

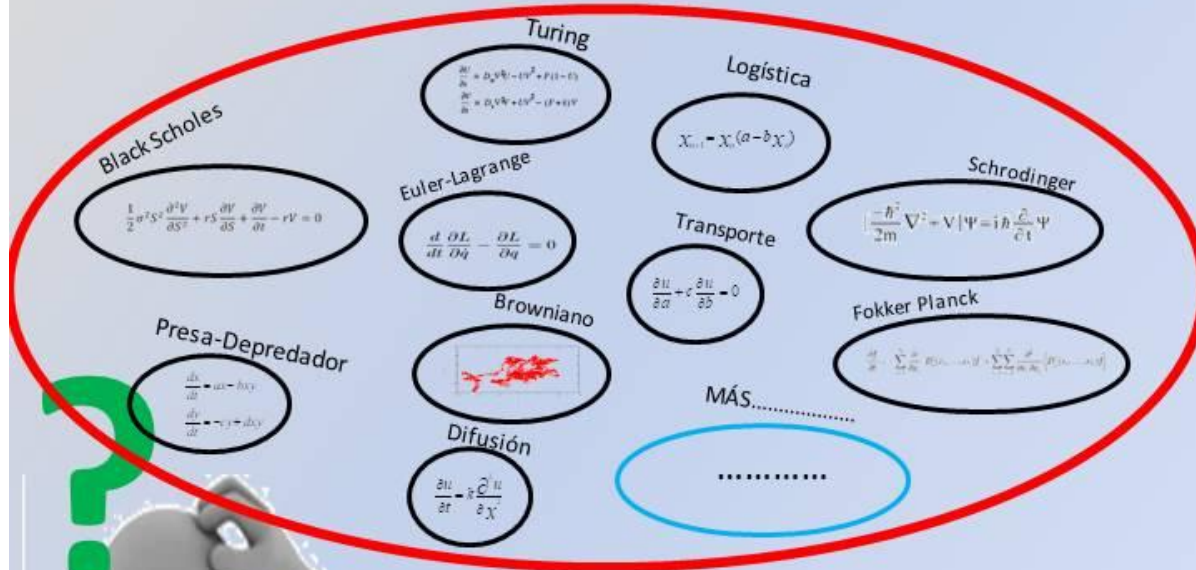


# ***PREDICCIONES ECONÓMICAS CON NAVIER STOKES EN “n” DIMENSIONES***

**TIMOTEO BRIET BLANES**



# Navier Stokes



La mejor decisión se basa en conocer  
sus consecuencias.

**MPE Teoría**

Nuevo modelo Matemático  
de predicción en política  
económica multivariable.

No encuentro otra mejor razón para hacer Ciencia y disfrutar con ello,  
que utilizarla para mejorar la Sociedad.

---

## PREDICCIONES ECONÓMICAS CON NAVIER STOKES EN “n” DIMENSIONES



Timoteo Briet Blanes<sup>(1)</sup>

### Abstract

En las últimas décadas, la Física ha intentado introducirse en el mundo de la modelación y predicción económica; teorías que hasta la fecha eran de aplicación exclusiva en fenómenos físicos, han sido reestructuradas para poder ser aplicadas y definir conceptos desde un punto de vista económico (econofísica); el objetivo era poder disponer de modelos matemáticos-físicos con los que explicar la dinámica económica y por tanto, poder predecir su evolución. El problema principal con el que se encuentra actualmente esta disciplina, es que a pesar de ser útil modela ad hoc cada suceso no siendo por tanto, generalizable; por otra parte, los modelos numéricos generados sólo analizan sucesos aislados, y cuando estudian varios sucesos entre sí, necesitan las dependencias entre ellos. Lo que se intenta en este trabajo es definir conceptos genéricos con el objetivo de crear una herramienta global pudiendo ser aplicada a muchos tipos de fenómenos no sólo económicos; igualmente se describen novedosos modelos matemáticos encargados de definir, modelar y predecir un conjunto de sucesos entre sí. Es más: se demuestra y constata que modelos ya existentes y con mucho éxito como Black Scholes y otros, se derivan del nuevo modelo. Una de las particularidades de estos modelos, es que pueden trabajar en “n” dimensiones correspondientes al estudio conjunto de “n” sucesos, siendo “n” un número real. En definitiva es un nuevo enfoque de la economía que la relaciona con la física de ondas y su dinámica. Es una teoría aplicable principalmente a la dinámica global de un conjunto de sucesos-partículas como la economía, pero como se analizará también, útil en problemas relativos a dinámica de peatones, decisiones políticas, sociología y muchas más. La modelación Matemática es esencial para conocer los fundamentos sobre los que se basa la dinámica de un suceso y es necesario su desarrollo e implementación en los programas docentes Universitarios, pero no es suficiente; como ocurre en todos los campos de la Ciencia, la combinación de varias áreas o disciplinas (Frisch 1930), es la mejor solución para conocer y predecir un suceso: Análisis-Teoría Económica, Estadística y Modelación Matemática.

