Bilangan acak dan metode Monte Carlo: Pengenalan dan pemanfaatan sederhananya dalam fisika

Acep Purqon[1], Sparisoma Viridi[2]
[1]Physics of Earth and Complex Systems Research Division, 0000-0002-7588-4539
[2]Nuclear Physics and Biophysics Research Division, 0000-0002-5566-3392
Department of Physics, Institut Teknologi Bandung, Bandung 40132, Indonesia

20220923-v6 | https://doi.org/10.5281/zenodo.7106168

Kerangka

Topik, Subtopik, Capaian Belajar

Topik dan subtopik

Topik

Sistem fisis dengan bilangan acak

Subtopik

Sistem bilangan random dan Monte Carlo serta pemanfaatan-nya dalam problema fisika.

Referensi

Scherer (2013), p 293 – 304; Sumber lainnya.

-, "Silabus Mata Kuliah FI4002 - 2019", Prodi Sarjana Fisika, Direktorat Pendidikan, Institut Teknologi Bandung, url https://akademik.itb.ac.id/app/role:0000000000000000/kurikulum/silabus/40272/view [20220922].

Capaian belajar

- Pemahaman mengenai bilangan acak.
- Kemampuan membangkitkan bilangan acak.
- Pengetahuan menghitung luas dengan bilangan acak.
- Pengetahuan menentukan nilai π berbantuan bilangan acak.

Bilangan acak

Bilangan acak

- Bilangan acak adalah sebuah bilangan yang dipilih seakan-akan secara kebetulan dari suatu distribusi tertentu sehingga seleksi suatu himpunan besar bilangan-bilangan ini menghasilkan distribusi yang mendasarinya.
- Hampir selalu, bilangan-bilangan tersebut juga perlu saling bebas, sehingga tidak terdapat korelasi di antara bilangan-bilangan berurutan.

Eric W. Weisstein, "Random Number“, from MathWorld--A Wolfram Web Resource, url https://mathworld.wolfram.com/RandomNumber.html [20220922].

Bilangan pseudo-acak (pseudo random)

- Himpunan nilai atau elemen yang acak secara statistik, akan tetapi diturunkan dari sebuah titik awal yang diketahui dan umumnya diulang-ulang lagi dan lagi.
- Menyediakan nilai-nilai yang diperlukan bagi proses-proses yang membutuhkan keacakan, seperti menghasilkan sinyal uji.
- Disebut ‘pseudo’ acak karena algoritmanya dapat mengulangi pembangkitan kembali urutan bilangan-bilangan acak, dan sebenarnya tidaklah sepenuhnya acak.

-, “pseudo-random numbers“, PCMag Encyclopedia, Ziff Davis, 2022, url https://www.pcmag.com/encyclopedia/term/pseudo-random-numbers [20220922].

Bilangan acak sebenarnya

- Untuk kualitas tinggi bilangan acak sebenarnya (true random numbers) dapat dibangkitkan menggunakan efek-efek fisika seperti derau termal dalam sebuah dioda atau dari suatu sumber cahaya.

Philipp O. J. Scherer, "Computational Physics: Simulation of Classical and Quantum Systems", Springer Cham, 2nd Edition, Dec 2013, p 135, url https://isbnsearch.org/isbn/9783319004006 [20220922].

Algoritma

- Algoritme khusus tersedia untuk membangkitan bilangan pseudo-acak, yang memiliki sifat statistik terbandingkan, tetapi nilainya tidak dapat diprediksi karena bergantung pada sejumlah nilai-nilai awal (seed).
- Sering suatu iterasi $r_{i+1} = f(r_i)$ digunakan untuk menghitung deret bilanga pseudo-acak.
- Dengan bilangan bulat 32 bit terdapat 2^{32} bilangan berbeda, karenanya periode bilangan tidak dapat mecapai 2^{32}.

