad 2*. Con el fin de realizar un trabajo más amplio con las medidas no estandarizadas y su relación con la estandarizada, se propone que los grupos tomen como referencia el lápiz que se seleccionó y realicen la medición del largo y del ancho del cuaderno, como se indica en la Figura 1. Pueden consignar las medidas del grupo en una tabla que se dibuje en el tablero, como se muestra en la Tabla 6.

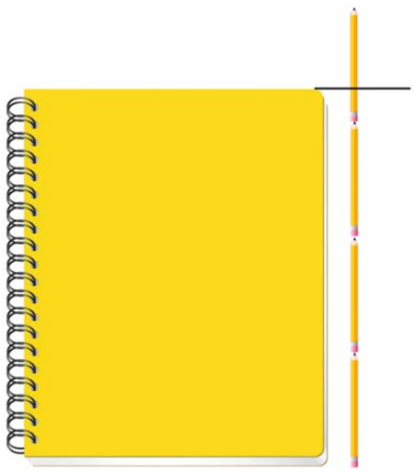


Figura 1. Medición de un cuaderno con lápices

Tabla 6. Recolección de datos que surgen de la medición de objetos

Objeto para medir	Número de lápices	Relación en centímetros
Cuaderno o libro	Largo:	Largo:
	Ancho:	Ancho:

En esta actividad se evidencia el aprendizaje de construir tablas y gráficos que representan los datos a partir de la información dada, al hacer un análisis de los datos a nivel grupal, luego de tener todas las medidas de los subgrupos.

- *Actividad 3*. Tomar otra medida arbitraria diferente al lápiz, puede ser un trozo de madera, y determinar la altura y el ancho de la puerta usándolo como instrumento de medición, como se ve en la Figura 2.

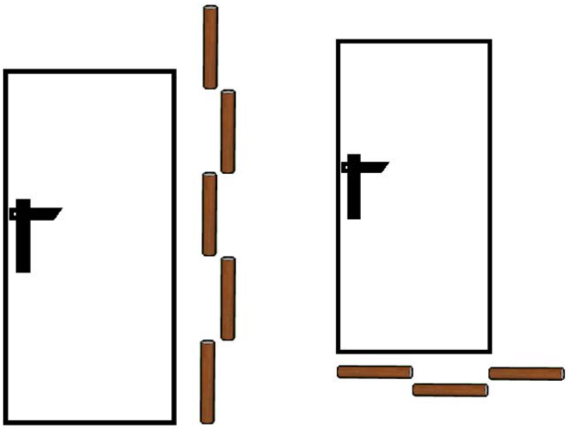


Figura 2. Medición de una puerta con trozos de madera: Alto y ancho

Además, realizar la relación con la medida estandarizada, como se realizó con el lápiz, y diligenciar en el tablero la Tabla 7.

Tabla 7. Recolección de datos que surgen de la medición de objetos.

Objeto para medir	Número de lápices	Relación en centímetros o metros
Puerta	Altura:	Altura:
	Ancho:	Ancho:

- *Actividad 4*. Se propone la medición de la altura de los estudiantes, para esto se puede emplear el trozo de madera de la actividad anterior, como se indica en la Figura 3. Se sugiere que se construya en cada equipo una tabla, como la que se expuso en la Tabla 7.

Figura 3. Medida de la altura de una persona

- Luego analizar relaciones entre las medidas encontradas al considerar preguntas como las que se proponen a continuación:

- ¿Cuál es el estudiante del subgrupo que mide más? ¿Cuánto más que los demás?
- ¿Cuál es el estudiante del subgrupo que mide menos? ¿Cuánto menos que los demás?
- ¿Cuál es la diferencia que hay entre la medida de la puerta y la de cada uno de los estudiantes de cada subgrupo?
- Si uno de los integrantes del grupo se le sube en los hombros a otro, ¿Cómo determinarían la altura de esta escalera humana? Realiza lo que propones para encontrar esta medida.

Nota: El profesor puede recurrir a otras preguntas que considere necesarias.

El profesor puede ampliar o relacionar estas u otras actividades que considere con otros EBC, como:

- Ciclo uno – Pensamiento y sistema numéricos
    - Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización, entre otros).
    - Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos.

- Ciclo dos – Pensamiento y sistema numéricos
    - Identifico y uso medidas relativas en diferentes contextos.

El momento de inicio invita al profesor a relacionar diferentes aprendizajes a partir de la medición para construir relaciones entre lo unidimensional y bidimensional, para encontrar en el momento de desarrollo las relaciones con lo tridimensional al trazar una posible ruta que se puede emplear con esta construcción, u otras que surjan en el aula de clase o contexto.

1.2.2 Momento de desarrollo

Para darle continuidad al proyecto se propone que se genere un concurso, en el cual se les solicita a los estudiantes diseñar una casa para la mascota, es decir, construir el dibujo o plano con especificaciones que se acerquen a la realidad empleando una escala pertinente. Teniendo en cuenta los diseños que presentan los estudiantes, en la Figura 4 se presentan algunos ejemplos ilustrativos de cómo puede ser la casa para una mascota, según las características de cada animal: tamaño, necesidad, hábitat, materiales para construirla y demás características que se consideren necesarias para una adecuada construcción.

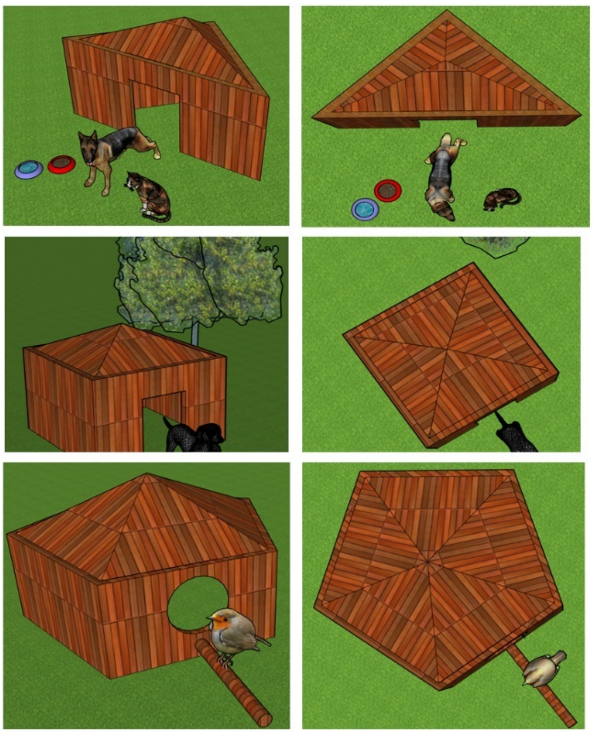
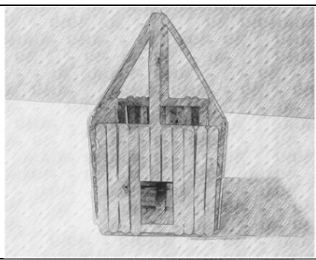
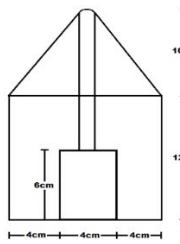
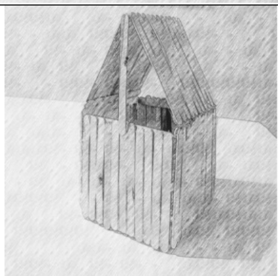
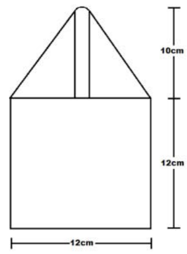
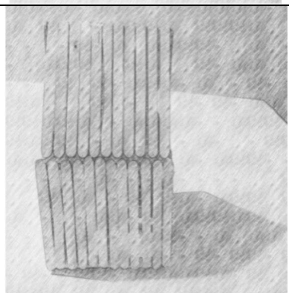
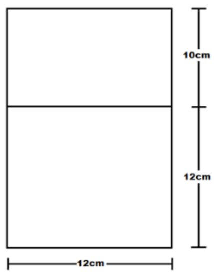


Figura 4. Ejemplos de casas para mascotas

Los materiales para la construcción de las casas pueden ser variados, incluyendo madera, plástico, papel, cartón, tela, y pueden ser adquiridos como material reciclable, lo que fomenta el cuidado del medio ambiente. A su vez, y con el fin de vincular un contexto geométrico, los planos y el diseño de las casas se basarán en figuras geométricas, como triángulos, cuadrados, círculos, trapecios y pentágonos, y con esto abordar no solo temáticas a partir del pensamiento métrico, sino como excusa para hablar de vértices, caras, aristas, áreas y demás elementos que se puedan trabajar en los sistemas geométricos.

Como ejemplo ilustrativo el profesor puede construir con sus estudiantes una casa para un hámster, iniciando con un esquema o plano y, posteriormente, promover la construcción con palos de paleta, por ejemplo. En la Tabla 8 se muestra un ejemplo, pero el profesor es libre de tomar un diseño y materiales diferentes para su construcción.

Tabla 8. Rúbrica construcción de una casa para mi mascota

Mascota: Hámster Escala de diseño: 1:1	**Esquema**	**Plano**
		
Descripción de la casa: Casa con palos de madera, de base rectangular con puerta en la parte frontal sin ventanas y con techo en cúspide.		
		

Dimensiones	**Largo**	**Ancho**	**Alto**
De la mascota	8cm	4cm	4cm
De la casa	12cm	12cm	22cm
Materiales empleados	**Unidad**	**Cantidad**	
Madera (palos paleta)	12x1	1000	
Silicona	barra	3	
Cartulina	Pliego	1	

Como proceso de modelado se sugiere realizar un diseño o plano a escala 1:1, con el fin de que sirva como guía para el proceso constructivo. Una vez se tenga el diseño y el plano, se procede a construir la casa para la mascota con los materiales seleccionados (Figuras 5 y 6).

Este ejemplo lleva a identificar las siguientes evidencias de aprendizaje: *Arma, desarma y crea formas bidimensionales y tridimensionales*. Además de que el estudiante *Reconoce entre un conjunto de desarrollos planos, los que corresponden a determinados sólidos atendiendo a las relaciones entre la posición de las diferentes caras y aristas*. En este sentido, la invitación es a que el profesor según diferentes estrategias pueda establecer evidencias de aprendizaje como las anteriores, en los procedimientos dados en la diversidad y creatividad.

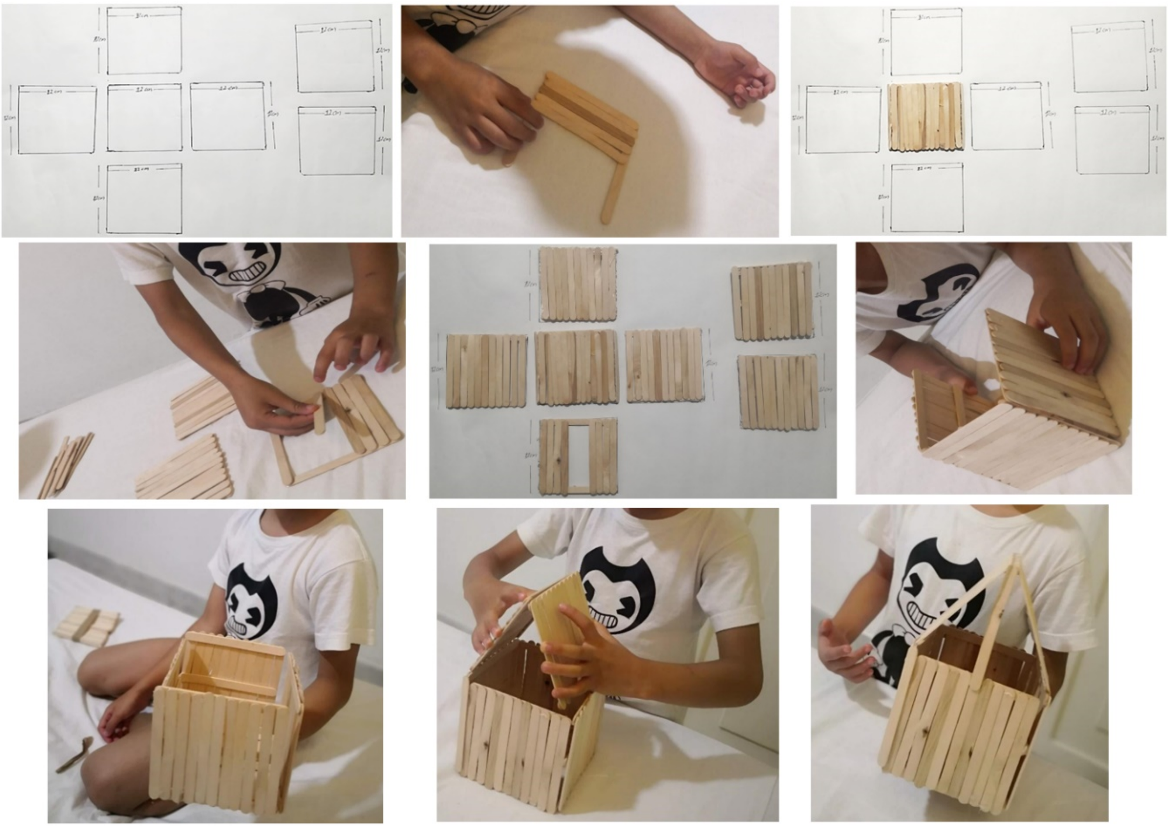


Figura 5. Proceso de construcción de la casa para el Hámster

Figura 6. Comparativo entre esquema y construcción

En la Tabla 9 se presentan algunas preguntas que pueden desencadenar actividades, temáticas y otros aprendizajes que tienen que ver con la situación, en términos de ampliación, complemento o variación según el contexto del grupo.

Tabla 9. Preguntas orientadoras para abordar la situación

Relación con las matemáticas	Relación con otras áreas
¿Cuál es el tamaño de la mascota? ¿Qué edad tiene la mascota? ¿Cuál es la relación entre tamaño y edad? ¿Crecerá aún más la mascota? ¿Cuánto? ¿Por qué? ¿Qué medirías en la mascota para conocer su tamaño? ¿Cómo se aconseja medir la mascota, de pie o acostada? ¿Por qué? ¿Cuál debería ser el tamaño apropiado para la casa de la mascota? ¿Cuáles son las variables para tener en cuenta para elegir el tamaño adecuado para la casa de la mascota? ¿Qué forma tendrá la casa para la mascota? ¿Qué figuras geométricas son necesarios para construir la casa de mascotas (plano) de acuerdo con la forma elegida? ¿Qué cantidad de material se necesita para construir la casa de la mascota? ¿Cómo se calcula? ¿Cuántos animales esperas que duerman en la casa? ¿Cuál debe ser el peso apropiado para la casa de la mascota? ¿La casa necesitará elementos móviles? ¿Cuál será el costo de los materiales necesarios para construir la casa? ¿Cuánto tiempo tardaría la construcción de la casa? ¿Cuáles serían las unidades de medidas más pertinentes para trabajar? ¿Cuáles serían los instrumentos de medida necesarios a utilizar para la construcción? ¿Cuánto cuesta sostener una mascota?	¿Cuál es el material apropiado para construir la casa de la mascota? ¿Cómo debe ser la resistencia de los materiales? ¿Cuál debe ser la durabilidad de los materiales? De acuerdo con el material, ¿cuáles serán las herramientas más apropiadas para construir la casa para la mascota? ¿Qué elementos decorativos utilizarías? ¿Por qué? ¿Cómo hacer para que la mascota se adapte a su nueva casa? ¿Cada cuánto se hará necesario limpiar la casa? ¿Cuál es el mantenimiento que se le deberá dar a la casa? ¿Cuál es el tipo de mascota que más predomina entre los estudiantes? ¿Por qué tienen o no tienen mascota? ¿Qué alimentos consume la mascota? ¿Cuáles nutrientes son fundamentales para las diferentes clases de mascotas? ¿Por qué una mascota no debe comer lo que comen los humanos? ¿Cómo son los órganos y sistemas internos de algunas clases de mascotas? ¿Cuáles animales pueden ser mascotas y cuáles no? ¿Por qué? ¿Cada cuánto se alimenta a la mascota? ¿Cómo se relaciona la mascota con los miembros de la familia? ¿Cómo fue la dinámica de recolección de los animales en la barca de Noe? ¿Qué significan los animales en vía de extinción? ¿Cuáles leyes protegen el tráfico de animales en Colombia? ¿Qué artistas trabajan sus obras con animales?

Las respuestas se discuten en grupos de interacción o plenaria, y darán cuenta de la apropiación y avance que muestran los estudiantes en la temática de trabajo, lo que es evidencia e insumo para realimentar el seguimiento en un proceso de integración con otras áreas o situaciones en contextos diferentes.

1.2.3 Momento de cierre

Para el cierre se sugiere a los profesores que realicen la exposición de las diferentes casas para mascotas. En esta exposición se puede organizar la presentación de la casa en forma de reseña de la obra, que puede ser como se muestra en la Figura 7.

Figura 7. Propuesta de reseñas para la exposición de la casa para mascota

Otra propuesta consiste en realizar una votación para la elección de la casa más creativa que cumpla las condiciones que se sugirieron al inicio. En esta votación se debe tener en cuenta y establecer cómo se ejerce un voto democrático, conforme al gusto de la totalidad o mayoría. Además, se pueden retomar conceptos de la estadística descriptiva y el cálculo de porcentajes con las respectivas gráficas, y trabajar ciertos EBC adicionales del pensamiento aleatorio y sistema de datos:

- Comparo diferentes representaciones del mismo conjunto de datos.
- Interpreto información presentada en tablas y gráficos (pictogramas, gráficas de barras, diagrama de líneas, diagrama circular).

En este orden de ideas la posibilidad de trabajar en el cierre la estadística amplía e integra varios pensamientos en la misma situación. Se propone, en lo posible, invitar a un especialista, por ejemplo, un carpintero, para contarle al grupo la manera en que se haría la casa para un gato, por ejemplo. Esto daría la oportunidad de contrastar la realidad con el trabajo escolar.

Con el fin de valorar de modo económico el costo de los materiales que se emplean para la construcción de una casa para mascota, se sugiere realizar la estimación por unidad de medida al guardar las proporciones de cada material que se emplea. Con esta información establecer el costo total de los materiales empleados para la actividad propuesta. Registrar en la Tabla 10 los datos necesarios para realizar el presupuesto que se solicita.

Tabla 10. Preguntas orientadoras para abordar la situación

Material	Unidad	Costo por unidad	Cantidad	Valor total

Para el cierre es importante que se indague por los aprendizajes que los estudiantes adquirieron en la construcción de la casa para mascota. La autoevaluación hace parte de una evaluación formativa. Además, se puede hacer un trabajo conjunto con los padres de familia en una construcción colectiva con los hijos.

2. RESULTADOS Y ANÁLISIS

La anterior situación es una propuesta que aún requiere implementación en el aula de clase, por lo cual no se tienen resultados que permitan evaluar la pertinencia de cada una de las actividades que se sugieren. Es por esto que la invitación se centra en el trabajo del pensamiento métrico y sistema de medida, con el que se espera alcanzar cada uno de los objetivos propuestos. Adicionalmente, se establecen aprendizajes en el pensamiento aleatorio y sistema de datos, que se integran en el desarrollo de la situación. Se resaltan conceptos como los siguientes, que se pueden ampliar en la medida que el profesor decida abordar o no los conceptos y aprendizajes sugeridos:

- Algoritmos básicos (suma, resta, multiplicación y división).
- Figuras planas básicas (triángulo, cuadrado y rectángulo).
- Medida de cantidades de diferentes magnitudes.
- Los sólidos y algunas partes.
- Noción de plano.
- Reconocimiento de lo bidimensional y tridimensional.
- Tablas y gráficos para organizar información.
- Elaboración de encuestas.
- Moda de un conjunto de datos.
- Cálculo de porcentajes.

La situación *Las Mascotas: Una amistad para toda la vida* se puede convertir en un proyecto que transversaliza varias áreas, o se puede quedar en el trabajo de dos a tres semanas en la idea de secuencia didáctica. Su planeación es un reto y se convierte en la posibilidad de integrar áreas, conceptos, traer situaciones cercanas que desencadenan la relación de lo que se enseña y el cómo aplicarla en contextos no escolares. En esta propuesta la idea de implementar una variedad de metodologías se convierte en la opción de complementar la clase magistral, y de emplear los libros de texto como una más de las actividades que apoyan la conceptualización, la ejercitación o el razonamiento.

La actividad propuesta no pretende ser la panacea en procesos de enseñanza-aprendizaje y mucho menos ser reconocida como algo extraordinario en estos procesos, pues se es consciente que ciertos profesores promueven actividades similares al interior de sus aulas y que una variedad de textos hacen también dicha invitación. Sin embargo, es de resaltar que con esta actividad los profesores promueven las matemáticas como una herramienta que facilita la modelación de un mundo real, que permite hacer una lectura de un contexto dado, identificar una situación-problema, enfrentarla y darle una solución adecuada a lo que se propone. La creación de un contexto se puede dar, como en este caso, en la simulación de encontrar una mascota dentro de la institución, pero la cantidad de situaciones aparecen en la medida en que la institución vive el día a día y se enfrenta con fenómenos sencillos o complejos, que toman un valor pedagógico al incorporarlos al aula por medio de relaciones con los conocimientos de las diversas áreas escolares propuestas en el plan de estudios.

Hay que aceptar que en muchos textos se promueve la ejercitación de procedimientos algorítmicos como respuesta a la necesidad de los procesos de enseñanza que se ven en muchas aulas del país, muchas veces porque los procesos de enseñanza de las matemáticas están a cargo de personas que no tienen una formación específica en el área, y la mejor opción para generar procesos de enseñanza de las matemáticas y formar, es a partir de la manipulación algorítmica, dejando de lado la visión de las matemáticas como promotora y su enseñanza como herramienta solucionar a lo que se expone en el contexto.

Propuestas como estas invitan a dichos profesores a que construyan conceptos para estructurar diversas maneras de enseñarlos, y de esta manera promover el desarrollo de las competencias que, a nivel Colombia, se promulgaron desde 1998 y que hasta la fecha apenas se comprenden.

Esta situación genera oportunidades para desarrollar las competencias de comunicación, en la medida en que los estudiantes construyen argumentos y justifican las diferentes elecciones, mediciones y elaboran conclusiones, entre otras actividades que proponen competencias generales transversales, como la proposición y la interpretación. Además de la comprensión de textos y la exploración de la creatividad y originalidad en los diseños.

El trabajo propuesto invita a que las matemáticas y los aprendizajes que se susciten se vean en y para una funcionalidad, que permitan solucionar una necesidad o dificultad que se presente en su entorno o contexto cercano, y que las matemáticas se empleen como una herramienta y no como un fin.

2.1 Sugerencias metodológicas complementarias

- Aunque por definición el aprendizaje es un proceso que se da de manera individual, se estimula en gran medida a través de la interacción con otros, es por esto que una de las propuestas de trabajo gira en torno a la conformación de grupos de trabajo cooperativo y la asignación de roles a cada uno de los integrantes. En estos grupos se proponen diferentes interrogantes y estrategias para que se presenten los caminos alternativos de cada grupo y realicen soluciones concertadas entre sus compañeros. Este tipo de estrategias promueven competencias ciudadanas y de convivencia [6].

- Promover el uso y recolección de material reciclable que se pueda utilizar en la etapa de construcción de las casas para mascotas. Esta recolección se puede hacer de manera institucional y, una vez se tenga, inicia la etapa de clasificación y selección del material adecuado (se puede relacionar con el proceso de separación y reutilización de material).

- Se les puede solicitar a los estudiantes que, de acuerdo con sus gustos, realicen un esquema de la casa para su mascota al tener en cuenta los aspectos y figuras geométricas a trabajar. Estos esquemas pueden ser vistas 3D o vistas en planta, bien sea laterales o frontales. Existen determinados programas o aplicaciones que también se pueden indagar para construcción de maquetas [7].

- Internet se convirtió en un aliado invaluable a la hora de encontrar recursos que complementen los procesos al interior del aula, durante el desarrollo de la situación se emplean unos de estos recursos.

2.2 Recursos de fácil consecución (sugerencia)

La variedad de recursos que se pueden emplear depende de las alternativas que los profesores propongan de la situación y los datos que empleen; se sugieren que, en la medida de lo posible, sean reciclables. En la Tabla 11 se exponen variados recursos posibles en el desarrollo de la situación.

Tabla 11. Recursos para la actividad propuesta

Materiales	Utilidades
▪ Madera	▪ Software diseño 3D (sketchup)
▪ Plástico	▪ Calculadora
▪ Telas	▪ Páginas de internet
▪ Cartón	▪ Aplicaciones (Apps)
▪ puntillas	▪ Tarjetas de roles
▪ Silicona	▪ Hojas de block
▪ Flexómetro	▪ Marcadores
▪ Regla	▪ Colores
▪ colbón	▪ Tijeras
▪ Cinta	▪ Vídeos
▪ Grapas	▪ Video Beam

3. EVALUACIÓN

Uno de los indicadores evaluativos es la entrega de la casa para mascota, donde se deberá tener en cuenta aspectos como: materiales empleados, correspondencia en las medidas, simetría en la forma, tamaño adecuado según las proporciones de la mascota, durabilidad, decoración y todos los aspectos que se consideren pertinentes para llevar a feliz término la actividad. La evaluación se propone como un proceso de mejoramiento continuo, por eso se sugiere:

- Utilizar varias fuentes para las evidencias de los aprendizajes de los estudiantes, tales como: cuaderno, carteleras, conformación-desempeño de grupos y roles, la casa, la reseña de la casa, respuesta a las diferentes mediciones (arbitrarias–estandarizadas) y exposiciones, entre otros. Estas evidencias dependen de las actividades que se realizan y los aprendizajes propuestos.
- La retroalimentación debe ayudar al estudiante a resolver el problema sin resolvérselo, entonces se puede buscar: Un ejemplo similar, una analogía o una pregunta.
- La retroalimentación del profesor debe: 1) Ser rápida, en lo posible inmediata, 2) Sin juicios de valor (bien, mal, nota, …), y 3) aplicarla a todos los estudiantes y en positivo.
- La evaluación se propone en términos siempre positivos, para que se invite a mejorar y no se resalte solo el error. Por ejemplo, se puede mejorar la simetría de la casa.
- El estudiante da un paso adelante al apoyarse en la retroalimentación, es decir, avanza en los elementos que no identifica aún como aprendizajes.
- Se requiere que metas y objetivos estén claros y sean observables, es decir, que sean conocidos por el estudiante.
- La retroalimentación puede provenir del profesor, los demás compañeros y el propio estudiante.

3.1 Estrategias que se pueden emplear en la evaluación

1. *Evaluación Grupal.* En este tipo de evaluación se invita a que en los grupos cooperativos se establezcan estrategias como: *mi error favorito*. Es una estrategia que permite detectar errores frecuentes de los estudiantes y a través de ellos analizar la manera en que proceden y llegan a respuestas incorrectas. El profesor puede exponer un error frecuente al realizar medidas de diferentes objetos o en la manipulación del instrumento de medida, luego invita a los estudiantes a que socialicen en el grupo el modo en que realizan sus mediciones y utilizan los diferentes instrumentos de medida, para encontrar diferencias o dificultades al hacerlo.

2. *Diario de actividades.* Mediante un diario el estudiante puede reflexionar frente a sus progresos y dificultades. Puede ser que escriban la fecha, la descripción de las actividades realizadas cada día en cuanto a la construcción de la casa, escribir lo que no comprende o cuáles actividades le presentan dificultad, incluso si tuvo aburrición y por qué. Por ejemplo:

   Hoy (fecha) la profesora ……………… nos dijo que viéramos un video, me gustó mucho porque …………………………………………………No realicé la actividad…………………….. porque …………………………………… en cambio me gustó mucho…………………………. porque …………………

3. *Construir Oraciones Significativas Originales OSOS.* Esta actividad ayuda a recoger lo que perciben los estudiantes de ciertos temas (saberes previos) antes o después del desarrollo de una actividad (qué aprendieron). Estas actividades se pueden desarrollar en el momento de inicio, cuando los estudiantes proponen alternativas en la medición con instrumentos arbitrarios, o cuando se activan las diferentes ideas para la construcción de la casa de mascota. Lo más importante es que estas frases sean producto de análisis, sentir y de procesos de comprensión, interiorización y apropiación de los estudiantes.

4. *Recapitulación.* En esta estrategia se solicita a los estudiantes que recuerden lo que aprendieron y pueden responder de manera oral o escrita. Se recomiendan algunas preguntas orientadoras: ¿Qué hicimos? ¿Cómo lo hicimos? ¿Cómo me sentí? ¿Qué cambiaría? ¿Por qué? ¿Qué no hice? ¿Por qué? ¿En lugar de esta actividad qué otra puedo hacer? Se pueden establecer otras preguntas, según se requiera. Esta alternativa evaluativa recoge, sintetiza y reorienta las actividades cuando sea necesario. La invitación es a usar constantemente esta estrategia, para que las actividades tengan un proceso consciente y comprensible mientras avanza. La evaluación procesal permite establecer nuevas condiciones, se complementen las que ya se tienen o se eliminen por completo, ya que no hubo recepción por parte de los estudiantes.

5. *Rúbrica.* Se propone una idea sencilla en la que se recogen criterios generales y que, sin duda, se pueden redactar no solo en términos actitudinales (Tabla 12), sino también conceptuales y procedimentales. De igual manera, los niveles de desempeño pueden ser acordes a los planteamientos a nivel institucional u otros que considere pertinentes el profesor.

Tabla 12. Rubrica de valoración

Criterio	Nivel		
	Básico	Alto	Superior
Evidencia creatividad en las producciones			
Muestra iniciativa en la manera de responder a las diferentes actividades.			
En su autoevaluación evidencia reflexión y consciencia de su proceso			
Comentarios, observaciones y recomendaciones:			

El profesor puede disponer otros recursos para evaluar de manera formativa, procesual y sumativa. El proceso evaluativo es fundamental a partir de la reflexión y de mejoramiento continuo. Establecer criterios claros y monitorear los resultados hace que la evaluación pase de una nota cuantitativa a cobrar sentido en lo formativo y en un proceso conjunto: Profesor–Estudiante–Recursos.

El profesor también puede incluir la autoevaluación y la coevaluación, mediante una rúbrica donde se especifique: ¿qué aprendió? ¿Qué se le dificultó? principalmente, y otras preguntas que considere pertinentes. Además, permitir que los demás compañeros valoren los productos de los demás es una oportunidad de enriquecer la evaluación y de promover la posibilidad de diálogo reflexivo y crítico en los estudiantes.

Se sugiere que el profesor emplee una rúbrica o lista de chequeo con las condiciones mínimas que debe tener la casa en términos matemáticos: métrico, geométrico, y otras que considere. La evaluación depende de las intenciones que cada profesor coloque en las actividades y los productos que se generen, ya sean parciales o finales [8].

4. TRANSFERENCIA O AMPLIACIÓN DE LA EXPERIENCIA A OTRAS SITUACIONES O CONTEXTOS

La creatividad es una de las herramientas que los profesores deben poseer al relacionar los contenidos, actividades, aprendizajes, estrategias, entre otros, como elementos fundamentales en la construcción de un plan de estudios centrado en proyectos o actividades de modelación, al estimar las diferentes conexiones entre el ámbito escolar y los demás contextos que los estudiantes experimentan.

En la Tabla 13 se presentan algunas ideas generales que pueden ser clave al integrar otras áreas a la situación.

Tabla 13. Vinculación de la actividad propuesta con otras asignaturas

Área	Posibles aprendizajes o temáticas
Inglés	Unidades de medida en ingles en los diferentes sistemas. Textos instructivos para armar, partes y componentes de una casa, materiales reciclables en inglés.
Lengua Castellana	Lecturas direccionadas al cuidado para las mascotas, textos instructivos, elaboración de carteleras expositivas *las mascotas del grupo*, preparación de una exposición, entre otros.
Ciencias Naturales	Clasificación y separación de material reciclable, tipo de mascotas predominantes en las familias de la institución, alimentación adecuada de las mascotas, habitad sugerida para mascotas.
Ciencias Sociales	Importancia del cuidado de nuestras mascotas de acuerdo con las tradiciones culturales. Importancia de ciertos animales y el significado en la cultura.
Artística	Elaboración de planos, maquetas, esquemas para casas de mascotas y su decoración.

Actualmente, se cuenta con la facilidad de integrar muchas clases de recursos al aula, o a la preparación de los diferentes espacios educativos. En este sentido, en la Tabla 14 se comparten recursos que pueden servir de apoyo para esta situación, u otra que el profesor realice.

La variedad de contextos en los que se generan actividades de modelación y proyectos es una oportunidad para transformar el plan de estudios, que desde hace varias décadas se propusieron en los Lineamientos curriculares de matemáticas [1] y en los Estándares de competencias en matemáticas [4]. La invitación a los profesores es a que se atrevan a indagar por diversos materiales y se atrevan a planear clases en diversos contextos cercanos a los estudiantes.

Tabla 14. Herramientas sugeridas

Unidades de medida	https://www.youtube.com/watch?v=wk6WSiILWvU https://www.youtube.com/watch?v=kzrplJ1jvko https://www.portaleducativo.net/cuarto-basico/550/Unidades-de-medida-de-longitud-volumen-masa-tiempo
Planos de casa para mascotas	https://www.pinterest.es/pin/454863631090618255/?lp=true https://co.pinterest.com/pin/411375747195485042/?lp=true
Construcción de una casa para mascotas	https://www.youtube.com/watch?v=FVc8CEhBSX8 https://www.youtube.com/watch?v=bPFb5MBILeo https://www.youtube.com/watch?v=1_XoyTp8264 https://es.wikihow.com/construir-una-casa-para-el-perro https://www.hagaloustedmismo.cl/paso-a-paso/proyecto/647-como-hacer-una-casa-de-perro.html *Nota*: estos recursos se recuperaron en octubre de 2020.

5. CONCLUSIONES

La situación planteada en este trabajo es una oportunidad para acercar a los estudiantes a vivir las matemáticas en un contexto cercano, al mismo tiempo que se genera conciencia social del cuidado de las mascotas, y cómo este tema se relaciona con las matemáticas escolares. De manera especial, los procesos de modelación, apropiación del pensamiento métrico y sistemas de medidas se verán potenciados con las actividades que los estudiantes viven como parte de una construcción cooperativa y que tiene como fin generar buenos hábitos de convivencia entre las mascotas y las familias.

Presentarles a los estudiantes ideas que produzcan construcciones en diferentes perspectivas permite que la relación enseñanza-aprendizaje se sintonice a partir de roles activos en una relación especial y de significación entre Profesor–Contenidos–Modelo de enseñanza–Contextos–Diversidad, resaltando que esta relación se hace más estrecha en cuanto la participación de los actores sea visualizada y entrelazada con sentido para todos.

Cada uno de los tres momentos (inicio, desarrollo y cierre) invitan a los profesores a que estén en constante recepción de ideas y contextos, que hacen de la modelación matemática un proceso que permite, de manera general, que se relacionen los contextos escolares con los sociales, familiares y demás que viven los estudiantes fuera y dentro de la institución. La invitación con esta propuesta es a que se apropien de ella, la lleven al aula con las adaptaciones pertinentes y sea motivación para que los profesores establezcan otras para el desarrollo de las clases.

Ver a las matemáticas más allá de procedimientos algorítmicos y vinculadas con la realidad de los estudiantes, permitirá generar conciencia matemática en función de comprender para qué y por qué de los elementos trabajados, su funcionalidad, practicidad y necesidad de apropiarse de los diferentes conceptos trabajados, que permitirán estructurar un pensamiento matemático apropiado para enfrentarse a situaciones problema analógicas o situaciones retadoras más complejas.

REFERENCIAS

[1] MEN. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional.

[2] Biembengut M. y Hein N. (1999). Modelación matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemáticas. Educación Matemática 11(1), 119-134.

[3] Villa-Ochoa J. (2009). Presente y futuro de la investigación en educación matemática en Colombia. En Blanco H. (Ed), Memorias del Décimo Encuentro Colombiano de Matemáticas Educativas (pp. 1-8). Asocolme.

[4] MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Ministerio de Educación Nacional.

[5] Biembengut M. y Hein N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. Educación matemática 16(2), 105-125.

[6] MEN. (2011). Cartilla 2 Mapa. Programa de competencias ciudadanas. Orientaciones para la institucionalización de las competencias ciudadanas. Ministerio de Educación Nacional.

[7] Storyboardthat. Recuperado: https://www.storyboardthat.com/storyboard-creator

[8] Valero M. y Díaz L. (2005). Autoevaluación y co-evaluación: Estrategias para facilitar la evaluación continuada. En Actas del I Simposio Nacional de Docencia en la Informática (pp. 25-32). Thomson.

[9] MEN. (2017). Derechos Básicos de Aprendizaje V2. Ministerio de Educación Nacional.