➔ Debe existir un espacio que dependa de las acciones conscientes e inconscientes del ser humano, en el que la dinámica de cualquier evento, sean sus geodésicas.

Palabras clave: Economía multivariable , predicción económica , economía , econofísica , Navier Stokes , peatones , sociofísica , relaciones humanas , decisiones , proceso estocástico , predicción , Black Scholes , Fokker Planck , Langevin , Schrodinger , decisión , decisiones políticas , economía , Timoteo , Briet , aleatorio , probabilidad , política , sucesos dependientes , sucesos independientes , Bayes , geodésicas , acción , Hamiltoniano , modelo matemático , sucesos , patrón , caos , fractal , multifractal , logística ,

<sup>(1)</sup> Libros y Artículos en: Twitter: @TimoteoBriet y LinkedIn: [www.linkedin.com/in/timoteobriet](http://www.linkedin.com/in/timoteobriet)  
Licenciado en Matemáticas, Cosmólogo-Astrónomo, especialista en Simulación CFD, modelación numérica y Aerodinámica, Profesor Ingeniería Industrial y profesor en Masters de Ingeniería en varias Universidades (España, Francia y Argentina).

Mail / Web de Contacto: [racecarsengineering@gmail.com](mailto:racecarsengineering@gmail.com) / [www.motorsport-formation.com](http://www.motorsport-formation.com)

---

### 1. Desarrollo y Metodología

Para conseguir los objetivos deseados, es necesario ir paso a paso, empezando por definir una serie de variables que servirán para

incorporarlas a los modelos numéricos que se generen. A la par que se definen, también se compararán con las definiciones análogas que se hayan realizado en las últimas décadas con el fin de validarlas y observar las diferencias tanto en

---

su alcance como en su aplicación. Una vez se hayan definido todas las variables intervinientes en los modelos numéricos, se analizarán diversos modelos, empezando por los más simples y básicos, para concluir con modelos completos y complejos de más extensa aplicación. Se analizará con todo detalle el uso de estos modelos, haciendo énfasis en aquellos puntos más novedosos como resolución en “n” dimensiones e incluso con “n” número real. Por último se describirán aplicaciones de los modelos matemáticos sobre casos particulares, principalmente en Economía, pero también haciendo pequeñas incursiones en dinámica de peatones (diseño de sistemas de evacuación de grupos de personas en ciudades y recintos cerrados), etc....

## 2. Introducción

Cualquier predicción es una tarea complicada y en principio mucho más si la predicción se basa en pocos datos y se pretende predecir a largo plazo. Cuantas menos variables se consideren de las que depende un suceso, más rango de variabilidad va a tener; esto es uno de los principios básicos de la teoría del caos; si un suceso depende de muchos factores, la dinámica del suceso está (o al menos lo parece) en principio, como restringida, enjaulada o acotada en un rango mucho menor y “previsible” de variabilidad.

Los Matemáticos buscamos patrones o repetibilidades en un fenómeno a analizar; esto permite formular un modelo numérico que predice su dinámica; claro, encontrar patrones no es fácil, pues en la inmensa mayoría de ocasiones o no existen “directamente” o si existen, están ocultos bajo capas de aleatoriedad/ruido, el intervalo de trabajo no es el adecuado o un sinnúmero de otras cosas. Una de las herramientas utilizadas si se acepta la ausencia (incapacidad) de patrones es suponer que existen en un rango pequeño de análisis, incluso “forzando” los datos; ello permite crear un modelo numérico en un pequeño rango determinado de estudio. Se puede, como cualquier otro idioma, hablar matemáticamente de forma complicada o simple, pero es una tarea

esencial del buen matemático, intentar hablar y modelar de una forma simple y entendible....