Linear congruence generator

- Untuk membangkitkan bilangan bulat dalam rentang 0 sampai m–1 dapat digunakan generator linier kongruen
  $$X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m \qquad (0)$$
  dengan modul m: $m > 0$, pengali a: $0 < a < m$, pertumbuhan c: $0 \le c < m$, dan nilai awal (seed) X_0: $0 \le X_0 < m$.
- Kelemahannya adalah bila digunakan untuk sistem keamanan dan penyusup mengetahui nilai a, c, m, X_0, nilai X_n tertebak.

Radosław Cybulski, "Pseudo-random number generator based on linear congruence and delayed Fibonacci method", Technical Sciences[Tech Sci], vol 24, no 1, p 331-349, Dec 2021, url https://doi.org/10.31648/ts.7238.

Metode Marsaglia-Zamann

- Kombinasi dua generator akan menghasilkan periode yang lebih panjang.
- Beberapa kandidat generator untuk dikombinasikan diberikan pada tabel di samping ini.

Some candidates for combination generators

No.	Modulus	Sequence	Approx. period
(1)	2^{32}	$x_n = 69069 x_{n-1} + \text{oddconst}$	2^{32}
(2)	2^{32}	$x_n = x_{n-1} {}^* x_{n-2}$	2^{31}
(3)	2^{32}	$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + ``c''$	2^{58}
(4)	2^{31}	$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + ``c''$	2^{59}
(5)	2^{31}	$x_n = x_{n-2} + x_{n-3} + ``c''$	2^{86}
(6)	$2^{31}-69$	$x_n = x_{n-3} - x_{n-1}$	2^{62}
(7)	$2^{31}-69$	$x_n = x_{n-4} - x_{n-1}$	2^{94}
(8)	$2^{31}-61$	$x_n = 2x_{n-3} - x_{n-2} - x_{n-1}$	2^{93}
(9)	$2^{31}-69$	$x_n = x_{n-3} - 2x_{n-4}$	2^{124}
(10)	$2^{31}-1$	$x_n = x_{n-4} - x_{n-5} - ``c''$	2^{155}
(11)	$2^{31}-5$	$x_n = x_{n-8} - x_{n-10} - ``c''$	2^{307}
(12)	$2^{32}-10$	$x_n = x_{n-2} - x_{n-5} - ``c''$	2^{160}
(13)	$2^{32}-18$	$x_n = x_{n-2} - x_{n-3} - ``c''$	2^{95}
(14)	$2^{32}-5$	$x_n = x_{n-1} - 2x_{n-2}$	2^{64}
(15)	$2^{32}-5$	$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} - 2x_{n-3}$	2^{95}
(16)	$2^{32}-5$	$x_n = 2x_{n-5} - x_{n-4} - x_{n-1}$	2^{160}

George Marsaglia, Arif Zaman, “Some portable very-long-period random number generators”, Computer in Physics [Comput Phys] vol 8, no 1, p 117-121, Jan-Feb 1994, url https://doi.org/10.1063/1.168514.

Bilangan acak dengan distribusi tertentu

- Asumsikan telah terdapat pembangkit bilangan acak dalam rentang $[0, 1]$ seperti dalam C: `rand()/(double)RAND_MAX`.
- Fungsi distribusi kumulatif terkait adalah

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x. \end{cases} \tag{17}$$

Philipp O. J. Scherer, "Computational Physics: Simulation of Classical and Quantum Systems", Springer Cham, 2nd Edition, Dec 2013, p 136, url https://isbnsearch.org/isbn/9783319004006 [20220922].

Bilangan acak dengan distribusi .. (lanj.)

- Pilih suatu bilangan acak $r \in [0, 1]$ dengan $P(r \leq x) = F_0(x)$ didapatkan

$$\xi = F^{-1}(r) \tag{18}$$

- Metode ini dapat diterapkan bila ekspresi F^{-1} dapat diperoleh secara analitik.