C 3

No comas más mentiras: Modelación de un estudio sobre el consumo de azúcar añadida en la lonchera

Ana María Jiménez Echavarría[1]
Colombia

Una expresión que se escucha frecuentemente es que *las matemáticas están en todas partes*, como también es recurrente que los estudiantes pregunten: *¿esto para qué sirve*? Puede resultar complicado explicarles en su lenguaje la utilidad de las matemáticas y generar un mensaje implícito de la razón incierta por la cual deben aprenderla, al tiempo que mostrar el sentido que tiene conocer los objetos, los conceptos y los saberes matemáticos. Esto conlleva a que profesores, redes y otros agentes en educación se preocupen por incrementar la apuesta y ampliar sus reflexiones sobre la práctica de aula y los procesos de enseñanza de las matemáticas. El objetivo es proponer experiencias en las cuales los estudiantes reconozcan el uso de las matemáticas en su entorno próximo y reconozcan su utilidad, para crear un vínculo más amigable con su aprendizaje. Un ejemplo de estas iniciativas se puede observar en los documentos rectores para la educación matemática en Colombia del Ministerio de Educación Nacional [1]:

> *Se hace necesario comenzar por la identificación del conocimiento matemático informal de los estudiantes en relación con las actividades prácticas de su entorno y admitir que el aprendizaje de las matemáticas no es una cuestión relacionada únicamente con aspectos cognitivos, sino que involucra factores de orden afectivo y social, vinculados con contextos de aprendizaje particulares.*

Lo anterior lleva a reconocer en los elementos, los objetos y los saberes matemáticos la posibilidad para comprender y analizar diferentes fenómenos sociales, culturales y naturales, entre otros. Que a su vez permiten adquirir conciencia y tomar posición crítica en la toma de decisiones para garantizar una participación asertiva en las diferentes dinámicas sociales, así como en la comprensión del mundo. En la literatura se pueden encontrar propuestas relacionadas con la necesidad de consolidar estudios e investigaciones en Modelación Matemática en Educación Primaria, que involucran los intereses de los estudiantes a partir de la creación de situaciones que privilegien aspectos como la investigación, la postura crítica y la reflexión, para comprender y analizar diferentes fenómenos o situaciones de su entorno próximo, de las matemáticas mismas u otras ciencias [2, 3].

En este capítulo se presenta una experiencia de modelación matemática que se desarrolla en un colegio femenino de carácter privado en la ciudad de Medellín, Colombia. La experiencia tiene como objetivo que los estudiantes participen en un ambiente de aprendizaje, donde se involucran en el estudio de los alimentos que consumen en su lonchera y, de manera específica, analizar en ellos el nivel de azúcar añadida que contienen y su influencia en la etapa de desarrollo en la que se encuentran su cuerpo y su mente.

Se proponen cinco momentos relacionados con el ciclo de modelación propuesto por Ocampo-Arenas [4], que inician con la comprensión del contexto y de los fenómenos que se espera estudiar; luego se realiza un proceso de investigación y de análisis por los estudiantes alrededor de los alimentos que traen en la lonchera y los azucares añadidos que contienen; en un tercer momento se propone la participación y el acompañamiento de un especialista en salud para resolver las inquietudes que surgen durante la experiencia en términos de nutrición. Adicionalmente, para el desarrollo se propone la consolidación de grupos de estudiantes para realizar un proceso de investigación de un producto específico del mercado, con el objetivo de comparar aspectos como la presentación del producto, marca, elementos nutricionales y otros componentes alimenticios para, finalmente, divulgar el estudio por medio de pósteres y un comercial de televisión, en los que se presenta una alternativa saludable para la lonchera y el consumo diario.

[1] Contacto: *ana.jimeneze13@gmail.com*

Con esta situación de modelación se espera que los estudiantes desarrollen, desde una edad temprana, habilidades investigativas, de comunicación, argumentación y capacidad de análisis y de reflexión, así como de resolución de situaciones multiplicativas y aditivas, construcción e interpretación de gráficas y datos estadísticos, entre otras.

Además, se proponen algunas consideraciones y reflexiones teóricas y metodológicas en relación con el proceso de modelación matemática en la escuela primaria, y la consolidación de un análisis crítico a partir del uso y aprendizaje de las matemáticas en edades tempranas en el proceso escolar.

1. METODOLOGÍA

1.2 Identificación de la situación

El índice de azúcar añadido en los alimentos que consumen los niños es una problemática social y de salubridad que debe ser atendida con prontitud en diferentes esferas sociales. Prueba de ello es que, según el Ministerio de Salud y Protección Social de Colombia MinSalud, el 86,9% de los escolares no cumple con la frecuencia de consumo de frutas y verduras, mientras que el consumo de bebidas azucaradas es del 74,0%. Adicionalmente, existen otros aspectos que agudizan esta problemática, como la falta de realizar actividad física y de libre esparcimiento, que complican de manera particular el desarrollo físico y mental saludable de los niños en Colombia.

Entre las implicaciones que se conceden al alto consumo de productos azucarados se encuentra que genera enfermedades de tipo cardio vascular, diabetes, envejecimiento prematuro, caries, entre otras afectaciones a la salud física y mental. Esta situación se hizo más relevante en el aprendizaje remoto durante la emergencia sanitaria por el Covid-19, en la que los niños pasaron tiempo en casa y se redujeron las posibilidades de realizar la actividad física que realizan presencialmente en la escuela.

En relación con la preocupación de padres y cuidadores a causa del consumo elevado de azúcar y su presencia en los diferentes productos del mercado, surgen diversas iniciativas de concientización ciudadana, como el de la Corporación sin Ánimo de Lucro Red PaPaz, creada en 2003 con el objetivo de abogar por la protección de los derechos de los niños y que adelanta la campaña *No comas más mentiras*, con una política que busca que en el país se reglamente el uso de unos sellos frontales que advierten sobre los alimentos con alta cantidad de azúcar, sodio y grasas.

Además, que permitan una fácil identificación y reducir el consumo de este tipo de alimentos. Como primera medida, en 2017 envió mensajes al público relacionados con esta situación a través del sistema de canales nacionales.

Continuando con esta iniciativa se propone una situación de modelación matemática en la que los niños analizan la cantidad de azúcar añadida que se encuentra en los productos que consumen, en relación con las propuestas de los especialistas y las directrices de la Organización Mundial de la Salud OMS [11], acerca del consumo diario sugerido para los niños. La propuesta promueve la concientización de los actores del contexto educativo frente a los alimentos que contienen un alto nivel de azúcar añadida, y sobre algunas alternativas para reemplazarlos en la dieta diaria.

En la Tabla 1 se describen las metas de aprendizaje que se proponen con el desarrollo de esta situación de modelación con los niños de grado 3, y las orientaciones para la educación matemática a partir de los Estándares Básicos de Competencia EBC en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje DBA.

Tabla 1. Metas de aprendizaje a partir de los EBC y los DBA para grado 3

Metas de aprendizaje	Relación con EBC y DBA	Habilidades	Actitudes
Resolver y formular problemas en situaciones de variación proporcional.	*DBA 1*: Interpreta, formula y resuelve problemas aditivos de composición, transformación y comparación y multiplicativos,	Los estudiantes podrán analizar, a partir de las relaciones multiplicativas, diferentes directrices y	Los estudiantes reconocen las matemáticas en un aspecto cercano a su contexto y establecen una

Analizar y resolver situaciones multiplicativas que involucran el uso de medidas estandarizadas	directos e inversos en diferentes contextos. *Estándares*: Resuelve y formula problemas en situaciones de variación proporcional. Reconoce el uso de las magnitudes y sus unidades de medida en situaciones aditivas y multiplicativas.	fenómenos que se relacionan con la salud y el contenido dietario de los alimentos. Los estudiantes toman decisiones responsables a partir de los análisis matemáticos, en relación con los alimentos que consumen.	relación empática con su proceso de aprendizaje, sus objetos, conceptos y saberes. Los estudiantes reconocen la importancia de estar informados y usar sus habilidades matemáticas para tomar decisiones.
Utilizar tablas para organizar información a partir del registro diario de consumo. Interpretar datos presentes en tablas nutricionales. Identificar aspectos como la muestra y la población en un estudio estadístico. Encontrar la moda en un conjunto de datos e interpretar información a partir de ella. Construir representaciones pictóricas que relacionan la cantidad de azúcar añadida de los productos que consumen.	*DBA 10*: Lee e interpreta información contenida en tablas de frecuencia, gráficos de barras o pictogramas con escala, para formular y resolver preguntas de situaciones de su entorno. *Estándares*: clasifica y organiza datos de acuerdo con cualidades y atributos, y los presenta en tablas. Interpreta cualitativamente datos referidos a situaciones del entorno escolar. Resuelve y formula preguntas que requieren para su solución coleccionar y analizar datos del entorno.	Los estudiantes usan herramientas estadísticas para comprender fenómenos sociales, y para organizar información que resulta de procesos investigativos. Los estudiantes se involucran en ambientes científicos a partir del desarrollo en procesos de investigación desde temprana edad. Los estudiantes argumentan sus propuestas a partir de la recolección de datos y análisis matemáticos de la situación, y lo comunican a partir de la elaboración de pósteres y un comercial de televisión.	Las estudiantes reconocen el uso de información estadística en diferentes aspectos sociales y medios de comunicación. Las estudiantes afianzan sus habilidades de análisis e interpretación, para posicionarse como sujetos poseedores de saber que pueden acompañar a otras personas en su proceso de concientización, sobre los hábitos alimenticios y sus implicaciones para la salud.

1.2 Desarrollo de la situación

Esta propuesta presenta se configura como un método de enseñanza que involucra espacios en los que se problematiza e investiga una situación que surge del contexto, a partir de los recursos conceptuales que tienen los niños para diseñar e implementar ambientes de aprendizaje, que contribuyen al análisis y comprensión de un fenómeno o situación. En este sentido los niños identifican, describen, comparan, clasifican, visualizan, representan y resuelven situaciones-problema y comprenden su entorno [2, 3, 5].

Para el desarrollo de la situación de modelación se toma como referencia el ciclo de modelación propuesto por Ocampo-Arenas [4], quien describe seis momentos que tienen lugar en los procesos de Modelación Matemática en Primaria, y que se desarrollan de manera cíclica en relación con el fenómeno o ambiente de modelación que se estudia. Estos momentos son: reconocer el contexto y el fenómeno, recolectar información pertinente, simplificación, solución del problema, validación de los resultados y procesos, y comunicación de los resultados.

1.2.1 Reconocer el contexto y el fenómeno: *Un picnic para compartir*

Se invita a las estudiantes[2] a participar de un *picnic* para compartir y conocerse un poco más, ya que se encontraban en el inicio del año escolar. Mientras consumían los alimentos que traían en su lonchera se hicieron preguntas como: ¿cuál es el alimento favorito para traer al colegio o comer en casa? ¿Qué es lo que más traen en la lonchera? ¿Por qué? ¿Alguna vez se han preguntado por lo que contienen los alimentos que traen? ¿Dónde podremos encontrar esa información?

Se aprovechó la ocasión para que revisaran las tablas nutricionales de sus productos, también de cuáles productos podrían ser más saludables, etc. Este primer momento se puede enriquecer con actividades como compartir, donde cada estudiante lleve un alimento que quiera regalar a alguna de las compañeras o un juego de adivinanzas en los que cada una describa su golosina favorita mientras las demás intentan adivinar, con el objetivo de llegar a especificaciones como los ingredientes, los sabores o la presentación del producto.

[2] El colegio en el que se desarrolló esta experiencia es femenino, por eso en el contenido se usa este término.

En la siguiente clase las estudiantes observan algunas fotografías de loncheras que otras compañeras llevan con regularidad al colegio (Figura 1). Se habla de los alimentos que contienen y sus percepciones iniciales, luego se comparte el vídeo: ¿Sabes qué son los productos ultra procesados? [6] En el que se ilustra la diferencia entre los productos ultra procesados y alimentos orgánicos, así como la influencia de la publicidad para promover el consumo de este tipo de productos. También leen en parejas algunas noticias relacionadas con el consumo de azúcar añadida y sus implicaciones para la salud en los niños. En términos metodológicos se les invita a tomar nota de la información que consideran relevante y a realizar un acompañamiento en la lectura, con el fin de resolver las dudas que surjan en relación con los términos desconocidos.

Figura 1. Loncheras que llevan los estudiantes

1.2.2 Recolectar la información pertinente: *Alimentos de mi lonchera*

Luego del proceso de comprensión general del contexto, se propone a las estudiantes elaborar una tabla para registrar los alimentos que consumen cada día, e identificar con qué regularidad sobrepasan la cantidad máxima de azúcar añadida sugerida por la OMS, para lo que utiliza una estructura como la de la Tabla 2.

Tabla 2. Registro de la cantidad de azúcar presente en los alimentos

Día	Producto	Grs. de azúcar añadidos	¿Sobrepasa la cantidad de azucares sugeridos por la OMS?
Lunes			
Martes			
Miércoles			
Jueves			
Viernes			

Adicionalmente, en este momento del desarrollo de la situación las estudiantes observan algunos empaques que recolectaron ellas mismas y la profesora luego del descanso, donde analizan la cantidad de azúcar añadida que contienen, y luego se indican aspectos generales frente a la lectura de la tabla nutricional y datos que aparecen. También se presentan situaciones hipotéticas en las que se muestran los productos que llevan algunas estudiantes al colegio, y deben analizar las implicaciones de la ingesta de esa lonchera, si se hace de manera regular, al considerar que, según los datos del artículo leído en la clase anterior, la OMS recomienda un consumo máximo de 100 calorías de azúcares añadidos al día para niños mayores de 2 años, lo cual es alrededor de 6 cucharaditas o 24 gramos de azúcar diarios.

1.2.3 Simplificación: *Hablemos con una nutricionista*

Luego del registro en la tabla las estudiantes comparten apreciaciones y algunas notaron que frecuentemente superaban la cantidad máxima sugerida para el consumo de azúcar añadida, así como alimentos y bebidas de los cuales desconocían su contenido nutricional y la cantidad de azúcar presente en su composición, y pensaban que era un alimento saludable. Este espacio se debe aprovechar para reflexionar con respecto a los comerciales de televisión y la información que presentan para incentivar el consumo de esos alimentos, se pueden usar los productos que las estudiantes analizan en el proceso y cuya información sea verídica frente al uso excesivo de azúcar añadida en ellos. Se llevó la fotografía de una tabla nutricional de un producto (Figura 2) para analizarla con las estudiantes y reflexionar alrededor de los componentes nutricionales y la cantidad de azúcar añadida, cantidad de calorías aportadas por dicha azúcar y sus implicaciones para la salud, según las directrices y recomendaciones médicas.

Información Nutricional	
Tamaño por porción 1 Vaso (180 ml)	
Porciones por envase 1	
Cantidad por Porción	
Energía 140 kcal	Energía de la grasa 35 kcal
	Valor Diario*
Grasa Total 4 g	**6%**
Grasa Saturada 3 g	15%
Grasa *Trans* 0 g	
Colesterol 20 mg	**7%**
Sodio 130 mg	**5%**
Carbohidrato Total 21 g	**7%**
Fibra Dietaria 0 g	0%
Azúcares 21 g	
Proteína 5 g	**10%**
Vitamina A	40%
Vitamina C	0%
Calcio	20%
Hierro	0%
Vitamina B1	30%
Vitamina B2	40%
Niacina	30%

* Los porcentajes de Valores Diarios están basados en una dieta de 2000 calorías. Sus Valores Diarios pueden ser mayores o menores dependiendo de sus necesidades calóricas.

Figura 2. Tabla nutricional de un producto de la lonchera

Al compartir esta información y analizar con las estudiantes la cantidad de azúcar añadida, se reflexiona frente a si creían que consumían este producto con frecuencia, quiénes lo consumían más y qué otros productos creían que consumían de manera regular las estudiantes del colegio y desconocían la cantidad de azúcar que contenían, y sus implicaciones para la salud al sobrepasar la cantidad diaria recomendada por los especialistas.

En este espacio de reflexión surge la idea de realizar una campaña de concientización para compartir la información que las estudiantes estudiaban y que podría ayudar a otras estudiantes del colegio. Para esto se realiza una encuesta a las estudiantes para identificar sus hábitos alimenticios y preferencias de productos para la lonchera. En este momento emergen conceptos matemáticos como población, muestra, tamaño de la población y la manera en que se organizarían los datos, como el uso de tablas de frecuencias y gráficas de barras, que son necesarios para analizar e interpretar los datos recolectados.

Para profundizar en el tema se invitó a una nutricionista (acudiente de una de las estudiantes) a participar en un conversatorio. En primer momento expuso a las estudiantes las implicaciones del consumo elevado de azúcar añadida, las indicaciones y parámetros adecuados para su ingesta diaria, así como las indicaciones relacionadas con la etapa de desarrollo en la cual se encontraban y la necesidad de realizar actividad física. En un segundo momento, y debido a que en los diferentes espacios y conversaciones alrededor de la situación que se desarrolla surgieron en las estudiantes diferentes interrogantes en el campo de la medicina y nutrición, se requirió el acompañamiento de un especialista que pudiera responderlas y guiar las reflexiones generadas. Se sugirió que las estudiantes formularán las preguntas que les surgieran durante los estudios que desarrollaban y se compartieron con la especialista, un ejemplo de las preguntas se puede observar en la Figura 3.

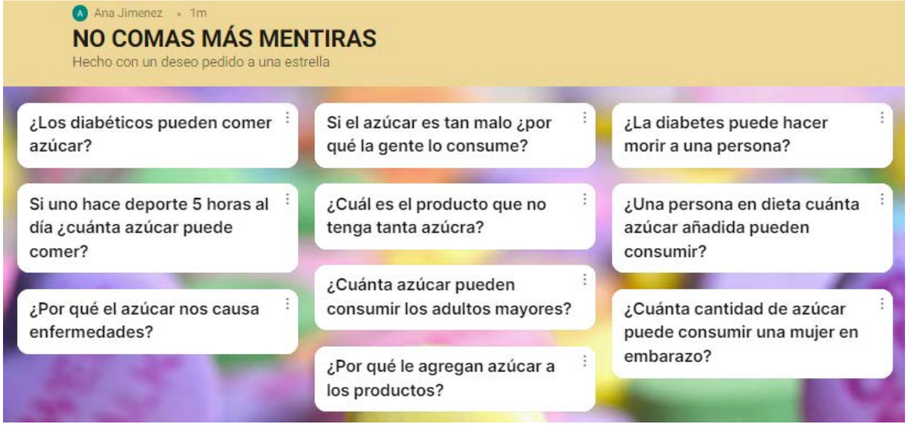
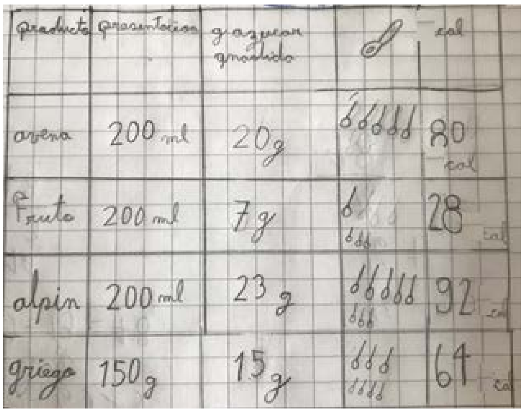


Figura 3. Preguntas para la nutricionista

1.2.4 Solución del problema: *Investigación de algunos productos*

Las estudiantes se organizan en equipos de 2 o 3 integrantes y eligen un producto que llama su atención y que consideran importante para analizar su nivel de azúcar, ya que es de consumo frecuente en el colegio. Durante dos clases de 60 minutos cada una, las estudiantes analizaron las tablas nutricionales del producto, que llevaron de sus casas o las recogieron durante los descansos mientras que otras hicieron el rastreo en internet. Se registraron los resultados en una tabla, como la que se muestra en la Figura 4: se indica la presentación del producto, la cantidad de azúcar añadida y su equivalente en cucharadas, lo cual facilita reconocer las calorías por cantidad de producto, debido a que la conversión dicta que cada cucharada representa 4 gr de azúcar y 16 calorías aportadas por el azúcar añadido. También se les indicó que era importante proponer una alternativa de consumo más saludable para estos productos y argumentar el porqué de la elección.

Tener en cuenta que es importante contar con anterioridad con las etiquetas, empaques de producto o con acceso a la red para realizar las indagaciones correspondientes, así como presentar ejemplos de organización de la información y de registro en la tabla que pueda ayudarlos a consignar la información.



producto	presentación	g azúcar añadido		cal
avena	200 ml	20 g		80 cal
fruto	200 ml	7 g		28 cal
alpin	200 ml	23 g		92 cal
griego	150 g	15 g		64 cal

Figura 4. Investigación productos (Fotografía tomada del cuaderno de una estudiante)

1.2.5 Validación de los resultados y procesos: *Creación de un póster*

Los equipos de trabajo realizan un póster para representar la información recolectada de la encuesta, para lo cual usan gráficas de barras y tablas de frecuencia con el propósito de determinar los productos que consumen con mayor frecuencia. También incluyen información relevante, como la población, el tamaño de la muestra y la moda. Algunas estudiantes lo hicieron manualmente y otras usaron herramientas como hojas de cálculo para la representación y administrador de diapositivas para el póster. Para este momento las estudiantes se encuentran en la modalidad de alternancia y cuentan con acceso a estas herramientas, como puede verse en la Figura 5.

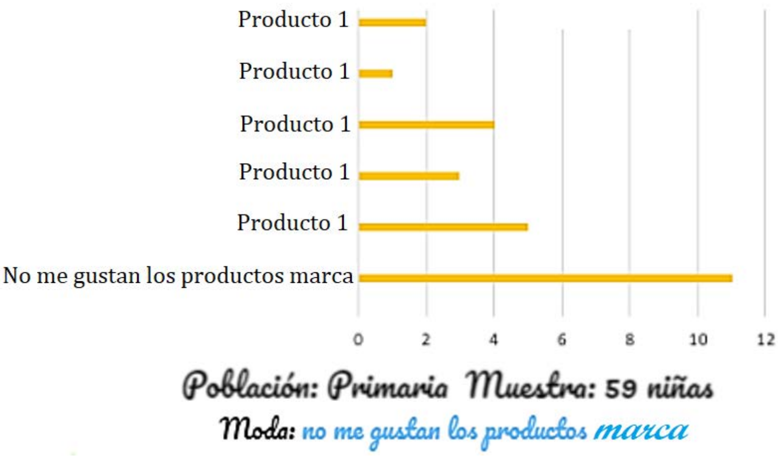


Figura 5. Presentación de resultados de la encuesta realizada por uno de los equipos (Captura de la presentación que diseñaron las estudiantes)

1.2.6 Comunicación de los resultados: *Comercial de televisión*

Se propuso realizar un comercial de televisión en el que se presentara la información recolectada en el proceso de investigación. El comercial debía incluir aspectos como datos claros del nivel de azúcar, las calorías aportadas por el azúcar que se añadió, determinar si era perjudicial o no según las recomendaciones estudiadas, descripción sobre cómo una persona puede conocer la cantidad de azúcar añadida en un producto e identificar la cantidad de calorías aportadas, y al finalizar debían presentar una alternativa con un producto más saludable y argumentar su elección.

Es importante para el desarrollo de este momento que las estudiantes cuenten de manera previa con un ejemplo del producto, que les permita visionar la actividad que se espera realizar, así como el instrumento de valoración con el que puedan identificar si su producto cuenta con todos los elementos indicados.

2. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Las situaciones de modelación como la que se propone son un espacio en el que los estudiantes pueden participar desde edades tempranas en procesos de investigación, análisis y postura crítica frente a diferentes fenómenos de su contexto real; de esta manera la percepción de las matemáticas y su aprendizaje se puede transformar al vivenciar su uso para resolver una problemática específica. Las investigaciones de Kaiser y Sriraman [7], de Barbosa [8] y de Araújo [9], sobre la modelación bajo una perspectiva socio-crítica, reconocen como oportunidad para llevar al aula ambientes de aprendizaje para reflexionar y problematizar diferentes situaciones del contexto social de los estudiantes.

De igual manera, los estudiantes asumen un rol activo al comprometerse con el desarrollo de un tema de su interés. Como lo indica Parra-Zapata [2], este tipo de modelación *logra que los estudiantes discutan asuntos matemáticos que hacen parte de problemas reales, y que dialoguen y reflexionen con sus compañeros y su profesor sobre el contexto social en el que están inmersos*. Por su parte, el profesor se involucra como un acompañante del proceso y como un mediador, trascendiendo la perspectiva de que es el único poseedor del conocimiento y cuya tarea se basa en enseñarlo a sus estudiantes.

Asimismo, la mirada frente al profesor se transforma al lograr la participación de otras voces y especialistas en el aula, se reconoce que tiene un saber particular que lo distingue de otros profesionales, que puede encontrarse en el aula para visibilizar el lugar como un espacio privilegiado para el encuentro de saberes y la construcción conjunta de conocimiento.

En este proceso de modelación emergieron conceptos como la multiplicación, los repartos equitativos, la proporcionalidad y el uso de medidas estandarizadas, también se implicó la resolución de situaciones multiplicativas y el uso de otras herramientas matemáticas para comprender un fenómeno real, dándole significado a su uso y permitiendo diseñar sus propias estrategias y otras estandarizadas para comprender el fenómeno que a estudiar.

Adicionalmente, las estudiantes trabajaron con objetos que se relacionan con el campo de la estadística, como el reconocimiento de la muestra y población en un estudio estadístico, y analizaron asuntos como el tipo de variables y tipo de instrumentos, como las tablas de conteo, frecuencia y gráficas de barras para representar la información, lo cual les permitió organizar, interpretar y comprender los datos que resultan en un proceso de investigación y que ayudan a plantear soluciones ante una situación o problema de estudio, así como medios para comunicar diferentes hallazgos.

A diferencia de los problemas rutinarios que se pueden encontrar en un libro de texto, con el desarrollo de esta situación de modelación las estudiantes reconocieron a las matemáticas, desde sus elementos y conceptos, como una herramienta adecuada para leer, comprender y participar en la sociedad al tomar un papel más activo y poner su conocimiento al servicio de otras personas, permitiéndoles reconocer y reflexionar frente a sus hábitos alimenticios, las implicaciones que puede tener para la salud el consumo elevado de azúcar y proponer alternativas más saludables para la lonchera escolar.

Estos espacios desarrollan habilidades como argumentación y comunicación, porque los estudiantes utilizan diferentes ideas y conceptos matemáticos para darles rigor y validar sus posturas, lo mismo que el trabajo en equipo, saber escuchar y la consolidación de acuerdos para completar las tareas propuestas.

Esta situación se puede enriquecer con el uso de herramientas tecnológicas que favorezcan procesos como la recolección de información y construcción de gráficas y tablas estadísticas, para priorizar otras habilidades como la interpretación y el análisis de datos que se presentan, así como la presentación de la información, el uso de medios audiovisuales como los vídeos para comunicar y divulgar, y los saberes que tienen lugar en la comprensión de la situación.

3. EVALUACIÓN

Como producto final se propuso a las estudiantes la elaboración de un comercial de televisión en el que comunicaran brevemente los resultados del estudio, el cual debía incluir una explicación frente a cómo determinar la cantidad de calorías aportada por la azúcar añadida de los alimentos. Para evaluar este proceso se diseñó el instrumento de valoración que se presenta en la Tabla 3, en la que se consideran diferentes criterios con puntaje diferente, así como los puntos que se obtienen por cada ítem y los comentarios del profesor. Para este proceso es importante que el profesor acompañe con anticipación la puesta en común de algunos objetos y conceptos matemáticos, en este caso temas como la muestra, la población y otras herramientas estadísticas para presentar la información, de manera que los estudiantes los pongan en práctica en sus procesos de solución a la situación de modelación y para presentar la información recolectada.

Tabla 3. Instrumento para la evaluación

Nombres de las estudiantes:		
Criterio: Los estudiantes …	**Puntos por criterio**	**Comentarios**
Determinan la población de estudio (2)		
Determinan el tamaño de la muestra (2)		
Identifican la moda (2)		
Organizan los datos de la encuesta en tabla de frecuencia (5)		
Representan la información en gráficas (5)		
Investigan al menos cinco presentaciones del producto (5)		
Determinan la cantidad de cucharadas de azúcar añadida (10)		
Determinan la cantidad de calorías que se ingieren por azúcar añadida por producto (10)		
Describen una estrategia para determinar adecuadamente las calorías aportadas por la azúcar añadida en un producto (9)		
Puntaje máximo 50 puntos Retroalimentación:		

En términos metodológicos es necesario que, durante las etapas en el desarrollo de la situación, el profesor retroalimente el trabajo de los estudiantes, creando espacios como guías simples relacionadas con el diseño del comercial, ensayos previos o asesorías en los que valore y comente las propuestas de los estudiantes de manera que reflexionen, busquen mejorar su trabajo y profundizar en el proceso de aprendizaje. Asimismo, cada grupo debe contar con el instrumento de manera previa, de modo que les funcione como una lista de chequeo de estos criterios. La evaluación del producto es de carácter formativa, ya que recoge las habilidades desarrolladas durante el proceso, así como los conocimientos que se alcanzan, sin embargo, se utiliza como una estrategia para orientar los procesos de enseñanza-aprendizaje.

De igual manera, el proceso de evaluación se puede enriquecer a partir de un instrumento que permita co evaluar la participación de los compañeros en el desarrollo la situación de modelación, en el que se consideren aspectos como aportes, respeto, responsabilidad, uso del tiempo y de recursos, en una escala valorativa de 5 (alto), 3 (medio), 1 (básico), como se observa en la Figura 6. Este instrumento se diseñó con la herramienta CoRubrics de Google, y se complementa con los comentarios que las compañeras hacen al trabajo de las otras, así como el proceso de autoevaluación, donde cada estudiante puede evaluar su propio proceso y participación en las tareas asignadas al equipo.

	ALTO	MEDIO	BÁSICO	
	5	3	1	PESO
Aportes	Comunico mis ideas y aporto de manera significativa al trabajo del grupo.	Comunico algunas ideas y hago algunos aportes al trabajo del grupo.	Mis aportes al trabajo del grupo son pocos.	20%
Respeto	Durante el proyecto he sido siempre cordial y respetuosa con mis compañeras.	Durante el proyecto, en general he sido cordial y respetuosa con mis compañeras, aunque a veces les he faltado paciencia.	Durante el proyecto, no he sido cordial ni respetuosa con mis compañeras	20%
Responsabilidad	Cumplo con mis deberes dentro del grupo y vigilo por el trabajo de las demás.	Cumplo con mis deberes dentro del grupo.	No cumplo con todos mis deberes dentro del grupo.	20%
Uso del tiempo	Utilizo todo el tiempo asignado para trabajar en el proyecto.	Utilizo la gran parte del tiempo asignado para trabajar en el proyecto, pero a veces me distraigo con otras cosas.	No utilizo bien el tiempo asignado para trabajar en el proyecto.	20%
Uso de recursos	Creo y utilizo elementos gráficos que permiten explicar de manera clara los resultados de la investigación.	Creo y utilizo algun elemento gráfico que permite explicar de manera clara los resultados de la investigación.	No utilizo ningun elemento gráfico para explicar los resultados de la invetsigación.	20%

Figura 6. Instrumento CoRubrics

4. TRANSFERENCIA O AMPLIACIÓN A OTRAS SITUACIONES O CONTEXTOS

La experiencia y el desarrollo de la situación de modelación, en la que se estudiaron los aportes calóricos del azúcar añadido en los productos de la lonchera, se podría ampliar a partir del análisis de otros datos que aparecen en la Tabla nutricional de cada producto, como los carbohidratos y su aporte calórico, los ingredientes, las fechas de vencimiento, los elementos químicos y orgánicos necesarios para su producción y otros como la presentación del producto y la cantidad de contenido. También reflexionar frente a los alimentos que, aun teniendo un aporte calórico bajo por el azúcar añadido, no podrían considerarse saludables y en este sentido se reflexionar en relación con la pregunta: ¿qué se entiende por producto saludable?

Lo anterior se abordó superficialmente en el desarrollo de esta experiencia, pero uno de los equipos decidió investigar un producto que se encuentra en el mercado y que tenían un total de 0g de azúcar añadidas, según se indica en su Tabla nutricional. Sin embargo, se decidió profundizar en la reflexión ya que, por ser un producto bajo en azúcar, no significa que sea saludable, porque se deben considerar los demás componentes que se usan para su producción. Al respecto, la Organización Panamericana de la Salud OPS [10] advierte que *varias características nutricionales, metabólicas, sociales, económicas y ambientales de los productos ultra procesados afectan la salud. A continuación, las principales razones: son nutricionalmente desequilibrados, son de alta densidad energética, pueden crear hábitos de consumo y adicción, …*

Adicionalmente, en el desarrollo del ambiente puede incluirse la construcción de una representación visual del azúcar añadido de varios productos de consumo frecuente, lo cual puede impactar al observador y permitir que la reflexión sea más profunda. Una prueba de ello se muestra en la Figura 7, en la que se exponen diferentes productos y la equivalencia en cubos de azúcar, lo que les permite a los estudiantes resolver situaciones multiplicativas para determinar su representación exacta, así como el uso de las fracciones, entre otros aspectos. Una galería creada por las mismas estudiantes en la escuela podría tener un impacto visual llamativo para el resto de las estudiantes.

Figura 7. Azúcar añadida chocolate (sinazucar.org)

En la Tabla 4 se presentan algunos materiales que pueden complementar el desarrollo del este proyecto, así como las herramientas tecnológicas que se utilizaron.

Tabla 4. Materiales adicionales

Material	Enlace	Descripción
Página web	https://www.sinazucar.org/	Proyecto fotográfico que pretende visualizar el azúcar libre que se encuentran en algunos productos.
Comercial de televisión	https://www.youtube.com/watch?v=srzSnaqx_7Y	Comercial de Red PaPaz sobre la información que debe incluir los productos en el mercado.
Video	https://www.youtube.com/watch?v=4Nkey-LI7Jo&t=17s	Red PaPaz denuncia publicidad engañosa.
Elaboración de encuestas	https://g.co/kgs/TAwciP	Se usó la herramienta de Google para la elaboración de en cuentas y recolección de datos.
Grabación de vídeos	https://screencast-o-matic.com/screen-recorder	Programa para la grabación de la pantalla y el sonido del computados.
Diseño de CoRubrics	https://workspace.google.com/marketplace/app/corubrics/969519855495?hl=es	Herramienta utilizada para el diseño de rubricas para la coevaluación y autoevaluación.

5. CONCLUSIONES

Esta situación de modelación permitió que las estudiantes reconocieran a las matemáticas como una herramienta para comprender un aspecto cercano a su realidad, como la alimentación saludable en la lonchera, especialmente el consumo de azúcar añadido en los productos ultra procesados que se presentan en los anuncios publicitarios como saludables o beneficiosos para el desarrollo de los niños. Esta situación les permitió posicionarse de manera crítica y visibilizarse como poseedoras de un saber que pueden compartir, además de acompañar a otras estudiantes en el proceso de toma de conciencia de los productos que consumen y sus aportes nutricionales. También exploraron la utilidad de los elementos matemáticos, con lo que mejoraron su relación con el aprendizaje de este saber al apreciarlo en situaciones cercanas a su vida.

Reconocer otros actores en el aula y otras voces, como la nutricionista, les permite dinamizar el ambiente y las relaciones que se generan en la clase que involucran aspectos de un saber especifico, y que en virtud del reconocimiento de la particularidad de los saberes y lo amplio que es el conocimiento, la participación de otros actores en el aula permite una especie de democratización del saber que se pone al servicio de la comunidad. En este caso, para la nutricionista y a partir de su saber específico, puede guiar de manera clara y profesional las reflexiones de las estudiantes frente al consumo de azúcar añadido, sus implicaciones para la salud y los aportes nutricionales de otros productos necesarios para su desarrollo y gasto energético, entre otras preguntas en términos médicos que surgen en el desarrollo de la experiencia. Adicionalmente, el profesor se presenta como alguien que acompaña el proceso y dispone los elementos para la constitución del conocimiento, la exploración de ideas, las discusiones y los debates a partir de experiencias de investigación. En este sentido el ambiente de clase se dinamiza y se presenta como un espacio en el que convergen diferentes saberes y en el que todos son partícipes en el proceso.

Esta experiencia permite reconocer procesos de modelación matemática en edades tempranas, en la cual, a partir del estudio de un fenómeno o problemática social, las estudiantes toman posiciones críticas y buscan poner a disposición su saber para resolver la situación y concientizar a otras personas frente a la misma.

REFERENCIAS

[1] MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Ministerio de Educación Nacional.

[2] Parra-Zapata M. (2015). Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática: Reflexiones a partir de la perspectiva sociocrítica de la modelación matemática. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia.

[3] Biembengut M. (2019). Modelación en la educación de las ciencias y matemática en la primaria. En XV CIAEM-IACME. Medellín, Colombia.

[4] Ocampo-Arenas M. (2020). Caracterización de la actividad matemática de los estudiantes de Educación primaria en un ambiente de modelación matemática. Tesis de Maestría. Universidad de Antioquia.

[5] English L. (2015). Learning through modelling in the primary years. En Lee H. et al. (Eds.), Mathematical modelling: From theory to practice Mathematics Education. World Scientific Publishing.
[6] Recuperado: https://www.mayoclinic.org/es-es/healthy-lifestyle/nutrition-and-healthy-eating/in-depth/added-sugar/art-20045328
[7] Kaiser G. y Sriraman B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. ZDM-The international journal of mathematics education, 38(3), 302-310.
[8] Barbosa J. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. ZDM-The international journal of mathematics education, 38(3), 293-301.
[9] Araújo J. (2009). Uma abordagem sociocrítica da modelagem matemática: A perspectiva da educação matemática crítica. Alexandria revista de educação em ciências e tecnologia, 2(2), 55-68.
[10] OPS. (2014). Clasificación de los alimentos y sus implicaciones en la salud. Organización Panamericana de la Salud. Recuperado: https://www3.paho.org/ecu/index.php?option=com_docman&task= doc_download&gid= 456&Itemid=
[11] OMS. (2015). Ingesta de azúcares para adultos y niños. Organización Mundial de la Salud.