Otra de las herramientas que utilizamos los Matemáticos, es poder considerar a 2 sucesos como dependientes o no; ello permite hacer predicciones conjuntas y conocer pues, la evolución de uno de ellos con respecto al otro; pero como se analizará en este Artículo, el considerar la dependencia efectiva es una tarea difícil; principalmente la dificultad radica en el hecho de que cuando un suceso varía y el otro varía, puede no ser debido a la dependencia tal y como se intuye, sino a otros factores secundarios. En economía, se utiliza el concepto de función aislada, la cual hace variar un suceso manteniendo los otros fijos, para poder observar posibles dependencias.

En economía, se utiliza también mucho el análisis de series temporales; la llamada econometría es una rama de la estadística matemática que se aplica al estudio de este tipo de series; se analizan tendencias generales, tendencias por rangos, medias entre tendencias, periodicidades quizás debidas a estacionalidades, rango o intervalos de evolución, y sobre todo o al menos en muchas ocasiones la experiencia: repetibilidades de comportamientos, expresiones matemáticas “experimentales”, etc. Pero todos estos análisis se basan en los datos de la propia serie temporal, es decir: de la información aportada por ella misma; en definitiva son “modelos” de comportamiento demasiado particulares. En muchas ocasiones y de forma errónea, se habla de análisis fractal de series temporales: son simples análisis de repetibilidades igualmente....: si se detecta en 2 ocasiones que cada 3 veces que una variable sube después baja, y a partir de esto, se deduce que la próxima vez que ocurra lo mismo, de nuevo la variable subirá, no es demasiado Científico....

Incluso, a partir del estudio de una sola serie de valores correspondiente a una variable normalmente aislada, se “inducen” leyes a seguir o predicen su evolución; normalmente, estas inducciones se basan en la experiencia:





Figura 1: Leyes de Compra y Venta, a partir de “cierta” evolución o “comportamiento” de una señal.



Figura 2: Evolución predictiva de una variable, a partir de la evolución previa.

Esto es algo que se suele hacer mucho en relación a la señal “estocástica o ruido en general”; es decir: tomar dicha señal y analizar si tiene tendencias; pero para ello se supone que no es exactamente una señal aleatoria; este “aleatoriedad” puede formar parte del fondo de una señal, como pequeñas variaciones o fluctuaciones, o puede ser en sí misma una señal; esto se analizará un poco más adelante.

Por otra parte, en el caso de que la econometría quiera analizar varios sucesos entre sí, le es necesario conocer la dependencia entre ellos para generar el modelo matemático correspondiente; es un concepto bastante simple de modelación....

Las ecuaciones de Langevin, Fokker-Planck y Black-Scholes, ofrecen una visión de la evolución del ruido o de la señal estocástica; el ruido se puede considerar como un movimiento Browniano, pudiendo entonces aplicar teorías dinámicas Brownianas para modelar su dinámica; por tanto y de manera acertada en nuestra opinión, se calculan las posiciones o evolución de un suceso determinado bajo una función de probabilidad, y por tanto, con cierto rango de variabilidad o incertidumbre.

La utilización de la Física no es exclusiva de la economía (econofísica); también se utiliza en la sociología (sociofísica) y en otras ramas; ofrece una visión diferente de la dinámica más matematizada y más reglada; es una magnífica herramienta que hay que potenciar; el problema actual es que los modelos físicos que se aplican y por tanto, el modelo numérico generado, es un modelo ad hoc; es decir: muy particularizado al problema a resolver, tanto desde las definiciones generadas como del propio modelo numérico aplicable e incluso del tipo de solución.

La utilización de modelos matemáticos que impliquen a varios sucesos de forma conjunta, es algo que no está desarrollado prácticamente en absoluto; la utilización de estos modelos, implica el análisis de procesos en varias dimensiones, la resolución de sistemas de ecuaciones seguramente no lineales, incluso el posible trabajo en dimensiones fractales; todo ello hace que desde un punto de vista exclusivamente matemático, sea una tarea dura y complicada, pero en nuestra opinión necesaria. Pero por otro lado, también se hace necesaria la definición genérica de variables, de tal forma que no dependan del problema analizado.