Dadu setiap sisi berpeluang sama (fair die)

- Dadu bersisi enam dapat disimulasikan dengan memilih suatu bilangan acak $r \in [0, 1]$
- Lalu dapatkan

$$\xi = F^{-1}(r) = \begin{cases} 1, & 0 \le r \le \frac{1}{6}, \\ 2, & \frac{1}{6} \le r \le \frac{2}{6}, \\ 3, & \frac{2}{6} \le r \le \frac{3}{6}, \\ 4, & \frac{3}{6} \le r \le \frac{4}{6}, \\ 5, & \frac{4}{6} \le r \le \frac{5}{6}, \\ 6, & \frac{5}{6} \le r \le 1. \end{cases} \tag{19}$$

Distribusi eksponensial

- Fungsi distribusi kumulatif

$$F(x) = 1 - e^{-x/\lambda} \quad (20)$$

- Kerapatan probabilitas eksponensial

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \quad (21)$$

- Dengan memilih bilangan acak $r \in [0,\ 1]$ didapatkan

$$\xi = F^{-1}(r) = -\lambda \ln(1 - r) \quad (22)$$

Distribusi Gaussian (Box Muller)

- Kerapatan probabilias distribusi $$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \qquad (23)$$
- Pilih bilangan acak $r_1 \in [0, 1]$ dan $r_2 \in [0, 1]$, lalu hitung

$$\rho = \sqrt{-\ln(1 - r_1)} \qquad (24)$$

$$\varphi = 2\pi r_2 \qquad (25)$$

dan didapatkan

$$x = \rho \cos\varphi \qquad (26)$$

$$y = \rho \sin\varphi \qquad (27)$$

Integrasi Monte Carlo

Metode Monte Carlo

- Permasalahan fisis seringkali melibatkan integral berdimensi tinggi, seperti misalnya pada integral lintasan (path integrals) dan rata-rata termodinamika (thermodynamics averages).
- Jenis integral ini tidak dapat dievaluasi dengan metode standar: persegi, trapesium, Simpson atau Euler, Runge-Kutta.
- Dengan bilangan acak $x \in [0, 1]$ dan $y \in [0, 1]$ dapat dihitung

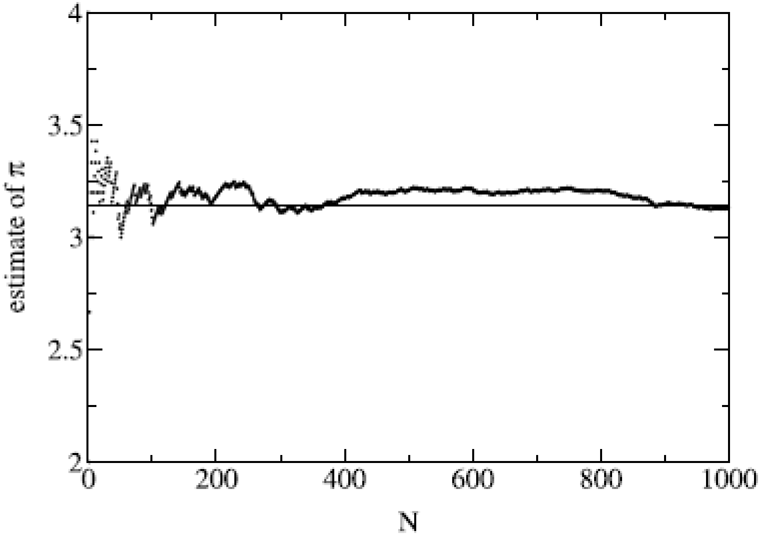
$$\int_0^1 y(x)\, dx, \; y(x) \in [0, 1] \quad (28)$$

Philipp O. J. Scherer, "Computational Physics: Simulation of Classical and Quantum Systems", Springer Cham, 2nd Edition, Dec 2013, p 138–140, url https://isbnsearch.org/isbn/9783319004006 [20220922].