Parte II
Situaciones para educación básica secundaria

C 4

Cuántos empaques: Una propuesta de enseñanza de modelación en diferentes niveles formativos

Olga Emilia Botero Hernández[1]
Paula Andrea Rendón-Mesa[2]
Universidad de Antioquia
Colombia

En el proceso formativo matemático los estudiantes deberían alcanzar una visión que trascienda el utilitarismo del contexto, es decir, se deberían involucrar en el desarrollo de una situación como actores, con el fin de obtener una respuesta que tuviese sentido en correspondencia al contexto que se aproxima. Por su parte, los profesores deberían procurarse porque en las actuaciones de los estudiantes existiera un vínculo entre la matemática y el contexto, como lo confirma los planteamientos de Villa-Ochoa y Berrio [1] cuando mencionan que la modelación posibilita una conexión entre las matemáticas y las experiencias culturales.

En correspondencia con estos argumentos, la propuesta en este capítulo pretende mostrar cómo este contexto particular sitúa el aprendizaje a partir de las necesidades matemáticas que emergen. En dicha lógica, se identifica la situación, es decir, se describe, para que se comprenda el contexto y el propósito formativo. Adicionalmente, se presentan comentarios acerca de posibilidades en el desarrollo de la misma y cómo la evolución de modelos se convierte en una oportunidad de aprendizaje con base en el error. También se indican algunos referentes teóricos que sustentan las visiones de las profesoras que abordan la situación de aprendizaje en diferentes niveles formativos.

Se proponen alternativas evaluativas y algunas ampliaciones en términos de las posibilidades formativas, en correspondencia con los niveles donde se lleva a cabo. Además, se presentan consideraciones acerca de las oportunidades y las debilidades que se pueden encontrar en el proceso de implementación de la situación de aprendizaje.

1. METODOLOGÍA

1.1 Identificación de la situación

Hablar de propuestas de enseñanza para la formación matemática en diferentes niveles requiere reconocer los usos y los alcances que los estudiantes pueden dar a la modelación matemática en relación con la tarea propuesta. Que el profesor, en cuanto a la dinamización, tenga claridad del porqué, qué y cómo modelan los estudiantes, lo que permite adentrarse en particularidades que visiblemente se reconocen en cuestiones que se relacionan con la evolución de modelos, la reflexión que obtienen los estudiantes al modelar la situación y la vinculación de modelos de otras disciplinas [2].

La situación de aprendizaje que se propone se vincula con el desarrollo del pensamiento numérico y geométrico en el ciclo 7 y 8 de la Educación Básica Secundaria y de competencias en ingeniería, particularmente en Ingeniería de Diseño de Producto. La dinámica en dicha situación consiste de un enunciado verbal [8], en el que los estudiantes determinan la mayor cantidad de empaques que se pueden elaborar a partir de un pliego de cartón industrial, cuando se entrega el plano de los mismos. Se espera que vayan más allá de la aplicación de fórmulas matemáticas para el cálculo de áreas y de volúmenes de los

---

[1] Contacto: *olga.botero@udea.edu.co*
[2] Contacto: *paula.rendon@udea.edu.co*

cuerpos, pues es frecuente que cuando realizan estos procedimientos utilizan fórmulas de memoria o recurren a ellas cómo único recurso para resolver la situación. En el desarrollo de la situación los estudiantes analizan las diferentes maneras de cómo utilizar la plantilla de la caja en el cartón para obtener la mayor cantidad de cajas como unidad, no como ensamble de ellas.

Si bien la situación se reconoce como un enunciado verbal, no minimiza las prácticas matemáticas ni las restringe, por el contrario, permite que los estudiantes reformulen los procesos, se generen nuevos registros de representación, y se comprenda el contexto en términos formativos como aquello que condiciona la manera de resolver la situación. En correspondencia con el propósito formativo, en la Tabla 1 se describen las metas de aprendizaje, las habilidades y las actitudes que desarrollan los estudiantes para los diferentes niveles para los que se propone esta situación.

Tabla 1. Intenciones formativas de la propuesta

Metas de aprendizaje	Nivel	Relación con documentos rectores propios de cada nivel formativo	Habilidades	Actitudes
Realizar procesos de medición y estimación de superficies y volúmenes, y justifica sus relaciones. Elige las unidades de medida y los instrumentos apropiados, según la situación. Amplia sus comprensiones sobre relaciones entre variaciones de perímetro y área de una figura, de forma que pueda explicarlas y justificarlas. Describe las características de figuras bidimensionales y cuerpos tridimensionales en el desarrollo de situaciones de composición y descomposición. Describe posiciones y trayectorias mediante el uso del plano cartesiano.	7 y 8	Describe atributos medibles de diferentes sólidos y explica relaciones entre ellos por medio del lenguaje algebraico. Utiliza y explica diferentes estrategias para encontrar el volumen de objetos regulares e irregulares en la solución de problemas en las matemáticas y en otras áreas. Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto (Estándares básicos de calidad y Derechos básicos de aprendizaje)	Se espera que los estudiantes desarrollen habilidades en términos de interpretar una situación, tanto desde el punto de vista matemático como del contexto y las condiciones en las que se presenta. En relación con la geometría y los procesos de medición, se espera que desarrollen habilidades relacionadas con el cálculo de áreas irregulares, mediante la aplicación de los conocimientos que poseen frente al cálculo de áreas regulares.	Mediante la implementación de esta tarea de modelación se espera que los estudiantes desarrollen y afiancen actitudes relacionadas con la indagación, la perseverancia y el análisis de resultados, en correspondencia con las condiciones particulares de la situación que analizan.
Resuelve problemas con iniciativa, toma decisiones, creatividad, razonamiento crítico. Comunica y transmite conocimientos, habilidades y destrezas en el campo de la Ingeniería de diseño.	Ingeniería de diseño	Esta situación de aprendizaje pretende dinamizar las cinco áreas de formación de un ingeniero (ciencias básicas, ciencias básicas de ingeniería, área de aplicación profesional, área económico-administrativa, área socio-humanística) y abordar problemáticas típicas, donde deba crear e innovar en las soluciones propuestas. Además de vincular en su actuación el pensamiento científico y concebir de manera global el ejercicio de su profesionalización.	A nivel ingenieril esta situación de aprendizaje posibilita que el futuro ingeniero ponga en juego su habilidad para conceptualizar y materializar un empaque.	De acuerdo con la manera como se dinamiza la situación de aprendizaje, los futuros ingenieros deben despertar sus aptitudes para el trabajo en equipo, su manera polifacética de asumir un contexto y resolver la situación-problema propuesta, y potencializar su ingenio y creatividad.

1.2 Desarrollo de la situación

En este apartado se describe la propuesta y se precisan los diferentes momentos en los que se dinamiza la situación de modelación, así como la configuración del ambiente de aula. La situación propuesta es la siguiente: Suponga que el empaque de la Figura 1 se debe elaborar de cartón industrial. El tamaño de un pliego de este material es de 100 x 70 cm. De acuerdo con esta información responda las siguientes preguntas: 1) ¿Cuántos empaques se pueden realizar por pliego? Describa las ideas discutidas con sus compañeros de equipo y el procedimiento realizado para responder la pregunta. 2) ¿Cuál es la superficie utilizada y el porcentaje de desperdicio en la fabricación del empaque? ¿Cómo estimaron en el grupo el porcentaje de desperdicio?

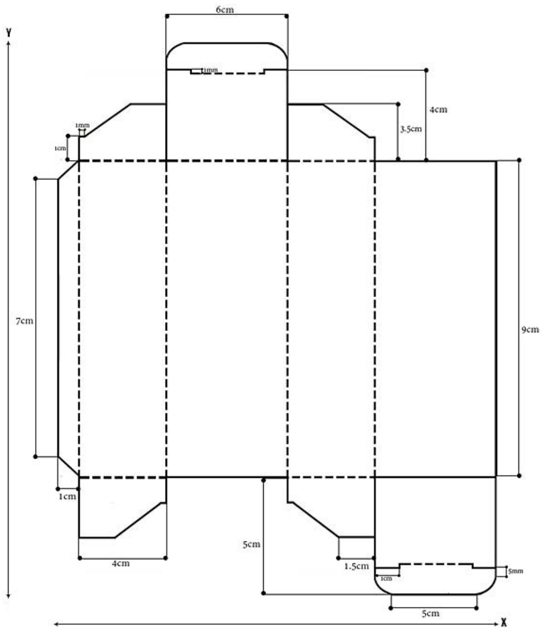


Figura 1. Empaque de producto (Plano de empaque)

Si bien la situación parte de un enunciado verbal, tiene diferentes momentos de intervención:

1. Se espera que los estudiantes analicen la manera de disponer una plantilla para elaborar una caja de dimensiones preestablecidas en un pliego de cartón industrial, también de dimensiones fijas, de manera tal que se obtenga la mayor cantidad de empaques. Para este asunto se pregunta: ¿cuántos empaques? Usualmente, en este primer momento de acercamiento, los estudiantes recurren a calcular el área del empaque y el área total del pliego de cartón, para luego llevar a cabo una división y determinar cuántas veces *cabe* el área de la caja en el área total del cartón. Aunque este procedimiento es matemáticamente correcto ignora el contexto y la configuración de unidad.

2. A partir de estas reflexiones los estudiantes perciben la necesidad de reformular el modelo y comprender la solución, más allá de operaciones matemáticas. Mediante preguntas acerca de ¿cómo se pueden acomodar la plantilla en el pliego de cartón para hacer los cortes? se espera que los estudiantes reflexionen acerca de la necesidad de acomodarlas mediante un arreglo rectangular, que no coincide con la cantidad de cajas que arrojó previamente la división de las dos áreas.

3. Los estudiantes estudian las disposiciones espaciales del empaque (horizontal o vertical) que los lleva a establecer relaciones entre el largo y el ancho del pliego, el largo y el ancho total de la plantilla y a analizar la variación si se utiliza horizontal o verticalmente. 4) Se espera que algunos estudiantes decidan recortar las plantillas y la superpongan, de manera que puedan darse cuenta de la posibilidad de acoplarlas y optimizar la superficie del pliego de cartón.

2. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Cada momento de la modelación demuestra la evolución de los modelos y cómo se consolidan a partir de sistemas de explicación, que no son ajenos ni para los estudiantes de Básica Secundaria ni para los de ingeniería, tales como considerar las dimensiones de un empaque, posición espacial, desperdicio y otros conceptos implícitos en la situación propuesta. Además, la evolución de modelos les permite a los estudiantes de ambos contextos ampliar las ideas sobre el fenómeno de estudio y reorientar sus procesos, con el objetivo de reconocer los significados que asociaron con la situación contextual propuesta y, por tanto, reformularla.

Según Lesh y English [4] la evolución de los modelos demuestra que, en la modelación matemática, los modelos dan cuenta de los aprendizajes matemáticos de los estudiantes, y por ello hacen uso de modelos más sofisticados que los que se les enseñan. Dicho planteamiento se sustenta, por ejemplo, en el tercer momento del proceso, puesto que, aunque los estudiantes de ingeniería tienen claridades en términos, conceptos y procesos numéricos, variacionales y geométricos, no se limitan a ellos, sino que, de manera autónoma, pueden recurrir al uso de software para proponer soluciones que dinamizan los aprendizajes y extenderlos a su futuro campo de acción.

En otras palabras, la evolución de los modelos demuestra que los estudiantes alcanzan desarrollos conceptuales y les permite expresar, probar y revisar sus maneras de pensar. Esta forma de actuar sobrepasa el hecho de que sean guiados a lo largo de una trayectoria conceptual, puesto que les permite asumirse como partícipes del proceso formativo. En este sentido, la modelación matemática pasa de ser un asunto estático a una construcción dinámica, que contribuye con la solución de una situación [5].

Al realizar las tareas de modelación las ideas matemáticas de los estudiantes no permanecen neutrales, al contrario, se transforman, pero con relación a algunos aspectos culturales relacionados con el uso de un empaque, y para el caso ingenieril, su diseño. El contexto se convirtió en un *elemento constitutivo del conocimiento que proporciona un sistema cultural de referencia para la actividad matemática* [1].

Los estudiantes, tanto de nivel universitario como escolar, pusieron en juego las relaciones entre los modelos y el contexto, como se evidencia en las acciones que realizaron para determinar la cantidad de empaques óptima para un pliego de cartón. Participaron de la práctica cultural cuando crearon los planos del producto, estimaron cálculos para conocer las magnitudes y crearon bocetos para comprobar los resultados, acciones que les ayudaron a aprender acerca de los empaques, los envases y las regularidades, entre otros.

En el aula se propusieron situaciones que permitieron convertir el contexto desde un instrumento a un referente cultural, es decir, se involucraron conceptos, acciones, procesos y recursos que ayudaron a distinguir y caracterizar el proceder común o profesional. Generar dicho referente cultural ayudó a los estudiantes a aprender de dos disciplinas en simultánea, en este caso, de las matemáticas y del diseño de producto.

De acuerdo con la experiencia que vivieron los estudiantes al involucrar los modelos del sujeto y los objetos (el que modela y el que se modela), se generó entre ellos una relación de representación que aportó a la significación. A partir de las situaciones los estudiantes crearon modelos que ayudaron a significar la situación, es decir, expresar y representar los conceptos que se asocian con ella.

El hecho de que los estudiantes debieran generar modelos para estimar la cantidad posible de empaques para un pliego de cartón, da cuenta de la relación entre usuario-fenómeno-modelo. Una relación que evidencia la articulación que propicia la modelación matemática entre los conocimientos matemáticos y específicos de un campo de formación, como en el caso del diseño de producto, que no es automática ni se deriva de manera directa del estudio de fenómenos elegidos por los estudiantes. Al implementar la modelación matemática se propicia un ambiente en el que se concibe la reflexión y se problematiza acerca de la utilidad de las formas y los objetos matemáticos frente a una oportunidad de diseño.

En general, cuando el conocimiento se desarrolla a través de procesos de modelación, el conocimiento y las herramientas conceptuales que se desarrollan alcanzan otro nivel de apropiación, uso, evolución y reformulación. Los modelos están configurados por las situaciones en que se crean o modifican, y los entendimientos que evolucionan se organizan alrededor de la experiencia y de las abstracciones. Sin embargo, los modelos y los sistemas conceptuales subyacentes, que a menudo evolucionan, representan formas generalizables de pensar, es decir, no son simplemente situaciones de conocimiento específico que no se transforman.

Las actividades, las herramientas y la cultura, aquella que se relaciona con el diseño de un empaque, con las que se vincularon los estudiantes, permitieron la evolución de los modelos, lo que conlleva a desarrollar de manera más detallada la situación y proponer una solución legítima, lo que demuestra cómo los estudiantes relacionan el saber y el hacer, como se evidencia en relación con el cálculo de las superficies y al realizar el plano a escala del empaque.

La situación de modelación propuesta conduce a los estudiantes a comprender qué se estudia, establecer variables en juego, esquematizar de manera gráfica o tabular la situación, diseñar estrategias, realizar cálculos matemáticos, emplear procedimientos, comprobar las soluciones, replantear las acciones y, por tanto, a buscar la generalidad de la situación con relación al diseño de un empaque. A partir de un modelo inicial los estudiantes avanzaron, utilizaron procedimientos sistemáticos y descubrieron más de un modo de resolver un problema en el marco de una cultura para el diseño de producto.

3. EVALUACIÓN

La situación de modelación propuesta en este capítulo permite llevar a cabo estimaciones y cálculos de áreas, tanto de figuras regulares como irregulares, al tiempo que analizar aspectos relacionados con la orientación de las figuras y las relaciones entre el largo y el ancho, y cómo inciden en la cantidad de cajas que se pueden elaborar con el pliego de cartón industrial. En dicho sentido se sugiere proponer situaciones similares que dinamicen el empleo de otro tipo de figuras geométricas y posibiliten la replicabilidad del proceso. Por tanto, las configuraciones evaluativas, más que valorar el alcance de una respuesta correcta en cuanto a *cuántos empaques se pueden construir*, implica reconocer el proceso, las modificaciones y las evoluciones de los modelos, asunto que configura un proceso cualitativo y descriptivo.

Para alcanzar estas puestas de la evaluación en términos de carácter formativo, se sugiere que la situación de aprendizaje se valore a partir de rúbricas, que relacionen las metas de aprendizaje y que considere los diferentes momentos de su implementación. Un ejemplo de este elemento se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2. Rúbrica de evaluación

	1,25 puntos	1,0 puntos	0,5 puntos
Cálculo del área de las partes	Calcula correctamente el área de cada parte de la caja sin omitir ninguna.	Omite algunas de las partes de la caja o realiza un cálculo erróneo en el panel, menos una de las partes.	Omite más de una parte o realiza cálculos erróneos en más de una parte.
Presentación del trabajo	Presenta los diferentes cálculos realizados y el trabajo se puede interpretar con claridad.	Solo indica respuestas y el trabajo no se interpreta con claridad.	Omite cálculos o respuestas parciales y el trabajo no se interpreta con claridad.
Utiliza correctamente las unidades de área y de longitud, según corresponda	Utiliza correctamente todas las unidades de área y de longitud, según corresponda.	Omite la unidad de medida o la escribe de forma incorrecta en máximo 3 medidas.	Omite la unidad de medida o escribe de forma incorrecta en más de 3 medidas.
Exactitud del cálculo	Obtiene un resultado entre 289 cm^2 y 292 cm^2.	Obtiene un resultado entre 289 cm^2 y 270 cm^2 o entre 292 cm^2 y 324 cm^2.	Resultado menor a 270 cm^2 o mayor a 324 cm^2.

En el caso de los ingenieros la situación de aprendizaje puede dinamizar las áreas de formación y reconocer las necesidades puntuales para su futuro campo de desempeño, como se ilustra en la rúbrica de la Tabla 3.

Tabla 3. Rúbrica de evaluación para ingenieros

Área	Ítem Evaluado	Desempeño		
		Alto	Medio	Bajo
Contexto	Reconoce las necesidades del usuario y del contexto, y los requerimientos técnicos del producto que se espera elaborar a partir de la cuantificación de las variables involucradas.			
Diseño	Realiza procesos para definir las proporciones de las formas del producto.			
	Aplica el proceso de geometrización para definir las proporciones del producto.			
	Emplea planos del producto para soportar el análisis de proporciones.			
Ingeniería	Realiza procedimientos matemáticos que justifican los requerimientos funcionales de la solución, por ejemplo, cálculo de volúmenes, áreas, perímetros, caudal, temperatura y carga máxima, entre otros.			

4. TRANSFERENCIA O AMPLIACIÓN A OTRAS SITUACIONES O CONTEXTOS

A continuación, se describen diversas situaciones que pueden servir de ampliación para orientar a los estudiantes hacia el aprendizaje de nociones espaciales y métricas.

4.1 Empaque de un CD

En la Figura 2 se presenta el empaque de un CD que se diseña para un grupo de música electrónica [6], una situación es similar a la que se propone en este capítulo.

Figura 2. Empaque del CD que se diseña [6]

La agrupación pretende crear una pirámide azul para que las personas coloquen en sus casas. El diámetro del CD es 12 cm y las caras laterales son triángulos equiláteros. Este contexto le posibilita al estudiante determinar la cantidad de empaques que se pueden realizar con un pliego del material correspondiente. Al mismo tiempo, reconocer el volumen de la figura decorativa que se genera.

4.2 Construcción de una bolsa para colores

Al construir su propia bolsa para colores [7] se pregunta a los estudiantes si un estuche de lápices personalizado es exactamente del tamaño correcto para la cantidad de bolígrafos, lápices, etc., que generalmente utilizan. Se les propone construir uno. Se plantean algunas preguntas iniciales antes de comenzar a planificar el diseño:

- ¿Cuánto mide el bolígrafo, el lápiz, la regla u otro objeto largo que desee guardar en el estuche?
- ¿Cuántos bolígrafos, lápices, etc. quiere guardar en el estuche?
- Si los agrupa todos juntos y los mide alrededor con un trozo de cuerda, ¿qué diámetro para el estuche de lápices necesita?
- Cuando haya decidido las dimensiones del estuche de lápices, piense qué forma sería una buena idea. Bien puede decidir que un prisma cilíndrico, cuboides o triangular, hexagonal u octogonal funciona bien.
- ¿Cómo se ve la plantilla de la forma que quiere?
- ¿Cuántas piezas independientes necesitas?
- ¿Qué forma tiene cada pieza?
- ¿Qué lados deben encajar? Intente modelar la red de su estuche de lápices con papel, doblar la red de papel para darle forma y pegarla con cinta adhesiva. ¿Funciona? ¿Es del tamaño adecuado para sus bolígrafos y lápices?

Una vez que esté satisfecho con su prototipo de papel, debe decidir qué materiales utilizará para el producto real. ¿Tiene que ser un material rígido o podrías usar tela reciclada? ¿Necesitará modificar las medidas en su diseño para utilizar el material elegido? ¿Quiere el mismo material para todas las piezas, o los extremos pueden estar hechos de algo diferente al resto? ¿Cómo pegar o unir las piezas? ¿Quiere poner un diseño en alguna de las piezas antes de confeccionar el estuche? ¿Cómo se asegurará de que el estuche de lápices permanezca cerrado?

Se sugiere explorar con los estudiantes las diferentes bolsas de colores que utilizan, las características y las especificaciones del diseño, con el ánimo de que utilicen las habilidades desarrolladas a partir de la situación inicial de los empaques y reflexionen acerca del volumen de diferentes prismas y sus plantillas correspondientes, necesarias para el diseño inicial de la bolsa de colores.

Esta alternativa de la actividad se puede llevar a cabo en diferentes momentos: 1) *inicial*: corresponde a la identificación de los requerimientos necesarios para almacenar los lápices y materiales de cada estudiante; 2) *empleo de nociones geométricas y de procesos de medición*, para dar respuesta a las características que debe poseer la bolsa de colores según los requerimientos establecidos en el momento inicial; y 3) *elaboración de prototipo* de la bolsa de colores y primer diseño, que responda a las condiciones de material y elaboración final.

5. CONCLUSIONES

Tal como se ha marcado en la situación de aprendizaje, la evolución de modelos puede contribuir a la configuración de una modelación que no se asume como estática, ni de procesos inmediatos o respuestas absolutas, sino que, por el contrario, asume un proceso dinámico, paulatino, que pone en correspondencia las necesidades del contexto.

De esta forma las matemáticas adquieren sentido al proponer soluciones referidas al contexto que se dinamiza.

La situación de aprendizaje muestra las configuraciones en torno a la enseñanza-aprendizaje de la modelación en diferentes niveles de formación. Además, sobre cómo un enunciado verbal se puede dinamizar cuando se amplían las relaciones experienciales para movilizar los procesos de la actividad matemática, tanto en estudiantes de básica secundaria como de ingeniería.

REFERENCIAS

[1] Villa-Ochoa J. y Berrio M. (2015). Mathematical modelling and culture-an empirical study. En Stillman G. et al. (Eds.), Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences (pp. 241–250). Springer.

[2] Rendón-Mesa P. (2017). Articulación entre la matemática y el campo de acción de la ingeniería de diseño de producto: Aportes de la modelación matemática. Disertación doctoral. Universidad de Antioquia, Colombia.

[3] Villa-Ochoa J. et al. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. Espaço Plural 18(36), 219–251.

[4] Lesh R. y English L. (2005). Trends in the evolution of models & modeling perspectives on mathematical learning and problem solving. ZDM 37(6), 487–489.

[5] Gainsburg J. (2013). Learning to model in engineering. Mathematical Thinking and Learning, 15(4), 259–290.

[6] Snorradóttir D. (2013). Empaque de CD. Recuperado: https://www.packagingoftheworld.com/2013/05/ sometime -acid-make-out-cd-packaging.html

[7] Universidad de Cambridge. (2015). Make your own pencil case. Proyecto NRICH. Recuperado: https://nrich.maths.org/8342

[8] Villa-Ochoa J. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: Un estudio de caso con profesores de matemáticas. Revista Internacional de Investigación en Educación 8(16), 133-148.

C 5

El aula de matemáticas contra la corrupción: Un ambiente de modelación matemática

María Camila Patiño-Henao[1]
Julián Andrés Galeano-Ocampo[2]
Mónica Marcela Parra-Zapata[3]
Universidad de Antioquia
Colombia

Actualmente, en las clases de matemáticas es habitual que los profesores identifiquen que algunos estudiantes pierdan el sentido y el significado que tienen las matemáticas, puesto que por apatía muestran rechazo frente al área [1]. El argumento se sustenta en situaciones como la realización de clases en las que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se reduce a resolver problemas matemáticos rutinarios, limitados al uso de técnicas, fórmulas y algoritmos que no les permiten a los estudiantes tener un acercamiento o una interacción con el objeto de estudio, por lo que consideran a las matemáticas un tema desarticulado de sus situaciones cotidianas [2]. A este respecto, se busca que los profesores establezcan alternativas para desarrollar las clases de matemáticas en las que se involucren las situaciones cotidianas de los estudiantes y los conocimientos matemáticos.

En la escuela existen algunas formas de hacer modelación, que posibilitan diferentes maneras de hacer matemáticas en el aula, es decir, articular los contenidos matemáticos escolares con la cotidianidad [3-6]. da Silva y Kato [7], en la perspectiva sociocrítica la modelación matemática puede generar oportunidades para que los estudiantes lleven a su cotidianidad los debates que realicen en el aula, crear conciencia en relación con su papel en la sociedad y transformar cómo ven el mundo.

En este sentido, y en aras de compartir con los profesores insumos para recrear este tipo de ambientes en el aula, se desarrolla una propuesta metodológica de modelación matemática en la perspectiva sociocrítica, enmarcada en una investigación de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia durante 2018.

La propuesta metodológica es un ambiente de modelación matemática en el que se presentan cinco momentos con sus respectivas tareas. El ambiente se denomina *El aula de matemáticas contra la corrupción*, y los momentos son: 1) investiguemos, 2) las matemáticas nos ayudan, 3) las matemáticas y nuestro entorno, 4) opinamos acerca de la consulta anticorrupción, y 5) las matemáticas en función de la sociedad. De igual manera, se presentan algunas producciones de los estudiantes y su respectivo análisis, donde se evidencian los procedimientos, los argumentos y los resultados matemáticos que generan en el ambiente de modelación.

1. METODOLOGÍA

1.1 Identificación de la situación

Al considerar la necesidad de que los profesores incorporen en sus prácticas pedagógicas nuevas estrategias, que les permitan a los estudiantes la interacción con el objeto de estudio, se promueve competencias de pensamiento matemático y apropiación de los conceptos tomamos la modelación

[1] Contacto: *mariac.patino@udea.edu.co*
[2] Contacto: *julian.galeano@udea.edu.co*
[3] Contacto: *monica.parra@udea.edu.co*

matemática como recurso metodológico que permite, entre otros, que los estudiantes generen interrogantes de problemáticas o situaciones de su vida y que representen de diferentes maneras esas problemáticas en términos matemáticos, además, lograr que de allí surjan ideas que les ofrezcan una posible solución al problema o situación. Barbosa [8] argumenta que es importante la presencia de la modelación en el aula, debido a que posibilita que los estudiantes reconozcan cómo utilizar las matemáticas para resolver situaciones cotidianas y de otras disciplinas.

Algunos apartados de los Estándares Básicos de Competencias EBC en Matemáticas en Colombia, establecidos por el Ministerio de Educación Nacional MEN [9], plantean la necesidad de que en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se asuma la clase como un ambiente de aprendizaje, donde profesores y estudiantes interactúen para construir y validar conocimiento, para ejercer iniciativa y crítica, y para aplicar ese conocimiento en diversas situaciones y contextos. Lo anterior lleva a reconocer al pensamiento crítico como parte esencial dentro de la educación en Colombia y, por lo tanto, como parte básica de esta investigación, ya que les aporta a los estudiantes herramientas para determinar y analizar innumerables situaciones, que caracterizan el contexto social actual. Este tipo de pensamiento ofrece herramientas para saber actuar y reaccionar frente a alguna situación que se les presente y, además, les aporta argumentos para defender una idea.

Las metas de aprendizaje en este ambiente de modelación se encaminan a que, cuando los estudiantes se enfrenten a situaciones que les generan cuestionamientos sobre cómo usan las matemáticas, se apropien de ellas y tiendan a encontrarle el valor y sentido que quizá han perdido en las aulas de matemáticas. Así, para Barbosa [10], en la perspectiva sociocrítica un objetivo central de la modelación promocionar el pensamiento crítico de los estudiantes y de las discusiones reflexivas en el aula, que les permitan debatir situaciones del día a día con fundamentos matemáticos y de otras disciplinas.

Se pretende entonces que los procedimientos y resultados matemáticos posibiliten un acercamiento a las posiciones críticas que toman los estudiantes, es decir, se establecen como alternativa para generar en ellos posturas críticas, caracterizadas por las inferencias y los argumentos que hacen ante determinada situación, utilizando conceptos previos y básicos, procedimientos, operaciones y cálculos matemáticos, que les permiten ser precisos a la hora de aportar y tomar decisiones en torno a dicha situación. De lo anterior, entre los procedimientos y los resultados matemáticos se distinguen los primeros, entendidos como la secuencia de las operaciones que realizan los estudiantes: sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y uso de porcentajes, y los segundos, resultados matemáticos como las consecuencias de la realización de estas operaciones.

En este capítulo, el escenario de aula es un ambiente de modelación en la perspectiva sociocrítica, centrado en los procedimientos y resultados matemáticos como una alternativa para generar posiciones críticas en los estudiantes de Educación Media. El ambiente de modelación se crea en el marco de la práctica pedagógica y se implementa con estudiantes del grado décimo (16 a 18 años) del Centro Educativo Rural Obispo Emilio Botero de Marinilla, Colombia. En el grupo hay diversidad de género y son estudiantes que tienen buena relación entre ellos y con las personas externas a la escuela. Debido a que todos hacen parte de la misma comunidad, reconocen las necesidades de la región y las diferencias con la ciudad. En el aula los estudiantes respetan y consideran las apreciaciones de los profesores y están dispuestos a compartir ideas y planes de vida.

1.2 Desarrollo de la situación

El ambiente de modelación matemática: *El aula de matemáticas contra la corrupción*, se entiende como un espacio en el aula en el que se promueve la participación, la interacción y la reflexión de los conocimientos matemáticos y de las situaciones de la vida cotidiana de los estudiantes, y otras dinámicas sociales que pueden ser llevadas al aula [11]. Consiste en la problematización de una situación acontecida en el contexto colombiano: *La consulta anticorrupción*, un evento realizado en Colombia en agosto de 2018. Se decide seleccionar esta problemática, porque medio de la consulta anticorrupción se pretendió, en primer lugar, realizar reformas a la Constitución Política y, en segundo lugar, es un tema que afecta al país.

El ambiente se desarrolló en cinco momentos correspondientes a la idea de modelación matemática propuesta por Parra-Zapata [11], relacionadas con la secuencia de tareas para llevar a cabo el ambiente de modelación matemática: 1) investiguemos, 2) las matemáticas nos ayudan, 3) las matemáticas y nuestro entorno, 4) opinamos acerca de la consulta anticorrupción, y 5) las matemáticas en función de la sociedad. Durante estos momentos los estudiantes usaron herramientas matemáticas para resolver cada tarea, interpretaron los resultados obtenidos en términos de la situación inicial y analizaron e hicieron críticas frente al modelo matemático a partir de los resultados obtenidos.

En la Figura 1 se aprecia la secuencia completa de los momentos desarrollados en el aula de matemáticas contra la corrupción. Se busca que los estudiantes problematicen, investiguen y propongan soluciones a dichas tareas, que se cuestionen y generen preguntas acerca de los problemas del contexto mediante un proceso de búsqueda, selección y análisis de la información.

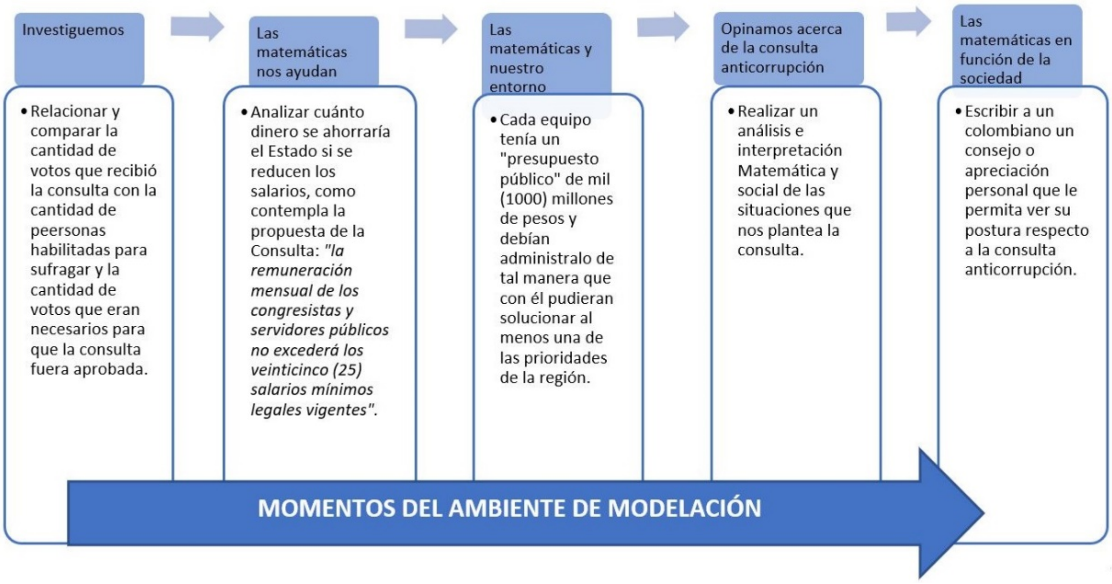


Figura 1. Momentos y tareas del aula de matemáticas contra la corrupción [12]

En este capítulo se detallan las tareas correspondientes a los cinco momentos del ambiente de modelación, sin embargo, solo se muestran los resultados obtenidos de las tareas realizadas por los estudiantes en los momentos 1 y 2, ya que se consideran suficientes para representar el objetivo que se propone para el ambiente.

1.2.1 Investiguemos

Este momento se desarrolló en dos partes: 1) se les proporcionó a los estudiantes un acercamiento a lo que sería el ambiente de aprendizaje, se les mostró un video introductorio acerca de la consulta y se les proporcionó un espacio de debate donde hubo preguntas orientadoras relacionadas con las matemáticas implícitas en la consulta; y 2) un debate en el que se discutieron los resultados y las conclusiones obtenidas de las tareas de la primera parte.

Posterior al video se escucharon las opiniones de los estudiantes acerca de las sugerencias u otras posturas que tuvieran respecto a la consulta anticorrupción, además de sus posiciones referente al resultado. Este diálogo fue guiado por preguntas como:

- ¿Es necesario que se haga una consulta referente a este tema? ¿Por qué?
- ¿Cree que estas propuestas ayudarán a mitigar la problemática de la corrupción?
- ¿Qué opina respecto a la idea de que el voto sea obligatorio?

Luego de que los estudiantes estuvieran informados y contextualizados en relación con la consulta anticorrupción, a cada grupo se asignó la tarea de la Tabla 1.

Tabla 1. Tarea 1 asignada a los grupos [12]

Tarea	Preguntas	Objetivo
Relacionar la cantidad de votos que recibió la consulta, compararla con la cantidad de personas habilitadas para sufragar y la cantidad de votos necesarios para que fuera aprobada.	¿Qué porcentaje de abstinencia hubo durante la consulta? ¿A qué cree que se debe esta cantidad?	Realizar reglas de tres simples. Utilizar conceptos propios de estadística.
Hacer la comparación con las elecciones presidenciales, tanto de primera como de segunda vuelta.	¿Hubo algún candidato presidencial con más votos que la consulta anticorrupción? ¿Esto qué nos dice? ¿Cómo se puede aumentar el índice de personas que salen a votar?	Realizar gráficas o representaciones de datos. Hacer comparaciones entre datos o información que les permita lograr conclusiones.

Antes de desarrollar este momento, se les indicó a los estudiantes que trajeran los datos necesarios: número de habitantes en Colombia, número de personas habilitadas para sufragar, votaciones presidenciales y votación total de la consulta anticorrupción, con el fin de comparar los datos de cada grupo y llegar a un acuerdo, lo cual sirvió para generar en ellos curiosidad y que se preguntaran por el tipo de fuentes de las cuales se extraían los datos o las investigaciones que necesitaban.

Con esta tarea se logra que los estudiantes propongan conceptos matemáticos como las razones, las proporciones y los porcentajes, elementos que les permitieron relacionar y comparar los datos obtenidos. Además, cada grupo organizó la información y construyó una gráfica que les permitió sacar conclusiones acerca de la misma. Las representaciones creadas por los estudiantes no se limitaron o impusieron por los profesores, surgieron de la necesidad de encontrar una solución a la situación planteada.

En la segunda parte se finalizó la clase con una puesta en común de los resultados que cada grupo obtuvo, tanto matemáticos como de las conclusiones de cada estudiante en cuanto a las implicaciones sociales que surgen de los resultados. Esta presentación de los resultados y las conclusiones se dinamizó con preguntas planteadas por los profesores. Los estudiantes tuvieron autonomía en cuanto a las técnicas y los métodos utilizados para realizar la tarea. Además, se hicieron comentarios referentes al método de trabajo empleado por cada grupo. Con el propósito de que los estudiantes se apropiaran del ambiente de modelación y lo hicieran parte de sus prácticas, se les asignó un compromiso para la siguiente sesión: hacer una consulta y citar la fuente de información de los siguientes datos:

- Consultar el valor del salario de los congresistas colombianos.
- ¿Cuántos congresistas tiene Colombia?
- ¿Cuál era el valor del salario mínimo en Colombia en 2018 y de cuánto fue su valoración anual, es decir, qué porcentaje incrementó con respecto al año anterior?

1.2.2 Las matemáticas nos ayudan

El momento dos se desarrolló en dos horas de clase y se centró en abordar solo el primer punto de la consulta anticorrupción: *Reducción del salario de los congresistas*. De acuerdo con esto, lo primero que se realizó fue compartir la información que los estudiantes consultaron y verificar con ellos su pertinencia y confiabilidad y las fuentes. En segunda instancia se les planteó la segunda tarea (Tabla 2).

Tabla 2. Tarea 2 asignada a los grupos [12]

Tarea	Preguntas	Objetivos
Analizar cuánto dinero se ahorraría el Estado si se reducen los salarios de los congresistas, como contempla la propuesta de la consulta: *La remuneración mensual de los congresistas y servidores públicos no excederá de veinticinco (25) salarios mínimos legales vigentes*. Tener en cuenta que dichos salarios tienen hoy un tope de 40 salarios mínimos legales vigentes.	¿Cuánto dinero dejará de ganar un congresista? ¿Cuánto dinero se ahorraría mensualmente el Estado con la implementación de esta propuesta? ¿Qué se podría hacer con el dinero ahorrado?	Comprender operaciones propias del pensamiento numérico en diversos contextos. Inferir información relacionada con un determinado problema para realizar un procedimiento matemático.

A partir del valor actual del salario mínimo y de su valoración de 5,9% anual, responder la pregunta: ¿Sí se congelan los salarios de los congresistas, en cuánto tiempo será igual o menor a un salario mínimo, si se considera constante la valoración anual? Representar matemáticamente la tasa de incremento del salario mínimo, para determinar su valor en 5, 10 y 20 años.	¿Cree que viable o no un aumento en la tasa anual de valoración del salario mínimo? ¿Qué considera que sería mejor para el Estado: reducir los salarios de los congresistas o aumentar el salario mínimo? ¿Por qué?	Relacionar tendencias con las series y sucesiones. Generalizar, mediante procedimientos aritméticos, ecuaciones que cumplan las condiciones dadas.

Con los datos que surgen de la puesta en común al principio de la sesión, los estudiantes buscaron una manera de representar con matemáticas la tasa de incremento del salario mínimo, que les permitiera a los ciudadanos determinar su valor en 5, 10 y 20 años. Por último, se culmina con la presentación y discusión de los resultados de cada equipo y, para el registro, se realiza un escrito (informe, protocolo o ensayo), donde recogen las ideas principales y los comentarios que consideran importantes y que surgen de la discusión en clase.

1.2.3 Las matemáticas y nuestro entorno

Este momento se desarrolló en una sesión de dos horas de clase, la cual tuvo como objetivo que los estudiantes reconocieran su contexto, el espacio físico que habitan, las zonas en las que se encuentran sus hogares y el colegio, además de promover una situación en la que puedan hacer inferencias, deducciones, hipótesis y reconocer las implicaciones de las decisiones que toman en una situación hipotética. Además, hace alusión al cuarto punto de la consulta anticorrupción: *Participación ciudadana en el presupuesto público*. Para cumplir el objetivo se realizaron las tareas de la Tabla 3.

Tabla 3. Tarea asignada a los grupos [12]

Tarea	Preguntas	Objetivos
Realizar un mapa o cartografía social del barrio, vereda o región en la que viven, en el que representen sus necesidades, debilidades y fortalezas. Por ejemplo, una vía en mal estado, problemas de seguridad, falta de unidades deportivas, entre otras.	¿Cree que un ciudadano común puede gestionar recursos para darle solución a una de estas dificultades? ¿Cuáles son las principales fuentes de ingresos económicos de su localidad?	Reflexionar sobre las responsabilidades de diversos estamentos públicos y privados en su localidad. Reconocer las problemáticas que se pueden solucionar mediante gestión social. Analizar situaciones que necesitan potencializarse.
Suponga que cuentan con un presupuesto de 1000 millones, ¿cómo los invertiría en su región, a partir de la información de la cartografía social?	¿Cómo ayudarían a mejorar la región sus decisiones? ¿Qué situaciones priorizaron y por qué? ¿En qué se basaron para determinar los costos y beneficios?	Identificar las implicaciones que tienen las decisiones que se toman. Generar conciencias sobre las prioridades que tienen en sus localidades.

1.2.4 Opinamos acerca de la consulta anticorrupción

El desarrollo de este momento se pensó para que los estudiantes tuvieran la libertad de realizar o abordar el análisis de las demás propuestas de la consulta anticorrupción y de acuerdo con la perspectiva que desearan, además, que vincularan en sus análisis los conceptos o los procedimientos matemáticos que consideraran convenientes, es decir, utilizar los saberes previos en el campo para reunir información que les permita sacar conclusiones sustentadas de la situación analizada.

El rol de los profesores fue de guías de la clase, responder preguntas que surgieran en el aula, retroalimentar los saberes de los estudiantes y sugerir métodos de procedimiento. Además de orientar con las preguntas que consideraran pertinentes para que el análisis de los estudiantes fuera objetivo, ya que las situaciones sociales comprenden diferentes temas y áreas del conocimiento, lo cual puede complejizar la tarea. Las propuestas de las consultas a estudiar fueron:

- Cárcel para corruptos y que se les prohíba volver a contratar con el Estado.
- Contratación transparente obligatoria en todo el país.

- Los Congresistas deben rendir cuentas de su asistencia, votación y gestión.
- Hacer públicas las propiedades e ingresos de políticos y extinción de dominio en caso de irregularidades.
- No más *atornillados* en el poder: máximo 3 periodos en corporaciones públicas.

1.2.5 Las matemáticas en función de la sociedad

El cierre del ambiente de aprendizaje se realizó con la siguiente y última tarea: *redactar una carta o un escrito a un ciudadano colombiano*, en el que deje clara su postura u opinión frente a la consulta anticorrupción, con fundamento en la información recolectada en las tareas de los momentos anteriores, es decir, compartir las conclusiones a las que llegaron, demostrando, objetivamente con datos, las afirmaciones que realizan.

Estas tareas se consideran oportunas para desarrollar habilidades de comunicación y argumentación en los estudiantes, de cómo el uso correcto de proposiciones y relaciones lógicas facilitan la comprensión del mensaje que se quiere transmitir, lo que sería una manera de pensar matemáticamente, diferente al estereotipo que tienen algunos estudiantes de que solo es una ciencia de números y algoritmos que tiene poca relación con las actividades cotidianas.

2. RESULTADOS Y ANÁLISIS

En este ambiente de modelación se les planteó a los estudiantes que, con ayuda de sus compañeros, utilizaran las matemáticas para resolver una situación cotidiana donde se problematizaran los resultados. La razón es que las matemáticas, al mismo tiempo que se utilizan para resolver problemas, también deben cuestionar la forma en que se utilizan socialmente, de manera general [13]. La búsqueda se basa en la manera de analizar los procedimientos, argumentos y resultados matemáticos que generan los estudiantes en un ambiente de modelación matemática, donde se integran situaciones cotidianas de acuerdo con algunas de las premisas de diferentes autores de la Educación Matemática Crítica EMC.

La EMC es una corriente filosófica que se encarga del estudio de la matemática y la Educación Matemática a partir de una perspectiva social, donde las personas participan en las decisiones que les afectan y desarrollan, es decir, como capacidad crítica, reflexiva y analítica. Skovsmose [14] y D'Ambrosio [15] plantean que la preocupación fundamental de la EMC es la *Mathemacy*, cuyo objetivo principal no es simplemente desarrollar habilidades de cálculos matemáticos, sino, también, promover la participación crítica de los estudiantes como ciudadanos en la sociedad y analizar cuestiones políticas, económicas y ambientales en las que las matemáticas sirven como herramienta.

Villa-Ochoa [6] afirma que la modelación matemática puede ser una herramienta útil en el establecimiento de relaciones entre las matemáticas y los contextos propios de los estudiantes y las demás ciencias, una de las características de la EMC en cuanto a la interdisciplinariedad que debe tener la enseñanza de las matemáticas en el aula, para ayudar a explicar y dar respuesta a los fenómenos y situaciones sociales en los que se encuentran los estudiantes.

El rol de los profesores en el desarrollo del ambiente de modelación consistió en acompañar a los estudiantes durante el análisis de las situaciones, y brindarles la información y las preguntas necesarias para orientar la investigación hacia los intereses comunes y particulares de cada grupo de trabajo. Por lo tanto, algunas de las herramientas, conceptos o procedimientos matemáticos utilizados por los estudiantes durante el proceso, surgieron como alternativa propuesta por ellos mismos para resolver una determinada situación, es decir, algunos métodos utilizados fueron creados de acuerdo con lo que los estudiantes creyeron conveniente, en este sentido, la labor de los profesores fue retroalimentar con ellos las falencias, si las hubo, de los procedimientos utilizados.

Por medio de las matemáticas los estudiantes discutieron cuestiones políticas y sociales, que se consideran necesarias para el objetivo de investigación, ya que promueven la participación de los estudiantes en el aula al compartir sus opiniones, lo que permitió ver las posturas críticas en los contenidos de sus participaciones. Con esto los profesores promovieron la *Mathemacy*, determinado como el objetivo principal de la EMC.

Aunque desarrollar habilidades de cálculo no era el objetivo principal, con estas tareas se esperaba que los estudiantes hicieran uso de conocimientos de estadística para relacionar y representar los datos. El trabajo realizado por los estudiantes se aprecia en las Figuras 1 y 2. Para relacionar la cantidad de votos de la consulta anticorrupción con la cantidad de personas habilitadas para votar, se observa que los estudiantes realizaron cálculos; utilizando los porcentajes los equipos hicieron uso del diagrama circular para representar los datos, procedimiento que permite deducir que se les facilita el trabajo cuando utilizan métodos gráficos, ya que este diagrama fue propuesto por los diferentes equipos y lo implementaron en la solución de las diferentes tareas.

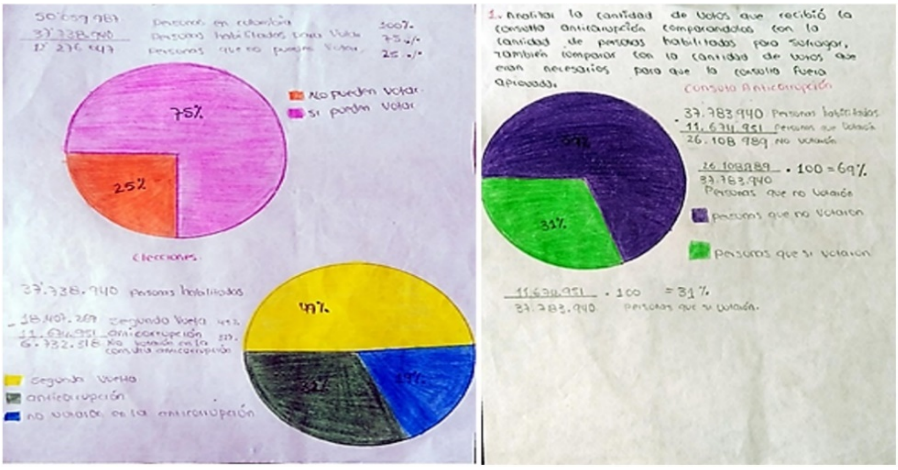


Figura 1. Procedimientos matemáticos realizados por los estudiantes

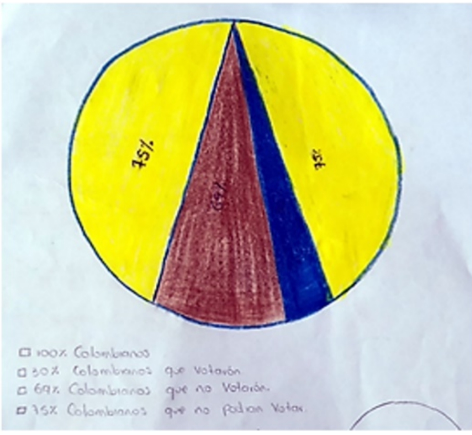


Figura 2. Procedimientos matemáticos realizados por un estudiante

Entre las posibilidades de actuación de los profesores durante la realización de esta tarea, estuvo la de retroalimentar el conocimiento de los estudiantes, ya que durante la implementación que proponen del problema puede haber errores conceptuales o procedimentales, que lo desvían de su propósito. Sin embargo, esto es una oportunidad para que el profesor intervenga y los ayude a apropiarse de manera más concreta del conocimiento, es decir, el estudiante tiene un conocimiento previo de algún concepto que puede ser impreciso, al realizar la tarea los errores se evidencian y el profesor identifica los puntos en los que debe trabajar.

En la Figura 2 se observa que hay un error en relación con el uso de la gráfica circular, y si bien los estudiantes tienen indicios del procedimiento a realizar, ya que se parecían los datos obtenidos, la gráfica no es correcta porque no hay proporción entre los datos graficados y el área de la figura, lo que impide que se puedan hacer inferencias o conclusiones de la información de manera correcta. Por lo anterior, fue necesario realimentar con este equipo la manera de utilizar el diagrama circular. También se observa que los porcentajes de la gráfica no corresponden a la información presentada por el equipo, esto se debe a que los estudiantes no lograron establecer la relación correcta de porcentajes, ya que la cantidad de personas que votaron pertenece a la cantidad de personas habilitadas para votar, por eso no se podía establecer una relación directa entre estas variables.

Durante el momento uno, en las diferentes tareas los estudiantes identificaron la importancia de realizar correctamente una gráfica, ya que, como manifestó uno de ellos: *cualquier persona que la vea debe entender la información que brinda, y debe ser tan clara que no se puede prestar a interpretaciones*".

En el desarrollo de este momento los estudiantes utilizaron sus saberes previos y operaciones básicas, como la suma, la resta y la multiplicación, para obtener algunas relaciones respecto a la cantidad de personas que votaron en la consulta anticorrupción. Además, y gracias a las relaciones de porcentajes que hicieron (Figura 3), llegaron a la conclusión de que la mayoría de las personas no salieron a votar durante la consulta anticorrupción.

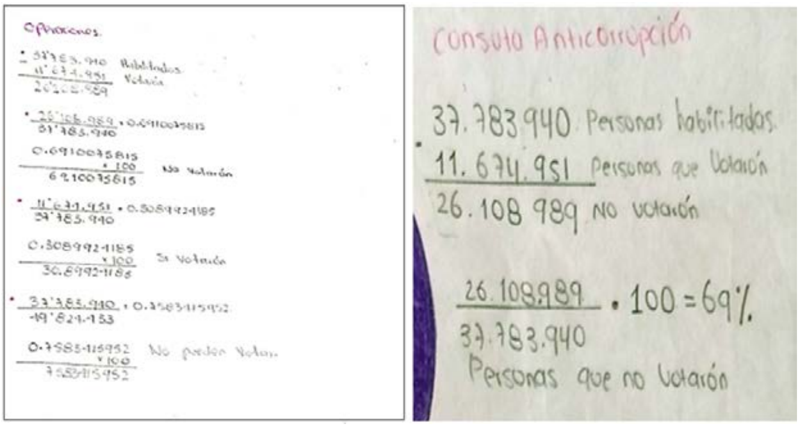


Figura 3. Procedimientos matemáticos realizados por los estudiantes

Esto permitió iniciar una discusión que llevó a determinar, por parte de los estudiantes, que había un problema de abstencionismo al momento de ejercer el derecho al voto en Colombia. Respecto a lo anterior, Araújo [16] menciona que la modelación matemática promueve en el estudiante un conjunto de habilidades hacia una postura intelectual y crítica, en la medida que tenga la capacidad de sacar conclusiones a partir de datos y cálculos matemáticos, con el fin de hacer inferencias relacionadas con situaciones de la realidad.

Los profesores dirigieron la discusión en torno a cómo esa falta de interés de la ciudadanía por salir a votar promovía o favorecía prácticas de corrupción en el país. Algunas de las preguntas planteadas para dinamizar la discusión fueron: ¿cuál es la responsabilidad de los ciudadanos en estas elecciones? ¿Por qué cree que los ciudadanos no votan? Independientemente de los resultados de unas elecciones o consultas ¿el ciudadano debería tener algún beneficio al ejercer el derecho al voto? ¿Qué pasaría si solo alguna parte de la población tuviera el derecho a votar, habría alguna diferencia a la situación actual de gobierno?

En la Figura 4 se observa que la mayoría de estudiantes tenían claro el concepto de porcentaje y qué representa, y de los procedimientos para calcularlo y relacionarlo con las cantidades correspondientes. La comprensión y aplicación de este concepto es una herramienta útil al momento de tomar conscientemente una decisión o sacar conclusiones fundamentadas desde el estudio de una determinada situación.

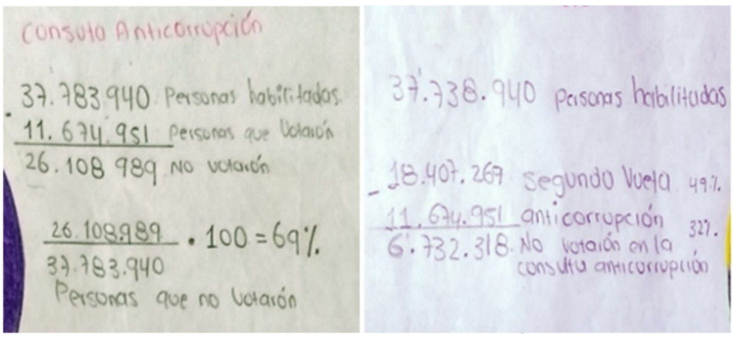


Figura 4. Procedimientos del concepto de porcentaje realizados por los estudiantes

Se nota entonces que las matemáticas cumplen un papel para describir, comprender, controlar o prescribir aspectos claves de la situación [17]. Por lo tanto, en el ambiente de modelación los estudiantes se basaron en el resultado de sus cálculos y procedimientos para expresar sus opiniones acerca de la situación e identificar un problema social, como el abstencionismo durante las votaciones, y que, además, las matemáticas les proporcionaron argumentos para entender y reflexionar acerca de las situaciones investigadas en el ambiente de modelación.

Por otro lado, en el momento dos los estudiantes querían saber cuánto era el ahorro que tendría el Estado si se aprobara la primera propuesta de la consulta anticorrupción: R*educir el salario de los congresistas*. Partieron de analizar la información consultada, como el número de congresistas y el valor promedio de sus sueldos, y cómo la propuesta planteaba reducir el salario de los congresistas a 25 salarios mínimos legales vigentes, por lo que también fue necesario consultar el valor del salario mínimo.

Los estudiantes identificaron las variables que tenían que resolver para saber cuánto dinero se ahorraría el Estado si se hubiera aprobado la propuesta. Reconocieron que era necesario saber el número de congresistas, cuánto ganaban y de cuánto iba a ser esa reducción; para resolver estas cuestiones, desarrollaron operaciones básicas como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones (Figura 5). Los resultados de los cálculos realizados los llevaron a cuestionarse respecto a situaciones como: ¿es justo el salario actual de un congresista? ¿Qué se puede hacer con el dinero que se ahorra el Estado? Debido a las cifras calculadas algunos estudiantes expresaron que el gobierno de Colombia tenía mucha plata y que con lo que se ahorraba podía construir dos colegios como el de ellos cada mes.

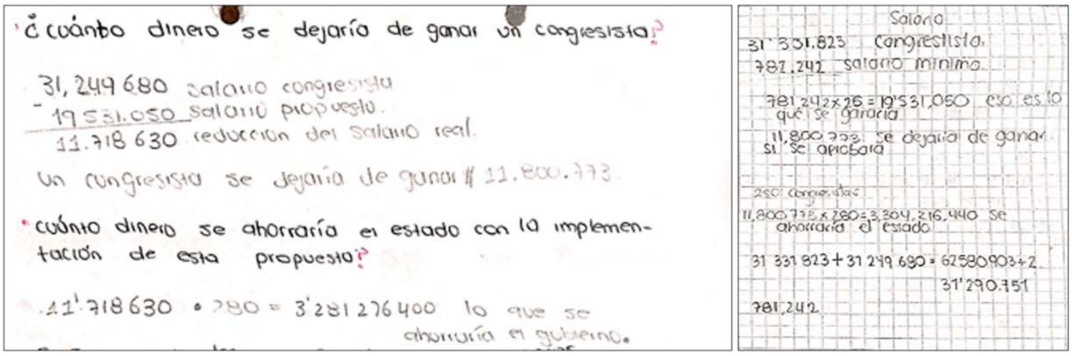


Figura 5. Procedimientos matemáticos realizados por los estudiantes en el momento dos

En otra de las tareas propuestas los estudiantes debían calcular cuánto tiempo tardaría el salario mínimo, con un incremento porcentual anual estable del 5%, en igualar el salario actual de un congresista. Esta tarea les presentó varias dificultades para operar matemáticamente, sus producciones se ven en la Figura 6.

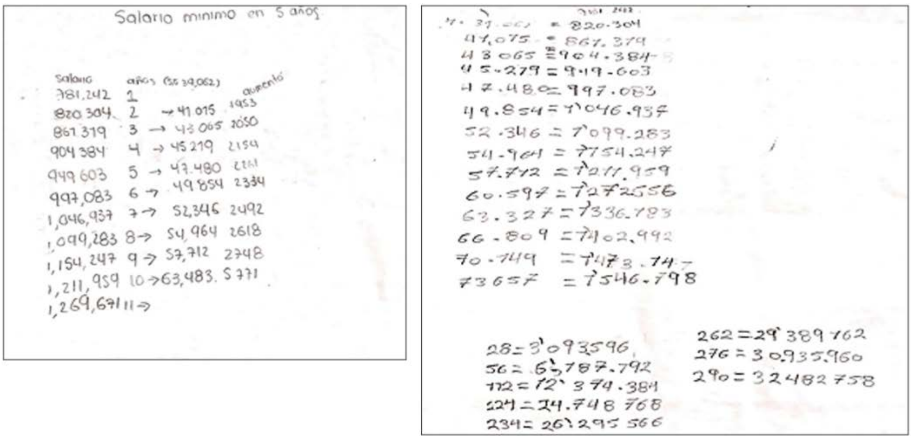


Figura 6. Procedimiento matemático realizado por un estudiante

Se observa que los estudiantes calcularon el incremento del salario mínimo a partir de lo establecido para el año 2018. Uno de los equipos cometió un error durante este proceso y calculó el incremento del salario mínimo para el primer año, luego lo sumó al salario mínimo y obtuvieron el salario para el segundo año; después, volvieron a sumar la misma cantidad y obtuvieron el salario del tercer año, y así sucesivamente sumaron la misma cantidad al valor del salario que obtenían. Los profesores intervinieron para orientarlos y para que se dieran cuenta de que el valor del 5% variaba con respecto a los nuevos valores y al salario mínimo que obtenían como resultado, por lo que tuvieron que replantear sus cálculos matemáticos.

Al enfrentar la necesidad que surge de la situación planteada los estudiantes consiguieron aplicar sus conocimientos en el área y, también, concientizarse de sus propias limitaciones, por ejemplo, buscar o conocer métodos que les permitan realizar cálculos más rápidos o abordar mayor cantidad de datos, lo que brinda posibilidades de acción del profesor en el aula para enseñar nuevos conceptos y procedimientos.

Los equipos manifestaron que el procedimiento que realizaban era muy tedioso y poco práctico, ya que, como se observa en la Figura 6, desarrollaron las operaciones paso por paso, año a año. También identificaron que el proceso era confiable ya que desarrollaban cada una de las operaciones, pero que les tomaría mucho tiempo llegar a la respuesta. Por tal motivo, uno de los equipos decidió consultar en internet una fórmula que denominaron Regla del 70 (Figura 7), la cual plantea que *el cociente entre el número 70 y el aumento porcentual da el resultado en años en los que ese dinero se duplicaría*.

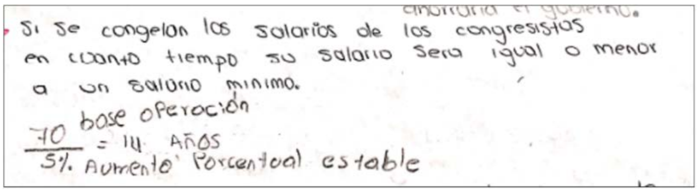


Figura 7. Regla del 70

Se pudo evidenciar que los estudiantes decidieron buscar alternativas para resolver correctamente lo que se les pedía y, por ende, se posicionaron para tomar la decisión de cambiar el procedimiento. Esto les permitió a los profesores evidenciar lo que afirman Parra-Zapata et al. [1] en relación a que una característica fundamental de un uso crítico de los modelos tiene que ver con el uso correcto de los procedimientos matemáticos y de sus interpretaciones, pues muchas veces las decisiones se toman de acuerdo con los resultados que se desprenden de tales procedimientos.

Algunos estudiantes se mostraron no conformes con esta regla y se decidieron por el primer método, y comprobar si la regla se cumplía. Es decir, calcularon por tanteo el valor del salario mínimo que, según la Regla del 70, a los 14 años se duplicaría con un valor anual estable del 5%. Los resultados obtenidos les dieron un desfase en el rango de 100.000, a lo que manifestaron que, a pesar de no dar exactamente el valor del salario mínimo en 14 años, se puede tomar esta regla y asumir el margen de error que se pudo dar al aproximar cifras durante el procedimiento de calcular el valor año tras año.

De lo anterior se observa la postura de la que habla Valero [14] al expresar que una educación se manifiesta crítica cuando los sujetos involucrados en ella no se limitan a la reproducción de estructuras, sino que reaccionan ante ellas y, en este caso, las cuestionan, valoran su utilidad y buscan las maneras de validar su veracidad por medio de procedimientos matemáticos ya validados por ellos, es decir, si el método o procedimiento que se les invita a utilizar se puede verificar con procedimientos ya conocidos, estos métodos nuevos pueden ser aceptados y empleados.

Cabe recordar que para que el estudiante logre generar estos productos en clase, el profesor debe propiciar un ambiente que destaque a los estudiantes como los protagonistas del proceso. El profesor no necesita tener una actitud pasiva para que sean los estudiantes quienes respondan y se hagan nuevas preguntas. Para que se genere un ambiente de diálogo y discusión entre todos los participantes del ambiente de modelación, puede remitirse a las preguntas planteadas en los momentos de cada tarea en este capítulo.

3. EVALUACIÓN

En este ambiente de modelación matemática la evaluación se asume como formativa, y se realiza constantemente durante su desarrollo; en ella se tienen en cuenta aspectos actitudinales, procedimentales y conceptuales de los estudiantes. De esta manera la evaluación se observa como una oportunidad de rectificación y generación de mejoras del planteamiento de las estrategias, tipos de evaluación, técnicas e instrumentos incluidos en el inicio. Se centra en realizar una valoración integral de múltiples elementos que se insertan en la planeación didáctica y que permite reconocer si se alcanzan los resultados de aprendizaje.

De acuerdo con esto la evaluación realizada en el ambiente comprendió aspectos actitudinales y procedimentales de los estudiantes durante cada uno de los momentos y tareas propuestas; para esto a los profesores y a partir de una observación activa y de un diálogo mesurado con el grupo, le permitió tener indicios de dichos aspectos en los estudiantes, es decir, la evaluación fue un proceso que se realizó de manera permanente durante todo el ambiente de modelación. La rúbrica de la Tabla 4 se propone como guía para que el profesor tenga una referencia de cómo evaluar este ambiente de modelación; se basa en las tres dimensiones de las competencias del MEN [9].

Tabla 4. Propuesta evaluativa

Competencias	Logros
Actitudinal	Participa de las tareas propuestas. Demuestra interés hacia las tareas. Propone alternativas para desarrollar las clases.
Procedimental	Realiza operaciones matemáticas para explicar fenómenos sociales. Resuelve situaciones problemáticas con algunos de los pensamientos matemáticos. Desarrolla procedimientos matemáticos en diversos contextos.
Conceptual	Argumenta las conclusiones alcanzadas de las diversas situaciones. Deduce operaciones matemáticas a partir de las situaciones expuestas. Comprende la relevancia de las matemáticas para explicar situaciones cotidianas.

4. TRANSFERENCIA O AMPLIACIÓN A OTRAS SITUACIONES O CONTEXTOS

Las experiencias de modelación matemática han sido foco de investigación en los últimos años, puesto que han mostrado ser una herramienta útil en el establecimiento de relaciones entre las matemáticas y los contextos de los estudiantes, y porque posibilitan que interactúen con el objeto matemático propuesto. Con base en lo anterior este ambiente se podría dinamizar y llevar a cabo en diversos escenarios de análisis del contexto político del país y del mundo con apoyo de las matemáticas, a partir de los cuales es posible que se configuren actitudes y valores en los estudiantes, pues garantizan una solidez en sus fundamentos, seguridad en los procedimientos y confianza en los resultados obtenidos. Todo esto crea en ellos una disposición consciente y favorable para emprender acciones que conduzcan a la solución de los problemas a los que se enfrentan a diario.

Para ampliar la información respecto a este tipo de ambientes se recomiendan las experiencias de la Tabla 5, que complementan y pueden ser útiles en la creación de ambientes de modelación matemática en el aula de matemáticas.

Tabla 5. Otras situaciones o contextos de aplicación del ambiente de modelación

Fuente	Resumen
[11]	Presenta el informe de una investigación que indaga cómo un grupo de estudiantes de quinto grado participa en un ambiente de modelación matemática en la perspectiva sociocrítica. Los protagonistas de la investigación fueron 27 estudiantes de quinto grado de la Educación Primaria, integrantes de un semillero de matemáticas de la Fundación Educativa Colegio San Juan Eudes de Medellín, Colombia. Los resultados indican que cuando los estudiantes se involucran en ambientes de modelación matemática que favorecen la participación, se comprometen de acuerdo con sus historias y experiencias.
[18]	Presenta la tesis elaborada como producto de una investigación en el desarrollo de la Maestría en Educación Matemática, de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. En este estudio se explora la caracterización de las posiciones críticas de algunos estudiantes del grado séptimo, cuando se enfrentan a actividades de modelación en el ámbito escolar, basadas en los contextos del turismo y el comercio. Además, es una alternativa para reflexionar sobre el propósito de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el rol de profesores. Los resultados muestran que los estudiantes proponen cuestionamientos dirigidos a realizar consultas e indagaciones y se motivan frente al trabajo en grupo, aspectos que permiten promover y desarrollar posiciones críticas en su nivel de madurez conceptual (séptimo grado), para hacer una caracterización a partir de la toma de decisiones que surgen de las reflexiones, discusiones, inmersión en las situaciones de la cotidianidad (turismo y comercio), los conocimientos previos y resultados matemáticos obtenido. Las interacciones que se dan en el aula y en el desarrollo de las actividades de modelación, contribuyen a que el aula de clase sea un mejor espacio donde se desarrollan habilidades sociales y se aprende matemáticas en ambientes cercanos a la vida de los estudiantes.

5. CONCLUSIONES

El ambiente de modelación matemática les permitió a los estudiantes representar y plantear posibles soluciones respecto a fenómenos o situaciones cotidianas; ademá, les permitió a los profesores llevar la consulta anticorrupción al aula y que los estudiantes, mediante sus conocimientos matemáticos, distinguieran matices como las implicaciones, las cantidades de dinero que se pierden y las poblaciones más afectadas con esta problemática de la corrupción. Por otro lado, a que descubrieran algunos efectos colaterales, positivos y negativos que pudo tener la implementación de las propuestas de la consulta anticorrupción.

En este tipo de ambientes de modelación las matemáticas dejan de ser para los estudiantes una ciencia incomprensible y utilizada solo por un grupo específico de la sociedad, es decir, la modelación matemática permite que el estudiante genere una relación entre la cotidianidad y el conocimiento matemático.

En la perspectiva socio-crítica la modelación no se agota en la creación de tareas en contextos estereotipados para promover el aprendizaje de un contenido o el desarrollo de habilidades de representación [19], por lo que las tareas se plantearon para que los estudiantes se apropiaran del conocimiento matemático adquirido previamente y para disponerlo en función de las necesidades del momento. Además, que identificará sus propias falencias y buscará resolverlas. De este modo tendrá una mejor apropiación de los conceptos empleados y tomará parte activa en su proceso de formación.

Asimismo, los estudiantes tendrán una postura crítica en cuanto a que se cuestionan, indagan y reflexionan respecto al conocimiento y las estructuras tradicionales como se enseñan los conceptos y procedimientos matemáticos, ya que ahora tendrá una interacción con estos procedimientos cuando la necesidad deje ver su utilidad y cómo se liga con las dinámicas sociales y otros saberes disciplinares. Por lo anterior, los argumentos de los estudiantes, a partir del uso de operaciones y procedimientos empleados para plantear la solución de situaciones del contexto cercano, posibilitan el desarrollo de posiciones críticas, puesto que los resultados matemáticos que obtienen surgen de la identificación de variables que influyen en la descripción de una situación [3].

Dado que las posturas críticas se relacionaron directamente con la acción, la toma de decisiones y el rigor en cuanto al uso de los conceptos matemáticos, se hizo énfasis en propender por su correcta aplicación. Parra-Zapata et al. [1] afirma que una característica fundamental del uso crítico de los modelos tiene que ver con la aplicación correcta de los procedimientos matemáticos y de sus interpretaciones, pues muchas veces las decisiones se toman de acuerdo con los resultados que se desprenden de tales procedimientos.

De esta manera el rol del profesor durante un ambiente de modelación sociocrítica debe propender por el correcto uso de los procedimientos matemáticos por los estudiantes. Además de ser la base principal para generar las reflexiones y discusiones en clase, tienen la responsabilidad de formar competencias básicas en el área de matemáticas. Es importante que los datos y resultados en los análisis de los estudiantes tengan un fundamento correcto, que ofrezca veracidad para darle el carácter objetivo que tienen las posturas críticas, y esto es posible por medio de un uso adecuado de las matemáticas.

Al caracterizar las posturas críticas de los estudiantes a través del uso de las matemáticas, operaciones, procedimientos y cálculos, la modelación matemática permitió que los estudiantes aprendieran, de manera diferente, a interpretar, pensar, resolver y ser conscientes de las situaciones cotidianas.

REFERENCIAS

[1] Parra-Zapata M. et al. (2017). Gasto energético en las actividades físicas. Una experiencia de modelación matemática en la perspectiva sociocrítica. Revista Colombiana de Matemática Educativa 2(1), 57-64

[2] Larrain M. y Kaiser G. (2019). Analysis of students' mathematical errors as a means to promote future primary school teachers' diagnostic competence. Uni-pluriversidad 19(2), 17–39.

[3] Araújo J. (2002). Cálculo, tecnologias e modelagem matemática: As discussões dos alunos. Disertación doctoral. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, Brasil.

[4] Barbosa J. (2001). Modelagem na educação matemática: Contribuições para o debate teórico. Reunião anual da ANPED 24, 1-15.
[5] Biembengut M. y Hein N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. Educación Matemática 16(2), 105-125.
[6] Villa-Ochoa J. (2010). La modelación matemática en el currículo. Elementos para la discusión. En 11º Encuentro colombiano de Matemática Educativa. Bogotá, Colombia.
[7] da Silva C. y Kato L. (2012). Quais elementos caracterizam uma atividade de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica? Bolema 26(43), 817-838.
[8] Barbosa J. (2003). Modelagem matemática na sala de aula. Perspectiva 27(98), 65-74.
[9] MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional.
[10] Barbosa J. (2003). What is mathematical modelling? En Lamon S. et al. (Eds.), Mathematical modelling: A way of life (pp. 227-234). Horwood Publishing Limited.
[11] Parra-Zapata M. (2015). Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. Reflexiones a partir de la perspectiva sociocrítica de la modelación matemática. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia.
[12] Patiño-Henao M. y Galeano-Ocampo J. (2019). Participación y posturas de estudiantes de educación media en clase de matemáticas. Trabajo de grado. Universidad de Antioquia.
[13] Araújo J. (2009). Formatting real data in mathematical modelling projects. Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics 21(461), 229-239.
[14] Skovsmose O. (1999). Hacia una filosofía de la educación matemática. Una empresa profesor. Universidad de los Andes.
[15] D'Ambrosio U. (1999). Educação para uma sociedade em transição. Papirus Editora.
[16] Araújo J. (2012). Ser crítico em projetos de modelagem em uma perspectiva crítica de educação matemática. BOLEMA 26(43), 839-859.
[17] Parra M. y Villa J. (2016). Interacciones y contribuciones. Forma de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. Actualidades Investigativas en Educación 16(3), 1-27.
[18] Martínez-Rojas E. (2016). Posiciones críticas en actividades de modelación matemática en un contexto del comercio y el turismo. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia.
[19] Villa- Ochoa J. (2015) Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: Un estudio de caso con profesores de matemáticas. Revista Internacional de Investigación en Educación 8(16), 133-148.