Menghitung nilai π

- Luas suatu satuan lingkaran ($r = 1$) diberikan oleh $r^2\pi = \pi$.
- Nilai π ini dapat dihitung dengan integral numerik.
- Salah satunya dengan algoritma:

S1 Pilih N titik di kuadran I, pasangan $x, y \in [0, 1]$.
S2 Hitung $r^2 = x^2 + y^2$.
S3 Hitung jumlah titik dalam lingkaran $Z(r^2 \leq 1)$.
S4 Nilai $\pi/4$ diberikan estimasinya oleh $Z(r^2 \leq 1)/N$.



Menghitung integral fungsi $g(x)$

- Dengan ξ bilangan acak dalam rentang $[a, b]$ dengan distribusi

$$P(x \le \xi \ge x + dx) = f(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases} \tag{29}$$

- Ekspektasi nilai fungsi $g(x)$ adalah

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx = \int_{a}^{b} g(x) f(x) dx. \tag{30}$$

Menghitung integral fungsi $g(x)$ (lanj.)

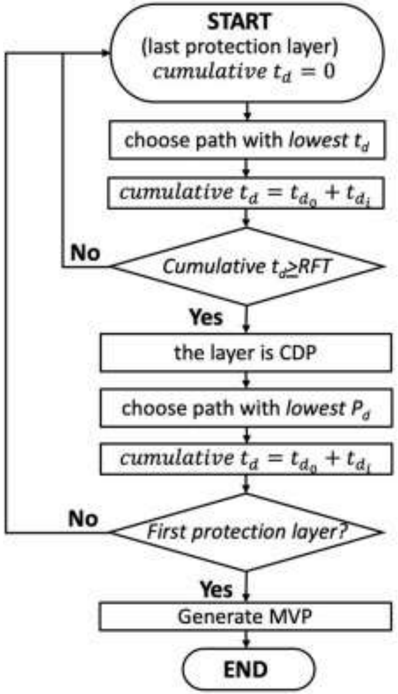
- Sebagai konsekuensi rata-rata secara acak N kali nilai dari nilai fungsi akan menghampiri integral

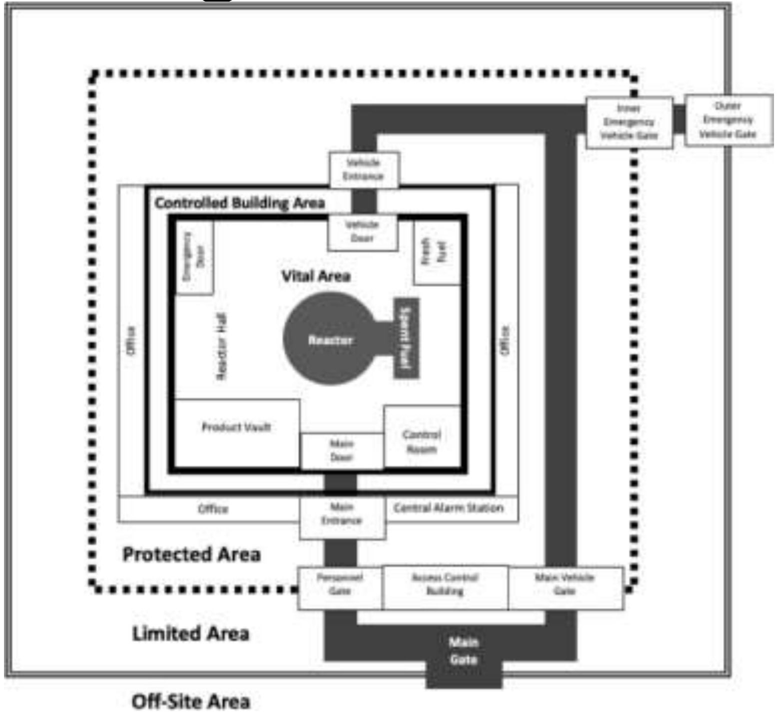
$$\int_a^b g(x)dx \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(\xi_i) = \overline{g(\xi)} \tag{31}$$

- Kadang interval $[a, b]$ diubah menjadi $[0, 1]$ untuk memudah-kan perhitungan yang $g(x)$ harus diubah menjadi $h(x)$, dengan hasilnya nanti perlu dikembalikan ke rentang $[a, b]$.