C 6

Modelar y experimentar en clases de matemáticas: Una propuesta con el uso de tecnologías digitales

Alexander Castrillón-Yepes[1]
Ana Carolina González-Grisales[2]
Sebastián Mejía Arango[3]
Paula Andrea Rendón-Mesa[4]
Universidad de Antioquia
Colombia

Tanto en clases de matemáticas como en las de ciencias se utilizan diferentes estrategias, instrumentos, actividades o tareas para enseñar conceptos, desarrollar habilidades o competencias y preparar a los jóvenes para desempeñarse en el mundo [1-3]. Por otro lado, en algunos trabajos se describe la necesidad de incorporar procesos o estrategias para articular la modelación y la experimentación en clases de matemáticas utilizando tecnología [4-6]. El objetivo de este capítulo es presentar una propuesta de enseñanza de las matemáticas a través del estudio de la Ley de Hooke y el Movimiento Armónico Simple MAS, mediante el uso de Tecnologías Digitales (simulador) y los procesos de modelación y experimentación.

La modelación y la experimentación se conciben como procesos que permiten estudiar un fenómeno físico con el propósito de entenderlo y describirlo, y utilizar modelos matemáticos, al tiempo que se comprenden los conceptos y los procedimientos que se requieren para su producción, adaptación, ajuste o validación. Esta visión de la modelación y la experimentación se encuentra en correspondencia con los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional MEN [1, 2, 7] y la literatura relacionada [5, 6, 8, 9]. Por su parte, las tecnologías digitales se consideran el medio para desarrollar los procesos de modelación y experimentación. Se propone el uso de un simulador PhET (*Masas y resortes: Intro*) para realizar experiencias controladas, usar representaciones y manipular diferentes instrumentos de medida [10, 11].

1. METODOLOGÍA

1.1 Identificación de la situación

En el plan de estudios se plantea la importancia de desarrollar procesos que vinculen situaciones o contextos propios de otras ciencias para la enseñanza de las matemáticas, en particular, en los lineamientos curriculares [1] se afirman que las matemáticas se han desarrollado gracias a contribuciones de otras disciplinas y que es importante promover procesos interdisciplinares en su enseñanza. Así mismo, el MEN [2] argumenta que el pensamiento matemático se puede promover a partir de contextos extra matemáticos, y que es necesario en otros campos del saber, como el científico.

Por su parte, el plan de estudios en ciencias plantea la necesidad de reconocer el entorno vivo, el entorno físico y las relaciones entre ciencia, tecnología y sociedad, por tanto, es importante comprender los procesos físicos para diferenciar problemas específicos relacionados con las Ciencias Naturales, en particular con la Física [2]. Estos reconocimientos posibilitan la transformación en la manera cómo se percibe el mundo y cómo se fundamenta el desarrollo de las capacidades investigativas [12], para interpretar y usar el conocimiento científico en situaciones no idénticas a aquellas en las que se adquiere inicialmente. Además,

[1] Contacto: *alexander.castrillony@udea.edu.co*
[2] Contacto: *ana.gonzalez2@udea.edu.co*
[3] Contacto: *sebastian.mejia4@udea.edu.co*
[4] Contacto: *paula.rendon@udea.edu.co*

el MEN [2] plantea que esta comprensión de los fenómenos requiere de los conocimientos matemáticos presentes en las descripciones y en los modelos científicos. Por ejemplo, en uno de los estándares en ciencias se plantea *modelar matemáticamente el movimiento de objetos cotidianos a partir de las fuerzas que actúan sobre ellos* [2].

En coherencia con estas ideas se desarrolla una situación de aprendizaje relacionada con el MAS y la Ley de Hooke, en clases de matemáticas para educación media (décimo y undécimo con población entre los 15 y 16 años). En ese sentido, se busca que los estudiantes establezcan relaciones entre los conceptos y los procesos matemáticos a través de una situación extra matemática. Además, la idea es que no solo es importante estudiar el conocimiento matemático, sino que se deben establecer conexiones con conceptos propios de la situación (en este caso de la Física), como la fuerza recuperadora, la constante de elasticidad, la elongación y la masa.

Para el desarrollo de la situación se conjugan elementos de la modelación y la experimentación como alternativa para unir dos procesos que convergen en la representación, la argumentación, el registro y la toma de datos, el reconocimiento de patrones, la identificación y la manipulación de variables. Estos elementos se pueden visualizar con el uso del simulador a partir de la identificación de regularidades y de características que permiten plantear hipótesis, corroborarlas o refutarlas, para llegar a la construcción de modelos matemáticos que describan y expliquen los fenómenos que se estudian.

En la Tabla 1 se presentan las metas de aprendizaje (evidencia de que los estudiantes deberían presentar en correspondencia con las competencias que se desarrollan), la relación con los referentes de calidad [2], la descripción de las habilidades y de las actitudes que la situación de aprendizaje pretende proporcionar.

Tabla 1. Intenciones formativas de la propuesta

Metas de aprendizaje	Relación con referentes de calidad		Habilidades y actitudes
	Estándar	**Metas de aprendizaje**	
Construir diferentes representaciones del MAS a partir del registro de datos. Identificar las principales magnitudes (y las relaciones) que intervienen en el MAS.	Formula hipótesis con respecto a cómo varía el período de un MAS cuando varía la amplitud. Describe la información recopilada en los experimentos o simulaciones del MAS por medio de tablas o gráficas. Propone modelos del MAS para predecir los resultados de experimentos y simulaciones, y establece relaciones causales y multicausales entre los datos.	Las hipótesis, modelos y representaciones se conciben como condición de posibilidad para estudiar el fenómeno físico, encontrar patrones y características que permitan comprenderlo y describirlo.	*Habilidades* Observación Exploración Experimentación Recolección y sistematización de la información. Comunicación *Actitudes* Curiosidad Flexibilidad Rigurosidad Creatividad Pensamiento crítico Trabajo colaborativo
	Identifica variables dependientes e independientes que influyen en los resultados de un simulador o de un experimento físico.	Las variables dependientes e independientes que se identifican en el simulador, y otras que se pueden controlar y contrastar en la experiencia generan contraste con aquellas que se pueden reconocer en un experimento físico.	
	Realiza mediciones con instrumentos y equipos adecuados para estudiar el MAS.	Los instrumentos se utilizan para estudiar el movimiento, cuantificar magnitudes y reconocer las posibilidades de las herramientas.	
	Comunica resultados por medio de gráficas y presenta la interpretación del experimento o simulación en forma oral o escrita. Comunica el proceso de indagación y los resultados a partir de gráficas, tablas y ecuaciones aritméticas y algebraicas.	La verbalización de los procesos experimentales y procedimentales permiten evidenciar comprensiones del fenómeno que se estudia.	

Las metas de aprendizaje que se asocian al proceso se alcanzan a partir del registro de datos, la identificación de magnitudes y sus relaciones, el análisis de la variación de las magnitudes que se involucran y la manipulación de instrumentos de medida y de artefactos en una simulación y, por tanto, requiere de una serie de actitudes y habilidades relacionadas con la observación del fenómeno, la rigurosidad en los procedimientos y los cálculos, la recolección y el análisis de datos y la creatividad para explorar otras alternativas de uso del simulador.

1.1.1 Referentes que soportan la situación de aprendizaje

Los procesos que se vinculan en las situaciones de aprendizaje que se presentan en este capítulo son: 1) la experimentación como proceso científico que contribuye al aprendizaje de las ciencias y que permite explicar, organizar y comprender los fenómenos [13]; y 2) la modelación entendida como el proceso para la construcción, comprensión y validación de modelos de una situación en contexto [14]. A continuación, se describen algunas nociones sobre la experimentación y la modelación que fundamentan los referentes de calidad del país [1, 2, 7] y otros en investigación en educación en matemáticas y educación en ciencias.

Según Romero y Aguilar [13] la experimentación es una herramienta básica en clases de ciencias que se adapta en la clase de matemáticas. El MEN [7] sostiene que la experimentación se puede entender por lo menos de dos formas: 1) como una actividad científica, que busca verificar o falsear teorías, y 2) como una actividad, que permite la construcción del conocimiento científico. En ese orden de ideas, la situación de aprendizaje que se presenta en este capítulo asume la segunda forma y, por tanto, las habilidades que se buscan desarrollar en el estudiante son la construcción de montajes (por medio del simulador PhET), la observación controlada, la identificación y manipulación de variables, procesos de medición, toma de datos y la construcción de representaciones, que se conectan con las intenciones formativas de la Tabla 1.

Para Gilbert y Justi [14] y Camarena [15], la modelación es un proceso que se centra en obtener y validar modelos a partir del análisis de una situación intra o extra matemática, y argumentan su importancia para el desarrollo de una situación problema que próximamente se explica en términos de entidades matemáticas. Según Camarena [15] la modelación consta de, al menos, tres momentos: 1) la identificación de variables e invariancias sobre la situación, 2) la relación entre las variables que se encuentran, y 3) validar la representación del modelo matemático que se obtiene con la situación que se estudia. La propuesta de aula se centra en el uso y análisis de los modelos y, como sostienen Villa-Ochoa et al. [8], en este tipo de dinámicas se proporciona una experiencia donde se estudian las matemáticas a partir de modelos ya construidos, así como el uso de diferentes registros de representación y la identificación de variables, y sus relaciones.

Estos planteamientos presentan que algunas de las acciones que se definen en el quehacer de los estudiantes en la modelación y la experimentación, convergen con el estudio del cambio y la variación. Al respecto, los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas [2] indican que, para el desarrollo de este pensamiento, el estudiante debe formular modelos matemáticos para explicar la diversidad de fenómenos. Además, comprender patrones y relaciones de orden, desarrollar habilidades para representar, analizar, validar y entender situaciones por medio de las matemáticas, y plantear y resolver problemas.

En la situación de aprendizaje se presentan dos fenómenos: la ley de Hooke y el estudio de un sistema de masa-resortes, donde se vincula la función lineal y las funciones trigonométricas, respectivamente. En correspondencia con las características del proceso de modelación y de experimentación, se plantea la exploración de situaciones y la generación de hipótesis, para luego representarlas. En esta medida el MEN [1] sostiene que la modelación es un proceso que debe existir en las clases de matemáticas, debido a permite relacionarlas con el contexto (intra o extra matemático) y porque la experimentación permite tanto verificar aquello que representa la realidad del fenómeno como la construcción de conocimiento.

En investigación en educación matemática se presenta una amplia variedad de experiencias para estudiar la función lineal y las funciones periódicas, algunas relacionadas con contextos como la física. Por ejemplo, Molina-Toro et al. [5] construyen una experiencia con el uso del aplicativo Modellus, para modelar fenómenos como el MAS y el movimiento de un reloj con las funciones senoidales y triangulares, y mencionan que el uso de la tecnología ayuda a conceptualizar y construir modelos matemáticos del fenómeno y favorece la producción del conocimiento. En otros trabajos se reportan experiencias sobre la función lineal desde una perspectiva variacional [16] y se recurre a la tecnología y a procesos de modelación y de experimentación, además, sostienen que la consideración del concepto de función como modelo matemático adquiere relevancia cuando se piensa a partir del punto de vista del cambio o de la variación.

En la situación de aprendizaje que se expone en este capítulo se usan tecnologías como los simuladores para desarrollar la experiencia de un fenómeno que requiere conocimientos de matemáticas y física. Al respecto, existe evidencia de experiencias bajo el enfoque Science, Technology, Engineering and Mathematics STEM que integran matemáticas, ciencias y tecnologías con el uso de simuladores [17]. Además, en la literatura acerca del uso de tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias se afirma que estos materiales pueden vincular a los estudiantes en aprendizajes significativos; proporcionan experimentos que necesitan despreciar condiciones ideales como la fuerza de resistencia del aire; permiten extraer representaciones como gráficas y toma de medidas, entre otros; posibilitan el desarrollo de habilidades como el pensamiento crítico; y permiten acceder a otras fuentes para complementar lo que se observa en la experiencia [10].

Por su parte, Contreras et al. [11] sostienen que una de las funcionalidades de los simuladores es que se convierten en un apoyo para el profesor en la transferencia del conocimiento, además de ser una alternativa para reducir costos para quienes no tienen cómo realizar la experiencia presencial.

Se considera que el uso de tecnologías digitales es un recurso que favorece el estudio de fenómenos, dado que adapta las condiciones de la situación que son imposibles en una experiencia real, además de favorecer la construcción del conocimiento. Por lo tanto, el proceso de modelación y de experimentación, y su vínculo con el uso de este tipo de tecnologías, favorece el desarrollo de habilidades conceptuales y procedimentales en el estudiante.

1.2 Desarrollo de las situaciones

La primera situación hace referencia a la ley de Hooke, donde se incluye el estudio de la función lineal, y la segunda presenta un sistema masa-resorte en la que se involucran las funciones periódicas. Sin embargo, ambas se relacionan en tanto la primera permite establecer un acercamiento a los fenómenos de variación y una aproximación a conceptos como la constante del resorte, la existencia de fuerzas y la posición de equilibrio, entre otros elementos, que también están presentes en la segunda situación. Asimismo, las dos situaciones permiten atender a las intenciones educativas que se vinculan con el uso y la construcción de diferentes representaciones, el registro de datos, la identificación de magnitudes y sus relaciones, y el desarrollo de procesos de modelación y de experimentación a través de fenómenos físicos.

Para garantizar la estructura y un proceso secuencial e interconectado, en las propuestas se describen los diferentes momentos en los que se dinamizan las situaciones de aprendizaje y bajo que se podría implementar. Además, se presentan las indicaciones referentes al manejo de un simulador y algunas sugerencias para su implementación en el entorno escolar.

En este capítulo las situaciones se presentan de manera grupal a los estudiantes, sin embargo, el profesor puede promover dinámicas de trabajo acordes a la cantidad de estudiantes o a los propósitos con los que decida implementar este tipo de intervenciones. A partir de la manipulación del simulador, los estudiantes observan e identifican magnitudes que intervienen en el MAS y reconocen variaciones de la posición respecto al tiempo. Para ello es necesario utilizar recursos como computadores, dispositivos móviles o digitales que vinculen el simulador y, de ser necesario, complementar las situaciones con otras herramientas ofimáticas como hojas de cálculo, o software como GeoGebra.

1.2.1 Presentación del simulador

Se presenta y explica el simulador PhET (https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs-basics/latest/masses-and-springs-basics_es_MX.html), tanto para el profesor como para los estudiantes, algunas de las herramientas que vincula para clarificar la ubicación y las funciones de cada una. Para un referente visual, en la Figura 1 se presenta la pantalla inicial de la entrada laboratorio del simulador PhET.

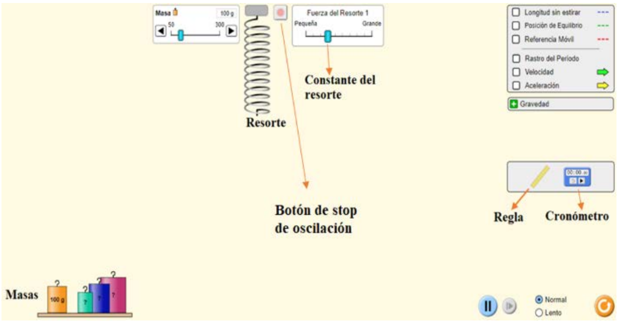


Figura 1. Pantalla inicial del laboratorio del simulador PhET

A continuación, se presentan las herramientas del simulador: instrumentos de medida, manipulación de magnitudes y otras opciones para desarrollar las diferentes situaciones y sus respectivas funciones:

- La fuerza del resorte indica la constante del resorte.
- La longitud sin estirar indica el punto donde se ubica un extremo del resorte cuando no hay una masa.
- La posición de equilibrio sirve para ubicar el punto de equilibrio del resorte al ubicar una masa.
- La regla sirve para medir y orientar las experiencias con el resorte.
- El cronómetro sirve para medir el tiempo.
- La referencia móvil sirve como punto de comparación para realizar mediciones.
- El rastro del periodo sirve para determinar cuándo se realiza una oscilación completa y para observar el recorrido de la masa durante ese intervalo de tiempo.
- La velocidad y aceleración permiten observar los vectores en el movimiento del resorte al colocarle una masa. La longitud del vector da una idea de la cuantificación de estas variables. Además, al seleccionar estas opciones, se visualiza el centro de oscilación, que representa el punto de equilibrio estable a partir del cual oscila la masa.

1.2.2 Situación 1. Ley de Hooke

Los objetivos son:

- Determinar las variables que se involucran en el estudio de la Ley de Hooke.
- Construir un modelo matemático sobre la Ley de Hooke.
- Comprender la Ley de Hooke y sus relaciones con el concepto de función lineal.

- *Relación con las intenciones formativas*. A través de esta primera situación se promueven acciones como la exploración del simulador, el diseño de montajes experimentales virtuales, la observación de un fenómeno, la recolección y la sistematización de datos a través del uso de instrumentos de medida. En ese sentido, se pretende aportar elementos para la identificación de magnitudes presentes en el fenómeno y el uso de diferentes representaciones. En este proceso se debe trabajar de manera colaborativa, ser flexible en los procesos de exploración, pero también riguroso para tomar datos, generar hipótesis y validarlas.

- *Descripción de la actividad*
  1. Ingresa al simulador *Estiramiento* y activar las opciones *Longitud sin estirar* y *Posición de equilibrio*. Explora el simulador y responder:
     - ¿Qué sucede si ubican dos masas de diferente magnitud en cada resorte cuando la fuerza de resorte es la misma?
     - ¿Qué sucede si ubican dos masas de la misma magnitud en cada resorte y se modifica la fuerza de uno de ellos?
     - ¿Qué variables se deberían modificar y de qué manera para que, en dos sistemas con diferente masa, los cuerpos se ubiquen en una misma posición de equilibrio?
     - A partir de las actividades anteriores generar hipótesis sobre la relación entre las variables que se estudian, por ejemplo, a mayor masa, menor elongación.

2. Realizar un diagrama de cuerpo libre para cuando uno de los sistemas esté en equilibrio.
3. Ir al simulador *Laboratorio* y ubicar una escala para la opción fuerza de resorte (se llamará primera fuerza de resorte), habilitar las opciones *Longitud sin estirar* y *Posición de equilibrio* y medir la distancia con la regla (indica la elongación) para cada una de las masas que se presenta en la tabla. Repetir el procedimiento para otro valor en la fuerza de resorte (se conocerá como segunda fuerza de resorte), y completar la Tabla 2.

Tabla 2. Datos para el simulador *Laboratorio*

Masa (g)	Peso (N) (considere g= 9.8m/s^2)	Elongación para la primera fuerza de resorte (m)	Elongación para la segunda fuerza de resorte (m)
50			
80			
100			
120			
150			
180			
200			
250			
300			

4. Construir una gráfica de peso vs elongación para las fuerzas de resorte en el plano coordenado de la Figura 2. Después compartirla. Además, mencionar si los resultados coinciden o no con las hipótesis que se plantearon en el numeral 1.

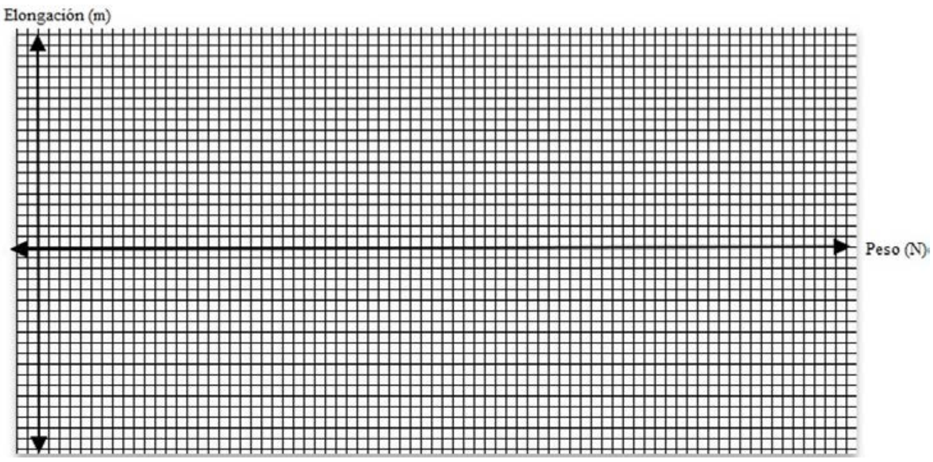


Figura 2. Plano coordenado para construir la gráfica de peso vs elongación

5. De acuerdo con los valores hallados y las gráficas construidas, predecir para cada una:
   - ¿Cuál es la elongación que genera un cuerpo de 500g?
   - ¿Cuál es la elongación que genera un cuerpo de 350 g?
   - ¿Qué masa se requiere para obtener una elongación de 0,2 m?
   - ¿Qué masa se requiere para obtener una elongación de 0,25 m?

6. Construir una expresión algebraica para cada una de las dos situaciones (primera fuerza del resorte y segunda fuerza del resorte), que describa el fenómeno estudiado. Tener en cuenta la información que brinda el simulador y los datos registrados en la Tabla 1 y la Figura 2.
7. Verificar la correspondencia entre las expresiones construidas con otros datos que podría registrar del simulador, con las Tablas y con las gráficas.
8. ¿Qué diferencias hay entre ambos modelos? Construir una expresión general para cualquier fuerza de resorte.

1.2.3 Situación 2: MAS

Los objetivos son:

- Reconocer el MAS en un sistema masa-resorte a través de un simulador.
- Determinar las variables que se involucran en un MAS.

- *Momento 1. Exploración*

  - *Relación con las intenciones formativas*. En este primer momento se promueve la exploración, la observación de un fenómeno y la identificación de magnitudes presentes en un fenómeno. Así mismo, se promueve la generación de hipótesis y su validación. Para ello, se requiere de una actitud curiosa y creativa para identificar elementos presentes en el simulador.

  - *Descripción de la actividad*
    1. Ingresar al simulador *Laboratorio* y ubicar en el resorte una masa de 100 g, activar las opciones *Longitud sin estirar del resorte* y *Posición de equilibrio*, seleccionar el botón rojo para que la masa se ubique en la posición de equilibrio. Si se aplica una fuerza a la masa (deslizándola hacia arriba o hacia abajo) se podrá observar el movimiento. En ocasiones es necesario repetir la simulación con las mismas condiciones (masa, fuerza del resorte y fuerza aplicada), por lo que se debe diseñar una estrategia para hacer que la fuerza aplicada sea siempre la misma (o aproximadamente la misma) al usar las funcionalidades del simulador y describirla.
    2. Estudiar el movimiento. Ubicar en el resorte una masa de 100 g y detener el movimiento con el botón rojo. Aplicar una fuerza y explicar por qué el movimiento que se observa es o no periódico.
    3. Tratar de identificar aspectos como las magnitudes que cambian, las que no cambian y la manera en que lo hacen al:
       - Cambiar las *masas* y dejar las otras magnitudes constantes.
       - Cambiar la *fuerza del resorte* y dejar las otras magnitudes constantes.
       - Cambiar la *gravedad* y dejar las otras magnitudes constantes.
    4. Mencionar qué características o supuestos se puede identificar en el funcionamiento del simulador.
    5. ¿Qué variables se involucran en el movimiento?

- *Momento 2: Conceptualización*

  - *Relación con las intenciones formativas*. En este momento, se busca aportar insumos para alcanzar ambas metas formativas, tanto en la construcción de diferentes representaciones y la identificación de diferentes magnitudes. Para ello, se promueve el diseño de montajes experimentales, la observación de un fenómeno, la recolección y sistematización de datos a través del uso de instrumentos de medida y el establecimiento de relaciones con otros saberes previos. Este proceso requiere de trabajo colaborativo, rigurosidad y creatividad.

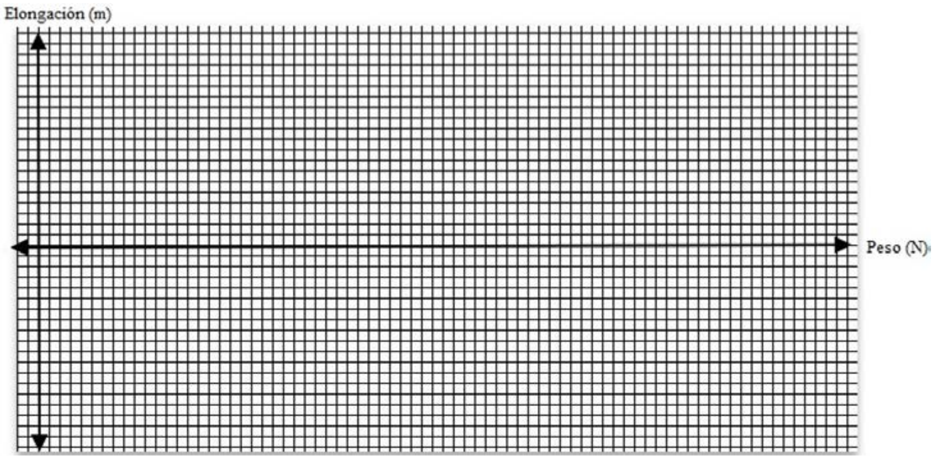
  - *Descripción de la actividad.* Ingresar al simulador *Laboratorio* y situar una masa de cualquier magnitud sobre el resorte. Habilitar las opciones *Longitud sin estirar* y *Posición de equilibrio*; hacer que la masa esté en posición de equilibrio. Ubicar la regla y el cronómetro de tal manera que sean convenientes para realizar las mediciones de la posición en la que se encontrará la masa al transcurrir cierto tiempo (es recomendable habilitar la opción lento, del extremo inferior derecho).

    1. Aplicar una fuerza que genere movimiento y registrar las posiciones de la masa que se obtienen en ciertos instantes de tiempo en la Tabla 3.

       Tabla 3. Para registrar las posiciones de la masa

x(m)																		
t(s)																		

    2. Graficar en el plano coordenado de la Figura 3 los puntos de la Tabla anterior (x vs t, y responder las siguientes preguntas:



- Según la gráfica, ¿cuál sería la posición del resorte en el momento igual a 20 segundos? Justificar y comprobar la predicción con el simulador.
- Analizar la gráfica, plantear hipótesis e identificar aspectos como patrones, regularidades, tipo de movimiento (constante o acelerado). Justificar las respuestas.
- ¿Existe alguna función matemática que se parezca a la gráfica? ¿Cuál? ¿Qué información suministra esa función?

3. ¿Cuáles son las variables que se involucran en el fenómeno?
4. Categorizar las variables en la Tabla 4.

Tabla 4. Categorización de las variables

Dependientes	Independientes

- *Momento 3: Uso y análisis de modelos*

  - *Relación con las intenciones formativas*. Se promueven acciones como la comunicación, la sistematización de información, el establecimiento de relaciones entre diferentes tipos de representaciones y la identificación de magnitudes y su variación. Para ello se requiere pensamiento crítico, que permita no solo identificar y analizar situaciones, sino también su validación, extrapolación a situaciones similares y la reflexión sobre el proceso que se llevó a cabo.

  - *Descripción de la actividad*. Dos estudiantes del curso se remitieron a libros diferentes de física para consultar un modelo matemático que les permitiera encontrar la posición de la masa para un tiempo determinado:
    Modelo estudiante 1: $x = Asen(wt)$
    Modelo estudiante 2: $x = Acos(wt) + P.E.$

    Donde *w* representa la frecuencia angular, *A* es la amplitud, *t* es el tiempo y *P.E.* el punto de equilibrio estable. Para el caso del sistema masa-resorte $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$, *k* es la constante del resorte.

1. ¿Cómo se pueden validar los modelos que consultaron los estudiantes?
2. Construir, adaptar o aplicar un modelo que describa el comportamiento del oscilador para la experiencia realizada en el momento 2.
3. Diseñar un procedimiento para validar su modelo con la experiencia del simulador.
4. Mencionar los factores que intervienen en un experimento físico y que no se contemplaron en el simulador ¿Se puede aplicar el modelo en la vida real? ¿Qué se debería considerar?

5. Mencionar las relaciones entre los datos escritos en las Tablas, gráficas y expresiones algebraicas.
6. Realizar una presentación, infografía, vídeo o *podcast* haciendo una síntesis de los procesos desarrollados en este trabajo, las mayores dificultades y los aprendizajes que se promovieron.

2. EVALUACIÓN

De acuerdo con los planteamientos presentados a lo largo del capítulo se propone que, para esta situación de aprendizaje, se evalúen los procedimientos que los estudiantes realizan a través de la valoración que hace tanto profesor (coevaluación) como los estudiantes (autoevaluación), por medio de rúbricas como instrumentos evaluativos. Con el ánimo de alcanzar los objetivos propuestos para cada situación de aprendizaje, se propone valorar los procesos que los estudiantes realizan como constructores de conocimiento, conocer los ritmos de aprendizaje, e identificar las dificultades que se puedan presentar en el desarrollo de la experiencia [7, 18].

La primera rúbrica se refiere a la valoración que el profesor puede realizar acerca de las habilidades y las actitudes que reconoce en los estudiantes, mientras que la autoevaluación consiste en el proceso a partir del cual el estudiante reflexiona sobre las habilidades y las actitudes que él mismo desarrolla en las situaciones de aprendizaje. Durante la autoevaluación el estudiante se asigna una valoración numérica, propia del sistema educativo colombiano, que debe corresponder con la escala propuesta para desempeño Superior, Alto, Básico y Bajo (Decreto 1290, 2009). A continuación, se presenta la equivalencia entre la escala propuesta para Colombia y una valoración numérica que se suele utilizar en diferentes instituciones:

- De 1.0 a 2.9 Bajo
- De 3.0 a 3.9 Básico
- De 4.0 a 4.5 Alto
- De 4.6 a 5.0 Superior

La adopción de esta rúbrica se debe a que esta técnica permite, según Martín [19], evaluar competencias, indicadores y metas de aprendizaje, entre otros elementos que alcanzan los estudiantes, por lo que resulta útil como herramienta para muchas asignaturas. Asimismo, Martínez-Rojas [20] menciona que la rúbrica *es un conjunto de criterios o de parámetros desde los cuales se juzga, valora, califica y conceptúa sobre un determinado aspecto del proceso educativo*, lo cual entra en consonancia con los propósitos en este trabajo. En coherencia con ello, la rúbrica sería el instrumento a partir del cual el profesor y los estudiantes identifican los desempeños de los diferentes indicadores. A continuación, se presenta la rúbrica propuesta.

2.1 Rúbrica propuesta

Este instrumento tiene como finalidad que tanto los estudiantes como los profesores evalúen las habilidades y las actitudes que se promueven durante las actividades en las situaciones 1 y 2. Se les pide contestar de manera objetiva y honesta. El profesor debe indicarle al estudiante cómo ponderar su desempeño en correspondencia con cada uno de los indicadores, donde dice *Valoración* (Tabla 5) el estudiante debe de colocar el valor cuantitativo que considere para cada indicador, según la descripción. Además, en la columna *Descripción* se espera que el estudiante o el profesor especifique las razones para asignar la valoración.

Tala 5. Rúbrica propuesta

Indicador	Superior	Alto	Básico	Bajo	Valoración	Descripción
Conceptos Reconoce los conceptos físicos y matemáticos, las variables y las relaciones involucradas en la ley de Hooke.	Reconoce adecuadamente los conceptos, las variables y sus relaciones involucradas en los fenómenos.	Reconoce adecuadamente los conceptos, las variables y sus relaciones, aunque algunas de ellas son incompletas.	Hay evidencias de reconocer los conceptos, las variables y las relaciones, pero se dejan de lado algunas porque no las comprende.	Reconoce pocos (o no reconoce) conceptos, variables o relaciones, algunas de las cuales son erróneas.		

Modelo matemático Construye y valida el modelo matemático de la ley de Hooke, de acuerdo con los puntos propuestos en la actividad.	Construye correctamente y valida el modelo de acuerdo con los puntos propuestos en la actividad.	Construye correctamente un modelo, aunque sin validación.	Construye un modelo incompleto. En consecuencia, la validación es incompleta o errónea.	El modelo propuesto difiere del fenómeno estudiado. La validación está ausente.
Rigurosidad Realiza de manera adecuada las actividades propuestas en la situación.	Realiza en totalidad y de manera adecuada las actividades propuestas en la situación.	Realiza en totalidad las actividades propuestas, con algunos errores conceptuales o procedimentales.	Realiza la mayoría de los puntos, aunque se observan errores en los conceptos o procedimientos.	Realiza pocos puntos o ninguno de manera adecuada.
Comprensión instrucciones Comprende la totalidad de las instrucciones dadas para las actividades propuestas de la situación y las acata en totalidad.	Comprende en totalidad las instrucciones dadas para las actividades propuestas de la situación y las acata en totalidad.	Comprende y acata la mayoría de instrucciones dadas para las actividades propuestas de la situación.	Comprende y acata algunas de las instrucciones dadas para las actividades propuestas de la situación.	Demuestra dificultades para entender y seguir instrucciones o, aunque se comprenden, no se acatan. También se incluye cuando el estudiante comprende pocas de las indicaciones.
Trabajo en equipo Demuestra habilidades para trabajar con los compañeros en las diferentes actividades.	Demuestra actitudes y habilidades para atender las situaciones propuestas en colaboración con compañeros.	En ocasiones demuestra algunas actitudes y habilidades para atender las situaciones propuestas con los demás compañeros.	Demuestra algunas habilidades para el trabajo en equipo, sin embargo, algunas actitudes no son adecuadas.	Demuestra dificultades para trabajar en equipo, ya sea por falta de habilidades o actitudes.

De acuerdo con la escala de valoración para la evaluación cuantitativa propuesta para Colombia, se le pide al estudiante realizar los siguientes cálculos, de acuerdo con los puntajes obtenidos en la autoevaluación: Calificación: Puntaje obtenido/puntaje máximo: ____/5 = ...

La rúbrica se elabora de tal manera que se implemente para la evaluación de ambas situaciones, en función de lo que el profesor considere prudente, es decir, se utiliza para realizar cambios o ajustes en función de las actividades que se implementan en el aula.

3. TRANSFERENCIA O AMPLIACIÓN A OTRAS SITUACIONES O CONTEXTOS

En el capítulo se presentan algunas ideas para la incorporación de la modelación y la experimentación en la enseñanza de las matemáticas en Educación Media. La ley de Hooke y el MAS se presentan como un contexto que posibilita este acercamiento, pero existen otras experiencias y recursos que pueden brindar insumos para potenciar estas situaciones. En la Tabla 6 se presentan algunas sugerencias.

Los ejemplos brindan ofrecen ideas para el aula frente a las posibles acciones de estudiantes y de profesores para incorporar la modelación y la experimentación; también muestran otras simulaciones que pueden complementar el estudio de las temáticas abordadas al contemplar conceptos, variables y magnitudes que no están al alcance de esta experiencia, como la energía. Estos aspectos contribuyen a que se amplíe el uso de los modelos a otros fenómenos físicos con un comportamiento similar, o a que se estudien aspectos específicos de una situación en correspondencia con los propósitos formativos y los recursos disponibles.

Tabla 6. Experiencias y recursos sugeridos

Referencia	Posibilidades de ampliación	Sugerencias
Domínguez A. et al. (2015). Models and modelling in an integrated physics and mathematics course.	Presenta una experiencia basada en el MAS a través de experimentos físicos; aborda conceptos como energía y fuerza de fricción, que pueden ayudar a ampliar la tarea con el simulador. También presenta cómo se orienta la evaluación de la actividad.	Es posible contrastarla usando el simulador y la experimentación física, reflexionar sobre las posibilidades y limitaciones de cada una y sobre cómo se podrían complementar para tener una comprensión amplia del fenómeno. Se recomienda promover el trabajo en equipo y generar espacios de discusión donde los participantes presenten sus planteamientos, reflexiones y procedimientos.
Ley de Hooke: http://www.educaplus.org/game/ley-de-hooke	Es posible incorporar y hacer registros tabulares de información en el mismo simulador, lo cual puede simplificar los procesos de medición y prestar mayor atención a la manera en que se relacionan y cambian las variables.	En caso de ampliar la situación y el estudio de ciertas magnitudes y modelos, se recomienda masas y resortes. En el simulador es posible trabajar con magnitudes, tanto escalares como vectoriales, y la manera en que cambian. Se tiene la posibilidad de encontrar similitudes y diferencias entre el sistema masa-resorte y un sistema de péndulo simple, tanto en las variables que se involucran como en las magnitudes y los modelos que describen el fenómeno.
Masas y resortes: https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs/latest/masses-and-springs_es.html	Brinda la posibilidad de realizar un análisis en términos energéticos sobre el MAS.	
Péndulos: https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_es.html	Este recurso permite estudiar el MAS y los conceptos que involucra. Además, permite identificar las variables que caracterizan el fenómeno.	

4. CONCLUSIONES

El uso de simuladores para el estudio de la Ley de Hooke y el MAS contribuyen a la comprensión de estos fenómenos, mediante el uso de instrumentos de medida y de modelos que permiten describirlos y cuantificarlos.

Las situaciones que se proponen en este capítulo permiten desarrollar experiencias en las clases de matemáticas, donde se posibilite el establecimiento de relaciones con la física, y se pueda reconocer el conocimiento que dichas relaciones promueven, como la comprensión de magnitudes que intervienen en fenómenos físicos y la manera en que cambian (o no) y se relacionan.

Además, muestra las posibilidades del simulador, no como un sustituto de la realidad, sino como herramienta para experimentar bajo el control de ciertas variables, la manipulación de instrumentos de medida y una aproximación a la actividad científica con el uso de recursos disponibles.

El uso de diferentes representaciones (gráfica, tabular y algebraica) permiten identificar las variables que se involucran en el fenómeno y la manera en que cambian. Además, brindan una idea de cómo el conocimiento matemático es necesario para comprender situaciones extra matemáticas, al tiempo que permite el desarrollo del conocimiento matemático escolar. Estos aspectos se podrían extender a otras situaciones para la comprensión de sistemas donde interviene el MAS y las matemáticas involucradas.