Beberapa contoh

Sistem proteksi fisis dengan Monte Carlo





Dinan Andiwijayakusuma, Topan Setiadipura, Acep Purqon, Zaki Su'ud, “The development of EASI-based multi-path analysis code for nuclear security system with variability extension”, Nuclear Engineering and Technology [Nuc Eng Technol], vol 54, no 10, p 3604-3613, Oct 2022, url https://doi.org/10.1016/j.net.2022.05.023.

Sistem proteksi fisis .. Monte Carlo (lanj.)

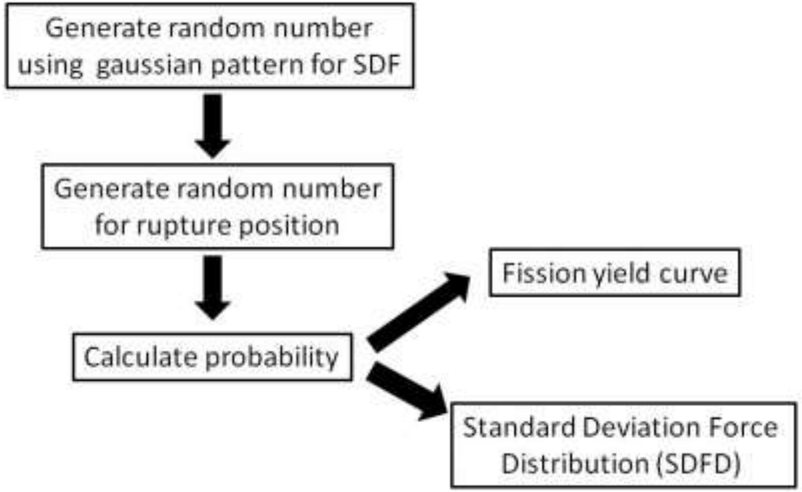
Single-path Calculation using EASI
Initial PC= 0.95

Initial PD	Location	Time Delay	Node	Adversary Movement on MVP
0.65	M	480.0	3	Penetrate Outer Wall Fence
0.02	M	30.0	4	Run Through Limited Area
0.8	M	214.0	6	Penetrate Main Vehicle Gate
0.5	M	10.0	9	Run Through Protected Area
0.92	M	100.0	13	Penetrate 20-cm Wall
0.04	M	10.0	15	Run Through Controlled Building Area
0.92	M	120.0	19	Penetrate 60-cm Wall
0.9	M	5.0	20	Run Through Vital Area
0.9	M	600.0	21	Sabotage Target

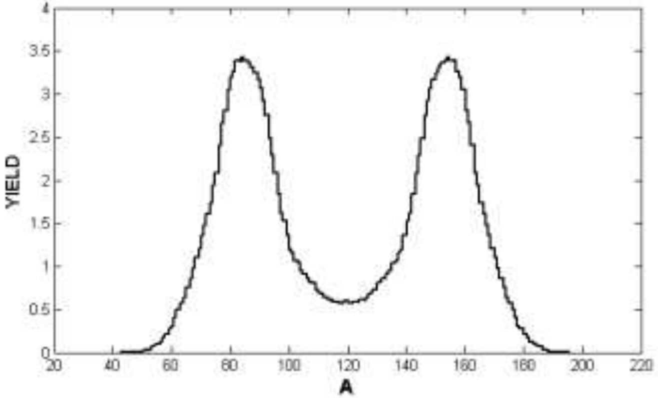
PI at MVP using EASI = 0.80815

Model mainan untuk proses fisi nuklir

- Workflow of toy model.

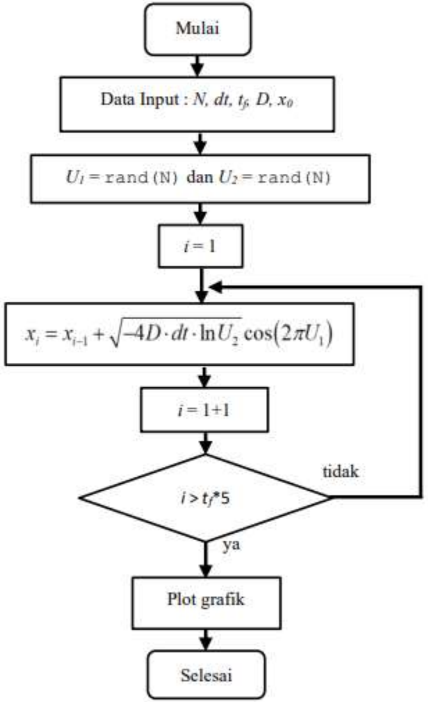


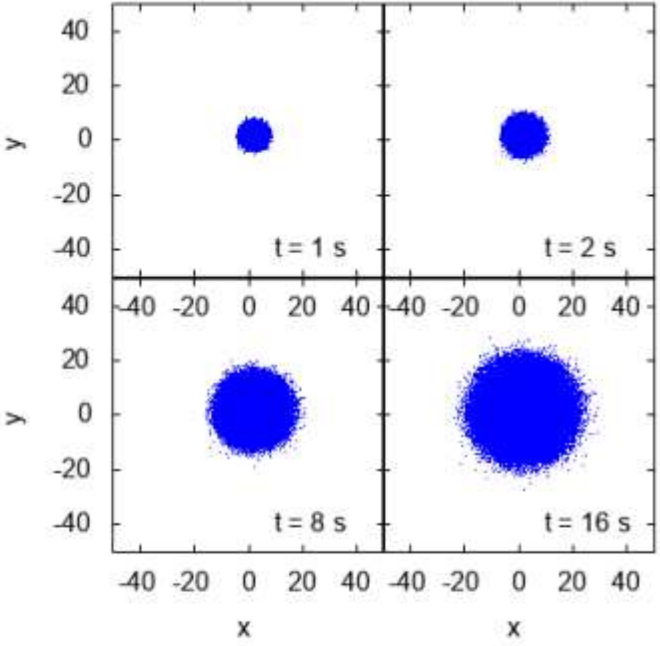
- Fission yield of 238-toy nuclide.

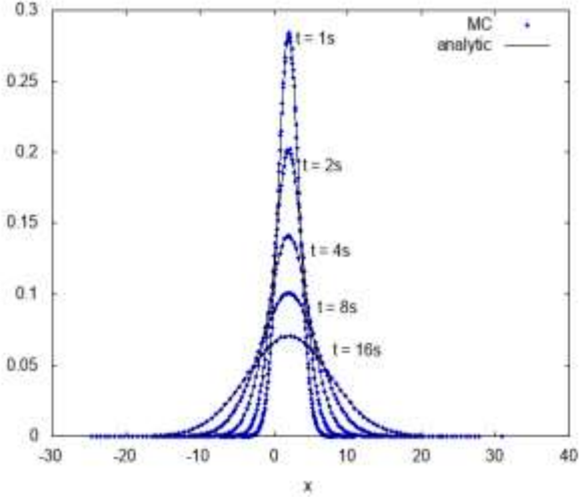


Rizal Kurniadi, Abdul Waris, Sparisoma Viridi, "Monte Carlo simulation based toy model for fission process", International Journal of Modern Physics C [Int J Modern Phys C], vol 27, no 3, p 1650030, 2016, url http://dx.doi.org/10.1142/S0129183116500303.