En coherencia con lo anterior, la modelación y la experimentación en este trabajo no son solo acciones que se desarrollan para construir una expresión que describe el movimiento, sino que son procesos que implican la comprensión de conceptos y de procedimientos necesarios para el estudio de un fenómeno físico. En ese orden de ideas, las matemáticas que se involucran y el simulador se constituyen como elementos necesarios para la comprensión del mundo físico.

Agradecimientos

Al Comité para el Desarrollo de la Investigación CODI de la Universidad de Antioquia por el financiamiento del proyecto *Fundamentación y desarrollo de una propuesta de formación STEM para futuros profesores de matemáticas*". Código: 2018-22989.

REFERENCIAS

[1] MEN. (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional.
[2] MEN. (2006). Estándares básicos de competencias. Ministerio de Educación Nacional.
[3] Rojas H. (2015). Una mirada actual al aprendizaje de las matemáticas. Revista de psicología 12(1), 259-328.
[4] Rangel D. (2016). El proceso de modelación matemática mediado por los videojuegos. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia.
[5] Molina-Toro J. et al. (2018). La modelación en el aula como un ambiente de experimentación con graficación y tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática 11(1), 87-115.
[6] Rodríguez R. et al. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. Educación matemática 28(3), 91-110.
[7] MEN. (1998). Lineamientos Curriculares: Ciencias Naturales. Ministerio de Educación Nacional.
[8] Villa-Ochoa J. et al. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. Espaço Plural 18(36), 219-251.
[9] Rubio L. et al. (2016). La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. International Journal of Educational Research and Innovation (5), 90-111.
[10] Waldegg G. (2002). El uso de las nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias. Revista electrónica de investigación educativa 4(1), 01-22.
[11] Contreras G. et al. (2010). Uso de simuladores como recurso digital para la transferencia de conocimiento. Revista de Innovación Educativa 2(1), 86-100.
[12] Tacca D. (2010). La enseñanza de las ciencias naturales en la educación básica. Investigación Educativa 14 (26), 139-152.
[13] Romero A. y Aguilar Y. (2013). La experimentación y el desarrollo del pensamiento físico. Un análisis histórico y epistemológico con fines didácticos. Universidad de Antioquia.
[14] Gilbert J. y Justi R. (2018). Introducing modelling into school science. In Yeo J. et al. (Eds.), Science education research and practice in Asia-Pacific and beyond (pp. 25-38). Springer.
[15] Camarena P. (2012). La matemática en el contexto de las ciencias y la modelación. Innovación educativa, 9(46), 15-25.
[16] Posada-Balvin F. y Villa-Ochoa J. (2006). Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional. Tesis de Maestría. Universidad de Antioquia.
[17] Carmona-Mesa J. et al. (2020). Estudio de fenómenos físicos en la formación inicial de profesores de matemáticas. Una experiencia con enfoque STEM. Uni-Pluriversidad, 20(1), 18–38.
[18] Allal L. (1980). Estrategias de evaluación formativa: Concepciones psicopedagógicas y modalidades de aplicación. Infancia y aprendizaje 3(11), 4-22.
[19] Martín M. (2014). Evaluación de competencias mediante rúbrica. Importancia de las matemáticas en la evaluación de competencias genéricas. Historia y comunicación social 18, 243-255.
[20] Martínez-Rojas J. (2008). Las rúbricas en la evaluación escolar: Su construcción y su uso. Avances en medición 6(38), 129-137.

Parte III
Situaciones para la formación universitaria

C 7

Prácticas de modelación matemática en un curso de Ecuaciones Diferenciales para Ingenieros

Luis Fernando Plaza Gálvez[1]
Alexander Castrillón-Yepes[2]
[1] *Unidad Central del Valle del Cauca*
[2] *Universidad de Antioquia*
Colombia

La Modelación Matemática contribuye a una mejor comprensión de los conceptos matemáticos necesarios en la formación y aprendizaje de los estudiantes a temprana edad, de tal manera que puedan interpretar, comparar y reflexionar acerca de conceptos y procedimientos a través de diferentes representaciones como gráficas, expresiones algebraicas, registros tabulares o bosquejos.

Cuando el estudiante termina su período de educación media e ingresa a la educación superior a un programa de ciencias exactas o ingeniería, su formación en ciencias básicas termina, la mayoría de las veces, en un curso de Ecuaciones Diferenciales. En este tipo de cursos se deben poner en práctica, entre otras herramientas, las necesarias para llevar a cabo tareas de investigación o resolución de problemas, como el caso de la Modelación Matemática.

La Modelación Matemática se vincula a la formación en ingeniería para darle sentido a las matemáticas y brindarles a los ingenieros herramientas conceptuales y prácticas, para atender las necesidades del campo en el que se desenvuelven [1, 2]. En este proceso de modelación se generan acciones como el estudio de un problema o situación, la definición de elementos o teorías que contribuyan a resolverlo, la descripción de la situación que se estudia en términos matemáticos, la construcción de representaciones o modelos, su evaluación a la luz del fenómeno en estudio y la interpretación de resultados o toma de decisiones en función de la situación a resolver [2].

En este capítulo se presenta un estilo para la enseñanza de las matemáticas a través de la modelación, que pueden utilizar los profesores que orientan cursos de Ecuaciones Diferenciales, y en el que se utilizan varios conceptos y presaberes. La modelación matemática en este contexto se puede ver como un instrumento para hacer o, en su defecto, aplicar las matemáticas, incluso en el desarrollo profesional [3]. Además, también se puede entender como una estrategia didáctica o como metodología de investigación, por medio de la interpretación, formulación y solución de problemas [4].

Por lo tanto, al aplicar conceptos y técnicas como los mínimos cuadrados y el teorema del Valor Medio en un curso de Cálculo Diferencial, la regresión (complemento de Estadística), la diferenciación numérica (Métodos numéricos), el manejo básico de una hoja de cálculo y un conocimiento de las técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales ordinarias de orden uno (abordadas generalmente en la primera parte del curso), se puede llevar a cabo la modelación matemática de situaciones, fenómenos o procesos de la vida cotidiana para implementar dentro o fuera del aula durante el período académico.

Después de que el profesor logre poner en práctica por medio de un proyecto sus conocimientos sobre Ecuaciones Diferenciales, los estudiantes podrán tomar decisiones a partir de la elaboración de un modelo que exprese cómo es la evolución de una variable particular a través del tiempo. De esta manera se evidencia que la Modelación Matemática permite mejorar la comprensión de los fenómenos o procesos

[1] Contacto: *lplaza@uceva.edu.co*
[2] Contacto: *alexander.castrillony@udea.edu.co*

objeto de estudio, así como adquirir otros conocimientos propios de su formación como futuros ingenieros, ayudándoles a percibir la realidad y el porqué de las cosas.

1. METODOLOGÍA

1.1 Identificación de la situación

Después de conocer el contenido del curso de Ecuaciones Diferenciales, al menos la técnica de Separación de Variables, se puede plantear una estrategia para modelar situaciones:

- *Crecimientos de la población*. Que se pueden ver como un ser individual, y entre las que se cuenta la modelación matemática del crecimiento de una especie arbórea, una planta, o un animal doméstico, como aves de corral, cerdos, cuy, etc.; entendiéndose el crecimiento como la variación del peso a través del tiempo, de la longitud o de alguna de las características generales de la especie en estudio [5]. También se pueden ver como una comunidad, o un grupo de objetos que tienen un crecimiento o decrecimiento, como es el caso de la variación de una población de un sitio en especial, o del número de bacterias que se desarrollan bajo una circunstancia específica, del número de personas infectadas bajo un virus o enfermedad, o el nivel de producción de un elemento o materia prima, o el número de vehículos vendidos en una zona geográfica a través del tiempo, del crecimiento de una población de internos en una cárcel, del crecimiento o no de los delitos, según clasificación de las mismas autoridades, etc.
- *Procesos de vaciado o llenado de tanques*. Por medio de fluidos que pueden ser líquidos o gaseosos.
- *Verificación de una ley*. Como la ley de enfriamiento o calentamiento de Newton.
- *Sistemas industriales*. A través de la medición del crecimiento de ventas de un producto en particular o a través curvas de aprendizaje [5, 6].

Después de que los estudiantes conocen las diferentes técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales, se les recomienda realizar el proyecto de aula utilizando algunas de las siguientes opciones:

1. *Crecimiento de población*. Se puede monitorear el crecimiento de pollos de corral por aproximadamente de tres meses. Con datos de peso tomados a diario.
2. *Vaciado de tanques*. Se puede monitorear el vaciado de un tanque con una geometría en especial, con toma de datos cada segundo, y el proceso se puede filmar para mejorar la toma de datos.
3. *De la página https://www.datos.gov.co/*. Se pueden obtener datos históricos bajo una periodicidad que permita hallar la continuidad en los datos, entre los que se cuentan bases de datos de atención en salud, en educación, en justicia, etc.

Estas situaciones permiten evidenciar la variación de una magnitud en cuestión (cantidad, peso, altura, área, volumen) en función del tiempo y a partir de datos históricos, lo cual facilita encontrar una expresión para predecir la magnitud referenciada a un tiempo futuro específico, o generar alertas tempranas cuando haya capacidad de la entidad responsable, o de planta instalada, inferior a las necesidades, así como en la toma de decisiones.

La estrategia didáctica propuesta permite acercar el estudiante a las matemáticas por medio de vivencias, donde su aplicación se sale del aula y se puede evidenciar a través de tareas de campo, lo que le permite generar un carácter descriptivo en el que él mismo pone en práctica una serie de fundamentos teóricos. El profesor puede considerar la opción de incluir la actividad por fuera del aula como opción metodológica y hacer partícipe al estudiante de ingeniería de su misma formación.

Con el conocimiento adquirido (herramientas de modelación matemática) el estudiante, cuando tome asignaturas del área profesional, podrá implementar los conceptos y aplicaciones integradas de la matemática hasta alcanzar una serie de competencias, destrezas y habilidades que le permitirán desarrollar criterios decisorios y elementos necesarios en la resolución de problemas, que lo van a proyectar luego al mercado laboral. En coherencia con lo anterior, en la Tabla 1 se presentan algunas metas de aprendizaje para el estudiante universitario en relación con el modelado del tipo de situaciones descrito, algunos referentes teóricos que soportan estas metas de aprendizaje y algunas habilidades y actitudes que pueden ser requeridas para el desarrollo de esta propuesta.

Tabla 1. Propuesta formativa

Metas de aprendizaje	Relación con la literatura	Habilidades	Actitudes
Aplicar una estrategia para modelar situaciones de variación en un curso de Ecuaciones Diferenciales. Identificar la regresión oportuna para un fenómeno susceptible de ser modelado a través del uso de hojas de cálculo.	Algunos autores muestran cómo la Modelación Matemática puede ser implementada en la enseñanza de la ingeniería, a la vez que se usa software, se analizan las variables involucradas en una situación y se promueven habilidades (o se identifican dificultades) [7]. El ingeniero requiere habilidades que la Modelación Matemática puede promover, como la interpretación, la comunicación, el uso de tecnologías y la solución de problemas [2].	Utilizar tecnologías Experimentar Analizar e interpretar información Resolver problemas Argumentar	Trabajo en equipo Actitud analítica Actitud Investigativa Curiosidad Creatividad

1.2 Desarrollo de la situación

Al realizar tareas de Modelación Matemática es importante tener en cuenta los conceptos previos a partir de Ecuaciones Diferenciales, que se pueden emplear como estrategias didácticas, como fin de enseñanza o de investigación de aula. A través de una ecuación diferencial se pueden describir relaciones o vínculos entre una variable y sus derivadas [8]. A continuación, esta información será el soporte para buscar la situación, el fenómeno o proceso a intervenir con las directrices del profesor. Al respecto, se tienen estudios como el de Trigueros [9] y el de Scardigli et al. [10].

1.3 Herramientas matemáticas

1.3.1 Ajuste por mínimos cuadrados

Al estudiar un fenómeno o proceso a partir de registros históricos, se puede construir una tabla de n parejas de datos a igual espacio respecto de la primera componente, tal como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Datos históricos de un fenómeno o proceso

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
.	.
.	.
x_{n-1}	y_{n-1}
x_n	y_n

Por medio de la teoría de los Mínimos Cuadrados se puede intentar llegar a la curva de mejor ajuste con una expresión de la forma $\hat{y} = f(x)$, donde $(x, \hat{y})$ representa las coordenadas o componentes de la curva de aproximación, tal como se expone en los cursos de cálculo (aplicación de la derivada) [11], o como una aplicación de lo descrito en los procesos de ajuste de la curva que presente la mejor tendencia de los datos históricos [12].

La teoría de los Mínimos Cuadrados inmersa en los procesos de regresión, y con la ayuda de una hoja de cálculo, permite encontrar la función continua o curva de aproximación que más se acerca a los datos reales o tendencia de los datos históricos, como los expuestos en la Tabla 2, así no coincida con dichos puntos. Al digitar la Tabla 2 en una hoja de cálculo, y luego de insertar la gráfica respectiva, se busca el formato de la línea de tendencia, como se ilustra en la Figura 1.

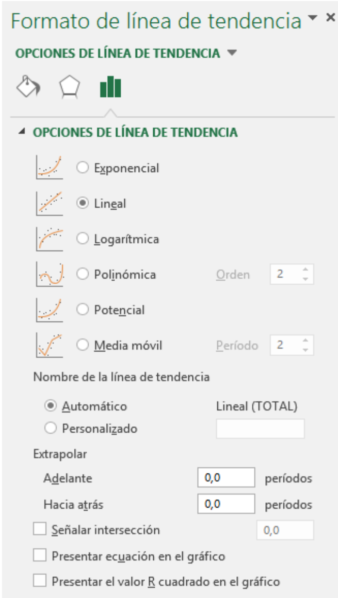


Figura 1. Formato de línea de tendencia en hoja de cálculo

El formato de línea de tendencia brinda las siguientes opciones de regresión con su respectiva expresión:

Regresión Exponencial: $y = ae^{bx}$
Regresión Lineal : $y = ax + b$
Regresión Logarítmica : $y = aLn(x) + b$
Regresión Polinómica (hasta orden 6): $y = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$
Regresión Potencial: $y = ax^b$

Donde los valores *a, b, c, d, e, f* y *g* se encuentran siempre y cuando el algoritmo lo permita en el dominio de la función. Es importante mencionar que los datos que estén en columna de la izquierda (Tabla 2), siempre serán de la variable independiente (*x*), y los de la segunda serán de la variable dependiente (*y*).

1.3.2 Teorema del valor medio

Al tomar como origen el teorema de Rolle [13], el teorema del valor medio permite una aproximación de la derivada por análisis de rectas tangentes, que expresa que si una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c en (a, b), (ecuación (1).

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (1)$$

El número c se escoge de tal manera que sea el punto medio del intervalo (a, b) y permita encontrar la derivada en ese punto, a partir de conocer la evaluación de la función en los extremos del mismo intervalo. El teorema del valor medio se toma a su vez como un caso especial del teorema de Taylor.

1.3.3 Diferenciación o derivación numérica

Es una estrategia o método numérico que permite encontrar con aproximación adecuada la evaluación de la derivada en un punto, después de conocer sus valores en la vecindad y sin conocer la función que lo rige. El soporte de la diferenciación son el teorema del valor medio y el teorema de Taylor [12]. Al hacer la semisuma de las diferencias centradas hacia delante y hacia atrás, se llega a la diferenciación numérica centrada a tres pasos. Para ser puestas en práctica por medio de un proyecto de curso, estas herramientas deben ser direccionadas y sugeridas por parte del profesor, que debe realizarse como tarea de campo por parte de los estudiantes y en equipos de trabajo. Dicho proyecto involucrará trabajo cooperativo que contribuye a generar motivación, creatividad, compromiso, aproximación a la matemática, afianzamiento de conceptos y contextualización en una situación particular, lo cual crea un ambiente dinámico al interior del curso de Ecuaciones Diferenciales.

1.4 Modelación matemática de un fenómeno o proceso

En la literatura se encuentran estudios acerca de los modelos que más se usan, entre los que se pueden citar los de crecimientos de población como los de Bertalanffy [14] y los de vaciado de Tanques [15].

1.4.1 Situaciones de modelación matemática

Después de tener claridad acerca de los conceptos necesarios se plantea como proyecto de curso, o trabajo de aula, una investigación para encontrar la variación de una magnitud en función del tiempo. Para ello se requiere conocer la base de datos del desarrollo histórico de un fenómeno o proceso con n datos y con igual separación en el tiempo, como en la Tabla 3, donde t representa el tiempo transcurrido y N el número de unidades de la variable en estudio que, bajo la presente metodología, siempre se podrá llegar a la expresión matemática $N = f(t)$ que con mayor grado se aproxime a unos datos históricos, de tal manera que se puedan hacer proyecciones o pronósticos de interés, y que permita generar conclusiones al respecto.

Tabla 3. Datos históricos de un fenómeno o proceso

t	N
t_1	N_1
t_2	N_2
t_3	N_3
.	.
.	.
t_{n-1}	N_{n-1}
t_n	N_n

1.4.2 Tratamiento de la información

A los datos obtenidos de la Tabla 3 se les desea calcular la derivada numérica N' por medio del teorema del Valor Medio y de la Diferenciación centrada a tres pasos (si se desea mejorar la precisión al reducir el error, se puede trabajar con la diferenciación centrada a cinco pasos). El igual espaciamiento en el tiempo se garantiza por la ecuación (2), donde h representa el tamaño de paso.

$$t_{i+1} = t_i + h \qquad (2)$$

Al usar la Diferenciación centrada a tres pasos, por medio de la ecuación (3) y con $i: [2..n-1]$.

$$N'(i) = \frac{N_{i+1} - N_{i-1}}{2h} \approx \frac{dN}{dt}(i) \qquad (3)$$

Se pueden adicionar dos columnas más y construir la Tabla 4.

Tabla 4. Datos históricos de un fenómeno o proceso

t	N	N'	N'/N
t_1	N_1		
t_2	N_2	N'_2	N'_2/N_2
t_3	N_3	N'_3	N'_3/N_3
.	.	.	.
.	.	.	.
t_{n-1}	N_{n-1}	N'_{n-1}	$N'_{n-1}\ N_{n-1}$
t_n	N_n		

Notar que no se puede calcular los valores N'_1 y N'_{n1}/N_1, N'_n ni N'_n/N_n.

1.4.3 Obtención de la ecuación diferencial

De la Tabla 4 se pueden estudiar tres tendencias: 1) entre t y N', 2) entre N y N', y 3) entre N y N'/N, que conducirán finalmente a expresiones de la forma: $N' = f(t)$, $N' = f(N)$ y $N'/N = f(N)$ respectivamente. Entre las relaciones expuestas se hace el análisis de regresión, según los valores que se obtienen, pero la expresión final conducirá a una Ecuación Diferencial Ordinaria de orden 1, que podrá ser resuelta por un método o técnica vista en la primera parte del curso de Ecuaciones Diferenciales (solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden). Para ello se implementa el primer dato almacenado en la Tabla 3 como condición inicial, es decir, $N(t_1) = N_1$, que servirá para encontrar la constante de integración K (que se origina en la solución de toda ecuación diferencial ordinaria de orden 1), en los respectivos casos.

1.4.4 Análisis de regresión entre t y N'

Representa la razón de cambio de la variable *N* en función del tiempo *t.* De la tabla 4, se organiza la tabla 5.

Tabla 5. Análisis de Regresión entre t y N'

t	N'
t_2	N'_2
t_3	N'_3
.	.
.	.
t_{n-1}	N'_{n-1}

Al efectuar todos los análisis, se llegará a una expresión como la ecuación (4).

$$N' = f(t) = \frac{dN}{dt} \qquad (4)$$

Donde $\frac{dN}{dt} = f(t)$ representa una ecuación diferencial que se puede resolver por Separación de Variables (ecuación (5)).

$$\int dN = \int f(t)dt \qquad (5)$$

Donde $f(t)$ representa todas las formas de regresión generadas por la hoja de cálculo:

- *Regresión Lineal* (Ecuación (6)).

$$N' = at + b, \qquad (6)$$

Que se puede expresar con la ecuación (7).

$$\frac{dN}{dt} = at + b, \qquad (7)$$

Que conduce a la integral de la ecuación (8).

$$N = \int (at + b)dt \qquad (8)$$

Cuya solución es la ecuación (9).

$$N = a\frac{t^2}{2} + bt + K \qquad (9)$$

- *Regresión Exponencial* (ecuación (10)).

$$N' = ae^{bt}, \qquad (10)$$

Que se puede expresar con la ecuación (11).

$$\frac{dN}{dt} = ae^{bt}, \qquad (11)$$

Que conduce a la integral de la ecuación (12).

$$N = \int ae^{bt}dt \qquad (12)$$

Cuya solución es la ecuación (13).

$$N = \frac{a}{b}e^{bt} + K \qquad (13)$$

- *Regresión Exponencial con base diferente a "e"* (ecuación (14)).

$$N' = ab^t, b > 0 \qquad (14)$$

Que se puede expresar con la ecuación (15).

$$\frac{dN}{dt} = ab^t, \qquad (15)$$

Que conduce a la integral de la ecuación (16).

$$N = \int ab^t dt \qquad (16)$$

Cuya solución es la ecuación (17).

$$N = \frac{a}{Ln(b)}b^t + K \qquad (17)$$

- *Regresión Logarítmica* (ecuación 18).

$$N' = aLn(t) + b, \qquad (18)$$

Que se puede expresar con la ecuación (19).

$$\frac{dN}{dt} = aLn(t) + b, \qquad (19)$$

Que conduce a la integral de la ecuación (20).

$$N = \int [aLn(t) + b]dt \qquad (20)$$

Cuya solución es la ecuación (21).

$$N = t[aLn(t) - a + b] + K \qquad (21)$$

- *Regresión Polinómica* (ecuación (22)).

$$N' = at^6 + bt^5 + ct^4 + dt^3 + et^2 + ft + g, \qquad (22)$$

La cual se puede expresarse con la ecuación (23).

$$\frac{dN}{dt} = at^6 + bt^5 + ct^4 + dt^3 + et^2 + ft + g, \qquad (23)$$

Que conduce a la integral de la ecuación (24).

$$N = \int [at^6 + bt^5 + ct^4 + dt^3 + et^2 + ft + g]dt \qquad (24)$$

Cuya solución es la ecuación (25).

$$N = a\frac{t^7}{7} + b\frac{t^6}{6} + c\frac{t^5}{5} + d\frac{t^4}{4} + e\frac{t^3}{3} + f\frac{t^2}{2} + gt + K \qquad (25)$$

1.4.5 Análisis de Regresión entre *N* y *N′*

Representa la razón de cambio de la variable *N* en función de la misma variable *N.* De la Tabla 4 se organiza la Tabla 6.

Tabla 6. Análisis de Regresión entre *N* y *N′*

N	*N′*
N_2	N'_2
N_3	N'_3
.	.
.	.
N_{n-1}	N'_{n-1}

Al efectuar todos los análisis, se llegará a una expresión como la ecuación (26).

$$N' = f(N), \qquad (26)$$

La cual se puede expresar como $\frac{dN}{dt} = f(N)$, que representa una ecuación diferencial que se puede resolver por Separación de Variables, como la ecuación (27).

$$\int \frac{1}{f(N)} dN = \int dt \qquad (27)$$

Donde $f(N)$ representa todas las formas de regresión generadas por la hoja electrónica:

- *Regresión Lineal* (ecuación (28).

$$N' = aN + b, \qquad (28)$$

La cual puede expresarse como la ecuación (29).

$$\frac{dN}{dt} = aN + b, \qquad (29)$$

Que conduce a la integral de la ecuación (30).

$$\int \frac{1}{aN+b} dN = \int dt \qquad (30)$$

Cuya solución es la ecuación (31).

$$N = Ke^{at} - \frac{b}{a} \qquad (31)$$

- *Regresión Exponencial* (ecuación 32).

$$N' = ae^{bN}, \qquad (32)$$

Que se puede expresar como la ecuación (33).

$$\frac{dN}{dt} = ae^{bN}, \qquad (33)$$

Que conduce a la integral de la ecuación (34).

$$\int e^{-bN} dN = \int adt \qquad (34)$$

Cuya solución es la ecuación (35).

$$N = -\frac{1}{b} Ln[-abt + K] \qquad (35)$$

- *Regresión Exponencial con base diferente a "e"* (ecuación 36).

$$N' = ab^N, b > 0 \qquad (36)$$

Que se puede expresar con la ecuación (37).

$$\frac{dN}{dt} = ab^N, \qquad (37)$$

Que conduce a la integral de la ecuación (38).

$$\int b^{-N} dN = \int a dt \qquad (38)$$

Cuya solución es la ecuación (39).

$$N = -\frac{1}{Ln(b)} Ln[(K - at)Ln(b)] \qquad (39)$$

1.4.6 Análisis de Regresión entre *N* y $\frac{N'}{N}$

Este análisis en especial permite conocer la tendencia de la razón de cambio relativa de la variable a analizar. De la Tabla 4 se organiza la Tabla 7.

Tabla 7. Análisis de Regresión entre *N* y *N'/N*

N	N'/N
N_2	N'_2/N_2
N_3	N'_3/N_3
.	.
.	.
N_{n-1}	N'_{n-1}/N_{n-1}

Al efectuar los análisis se llegar a la ecuación (40).

$$\frac{N'}{N} = f(N), \qquad (40)$$

Que se puede expresar con la ecuación (41).

$$\frac{dN}{Nf(N)} = dt, \qquad (41)$$

Que representa una ecuación diferencial que se puede resolver por Separación de Variables (ecuación (42)).

$$\int \frac{1}{Nf(N)} dN = \int dt \qquad (42)$$

Donde $f(N)$ representar todas las formas de regresión generadas por la hoja de cálculo:

- *Regresión Lineal*. Cuando la tendencia de la Razón de cambio relativa es lineal, como la que se describe en la ecuación (43), se conoce como el Modelo Logístico.

$$\frac{N'}{N} = aN + b, \qquad (43)$$

Que se expresar con la ecuación (44).

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = aN + b, \qquad (44)$$

Que conduce a la integral de la ecuación (45).

$$\int \frac{1}{N(aN+b)} dN = \int dt \qquad (45)$$

Cuya solución es la ecuación (46).

$$N = \frac{bKe^{bt}}{1 - aKe^{bt}} \qquad (46)$$

- *Regresión Logarítmica.* Cuando la tendencia de la Razón de cambio relativa es Logarítmica, como la ecuación (47), se conoce como el Modelo de Gompertz.

$$\frac{N'}{N} = aLn(N) + b, \qquad (47)$$

Que se puede expresar con la ecuación (48).

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = aLn(N) + b, \qquad (48)$$

Que conduce a la integral de la ecuación (49).

$$\int \frac{1}{N(aLn(N)+b)} dN = \int dt \qquad (49)$$

Cuya solución es la ecuación (50).

$$N = e^{Ke^{at} - \frac{b}{a}} \qquad (50)$$

Aplicaciones clásicas de este modelo se encuentran en [16, 17]. Después de encontrar la expresión matemática por medio de los casos anteriores, se evidencia que en todas aparece la constante K, que puede encontrarse por medio de la condición inicial correspondiente a la primera fila de la Tabla 3, es decir, si $t = t_1$, entonces $N = N_1$.

Luego de obtener el valor de K, se reemplaza en todas las expresiones solución de todas las respectivas ecuaciones diferenciales, para llegar a una expresión de la forma de la ecuación (51).

$$N_{aprox} = f(t) \qquad (51)$$

Para identificar el mejor modelo se toman todas las funciones encontradas N_{aprox}, y se evalúan todos los valores de la columna t de la Tabla 3, para organizar la Tabla 2 ampliada, donde los valores de N originales pasan a ser los valores N_{real}, que permite hacer una comparación para llegar a la Tabla 8.

Tabla 8. Análisis comparativo entre datos reales y datos aproximados

t	N_{real}	N_{aprox}
t_1	$N1_r$	$N1_a$
t_2	$N2_r$	$N2_a$
t_3	$N3_r$	$N3_a$
.	.	.
.	.	.
t_{n-1}	$N_n\text{-}1_r$	N_{n-1a}
t_n	N_{nr}	N_{na}

Esta comparación se realiza por medio del instrumento estadístico Coeficiente de Determinación R^2, que mide la cantidad de variación o medida de dispersión en los datos encontrados respecto de los datos reales, e indica qué tanto se ajusta el modelo a dichos datos. Este modelo se obtiene entre todos los valores de la columna N_{real} y los de la columna de N_{aprox}. Es decir, mide la correlación entre las últimas dos columnas. El coeficiente R^2 es un valor entre cero y uno $0 \leq R^2 \leq 1$ y, entre más cercano a 1, mejor será la aproximación.

1.5 Momentos de la situación

Los momentos del desarrollo del proyecto, con lo aprendido en el aula, se llevan a cabo por fuera de ella en el siguiente orden.

1. En cualquiera de las situaciones descritas los datos se consignan en la Tabla 3.
2. A partir de los datos de la Tabla 3 se calcula la derivación numérica, con resultados en la Tabla 4.
3. A partir de los datos de la Tabla 4 se organizan las Tablas 5, 6 y 7, para luego realizar la regresión lineal, exponencial, potencial, logarítmica y polinomial, y llegar a la Ecuación Diferencial Ordinaria de orden 1.
4. La solución de la ecuación diferencial obtenida permite llegar al modelo matemático que se aproxima al fenómeno o proceso en estudio.
5. La puesta en marcha de la expresión encontrada se da con los mismos valores en el tiempo descrito, para llegar a unas imágenes de aproximación, tal como se exponen en la Tabla 8.
6. A través del coeficiente de determinación se realiza análisis del nivel de ajuste y comparación entre los valores históricos y los valores aproximados, que permite valorar la efectividad del modelo y su confiabilidad en resultados futuros.

2. RESULTADOS Y ANÁLISIS

A continuación, se presenta la experiencia de modelación matemática en el laboratorio de física [5], en un curso de Ecuaciones Diferenciales (después de haber visto las técnicas de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 1) en la Unidad Central del Valle, con sede en Tuluá, Colombia.

La práctica consistió en observar el comportamiento del enfriamiento de 100 ml de agua y tratar de encontrar la expresión matemática que más se acercará a los datos obtenidos experimentalmente. Para ello se lleva el agua (en un vaso de precipitado) a una estufa para encontrar su punto de ebullición. Tuluá se haya a 966 msnm, y el punto de ebullición se logró a 97,8°C.; luego se retiró la fuente de calor para iniciar la toma de datos de temperatura y tiempo, cada minuto, obteniéndose los datos de la Tabla 9.

Tabla 9. Toma de datos en el proceso de enfriamiento de 100 ml

t (m)	T(°C)
0	97,8
2	85,3
4	77,9
6	72,4
8	67,5
10	63,4
12	60,4
14	57,4
16	55,1
18	52,9
20	51,0
22	49,2
24	47,8
26	46,2
28	44,8
30	43,7
32	42,5
34	41,6
36	40,6
38	39,7
40	38,8
42	38,0
44	37,3
46	36,6
48	36,0
50	35,3
52	34,8
54	34,3
56	33,8
58	33,4
60	33,0
62	32,7
64	32,4

66	32,0
68	31,7
70	31,3
72	31,1
74	30,8
76	30,6
78	30,4
80	30,2
82	30,0
84	29,7
86	29,6

Posteriormente, y a partir de los datos históricos de la Tabla 9, se calculó la derivada numérica centrada a tres pasos, los resultados se presentan en la Tabla 10.

Tabla 10. Cálculo de la derivada numérica

t (m)	T (°C)	T'
0	97,8	
2	85,3	-4,975
4	77,9	-3,225
6	72,4	-2,600
8	67,5	-2,250
10	63,4	-1,775
12	60,4	-1,500
14	57,4	-1,325
16	55,1	-1,125
18	52,9	-1,025
20	51,0	-0,925
22	49,2	-0,800
24	47,8	-0,750
26	46,2	-0,750
28	44,8	-0,625
30	43,7	-0,575
32	42,5	-0,525
34	41,6	-0,475
36	40,6	-0,475
38	39,7	-0,450
40	38,8	-0,425
42	38,0	-0,375
44	37,3	-0,350
46	36,6	-0,325
48	36,0	-0,325
50	35,3	-0,300
52	34,8	-0,250
54	34,3	-0,250
56	33,8	-0,225
58	33,4	-0,200
60	33,0	-0,175
62	32,7	-0,150
64	32,4	-0,175
66	32,0	-0,175
68	31,7	-0,175
70	31,3	-0,150
72	31,1	-0,125
74	30,8	-0,125
76	30,6	-0,100
78	30,4	-0,100
80	30,2	-0,100
82	30,0	-0,125
84	29,7	-0,100
86	29,6	NA

Mediante la regresión lineal, a las columnas T y T’, y con la ayuda de la hoja de cálculo, se obtiene la ecuación diferencial que modela la Ley de Enfriamiento de Newton, ecuación (52) (Figura 2).

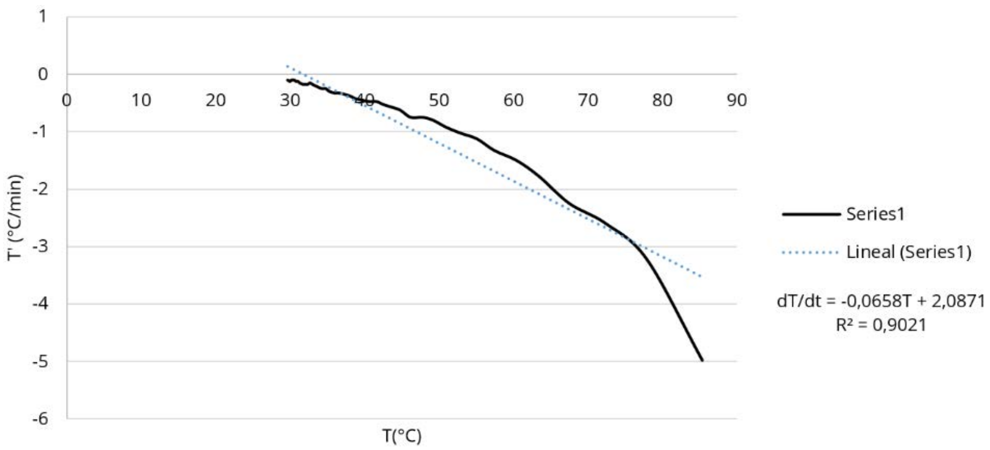


Figura 2. Representación gráfica de la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = -0.0658T + 2.0871 \qquad (52)$$

Esta ecuación diferencial es ordinaria de orden 1, y con la condición inicial, como el primer dato tomado en la Tabla 9 es T (0) = 97.8, se llega a su solución de la siguiente manera:

$$T = 66.814e^{-0.0658t} + 31.718$$

La solución de la ecuación diferencial obtenida permite llegar al modelo matemático que se aproxima al enfriamiento de 100 ml. El análisis de la expresión matemática se lleva a cabo con todos los valores en el tiempo de la Tabla 9 original, para comparar con los valores aproximados consignados en la Tabla 11.

Tabla 11. Análisis comparativo entre valor real y aproximado de temperaturas

t (m)	Treal (°C)	Tapr (°C)
0	97,8	98,5
2	85,3	90,3
4	77,9	83,1
6	72,4	76,7
8	67,5	71,2
10	63,4	66,3
12	60,4	62,0
14	57,4	58,3
16	55,1	55,0
18	52,9	52,2
20	51,0	49,6
22	49,2	47,4
24	47,8	45,5
26	46,2	43,8
28	44,8	42,3
30	43,7	41,0
32	42,5	39,9
34	41,6	38,8
36	40,6	38,0
38	39,7	37,2
40	38,8	36,5
42	38,0	35,9
44	37,3	35,4
46	36,6	35,0
48	36,0	34,6
50	35,3	34,2
52	34,8	33,9
54	34,3	33,6
56	33,8	33,4
58	33,4	33,2
60	33,0	33,0
62	32,7	32,8
64	32,4	32,7

66	32,0	32,6
68	31,7	32,5
70	31,3	32,4
72	31,1	32,3
74	30,8	32,2
76	30,6	32,2
78	30,4	32,1
80	30,2	32,1
82	30,0	32,0
84	29,7	32,0
86	29,6	32,0

Los datos arrojan un coeficiente de determinación de 0,986 (Figura 3), que es bueno por su proximidad a 1.

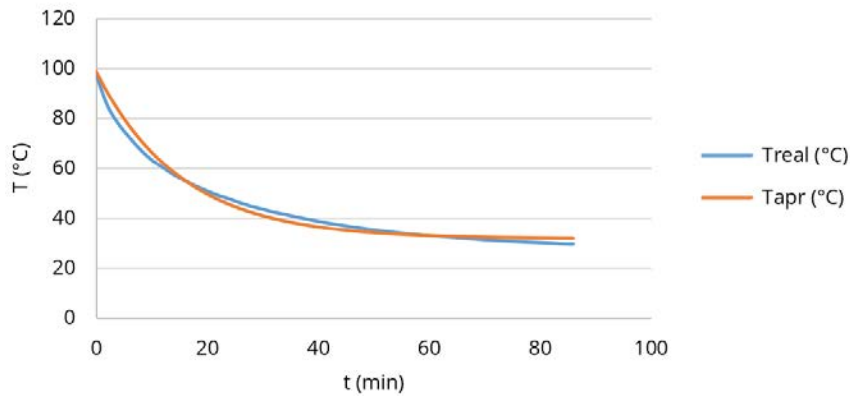


Figura 3. Comparación con los valores aproximados consignados

Este caso particular, referido al enfriamiento de agua, se puede desarrollar en diferentes regiones y permite aplicar una estrategia para modelar situaciones de variación en un curso de Ecuaciones Diferenciales. Sin embargo, es importante reconocer la posibilidad de extender su uso en otros posibles problemas, donde se puede utilizar la tecnología en procesos de modelación.