Difusi bebas 1d dan 2d dengan Box-Müller







Fairusy Fitria Haryani, Freddy Haryanto, Sparisoma Viridi, "Difusi Bebas 1D dan 2D dengan Monte Carlo: Perbandingan Distribusi Bilangan Random Normal dan Seragam dengan Box-Müller", Jurnal Teori dan Aplikasi Fisika [J Teori Aplikasi Fis], vol 9, no 1, p 55-64, Jan 2021, url http://dx.doi.org/10.23960/jtaf.v9i1.2608.

Piranti lunak Mcell (Monte Carlo Cell)

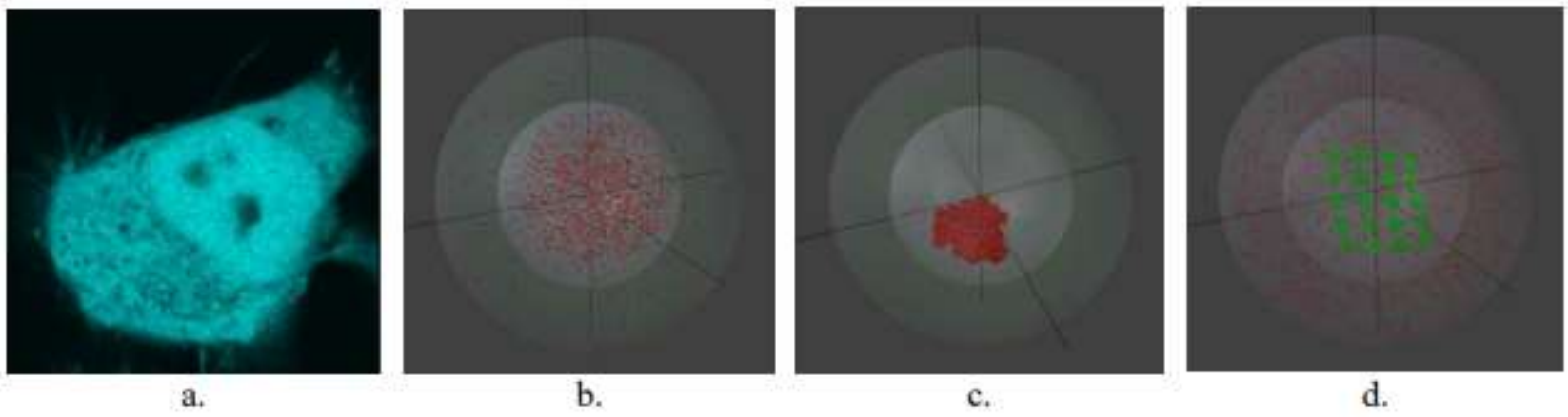
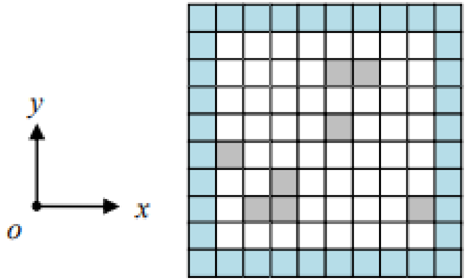


Figure 1. (a) Mouse cell visible under microscope fluorescent from Nagai-Group with permission, (b) Diffusion simulation at 0.01 s, (c) Model of collected non-diffusion receptor at 0.00 s (red), (d) Model of separate non-diffusion receptor at 0.00 s (green)

Aditra Sutresno, Freddy Haryanto, Sparisoma Viridi, Idam Arief, "Investigation of diffusion process inside the cell using Monte Carlo Cell (MCell)", Journal of Physics: Conference Series [J Phys Conf Ser], v 694, no 1, p 012077, 2016, url https://doi.org/10.1088/1742-6596/694/1/012077.

Simulasi fasa wujud zat



$$\begin{bmatrix}
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1
\end{bmatrix}$$

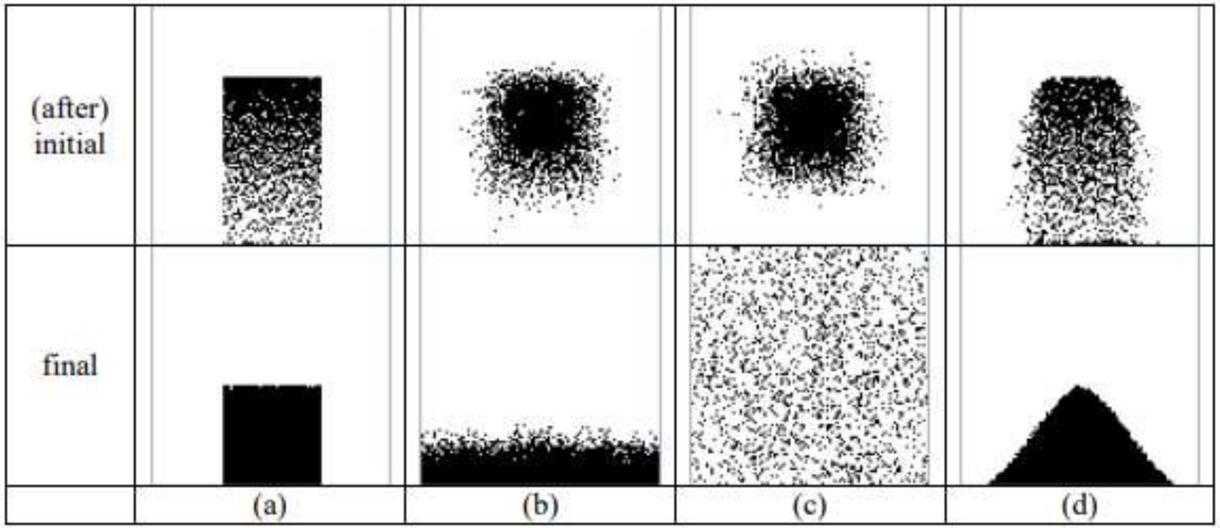


Figure 2. Single phase system (after) initial and final state for various types of materials (a) solid, (b) liquid, (c) gas, and (d) granular.

Sparisoma Viridi, Freddy Haryanto "Agent-based Model and its Potential in Simulating Some Physical Systems, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering [IOP Conf Ser Mater Sci Eng], vol 599, no 1, p 012008, 2019

Diskusi dan tugas

Diskusi

- Mari berdiskusi ☺.
- Sampaikan kesan, usul, dan pertanyaan Anda.

Tugas mandiri

- Carilah sumber pustaka daring yang diberikan pada slide-side.
- Baca secara ringkas pustaka-pustaka tersebut.
- Temukan bagian yang memanfaatkan bilangan acak.
- Usulkan aplikasi pengembangan dari sistem-sistem tersebut.

Referensi daring lainnya

- Brokk Toggerson, Aidan Philbin, “Introduction to Monte Carlo Methods:”, in Physics 132 Lab Manual: Understanding Data, UMass Amherst, Pressbooks, url https://openbooks.library.umass.edu/p132-lab-manual/chapter/introduction-to-mc/ [20220922].
- K. P. N. Murthy, “An Introduction to Monte Carlo Simulation of Statistical physics Problem”, arXiv:cond-mat/0104167 [cond-mat.stat-mech], v5 Wed, 17 Dec 2003 07:39:11 UTC (111 KB), url https://arxiv.org/abs/cond-mat/0104167v5 [20220922]

Referensi daring lainnya (lanj.)

- Kari Rummukainen, “Monte Carlo simulations in physics”, Department of physical sciences, University of Oulu, 2 Oct 2007, url https://www.oulu.fi/tf/montecarlo/lectures/mc_notes1.pdf [20220922].
- Daan Frenkel, “Introduction to Monte Carlo Methods”, Computational Soft Matter: From Synthetic Polymers to Proteins, Lecture Notes, N. Attig, *et al*. (Eds.), John von Neumann Institute for Computing, Jülich, NIC Series, vol 23, p 29-60, 2004, url https://core.ac.uk/download/pdf/35010004.pdf [20220902].

Terima kasih