La propuesta busca aprovechar las posibilidades de la Modelación Matemática para, por un lado, brindar herramientas a los profesores de Ecuaciones Diferenciales que les permita promover la apropiación conceptual, procedimental y actitudinal de los contenidos propios de este tipo de cursos y, por otro lado, posibilita el uso de aspectos involucrados en una estrategia para modelar situaciones de variación y cambio.

En ese sentido, más que realizar un proceso *tipo receta* para modelar situaciones, lo que se pretende es brindar ideas sobre posibilidades de actuación para la modelación, que pueden ser ajustadas, complementadas, transformadas o ignoradas en función del tipo de modelos que se pretendan construir y las herramientas tecnológicas (materiales o de otro tipo) que medien la acción de los estudiantes.
Por otro lado, vale la pena reconocer la multiplicidad de situaciones que se pueden abordar en clases de Ecuaciones Diferenciales mediante el uso de proyectos. En particular, la experiencia de enfriamiento implementada en la Unidad Central del Valle del Cauca le posibilitó al profesor diseñar estrategias (laboratorio de matemáticas), que permitiera acercar el estudiante de ingeniería a la utilidad y aplicabilidad de las matemáticas, ya que es una experiencia que muchas veces no se aprovecha, es decir, reflexionar y conocer para qué sirven los procedimientos matemáticos.

Por medio de la práctica los estudiantes evidenciaron el uso de la teoría en la solución de un problema particular, ya que manifestaron que la configuración de estos proyectos de modelación y el uso de la estrategia les brinda oportunidades para crear e innovar en requerimientos que demanda la sociedad.

Sin embargo, en este tipo de procesos también se presentan algunas dificultades relacionadas con el acceso a la información y el uso de otros tipos de regresión en los que, dependiendo del comportamiento de las variables a través del tiempo, se podrán encontrar fenómenos cíclicos con tendencia al crecimiento o decrecimiento, que podrían solucionarse en la medida en que se pueda contar con mejor acceso a tecnologías y software dinámicos.

3. EVALUACIÓN

Estrategias didácticas como la de la Modelación Matemática le permiten al profesor crear instrumentos para valorar qué tanto asimilan los estudiantes los conocimientos, y el desarrollo de habilidades y competencias para aprovechar las ciencias básicas de ingeniería. Una de las alternativas de evaluación que el profesor puede emplear en incorporar en esta propuesta es el Aprendizaje Basado en Proyectos ya que, luego de asignar una problemática o fenómeno a estudiar (proyecto), con el fin de predecir su comportamiento a través del tiempo, es fácil evidenciar la puesta en práctica de los conocimientos previos, así como los propios del curso de Ecuaciones Diferenciales en su fase inicial.

Esto posibilita que los estudiantes desarrollen trabajos que implican actitudes y habilidades como la indagación, la curiosidad, la creatividad, la resolución de problemas y la comunicación. Además, la manera en que se desarrollen los proyectos se puede ajustar a las condiciones contextuales del curso, de tal manera se consideren aspectos como:

- La elección de una temática susceptible de modelar bajo la estrategia propuesta en este capítulo y que puede ser de interés para los estudiantes, o sugerida por el profesor.
- Búsqueda de información en relación con la temática. Esto también posibilita que los estudiantes desarrollen habilidades relacionadas con la indagación y el análisis de información, que se puede obtener a partir de bases de datos suministradas por las entidades oficiales, empresas, o por recolección durante el período académico.
- Presentación de los resultados de los proyectos en diferentes formatos, de manera que se posibilite la creatividad y la comunicación.
- Productos para valorar los procesos realizados. En este caso se pueden incluir informes sobre el desarrollo del proyecto, un producto final como presentaciones en póster (u orales), videos, simulaciones, entre otros, que permitan evaluar el aprendizaje de los estudiantes.

De manera particular, se sugiere el uso de bitácoras virtuales o físicas donde los estudiantes anoten los avances de su proceso de indagación, las notas de los conocimientos requeridos para el desarrollo del proyecto y los modelos construidos. Esta bitácora puede ser revisada en tres momentos: 1) inicial, donde se delimita el tema y los conocimientos requeridos, 2) intermedio, donde se presenta la obtención de los datos, su registro y su análisis, y 3) presentación del informe final. En este proceso los profesores pueden brindar recomendaciones, corregir errores en cálculos y hacer seguimiento a las fortalezas y retos de los trabajos realizados. Finalmente, es posible realizar una jornada de presentación de los proyectos en el grupo para mostrar sus trabajos a los compañeros.

4. TRANSFERENCIA O AMPLIACIÓN A OTRAS SITUACIONES Y CONTEXTOS

Encontrar en libros de texto de Ecuaciones Diferenciales situaciones que se puedan desarrollar bajo el enfoque propuesto en este trabajo de manera directa puede ser complicado, porque gran parte de las actividades y tareas que proponen se centran en desarrollar procedimientos basados en ejercicios (situaciones de cálculo) o en el desarrollo de conceptos. No obstante, se sugiere transformar problemas de cálculo de los libros para que se conviertan en situaciones problemáticas de la vida real, y que puedan ser estudiadas por los estudiantes. Algunos textos de interés son:

- Banasiak J. (2013). Mathematical modelling in one dimension: An introduction via difference and differential equations. Cambridge University Press.
- Zill D. (2018). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Cengage.

Adicionalmente, se sugiere la revisión de reportes de la literatura que incorporan situaciones de modelación y que pueden brindar ideas complementarias a las presentadas en este capítulo para cursos de ecuaciones diferenciales. Una investigación relacionada con esta propuesta es:

- Rodríguez R. y Quiroz S. (2015) Developing modelling competencies through the use of technology. In Stillman G. et al. (Eds.), Mathematical modelling in education research and practice. international perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling. Springer.

Es importante mencionar trabajos de laboratorio de matemáticas, como la Ley de Enfriamiento de Newton, donde se ponen en práctica los conceptos expuestos, como los presentados en:

- https://www.youtube.com/watch?v=WEqDYMah-Zg
- https://www.youtube.com/watch?v=h75JhiTBitI&t=20s

Finalmente, se destaca el uso de herramientas tecnológicas que pueden contribuir al estudio de situaciones en un curso de ecuaciones diferenciales, entre las que se destaca:

- Rodríguez R. y Quiroz S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 19(1), 99-124.

5. CONCLUSIONES

La propuesta que se presenta en este capítulo pone de relieve una estrategia para resolver diferentes problemas de modelación en cursos de ecuaciones diferenciales, al usar diferentes conceptos, procedimientos y técnicas matemáticas que posibilitan acciones como la construcción, el análisis, la comparación y la validación de modelos en correspondencia con una situación o fenómeno del mundo real. Así mismo, este trabajo ofrece la posibilidad de usar diferentes registros tabulares, gráficos y analíticos para generar una comprensión más amplia de las variables involucradas en el fenómeno y su variación.

Es importante considerar el rol de los diferentes registros de representación y de los medios disponibles para modelar, pues se convierten en posibilidad para estudiar los fenómenos y conectarlos con las matemáticas. En particular, la situación que se presenta frente al enfriamiento del agua se convierte en un ejemplo particular frente a cómo se puede dinamizar este tipo de estrategias en el aula y de insumos como:

- La aplicación de estrategias para la resolución de problemas que involucran Ecuaciones Diferenciales.
- Uso de Tecnologías para procesos de modelación y uso de diferentes sistemas de representación.
- El reconocimiento de las visiones que pueden tener los estudiantes frente a la implementación de este tipo de estrategias y su aplicabilidad.
- Desarrollar una evaluación progresiva y centrada en los procesos en cursos de Ecuaciones Diferenciales.

No obstante, también se reconocen retos importantes que deben ser atendidos durante la implementación de este tipo de estrategias:

- Establecer conexiones entre los diferentes sistemas de representación.
- Reconocer la importancia de las tecnologías en el desarrollo de este tipo de trabajos.
- Diferenciar el tipo de regresión que se puede usar para el estudio de una situación o la solución de un problema.

En ese sentido, este trabajo presenta algunos insumos que pueden ayudar a promover actividades, discusiones, interpretaciones y toma de decisiones en los cursos de Ecuaciones Diferenciales en la formación ingenieril, de tal manera que se valoren las estrategias, el uso de tecnologías y de la modelación matemática en la resolución de problemas.

REFERENCIAS

[1] Rendón-Mesa P. (2016). Articulación entre la matemática y el campo de acción de la ingeniería de diseño de producto: aportes de la modelación matemática. Disertación Doctoral. Universidad de Antioquia.

[2] Brito-Vallina M. et al. (2011). Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. Ingeniería Mecánica 14(2), 129-139.
[3] Plaza L. (2016). Modelación matemática en ingeniería. Revista de investigación educativa de la REDIECH 7(13), 47-57.
[4] Hein N. y Biembengut M. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. En V Festival internacional de matemática. Puntarenas, Costa Rica.
[5] Plaza L. (2015). Modelamiento matemático aplicado en Ingeniería. Editorial Uceva.
[6] Moreno D. (2014). Definición de un modelo matemático del crecimiento en las ventas de la línea de chupetas de la empresa Colombia S.A., Planta 1 ubicada en el corregimiento de la Paila, municipio de Zarzal, departamento del Valle del Cauca. Trabajo de grado. Unidad Central del Valle del Cauca.
[7] Bravo-Bohórquez A. et al. (2016). Enseñanza de las matemáticas en ingeniería: Modelación matemática y matemática contextual. Revista Educación en Ingeniería 11(21), 27-31.
[8] Liang I. (2015). Mathematical modeling and ordinary differential equations. Notas de clase. National Taiwan University.
[9] Trigueros M. (2009). El uso de la modelación matemática en la enseñanza de las matemáticas. Innovación Educativa 9 (46), 75-87.
[10] Scardigli M. et al. (2013). Reflexiones sobre la Modelización Matemática como una práctica de enseñanza y de aprendizaje en carreras de Ingeniería. Revista de Informática y Medios Audiovisuales 10(17), 17-21.
[11] Thomas G. (2005). Cálculo de varias variables. Pearson Educación.
[12] Chapra S. y Canale R. (2007). Métodos numéricos para ingenieros. McGraw-Hill.
[13] Larson R. y Edwards B. (2010). Cálculo 1. McGraw-Hill.
[14] Del Valle J. (1986). La ecuación de crecimiento de von Bertalanffy en la determinación de la edad y el crecimiento de árboles tropicales. Revista Facultad Nacional de Agronomía 39(1), 61-74.
[15] Plaza L. (2017). Modelo Matemático para vaciado de tanques. Scientia et technica 22(1), 89-94.
[16] Winsor C. (1932). The Gompertz curve as a growth curve. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 18(1), 1-14.
[17] Plaza L. (2011). Modelo matemático de Gompertz, para el crecimiento de aves. Caracterización. En III Congreso Formación y Modelación en Ciencias Básicas. Medellín, Colombia.

C 8

Proyectos Pedagógicos de Modelación: Un contexto para la producción de sentidos y significados matemáticos en el aula

Fabián Arley Posada-Balvin[1]
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil

Es probable que en este momento por lo menos un estudiante se esté preguntando: *¿por qué debo estudiar las matemáticas que me están obligando a aprender en la escuela?* Parece una pregunta fácil de responder, pero una explicación plausible que ayude a minimizar el sentimiento de angustia que oculta no siempre es simple. Algunas respuestas son: *todos los días utilizamos las matemáticas*; *la tecnología no podría existir y avanzar si no fuera por las matemáticas*; *las carreras universitarias más importantes en la actualidad necesitan de las matemáticas*, y comúnmente se hace énfasis especial en el valor utilitario de la matemática. No se puede negar que el conocimiento matemático debe tener propósitos claros que justifiquen su aprendizaje, pero no deberían centrarse únicamente en su carácter útil.

Cuando así se hace, sea porque se enseñe considerando que será aplicada a la *vida real* (problemas cotidianos o de otras ciencias), o porque se recurre a esos problemas como útiles para enseñar matemática, suele pasarse por alto que las matemáticas escolares no se constituyen bajo los mismos principios epistemológicos que la matemática practicada en la *vida real*. Por ejemplo, en la suma 3+4, aunque la escuela afirme que el resultado matemático siempre es 7, cuando en la *vida real* el 3 representa cantidad de manzanas y el 4 de gatos, no es posible determinar el 7 sin intervenir en su significado. Esto quiere decir que la matemática escolar y la matemática que se práctica en la vida real, aunque tengan aspectos en común, no responden necesariamente a los mismos intereses, no se asimilan bajo los mismos significados ni se constituyen bajo los mismos procesos de legitimación.

Una mirada alternativa al carácter utilitario de la matemática, que puede ayudar a pensar la necesidad de aprenderla en la escuela, es considerar que el conocimiento matemático se configura como una manera sistemática de organización de las diversas actividades humanas, de la misma manera como lo haría otro tipo de conocimiento y, a partir de esa consideración, asumir que todas las personas deberían tener derecho a participar intencionalmente de las consecuencias que emergen de tal organización, principalmente cuando se transforman en instrumentos con los que se modifican las condiciones del mundo.

Por ejemplo, en la necesidad de estudiar el comportamiento de transmisión de una enfermedad viral que sigue parámetros de crecimiento, el concepto matemático de función exponencial podría ayudar a organizar las ideas importantes relativas a esa situación, con el potencial de transformarse en un instrumento para combatirla.

En ese caso, al tomar la función exponencial como parte de la matemática escolar, uno de los papeles de la escuela sería favorecer comprensiones de la situación, ayudar a construir alternativas de acción medidas por ese instrumento matemático y en correspondencia con el fenómeno, analizar las posibles transformaciones del problema a partir de los diferentes usos del instrumento y estudiar sus consecuencias. En otras palabras, favorecer la producción de sentidos y significados no solo del conocimiento matemático utilizado como instrumento, sino también de la actividad humana que organiza.

[1] Contacto: *fabian.balvin@ufrn.br, fapoba@gmail.com*

Al colocar la atención en la producción de sentidos y significados para el conocimiento matemático al interior de las diferentes prácticas sociales en que las personas se ven involucradas: cotidianas, científicas, políticas, religiosas, artísticas, inclusive al interior de la misma matemática, se está apelando a su valor funcional (no necesariamente utilitario), ya que la manera como la matemática funciona en cada uno de esos contextos depende de los significados producidos. De ese modo, la escuela debería crear alternativas pedagógicas favorables a la producción colectiva de sentidos y significados para el conocimiento matemático, en la medida que estudiantes y profesores participan de nuevas experiencias en las que se les permita atribuir funciones a la matemática que encuentran (o crean) de acuerdo con el tipo de contexto.

Una de esas alternativas pedagógicas es la Modelación Matemática MM que, para diferentes autores, ofrece buenas posibilidades al desarrollo de la matemática escolar [1-9]. Entre las perspectivas que se encuentran en la literatura [10], este trabajo se enfoca en la que proponen Borba y Villarreal [11] y Malheiros [12], quienes asumen a la MM como un *ambiente de aprendizaje de la matemática* que hace parte de un proceso pedagógico más amplio, denominado Proyectos Pedagógicos de Modelación PPM. Se trata de una propuesta que pretende involucrar a los estudiantes en la construcción de proyectos, cuya temática se elige colectivamente a partir de sus propios intereses. Una vez elegida son orientados a delimitar el campo de estudio, a formular, por lo menos, una situación problemática en el campo delimitado, a producir argumentos para intentar responder la situación formulada y presentar resultados del proceso. Del conjunto de acciones realizadas durante el proceso, algunas tienen el propósito de generar condiciones para el *tratamiento matemático* de las situaciones problema formuladas, siempre que, por las características del proyecto, así lo necesite o lo permita.

El propósito de este capítulo es presentar algunas discusiones relativas a los caminos trazados durante una experiencia realizada con un grupo de estudiantes de educación superior (Biología y Ecología), de una universidad brasileña, mientras desarrollaban PPM como tarea en un curso de cálculo y la manera cómo fue posible producir sentidos y significados matemáticos en ese contexto. Aunque, por la íntima interconexión, cada momento del proyecto es importante para tal propósito, el enfoque principal son las acciones realizadas en el momento que se hace explícito el tratamiento matemático; es decir, en las acciones orientadas a la modelación matemática desarrollada por el grupo de estudiantes, cuando intentan responder las situaciones problemáticas formuladas. Estas ideas se discuten a partir de uno de los proyectos desarrollados.

1. METODOLOGÍA

1.1 Identificación de la situación: Sobre los Proyectos Pedagógicos de Modelación PPM

La Modelación Matemática orientada a prácticas de aula se desarrolla principalmente mediante lo que Antonius et al. [13] denominan *actividades de modelación* o, en términos de Villa-Ochoa et al. [14], *tareas específicas de modelación* que, de acuerdo con estos últimos autores *se configuran para atender las necesidades de formación de los estudiantes en su contexto educativo*. Esto quiere decir que cada tipo de tarea, además de condicionar el papel de los diferentes actores involucrados en ella, pone en evidencia los mecanismos de acción e interacción deseados y los propósitos de formación esperados. De las alternativas de tareas presentadas por estos autores, las más representativas en el aula son las que proponen a los estudiantes situaciones problemáticas, en las que se puede aplicar el conocimiento matemático previamente aprendido o que puedan motivar el aprendizaje de nuevos conceptos.

Es el caso, por ejemplo, de las tareas denominadas como *enunciados verbales* y de *uso y análisis de modelos* [14]. Esta forma de utilizar la Modelación Matemática, además de resaltar el hecho de que en la composición estructural de los problemas, situaciones o fenómenos que serán modelados, deben aparecer los conceptos matemáticos aprendidos o por aprender, genera la sensación de que existe una relación directa entre tales situaciones y los contenidos curriculares establecidos por la institución educativa.

Para Borba y Villarreal [11] y Borba [3, 4] esa forma de trabajo en clase de matemáticas está más próxima a una perspectiva de resolución de problemas que de modelación. Interpretando estos autores, uno de los valores didácticos, pedagógicos y cognitivos más importantes que la modelación matemática puede aportar a los contextos escolares, tiene que ver con la posibilidad de entenderla como un espacio pedagógico, en el que se pueden construir nuevos significados para el conocimiento matemático en correspondencia con otros tipos de conocimiento.

De esa manera, atendiendo a movimientos pedagógicos que tengan en cuenta realidades tecnológicas y culturales contemporáneas, estos autores proponen considerar a la modelación como un espacio pedagógico amplio que les ofrece a los estudiantes ser protagonistas, no solo en la resolución de los problemas propuestos por el profesor, sino también permitirles la oportunidad de que formulen los problemas que deberían ser resueltos según sus propios intereses, mientras se toma a la Modelación Matemática como una de las diversas maneras de tratar esas problemáticas.

En otras palabras, para fines pedagógicos, el proceso de modelación podría ser interpretado y desarrollado en términos de proyectos abiertos, denominados PPM[2], en los que se incluya como uno de sus componentes formular problemas de interés del estudiante, no únicamente solucionar los problemas propuestos por el profesor. De ese modo, el énfasis principal se coloca en el desarrollo de un proyecto, en el que modelar aparece potencialmente como uno de los momentos. La intención es crear un espacio pedagógico para el desarrollo de prácticas análogas a las que realiza un investigador.

En la práctica, la tarea de producción PPM comienza con una *invitación*[3] del profesor para que los estudiantes organizados en pequeños grupos: 1) seleccionen un tema de interés colectivo, 2) planteen, por lo menos, una situación problemática emergente del tema de elegido, 3) estructuren argumentos para intentar responder los problemas planteados o preguntas formuladas, y 4) escriban un informe en diferentes formatos (escrito, audiovisual, ejecutable) que dé cuenta sintética del proceso desarrollado. El principal desafío es generar condiciones para que en medio de este proceso se torne posible, necesario, deseable o importante el desarrollo de prácticas matemáticas que funcionen como modelo matemático.

Eso quiere decir que, en el contexto de un PPM, una parte de las acciones realizadas puede estar orientada al tratamiento matemático de los problemas formulados, siempre que, por las características del proyecto, así se necesite o se permita. Tal posibilidad se torna en un desafío para el profesor, pues como orientador principal del proceso juega un papel fundamental para incentivar a los estudiantes, mientras les ofrece alternativas conceptuales que no siempre hacen parte del plan de estudios. Esta situación implica una adecuada dosis de flexibilidad académica, disponibilidad de tiempo, paciencia suficiente para atender a los estudiantes en diferentes momentos, determinación para enfrentar lo desconocido, interés por ampliar la cultura general y mucha colaboración institucional.

La intención es construir medios favorables para producir significados matemáticos en el seno de la situación construida y resignificaciones nuevas para el conocimiento matemático, con el que ya se han tenido experiencias en relación con otras situaciones. Es importante resaltar que estos significados se produces o reconfiguran colectivamente en escenarios de discusión, y mediante diferentes artefactos materiales y simbólicos buscando que los estudiantes se tornen protagonistas del proceso. Es una perspectiva de modelación que no pretende hacer énfasis, *a priori*, en los contenidos matemáticos escolares para que se apliquen, o en la que se proponen problemas motivadores para la enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos curriculares específicos. Los significados matemáticos, y por tanto el aprendizaje, se constituye en correspondencia con las situaciones emergentes.

En ese sentido, con el desarrollo de PPM en el aula las metas específicas de aprendizaje superan el dominio de procedimientos algorítmicos matemáticos, esperando, además, desarrollar en los estudiantes habilidades próximas a la formulación, planteamiento, transformación y resolución de problemas; al dominio de distintos recursos y registros de representación; a la construcción de razonamientos explicativos y argumentativos; y, principalmente, la habilidad de interpretar críticamente la información para intervenir en la vida social y política.

[2] Semejante a la Modelación a través de proyectos según la clasificación propuesta por [14].
[3] Tal invitación tiene cierto carácter de obligatoriedad ya que, como sucede con la mayoría de las tareas escolares, está asociada a una condición evaluativa con valoración numérica.

1.2 Desarrollo de la situación: Un ejemplo de PPM en un curso de matemática aplicada[4]

1.2.1 Primer momento: PPM como una de las tareas del curso.

Durante el segundo semestre de 2013 se desarrolló una investigación con un grupo de estudiantes que hacían parte de un curso de matemática aplicada para Biólogos y Ecólogos en formación de la universidad Paulista Júlio Mesquita Filho UNESP, sede Rio Claro estado de São Paulo, Brasil. Al inicio del curso el profesor les informó a los estudiantes que una de las notas del semestre sería mediante el desarrollo de un PPM. Les pidió que en grupos de cuatro a seis estudiantes escogieran una temática de interés colectivo en la que desarrollarían un proyecto compuesto de tres momentos: 1) formulación de por lo menos una situación problema relativa a la temática de interés seleccionada, 2) generar argumentos para responder o resolver la situación problemática formulada, y 3) redactar un texto como síntesis del proceso de investigación y un video (inédito o editado) relacionado con la temática investigada. Al final del semestre los estudiantes debían realizar una presentación oral de los resultados del proyecto, de máximo veinte minutos, para el resto de los compañeros y además debían presentar el video.

En medio del semestre el profesor les iba solicitando a los grupos informes parciales del proceso de investigación que se va configurando en versiones preliminares del informe final escrito y del video. De igual manera, se agendaban reuniones extra clase con cada grupo para realizar asesorías y, dependiendo de la situación, se invitaban otros profesionales a participar del proceso. Previo a la finalización del calendario académico se solicitó la versión final del informe escrito para una evaluación, antes de la presentación oral. Los últimos encuentros regulares del semestre se destinaron a las presentaciones de los resultados finales del proyecto (podían participar e interactuar personas externas). La valoración de este trabajo representaba el 40% de la evaluación total del curso, y se genera a partir de la cantidad y la calidad de las versiones preliminares, la participación en las reuniones de asesoría, la presentación oral y el uso del video.

El profesor propone el desarrollo de PPM como tarea en los cursos de matemática, principalmente cuando los estudiantes son de carreras distintas de matemática puras o licenciatura, pues considera un contexto propicio para estudiar la matemática escolar, en correspondencia con el conocimiento de las otras áreas, por ejemplo, Biología o Ecología, como en esta versión. Se produjeron quince trabajos configurados de acuerdo con las características creadas por los movimientos de cada grupo. Para efectos de describir los diferentes momentos en los que se dinamizó el ambiente de trabajo en el aula, en este trabajo se concentra la atención en uno de los que optó, ya sea por interés o por necesidad, por usar conocimiento matemático como parte de los argumentos para dar respuesta a la situación problema formulada. Es decir, en el proyecto desarrollado por uno de los grupos de Ecología: *¿Es música o es matemática?*

1.2.2 Segundo momento: Elección de la temática y la formulación de la situación problemática

Una vez explicada la tarea y las condiciones para realizarla, los estudiantes configuran el grupo de trabajo. Aunque no siempre se hicieron explícitas, fueron varias las estrategias que los estudiantes utilizaron para hacerlo, porque comprendieron que era una tarea con un nivel de exigencia académicas relativamente alta. En el caso de este proyecto, manifestaron que primó la proximidad afectiva y, de alguna manera, cierta compatibilidad académica previamente reconocida por haber estudiado juntos en varios cursos. El grupo quedó compuesto por cinco estudiantes y la elección por la música como temática principal resultó relativamente fácil, pues dos de los miembros estaban interesados en ese mundo. Inclusive, uno de ellos tenía nociones empíricas sobre teoría e interpretación musical, con inclinación por instrumentos de viento andinos como la zampoña y la flauta. Los tres miembros restantes también manifestaron sentirse interesados por la temática e incluso expresaron conocer personas cercanas, entre familiares y amigos, que estarían dispuestas a ayudarles en la configuración del proyecto.

Luego comenzaron las discusiones relativas a la formulación de una situación problemática relacionada con la temática y, después de un largo proceso y acompañados por el profesor, que en algunos momentos sugirió consultar a otras personas especializadas en el tema principalmente del área de la física y de la

[4] Este ejemplo aparece descrito y analizado en la disertación doctoral del autor [15].

música, construyeron la pregunta problematizadora: ¿de qué forma se da el proceso de transformación de los sonidos en música? A partir de ahí el grupo estructuró el trabajo escrito en cinco apartes:) aproximación histórica de la música, 2) fundamentos físicos del sonido, 3) conceptualización musical, 4) representación sintáctica y semántica de la música, y 5) posibilidades para construir un instrumento de viento andino.

El profesor y los especialistas consultados les ayudaron indicándoles lecturas, estimulando discusiones, proponiendo ideas e incentivándolos para que los conceptos matemáticos hicieran parte estructural del proyecto, junto con los conceptos de la física y la música. En ese momento comenzaron a percibir al conocimiento matemático como una de las posibles formas organizadoras de la actividad humana de producir música. Empezaron a comprender que el conocimiento matemático podía jugar un papel importante en la coherencia teórica del proyecto que acompaña, a diferencia de las experiencias espontáneas anteriores con el tema. Se da entonces un proceso de resignificación del conocimiento matemático y musical en el contexto del PPM.

1.2.3 Tercer momento: Discriminación de aspectos relevantes orientados a la modelación matemática[5]

Aunque desarrollar PPM es una tarea que en sí misma constituye un problema académico para resolver a partir de los tres grandes momentos descritos, solo voy a presentar algunos análisis del momento en el que los estudiantes produjeron los argumentos para intentar solucionar la situación problemática. Un proceso que, por la íntima conexión mencionada, comienza en el mismo momento que se escoge al tema. Puede afirmarse que, si bien es cierto las prácticas matemáticas se van constituyendo paulatinamente con las discusiones realizadas en cada etapa, fue en el momento de construcción de los argumentos para solucionar la situación donde se hicieron más visibles las acciones orientadas a tal fin.

A primera vista, la pregunta problematizadora parece ser una cuestión que no requiere de matemática para ser respondida, sin embargo, a partir de las primeras discusiones la perspectiva fue cambiando. El cambio se dio cuando se les propuso a los estudiantes que a partir de la información recolectada intentaran discriminar posibles aspectos relevantes de la situación de interés, que permitieran una respuesta plausible a la situación problema. Después de percibir que con lo que sabían hasta el momento no lograban determinar tales aspectos relevantes, se les sugirió algunas lecturas y, de manera independiente, buscaron informaciones de diversas fuentes, incluso algunas en formato audiovisual[6]. La información consultada se sintetiza en las siguientes ideas generales que le presentaron al profesor en los encuentros:

1. El sonido es una perturbación (vibración) que se propaga en un medio material.
2. Físicamente, el sonido se trata como una onda mecánica esférica.
3. A partir del movimiento vibratorio de la fuente sonora y trasmitido por algún medio, principalmente el aire, los sonidos se pueden captar mediante mecanismos del oído humano y procesados por el cerebro.
4. El concepto de frecuencia se usa como una medida de las vibraciones, cuya cantidad se da a partir de una unidad de medida normalmente denominada Hertz (número de vibraciones por segundo).
5. Las frecuencias de los sonidos audibles por los seres humanos están entre 20 y 20000 Hz.
6. Las notas musicales son vibraciones con frecuencias particulares en este intervalo audible.
7. Amplitud, período, intensidad, intervalo, andamiento, textura, ritmo, color y timbre, son conceptos que condicionan las características del sonido.
8. En términos generales, la música se puede entender como un complejo arte de combinación controlada de diferentes sonidos.
9. La composición musical depende principalmente de patrones de combinación de acordes a partir de las escalas de notas musicales escogidas.

[5] Las ideas que aparecen en este apartado fueron tomadas del trabajo final escrito por los estudiantes y de la transcripción textual del video grabado durante la presentación oral y posterior discusión general. Aunque puedan aparecer imprecisiones conceptuales relativas a la temática, el interés no son las correcciones, por el contrario, algunas de esos errores sirvieron de análisis cognitivo para mejorar la compresión del proceso de construcción de modelos matemáticos en el contexto de PPM.
[6] Google y YouTube fueron las principales fuentes de investigación consultadas para el desarrollo de todos los PPM.

Para iniciar el proceso de construcción de argumentos, que darían una mínima solución a la situación problemática formulada, los estudiantes identificaron y definieron algunas de *las magnitudes físicas y musicales*, que se tornarían relevantes y para lo cual paulatinamente fueron percibiendo que necesitarían construir un sentido matemático de la situación. Esas magnitudes fueron: 1) longitud de una cuerda, 2) tensión de una cuerda, 3) vibración de una cuerda, 4) sonido emitido por una cuerda vibrante, 5) velocidad (en diferentes medios), 6) tiempo, y 7) textura.

Algunas de esas magnitudes aparecieron de manera explícita y otras implícita, y la mayoría fueron tratadas mediante procesos de cuantificación, por ejemplo, las características físicas del sonido (vibración), además de constitución de formas de correlacionarlas para representar la variación y la combinación armónica de cierto tipo de sonidos (notas). Los estudiantes enfatizaron que tal correlación tenía un fuerte componente de interpretación asociado a ideas de la teoría musical, en particular, ideas de patrones específicos de combinación musical (escalas). Con esos aspectos iniciaron la construcción de modelos matemáticos que les ayudaron a experimentar la sensación estética de la música.

1.2.4 Cuarto momento: Producción de argumentos matemáticos

Con base en los elementos anteriores, los estudiantes mostraron que parte de la complejidad del arte de producir música está en la permanente interconexión de aspectos cualitativos y cuantitativos del sonido, y comenzó a aparecer el concepto de variación y de correlación entre las magnitudes, seleccionadas como dos de los aspectos más relevantes para el análisis. Eso significó entender que no era suficiente una mirada cualitativa de la situación problema formulada, solo era una parte de la estrategia para resolverla, pues el componente cuantitativo también aportaba elementos básicos.

Explicaron, por ejemplo, que en la música el pulso indica *la velocidad* con que se ejecuta un sonido, el ritmo lo que determina *la duración* del sonido o de los silencios, y el intervalo *la distancia* entre dos notas musicales, que a su vez puede estar definida por la medida de ciertas *frecuencias*, dando paso a los acordes que son entendidos como ciertas combinaciones de notas y que deben tener la cualidad de ser armoniosas. A partir de varias discusiones respecto a las formas como se relacionan estos aspectos, se seleccionaron razones y proporciones entre las cantidades. Del mismo modo, el tiempo se configuró como una de las magnitudes implícitas más relevantes, que posteriormente se constituyó como una de las variables independientes o de control.

La relación por razones entre cantidades surgió a partir de la información que los estudiantes encontraron en Internet y discutida en los encuentros de asesorías. Según lo consultado, los académicos de la llamada escuela pitagórica del siglo VI antes de la era común fueron los primeros en registrar un ejercicio sistemático para estudiar la música desde un punto de vista matemático. El ejercicio consistió en comparar sonidos producidos por cuerdas igualmente tensionadas, pero con diferentes longitudes, concluyendo que los sonidos producidos eran cualitativamente armónicos, siempre que tuvieran una relación por cociente entre números enteros, específicamente la relación de $\frac{1}{2}$ (un medio) y $\frac{2}{3}$ (dos tercios).

Esto quiere decir que, al hacer vibrar una cuerda cualquiera de referencia, junto a otra cuya longitud sea la mitad, los sonidos emitidos son acordes armónicos, cuya propiedad se utiliza para construir lo que en música se conoce como *octavas*. De ese modo las notas producidas por cuerdas, que están a una relación de longitud de un múltiplo (o división) de dos, construyen notas octavas, que musicalmente significa tener la misma nota, pero en octavas diferentes. Al hacer lo mismo, pero utilizando la medida de dos tercios de longitud de la cuerda de referencia, se construyen las notas *quintas*. De acuerdo con los estudiantes hasta hoy, en teoría musical estas relaciones son la base para explicar las posibles combinaciones de vibraciones armónicas clásicas y permanecen en la base de caracterización de las escalas musicales diatónicas y cromáticas, con las que se producen la mayoría de los acordes y melodías.

Los estudiantes también explicaron que actualmente esos mismos análisis se realizan mediante relaciones de proporcionalidad entre frecuencias. Esta idea surgió después de consultas en libros, en Internet y en discusiones con un profesor de física, de donde se concluyó que utilizando el concepto de frecuencia de una cuerda vibrante es posible explicar cómo se producen los armónicos con ellas. Este ejercicio ayudó no solo para ampliar su comprensión sobre la relación entre la medida de longitud de la cuerda, la frecuencia de vibración y el sonido que produce, sino también para entender porque con ciertos patrones de combinación de tan solo 12 de estas frecuencias (las 12 notas de la conocida escala cromática o tonalidad occidental) es posible producir la mayoría de la música.

En analogía con los análisis realizados por los pitagóricos, los estudiantes explicaron que se trata de fijar como referencia a una frecuencia arbitraria (por ejemplo, la frecuencia de 440 Hz que representa la nota *FA*) y, a partir de ella, construir cualquier otra nota, lo que implicaría simplemente multiplicar o dividir sucesivamente por $\sqrt[12]{2}$. La manera como se representa esa conclusión fue mediante la fórmula $f_n = 440\left(\sqrt[12]{2}\right)^n$, donde *f* indica la frecuencia que se desea conocer y *n* un número entero que indica el orden de la nota, a partir de la nota de referencia 440 (FA).

Tomando como punto de partida la medida de la frecuencia de cuerdas vibrantes, esta perspectiva moderna sobre producción de notas musicales también se tornó importante para los estudiantes, pues les ofreció la posibilidad de tener un soporte matemático para pensar en la construcción de un instrumento musical de viento andino. Situación motivada por las explicaciones de un estudiante del área de física invitado a una de las reuniones, quien demostró cómo los mismos resultados con cuerdas se puede aplicar a los sonidos producidos cuando el aire pasa con ciertas velocidades por tubos abiertos o cerrados.

La comprensión de los estudiantes al respecto se explica tanto en el informe final escrito como en la presentación oral que, además de describir detalladamente algunos de los argumentos clave para responder a la situación problema planteada, a partir de conceptos y procedimientos matemáticos, ejemplificaron sus ideas con la construcción de un instrumento simple de viento llamado *Didgeridoo*, y estructuraron un proyecto para intentar construir una *Flauta de bambú* y una *Zanpoña*, otro instrumento de viento un poco más elaborado, pero con los mismos principios. Para esto explicaron que, para obtener una determinada nota, en este caso se debe tener en cuenta el largo del tubo y la velocidad del soplo, es decir, una frecuencia patrón específica. Para un tubo abierto como Didgeridoo o flauta, si la longitud es constante, la frecuencia del sonido es directamente proporcional a la velocidad del soplo; o si la velocidad es constante, es inversamente proporcional al largo del tubo. Para soportar esta explicación se apoyaron en la fórmula $f = m\frac{V}{L}$, donde *f* es frecuencia, *V* velocidad del soplo, *L* longitud del tubo y *m* una constante numérica.

2. EVALUACIÓN EN EL CONTEXTO DEL PPM

Al cumplir el papel de tarea de un curso de matemática, a los PPM se les asigna un valor numérico, tradicionalmente llamado nota, pero por sus características explicadas, en que no se plantea un objetivo específico de aprendizaje matemático escolar *a priori*, es probable que los contenidos curriculares de matemática no aparezcan en las condiciones esperadas por la escuela, entonces, la evaluación tiene un carácter fundamentalmente formativo, pues cada orientación del profesor tenía como propósito evaluar las condiciones de desarrollo del proyecto e intervenir para construir la necesidad de usar conocimiento matemático. Eso quiere decir que aprovecha cada etapa del proceso para ponderar el potencial del conocimiento matemático, caracterizar las funciones que puede experimentar en la situación problema formulada y persuadir a los estudiantes para que lo usen en relación con los sentidos y los significados que se puedan constituir.

A partir de esos aspectos se producen y evalúan colectivamente los diferentes tipos de sentidos y de significados que se le atribuye a la matemática, en relación con los otros conocimientos que componen el proyecto. En ese sentido la pertinencia, la certidumbre, la validez y la profundidad del conocimiento matemático se evalúan por niveles auto regulables en el mismo proceso. Situación que se aprovecha mejor cuando en el proyecto se explicita intencionalmente la importancia o la necesidad de usar la matemática, como parte estructural de los argumentos que pretenden responder a la situación problema. Se podría decir que la nota final asignada deja de ser tan importante, para dar mayor espacio a la evaluación orientada a formar sentidos y significados matemáticos *in situ*.

A partir de los argumentos matemáticos construidos y presentados para responder las situaciones problema formuladas, el profesor las aprovecha para generar un debate pedagógico en torno a ellos, sea porque eventualmente hayan sido trabajados en otros momentos del curso o porque hayan sido tema de otras materias de matemática cursadas. Es conveniente enfatizar que este aprovechamiento depende principalmente de los intereses, las habilidades y las estrategias, que el profesor utiliza para producir conexiones rápidas y profundas entre los diferentes conceptos matemáticos vinculados a los proyectos con los contenidos curriculares. Para el caso de este proyecto, en que los conceptos matemáticos emergieron en relación con conceptos musicales, el profesor resaltó tres que previamente habían sido objeto de estudio en este y otros cursos: *razones*, *proporcionalidad* y *función lineal*.

El primero fue referenciado por los estudiantes en la explicación que dieron sobre cómo los pitagóricos conectaron los sonidos producidos por cuerdas a ciertas fracciones, para que se tornaran sonidos armónicos. Para discutir tal conexión se analizaron dos comentarios históricos relacionados con el significado de número en la época de esos matemáticos: 1) para los pitagóricos el *ser contable* era una condición fundamental de las cosas en el mundo, y para ellos todo en el universo se rige por propiedades numéricas, teniendo en cuenta, 2) que para la época solo eran considerados números aquellos que actualmente se reconocen como números naturales. Por eso las relaciones *de un medio*, *dos tercios, tres cuartos* etc., presentadas por los estudiantes para describir la relación de cuerdas con sonidos armónicos, realmente no representaban números, sino razones entre cantidades o simplemente relaciones relativas entre dos cantidades que, en términos generales, se denominan *razones*.

Una de las dificultades que los estudiantes expresaron en varios momentos del proyecto se relaciona con el uso del concepto matemático de *razón* asociado a conceptos musicales. Por ejemplo, el concepto de *octavas* en la música se asocia a la razón de *un medio*, que indica la relación entre longitudes de dos cuerdas con la misma tensión, y las *quintas* musicales se asocian a una razón de *dos tercios*. En este contexto las fracciones un medio y dos tercios son formas de expresar la relación por cociente entre dos números naturales, por eso indican razones, mientras que octavas y quintas no significan fracciones, sino *unidades* de medida musical compuestas por ocho y cinco tonos respectivamente.

Con respecto a los conceptos de proporcionalidad y función lineal discutidos en el proyecto y tomando como referencia el tratado moderno de la música, es decir, a partir del concepto físico de frecuencia, el profesor explicó que no solo indican relaciones bajo una determinada regla entre cantidades, sino también maneras de expresar cómo varían conjuntamente. Por ejemplo, la función lineal se puede comprender como un desdoblamiento de variaciones y relaciones directamente proporcionales simples, que indican valores constantes para los cocientes correspondientes entre las diferencias de los valores de las variables relacionadas o entre los valores directamente, y que se pueden representar en la forma $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = \mu$ y $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \mu$ respectivamente, generalizado en la forma $f(x) = \mu x$.

Para producir nuevos significados sobre esos conceptos matemáticos, el profesor aprovechó el interés de los estudiantes por construir un instrumento musical andino de viento y la discusión dada en el proyecto con la expresión simbólica $f = m\frac{V}{L}$, en la que mostró la relación entre la frecuencia de vibración f del aire que pasa por un tubo de longitud L a una velocidad V; también explicó que otra manera de interpretar esas expresiones, inicialmente denominada por ellos como *fórmula*, podía ser a partir del concepto de función lineal, si la longitud L del tubo es constante y la velocidad varía, o racional, si la que es constante es la velocidad del aire soplado y lo que varía es la longitud del tubo.

Para generar un espacio se diálogo en el que los significados se construyeran colectivamente, el profesor propuso la pregunta: ¿cómo podemos utilizar ese resultado matemático en la construcción de los instrumentos de viento? A partir de diferentes reflexiones, comentarios y respuestas se llegó a la conclusión plausible para todos de que *con ese resultado se podrían determinar maneras de producir notas musicales, tomando en cuenta que se pueden variar las longitudes del tubo y la velocidad del soplo.* Por ejemplo, si la longitud del tubo es constante, como es el caso del *Didgeridoo* y de la *Zampoña*, la frecuencia (notas musicales) dependen de ajustar su velocidad de forma directamente proporcional, es decir, para producir notas de frecuencia más altas (las agudas) habría que soplar más fuerte, mientras que soplos de velocidad menor producen frecuencias menores (notas graves). Ahora bien, con soplos de velocidad constante se podrían conseguir notas musicales diferentes modificando la longitud del tubo, como es el caso de las *Flautas* de bambú, en las que se pueden tapar o destapar los orificios.

3. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Para discutir elementos relativos a la producción de sentidos y significados matemáticos en el marco de los PPM, se pueden plantear ciertos aspectos que relacionan al proceso de modelación matemática con las funciones cognitivas que los modelos tienen como organizadores de la actividad humana. Imaginemos alguna acción realizada por determinada persona con la intención de transformar algo o de producir cierto resultado. Este tipo de acciones, realizadas de manera intencionada, normalmente requieren el uso, también intencionado, de algún tipo de *instrumento* que le sirva de mediador.

Supongamos, por ejemplo, que se requiere *partir una manzana*, para lo cual se puede utilizar *un cuchillo*. La acción de partir y el instrumento utilizado para realizarla (el cuchillo -podría ser otro instrumento-) tienen una íntima e indisoluble relación condicionada por el carácter *intencional* con la que fue o será realizada la acción. La idea general de *modelación* parte de esa relación, ya que el *instrumento* cuchillo no solo indica el medio para realizar la *acción intencionada* de partir, sino que también y simultáneamente se puede comprender como un *representante* de tal acción.

Por otro lado, un instrumento no solo sirve para realizar un tipo de acción, por ejemplo, el cuchillo, además de servir para partir, se puede utilizar para realizar acciones como rasgar, chuzar, pinchar, raspar etc., condicionando las maneras particulares de ejecutar esas acciones. Eso quiere decir que no solo representa la acción de partir, también puede representar muchas otras. Pero, además, aunque se tenga un conjunto de posibilidades de acción representadas en tal instrumento, también se pueden imaginar nuevas formas de acción, con nuevas intenciones y con el objetivo de obtener nuevos resultados. Se crea así un movimiento permanente de acciones que se realizan, posibles acciones realizables y otras tantas que, inclusive, no se pueden imaginar en este momento, pues se podrían realizar hasta sin intención (pero estas no son de interés por el momento).

Algo similar se puede decir de las palabras y otras formas simbólicas, por ejemplo, la palabra cuchillo, es decir un *cuchillo simbólico* que se torna también en *instrumento,* pero esta vez *cognitivo*, ya no para cortar, raspar, partir como se haría scon el cuchillo material, sino con el que se puede *representar* cognitivamente ese conjunto de acciones, e imaginar innumerables nuevas posibilidades.

En esos términos los artefactos materiales y simbólicos producidos por los seres humanos para sobrevivir en el mundo son, al mismo tiempo, medios para transformar la naturaleza, pero también fines de y para esas transformaciones. Se puede decir que tales artefactos *representan* material y cognitivamente formas de acciones intencionadas, construidas históricamente y legitimadas por mecanismos de institucionalidad. En las prácticas cotidianas se utilizan para apropiarse del mundo, para modificarlo y para constituir a los humanos como seres sociales y culturales.

La palabra clave es *representar*, pues los artefactos se pueden comprender como *representantes* de lo que se hace, de lo que se quiere y de lo que se espera y, por eso, se pueden asumir como *modelos de y para* los diferentes *modos de acción e de intensión* humanos, es decir, *de prácticas*. En estos términos un modelo no es simplemente un reflejo o copia de algún estado de cosas o ideas, sino, más allá de esto, representaciones de modos de prácticas adquiridas, de modos de prácticas en prospectiva (que serán realizadas) o de modos de prácticas imaginarias.

En estas condiciones *un modelo* tiene como principal característica ser *un artefacto* escogido o construido deliberadamente, no solo para *representar prácticas intencionadas*, sino también para modificar las condiciones de comprensión de las *prácticas modeladas*. Por lo tanto, la ganancia que se obtiene al modelar es extender las posibilidades de comprensión de los humanos, de transformación, de tratamiento, de proyección y de control de las prácticas modeladas a través de los mecanismos ofrecidos por las prácticas que las modelan.

Se desprende entonces que todo proceso de modelación, es decir, de construcción o elección de modelos, implica tener por lo menos dos sistemas que indican formas particulares de prácticas: uno de interés, *el modelado*, y el otro que lo representa, *el modelo*. Determinar cuál es cuál depende del potencial que el *sistema modelo* tiene para representar las *propiedades consideradas relevantes* del *sistema modelado*, de acuerdo con los intereses e intenciones que tienen los sujetos que lo construyen o eligen.

Es importante resaltar que en la frase *construir o elegir modelos* la *o* es inclusiva, pues los procesos constructivos de poner en común dos sistemas, a partir de determinados aspectos relevantes, normalmente se realizan con base en la apropiación electiva de modelos previamente construidos para representar otros sistemas.

La mayoría de las prácticas científicas y algunas artísticas deben su desarrollo principalmente a la construcción de modelos. Uno de ellos, con peso histórico importante, son los matemáticos, ya que favorecen un tratamiento cuantitativo. Para autores como Obando et al. [16], la matemática *representa* un tipo especial de práctica social, denominadas *prácticas matemáticas* que indican:

> *ciertas formas de acción de los individuos, en sus relaciones entre sí, y con el medio, a través de los procesos de objetivación tanto de la cantidad y la forma -por ejemplo, medir, contar, comprar, vender, intercambiar, construir, fabricar, estimar, describir, localizar-, como de la variación de una u otra -movimiento, cambio, comparación, transformación, y otras.*

Estas prácticas se materializan principalmente mediante el uso de artefactos de naturaleza simbólica y, según Duval [17, 18], mediante sistemas semióticos de representación, o a través de formas semióticas de objetivación [19]. En estas condiciones se podría decir que en la medida en que se hacen *afirmaciones, declaraciones, suposiciones y se ejecutan acciones* en el seno de ciertas prácticas sociales: científicas, artísticas, cotidianas, económicas, religiosas, de la propia matemática, etc. con la intención de organizarlas, transformarlas, controlarlas mediante procesos de cuantificación y de formación de patrones de variación y regularidad, usando *justificadamente* diferentes registros semióticos de representación, se está modelando matemáticamente.

Cuando este proceso se lleva a contextos educativos con la intención pedagógica de producir *significados matemáticos*, es importante crear condiciones para que además de realizar cálculos, hacer operaciones y generar afirmaciones matemáticas mediante el uso de diferentes registros de representación semiótica, también se puedan construir argumentos favorables para justificar dialógicamente tales cálculos, operaciones y afirmaciones [20].

Es de ese modo que la tarea constituida por el ambiente pedagógico PPM se torna en una oportunidad para la producción de sentidos y significados matemáticos. Incentivando a los estudiantes desde el mismo momento de la elección de la temática, y de la formulación de la situación problemática, a generar afirmaciones y argumentaciones impregnadas de nuevos significados matemáticos, imbricados al campo fenomenológico de la formulación y resolución de situaciones problema.

En el caso del proyecto presentado en este capítulo el proceso se realizó confrontando el campo conceptual de la física (modelo físico de la situación) con el sistema de representación matemático (modelo matemático), para luego usarlos como argumentos a la pregunta problematizadora: ¿de qué forma se da el proceso de transformación de los sonidos en música? Tal vez tenga sentido decir que lo producido en ese momento fue un *modelo musical* que, eventualmente, produce una transformación en la manera sensible de apreciar la música de quienes participaron en el proyecto.

Cuando el modelo matemático fue usado para explicar el comportamiento físico del sonido y éste a su vez dio soporte a la explicación del comportamiento del modelo musical, se creó un contexto no solo para la producción de nuevos significados matemáticos, sino también físicos y musicales, que alcanzaron un nuevo nivel cuando se usaron para imaginar posibilidades de construir un instrumento musical de viento. En otro momento, este contexto se podría aprovechar, por ejemplo, para producir nuevos sentidos y significados a partir de la relación histórica del concepto matemático de función con el fenómeno físico de una cuerda vibrante [21], y en la construcción de otros instrumentos musicales en diferentes épocas y culturas.

4. CONCLUSIONES

El propósito principal de este capítulo era discutir la manera cómo el desarrollo de PPM propicia el proceso de producción de sentidos y significados matemáticos, en la medida que se construye, por lo menos, un modelo matemático de la situación. Para eso se presentaron ideas relativas al camino trazado por un grupo de estudiantes de educación superior (Biología y Ecología) que cursaban una materia de cálculo. Se presentó cada momento del proceso explicando, a manera de ejemplo, el desarrollo de uno de los proyectos y una síntesis de la forma como la matemática se fue asociando con otros tipos de conocimientos (la física y la música en este caso), para producir nuevos significados. Para finalizar la discusión y tal vez abrir nuevas posibilidades de debate, resalto algunos aspectos relevantes sobre la relación entre la modelación matemática y la producción de sentidos y significados en el contexto de PPM, cuando se desarrolla como tarea escolar.

Dado que las acciones desarrolladas en los PPM se orientan intencionalmente a la producción colectiva de conocimiento en contextos de clase, constituye un tipo de tarea que no está totalmente regido por un plan de estudios prestablecido, sino por reglas emergentes del movimiento en cada proyecto y de los intereses de cada actor involucrado (el de los estudiantes en primera línea). Esas características de los PPM generan algunas dificultades al ponerlos en práctica en el aula, de las que se mencionan tres que se consideran importantes:

1. El énfasis que hacen los académicos proponentes para que sea una actividad escolar colectiva. Para ellos, la formación de valores pedagógicos, como la capacidad de planificación, la evaluación crítica del mundo circundante, la construcción creativa de procesos de comunicación, el respeto por el otro y el trabajo en equipo, son tan importantes como aprender matemáticas para actuar éticamente en sociedad y se alcanzan de mejor forma si la escuela incentiva a los estudiantes a trabajar en equipo.

2. La demanda institucional de cumplir los contenidos curriculares preestablecidos y con los diferentes mecanismos de presión para que se atiendan en tiempos específicos y en igualdad de condiciones para todos los estudiantes. No es nuevo que tal demanda se satisface mediante la estrategia de listar un conjunto de conceptos y técnicas, que se asumen como obligatorios, en muchos casos solo porque así lo dicta la tradición. Si el tema fuera ecuación, por ejemplo, y ninguno de los proyectos producidos requirieran de esa temática, es posible que el profesor se viera obligado a tener que priorizar otras metodologías. En otras palabras, los PPM se pueden ver como una manera de transgredir la rigidez curricular y, en la medida de lo posible, una forma de complejizarlo.

3. La alta demanda de recursos que la estrategia de PPM implica en términos de tiempo, de tecnologías y de personas especializadas en los variados temas que pueden surgir, según las temáticas escogidas por los estudiantes.

Ante esas posibles dificultades para el desarrollo de PPM se pueden crear oportunidades positivas, como comenzar a pensar en procesos de flexibilización curricular, en que el aprendizaje de las matemáticas pueda ser sustituido por la producción de sentidos y significados matemáticos en la medida que sirven de apoyo no solo para la formulación de situaciones problemas, sino también para la construcción de argumentos favorables para darles respuesta. Para determinar la necesidad o la pertinencia de asumir una mirada relativa a procesos de matematización que sirvan de modelo, y dependiendo de las características del proyecto estructurado, se construyen argumentos colectivos. Para que esto se logre en el contexto del desarrollo de los PPM se debe generar una relación interactiva entre profesor y estudiante, diferente a la de alguien que enseña (profesor) y otro que aprende (estudiante).

Cuando el estudiante asume un papel protagónico, tanto en la elección del tema como en el proceso de formulación de la situación problema y en la consecuente construcción de argumentos de solución, se crean condiciones para que se ubique entre aquello que parece saber y lo que aun ignora, pero que le gustaría estudiar. A ello se podría llamar *motivación*, en términos de hacer que se apropie de algo que antes le era ajeno. Así motivado, se puede incentivar a construir buenas preguntas, a formular proyectos y a construir argumentos para la solución. De este modo se recorre el camino de la formación de un pensamiento crítico.

En convergencia con ese propósito el desarrollo de PPM en el aula pretende ir más allá de la producción de sentidos y significados matemáticos en contexto, aspirando a avanzar hacia el supra propósito pedagógico de hacer posible la proclamada necesidad de mantener viva la curiosidad; de hacer de la ignorancia y de la inconformidad aspectos movilizadores hacia cuestionar, indagar y dudar con sentido; de aprender a construir estrategias para gestionar las correlaciones con el mundo social y material, y, por esa vía, crear las bases para formar ciudadanos con suficiente autonomía intelectual. Propósitos que deben ser iniciados desde los primeros años de escolaridad.

A primera vista y por las características de muchos contextos escolares que, en general, se rigen por planes de estudio con metas, metodologías y resultados esperados rígidos, proponer el desarrollo de PPM en clase de matemática parece una tarea inviable. Sin embargo, y a manera de ejemplo, en los siguientes enlaces se encuentran experiencias realizadas en escuelas públicas de educación básica brasileña. En *https://ufmg.br/comunicacao/publicacoes/boletim/edicao/2077/matematica-para-a-vida* se describe el desarrollo de un PPM por estudiantes de séptimo grado en una escuela pública del estado de Minas Gerais, y se discuten aspectos relativos a los valores pedagógicos que pretende formar. En *https://www.youtube.com/watch?v=rPWwibLp5tc&feature=youtu.be* se complementa esta descripción y se explica, en formato audiovisual (video), la manera cómo vivenciaron el proceso los estudiantes y el papel del profesor durante el trabajo.

De igual manera, en [15] se describe el desarrollo de otros tres proyectos que surgieron en el mismo curso de este capítulo. Otras experiencias son la del grupo de Educación Matemática de la universidad de Córdoba, Argentina (http://edumat.famaf.unc.edu.ar/-) y la del grupo GPIMEM de São Paulo, Brasil (https://igce.rc.unesp.br/#!/gpimem-), que muestran posibilidades de actuación en diferentes niveles escolares bajo perspectivas similares a la de PPM presentada en este capítulo.

REFERENCIAS

[1] Bassanezi R. (2002). Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: Uma nova estratégia. Contexto.

[2] Blum W. et al. (2007). Modelling and aplications in mathematics education. Springer.

[3] Borba M. (2009). Potential scenarios for Internet use in the mathematics classroom. ZDM Mathematics Education 41, 453–465.

[4] Borba M. (2011). Can modelling be taught and learnt? -A commentary-. En Kaiser G. et al. (Eds.), Trends in teaching and learning of mathematical modelling. Springer.

[5] Kaiser G. et al. (2011). Trends in teaching and learning of mathematical modelling. Springer.

[6] Lehrer R. y Schauble L. (2007). A developmental approach for supporting he epistemology of modeling. En Blum W. et al. (Eds.), Modelling and applications in mathematics education (pp. 153-160). Springer.

[7] Lesh R. et al. (2010). Modeling students' mathematical modeling competencies. Springer.

[8] Meyer J. et al. (2011). Modelagem em educação matemática. Autêntica.

[9] Stillman G. et al. (2013). Teaching mathematical modelling: Connecting to researsh and practice. Springer.

[10] Araújo J. (2010). Brazilian research on modelling in mathematics education. ZDM Mathematics Education 42, 337-348.

[11] Borba M. y Villarreal M. (2005). Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation. Springer.

[12] Malheiros A. (2007). Modelagem matemática e pedagogia de projetos: Possíveis interseções. Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte, Brazil.

[13] Antonius S. et al. (2007). Classroom activities and the teacher. En Blum W. et al. (Eds.), Modelling and Applications in Mathematics Education. Springer.

[14] Villa-Ochoa J. et al. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemática. Espaço Plural, XVIII(36), 219-251.

[15] Posada-Balvin F. (2015). Práticas algébricas no contexto da modelagem compreendida como proposta pedagógica. Disertación doctoral. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

[16] Obando G. et al. (2014). Filosofía, matemáticas y educación: Una perspectiva histórico-cultural en educación matemática. Revista Científica Universidad distrital 3(20), 72-90.

[17] Duval R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle.

[18] Duval R. (2017). Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations. Springer.

[19] Radford L. et al. (2008). Semiotics in mathematics Education: Epistemology, histoy, Classroom and culture. Sense Publishers.
[20] Posada-Balvin F. y Borba M. (2019). Práticas algébricas no contexto de projetos pedagógicos de modelagem. Boletim de Educação Matemática 33(6), 45-66.
[21] Youschkevitch A. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. Archive for History of Exact Sciences 16(1), 37-85.

Los autores

Olga Emilia Botero Hernández

Magíster en Docencia de las Matemáticas. Su línea de investigación es la Didáctica de las matemáticas. En sus trabajos de investigación ha discutido acerca de los procesos para la enseñanza de las fracciones y de las estructuras multiplicativas en la educación básica, al igual que las diferentes formas de acercar a los estudiantes a la comprensión del sistema de numeración decimal y las estructuras aditivas. Es profesora en el sector privado en Colombia en los niveles de básica y media, inicialmente en el Colegio Calasanz y en la actualidad en el Colegio Gimnasio Los Pinares. A nivel universitario se ha desempeñado como profesora de cátedra en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, orientando cursos de didáctica de la aritmética y como asesora de trabajos de grado en la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas y Pedagogía Infantil.

En investigación participa en proyectos que se relacionan con la enseñanza de las operaciones básicas y con la formación continuada de profesores de Matemática. Ha participado como ponente en la modalidad de talleres en eventos de Educación Matemática a nivel nacional e internacional. Ha dirigido tesis de pregrado en los temas de enseñanza-aprendizaje de la matemática, especialmente de las operaciones básicas y el sistema de numeración. Ha participado como jurado en comités de evaluación. Actualmente es miembro del grupo de investigación MATHEMA-FIEM de la Universidad de Antioquia y participa en el Seminario Repensar las Matemáticas en México.

Alexander Castrillón-Yepes

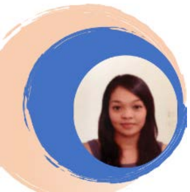
Licenciado en Matemáticas y Física, y estudiante del programa Doctorado en Educación en la línea Educación Matemática, de la Universidad de Antioquia. Ha sido investigador en proyectos de investigación e innovación en educación, ha participado en diferentes eventos nacionales e internacionales y cuenta con publicaciones relacionadas con el uso de las tecnologías, la modelación, el trabajo interdisciplinar y la formación inicial de profesores de matemáticas.

Ha promovido y participado de la estrategia de Semilleros de Investigación en la Universidad de Antioquia, donde coordinó la Red de Semilleros de Investigación RedSIN UdeA. Actualmente, es coordinador del Semillero de Investigación MATHEMA, miembro de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática RECOMEM, de Juventud CLAME y del grupo de investigación MATHEMA-FIEM.

Julián Andrés Galeano-Ocampo

Licenciado en Matemáticas y Física. En su tesis discutió a cerca de posturas críticas de estudiantes de secundaria, generadas a partir de un ambiente de Modelación Matemática. Sus intereses investigativos se centran en la Educación Matemática Crítica en educación media.

Actualmente, se desempeña como profesor de Matemáticas y Física en educación básica y en educación media (grados 8 - 11) en el Colegio San José Manyanet, una institución educativa de carácter privado ubicada en Itagüí, Antioquia. Ha participado en espacios de formación e investigación como semilleros de investigación y en el grupo de investigación MATHEMA-FIEM.



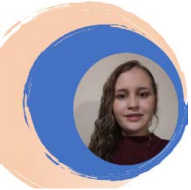
Lennys Gaviria-Quinta

Es estudiante de Licenciatura en Pedagogía Infantil, en su tesis discute acerca de cómo la confianza, el reconocimiento y la empatía fortalecen el desarrollo del pensamiento matemático. Sus intereses de investigación se centran en la línea de educación matemática, la Modelación Matemática y la enseñanza-aprendizaje en Educación Primaria. Ha participado en eventos internacionales y como auxiliar en proyectos de formación para profesores. Actualmente, es miembro del grupo de investigación MATHEMA-FIEM de la Universidad de Antioquia.

Ana Carolina González-Grisales

Licenciada en Matemáticas y Física, y estudiante del programa de Maestría en Educación, modalidad virtual de la Universidad de Antioquia, en la línea de Educación Matemática. Su investigación se centra en el estudio de la estrategia de gamificación en la educación virtual y el diseño de instrumentos para favorecer la elección de este tipo de recursos para las clases de matemáticas.

Está vinculada al grupo de investigación MATHEMA-FIEM, en el cual lleva a cabo su investigación. Ha participado en eventos académicos nacionales e internacionales y en estrategias de formación como Jóvenes investigadores y Semilleros de Investigación. Actualmente, es profesora del sector oficial en Colombia en el nivel de formación básica y media de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Medellín, Antioquia.



Ana María Jiménez Echavarría

Magíster en Recursos Educativos Digitales Aplicados a la Educación y Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Sus intereses de investigación se encuentran en el campo de la Educación matemática en primaria y la enseñanza de la numeración. Ha direccionado su reflexión especialmente al uso de materiales didácticos para la enseñanza del sistema de numeración. En términos investigativos, ha participado en proyectos relacionados con la enseñanza-aprendizaje de la numeración en estudiantes de Educación Primaria.

Es profesora de primaria en el área de matemáticas en el Colegio Gimnasio Los Pinares en Medellín, orientando su trabajo al desarrollo de proyectos de áreas y uso de material didáctico. Ha participado en eventos de Educación Matemática a nivel Nacional e Internacional. Actualmente, participa en el grupo de investigación MATHEMA-FIEM de la Universidad de Antioquia. La información como investigadora y profesora se encuentra en sus redes académicas.

Sebastián Mejía Arango

Licenciado en Matemáticas y Física, su trabajo de grado se caracterizó por buscar articular el conocimiento en matemáticas y física, mediante prácticas de modelación y experimentación, en estudiantes de educación media. Es estudiante de la Maestría en Ciencias Matemáticas en la Universidad Nacional de Colombia. Sus intereses investigativos se centran en la investigación en la matemática educativa, a través de propuestas interdisciplinares en educación media, la vinculación de procesos de modelación y experimentación en el aula, y el uso de medios no convencionales en las clases de matemáticas y física. Le atrae el estudio por las matemáticas, en especial el análisis real y el cálculo.

Ha participado en diferentes eventos académicos a nivel nacional e internacional. Actualmente, se desempeña como profesor de Matemáticas y Física en educación secundaria y básica media en la Institución Educativa San José Manyanet, una institución educativa privada en Itagüí, Antioquia.

Lina María Muñoz-Mesa

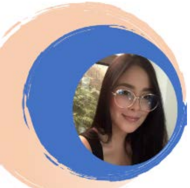
Magíster en Educación Matemática, su línea de investigación es la Modelación Matemática. En su estudio discutió el rol de los diferentes contextos cercanos a los estudiantes, que generan escenarios para el desarrollo del procesos o actividades de modelación en las aulas. Es profesora del sector oficial en Colombia en el nivel de básica y media, en la Institución Educativa Finca la Mesa, en Medellín. Además, está vinculada a la Universidad de Antioquia, donde se desempeña como asesora en la formación de profesores de Licenciatura en la Básica con énfasis en Matemáticas. Se desempeñó como formadora de tutores en el Programa Todos a Aprender del Ministerio de Educación nacional.

Ha participado en eventos de Educación Matemática a nivel Nacional e Internacional. Ha dirigido trabajos de grado y tesis de posgrado en temas de modelación matemática y enfoques para la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Ha participado como jurado en comités de evaluación, en espacios académicos y de discusión del Seminario Repensar las Matemáticas en México, y ha escrito artículos y libros de texto en el campo de la Educación Matemática. Actualmente, es miembro de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática RECOMEM, del Seminario Repensar las Matemáticas en México, del Grupo de Investigación MATHEMA-FIEM y del Grupo de Investigación EDUMATH en Colombia.

Mónica Marcela Parra-Zapata

Estudiante de Doctorado en Educación, Magíster en Educación, área de Educación Matemática y Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Es profesora de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, donde orienta diferentes cursos de pregrado y posgrado, y adelanta procesos investigativos. También es profesora del área de matemáticas en la Institución Educativa Mariscal Robledo, donde orienta su práctica a partir del trabajo por proyectos y las metodologías activas.

Ha participado en eventos de Educación Matemática como ponente y conferencista a nivel Nacional e Internacional, principalmente en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa-RELME. Ha dirigido tesis de posgrado y trabajos de pregrado, ha participado como jurado en comités de evaluación de tesis de grado y artículos de investigación, y ha escrito diferentes artículos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Actualmente, es tutora del Programa Todos a Aprender PTA del Ministerio de Educación Nacional. Es integrante de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática RECOMEM, del grupo de investigación MATHEMA-FIEM de la Universidad de Antioquia, de Juventud Clame y miembro asociado de CLAME en Latinoamérica.



María Camila Patiño-Henao

Licenciada en Matemáticas y Física. En su trabajo de grado discutió posturas críticas de estudiantes de secundaria, generadas a partir de un ambiente de Modelación Matemática. Sus intereses investigativos se centran en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria.

Ha participado en espacios de formación en investigación como semilleros de investigación y en el grupo de investigación MATHEMA-FIEM. Actualmente, se desempeña como profesora de Matemáticas en primaria en el Colegio Parroquial Carmelitano, una institución educativa de carácter privado ubicada en Bello, Antioquia.

William David Patiño Ríos

Licenciado en Matemáticas y Física e Ingeniero Civil, en cuyo trabajo de grado propuso la Implantación e implementación de un sistema de gestión de calidad según la norma ISO 9001:2008. Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, en cuya tesis trabajó una propuesta metodológica para la enseñanza-aprendizaje del concepto de torque aplicado en palancas simples.

Es profesor del sector oficial en el nivel de básica y media en la Institución Educativa Dinamarca de la ciudad de Medellín, Antioquia. Además, como profesor de cátedra ha tenido vínculos con la Universidad de Antioquia, la Institución Universitaria Tecnológico de Antioquia, la Universidad Pontifica Bolivariana y la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. Participó como Tutor del Programa Todos a Aprender, programa Nacional para la transformación de la Calidad Educativa.

Ha participado en eventos de Educación Matemática a nivel Nacional. Ha dirigido tesis de posgrado en los temas de profundización en enseñanza de la física y enfoques para la enseñanza-aprendizaje de la matemática. Ha participado como jurado en comités de evaluación y ha escrito diferentes libros en el campo de la Educación Matemática Rural. Actualmente, es miembro activo del grupo de Investigación MATHEMA-FIEM de la Universidad de Antioquia.

Luis Fernando Plaza Gálvez

Magíster en Enseñanza de la Matemática. Su línea de investigación es la modelación matemática en ingeniería a partir de Ecuaciones Diferenciales. En su proyecto de grado articuló el modelo financiero de Black Sholes con un método numérico para su solución. Ha desarrollado proyectos de investigación en la línea de Resolución de Problemas y teoría de obstáculos en matemáticas para ingenieros. Ha participado en eventos nacionales e internacionales en la línea de Educación Matemática, y ha orientado proyectos de grado de Maestría en la línea de Resolución de Problemas. Actualmente, es profesor Asociado en la Unidad Central del Valle del Cauca, en Tuluá Colombia, es miembro activo y fundador del grupo latinoamericano de Formación de Ingenieros desde la Matemática Educativa FIME y es miembro del grupo de investigación ENERGIAS.

María Camila Ocampo-Arenas

Magíster en Educación área de Educación Matemática y Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Sus intereses de investigación están en la línea de la Educación Matemática, Educación matemática en las infancias, la Modelación Matemática en Educación Primaria y la formación continua de profesores de matemáticas. Ha participado en proyectos de investigación relacionados con la enseñanza-aprendizaje a estudiantes de Educación primaria, y en proyectos orientados a la formación inicial de profesores de Matemáticas.

Actualmente, es profesora de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, donde orienta diferentes cursos de pregrado y adelanta procesos investigativos. Es profesora del área de matemáticas en el Colegio Gimnasio Los Pinares en Medellín, donde orienta su práctica a partir del trabajo por proyectos.

Ha participado en eventos de Educación Matemática a nivel Nacional e Internacional, participado como jurado en comités de evaluación de tesis de grado y artículos de investigación, y ha escrito diferentes artículos en el campo de la Educación Matemática. Actualmente, es miembro de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática RECOMEM, del grupo de investigación MATHEMA-FIEM de la Universidad de Antioquia y de Juventud Clame en Latinoamérica.

Paula Andrea Rendón-Mesa

Doctora en Educación Matemática. En la disertación doctoral discutió la articulación entre la matemática y el campo de acción de la Ingeniería de Diseño de Producto a partir de la modelación matemática. Su línea de investigación es la Modelación Matemática. Es profesora del sector oficial en el nivel de básica y media en la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa, y a nivel universitario. Ha tenido vínculos con la Universidad EAFIT, donde centró su atención en la formación ingenieril. Actualmente, tiene nexos con la Universidad de Antioquia contribuyendo con la formación de profesores de matemáticas.

En investigación participa en proyectos que se relacionan con la formación inicial y continuada de profesores de Matemáticas y la modelación matemática. Ha participado en eventos de Educación Matemática a nivel Nacional e Internacional. Ha dirigido tesis de posgrado en temas de modelación matemática y enfoques para la enseñanza-aprendizaje de la matemática; ha participado como jurado en comités de evaluación y ha escrito diferentes artículos en el campo de la Educación Matemática. Actualmente, es miembro de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática RECOMEM, del Seminario Repensar las Matemáticas en México, del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y de Juventud CLAME en Latinoamérica.

Fabián Arley Posada-Balvin

Doctor en Educación Matemática en cuya disertación caracterizó prácticas algebraicas emergentes de proyectos pedagógicos de modelación, desarrollados por estudiantes en formación inicial para biólogos y ecólogos, utilizando para los presupuestos de la teoría histórico-cultural Vygostkiana, la Teoría de la objetivación de Luis Radford y el constructo teórico de Seres-humanos-con-medios de Marcelo Borba. Magíster en Educación, educación matemática, en la que realizó una propuesta didáctica orientada al aprendizaje del concepto de función lineal en contextos de educación básica, partiendo de una perspectiva variacional y usando los fundamentos teóricos de las representaciones semióticas de Raymond Duval.

Actualmente, es profesor asociado al Departamento de matemática DMAT de la Universidad Federal de Rio Grande del Norte, Brasil, en la línea de formación inicial y continuada de profesores de matemáticas. Profesor del programa de Posgraduación en enseñanza de las Ciencias Naturales y la matemática PPGECNM del DMAT. Coordinador del programa institucional de becas para la iniciación a la docencia PIBID, núcleo de Matemática de la UFRN, patrocinado por la Coordinación para la formación de personal de nivel superior CAPES, del Ministerio de Educación y Cultura MEC de Brasil. Miembro activo de los grupos de investigación: Núcleo de pesquisa en historia y educación matemática NuPHEM de la UFRN y de Mathema-FIEM de la UdeA.

Jonathan Sánchez-Cardona (Compilador)

Magíster en Educación, área de Educación Matemática y Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas. Sus líneas de investigación se relacionan con la Modelación Matemática, la Evaluación Formativa y la Formación de Profesores. Es profesor de matemáticas en la Secretaría de Educación de Antioquia en el nivel de Educación Básica Primaria, y profesor de cátedra de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Ha desarrollado proyectos de investigación y publicaciones relacionadas con la Modelación Matemática, la Evaluación Formativa y la Formación de Profesores de Matemáticas. Hace parte del grupo de investigación MATHEMA-FIEM de la Universidad de Antioquia y es miembro activo de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática RECOMEM.

Situaciones de modelación matemática para el aula

Aportes para diferentes niveles formativos

Edición 1

Este libro se compone de ocho capítulos con tareas/situaciones de modelación matemática. Sus autores son, sin excepción, profesores de los niveles de educación primaria, secundaria y universitaria. La mayoría tiene experiencia en investigación, bien sea por su formación en posgrado o por participar en proyectos, grupos de estudio y otras actividades que se realizan en el marco de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática RECOMEM, o en el Grupo MATHEMA-FIEM de la Universidad de Antioquia. Por tanto, algunas de estas tareas han sido implementadas en establecimientos educativos. En cada capítulo se informa sobre las acciones que los profesores y los estudiantes emprendieron, y los posibles resultados de dicha intervención.