Las ecuaciones de Navier Stokes (ecuaciones tradicionalmente aplicables a problemas de fluidos), ofrecen una visión conjunta de la dinámica de varias variables; conceptos como la difusividad, el transporte, el movimiento estocástico y más, son conceptos típicos en muchos campos y no sólo en la Economía, que están presentes en dichas ecuaciones; por tanto, no parece descabellado su utilización para modelar dinámicas; es más: como se verá en este Artículo, el movimiento de

---

fluidos tiene mucho que ver con el “fluir” de la economía y otros eventos.

Si se buscan videos de conferencias en YouTube, a partir de expresiones como “Matemáticas en la Economía”, el 10% de los resultados corresponderán a videos sobre descripciones de modelos matemáticos y el 90% son videos criticando el uso de las matemáticas en la Economía. Estas críticas siempre son del tipo:

- ....No creo que las Matemáticas sean capaces de simular las decisiones humanas; es algo demasiado complicado.
- ....Los matemáticos no saben de economía.
- ....Hay demasiada matemática en la economía.
- ....Y un tremendo largo etcétera de críticas....

Muchas de estas críticas, son realizadas por Catedráticos de Universidad que obviaré, incluso o por gente que en algunas ocasiones, presumen de no ser economistas (mucho menos matemáticos). E incluso, como he visto recientemente, se alardea de que los matemáticos predicen tan bien, como puede predecir un mono (literal); con estos argumentos, evidentemente, sólo es posible llegar a una conclusión acerca su conocimiento y capacidad intelectual. Comprendo perfectamente que no sean capaces de entender o comprender muchos modelos matemáticos pues incluso a nosotros mismos, como matemáticos, nos cuesta hacerlo; les animamos pues es absolutamente necesario, que aprendan matemáticas y aprendan a pensar racionalmente; no es tan difícil, al menos, intentarlo.

Cualquier modelo matemático que se genere, evidentemente se basa en datos previos, nunca futuros (y si se basan en futuros, es que ya son pasados); cuantos más datos se tengan sobre los que basarse y más fiables sean, mejor será el modelo y más fiables serán sus predicciones. Estas predicciones no pretenden ser categóricas ni definitivas; los matemáticos no pretendemos conocer perfectamente y con exactitud, qué va a ocurrir: un modelo pretende evaluar qué puede

suceder si se dan una serie de condicionantes; así de simple; es decir: qué puede ocurrir si pasa algo determinado previamente. La experiencia es necesaria, evidentemente, lo es y mucho; pero al igual que las gente mayor de un pueblo perdido en el campo, es capaz de prever el clima o tiempo que hará en los próximos días teniendo sus límites temporales en cuanto no es capaz de preverlo a 7 días vista por ejemplo, los modelos matemáticos en economía van mucho más allá que la simple experiencia pues se tienen en cuenta varias variables, datos y fenómenos y sobre todo modelados mediante una ecuación dinámica; incluso hoy en día, modelos para conocer el tiempo dentro de 3 meses con absoluta exactitud, existen; pero es simple cuestión de tiempo que sean resueltos pues lo único que falta son ordenadores capaces de hacerlo.

En ingeniería de competición de coches por ejemplo (mi trabajo profesional), existen los llamados Lap-Time; son modelos matemáticos que predicen qué tiempo hará un coche de competición en un circuito cualquiera; pero a pesar de ser capaces de hacer lo dicho se utilizan sólo para saber qué pieza del coche es mejor tocar o variar. Éste, es el fundamento de cualquier modelo matemático y justo este es, su objetivo.

Hay una definición que me gusta especialmente: Un modelo matemático, trata de imitar la Realidad, utilizando las Matemáticas (Kent y Saft 1992).

➔ Un modelo matemático, acertará más en sus predicciones, cuanto más falle.... De hecho, como alegan muchos economistas, muchas de las decisiones o comportamientos humanos no pueden ser simuladas, al menos a priori, por su excepcionalidad entre otras cosas; pero, su existencia hace que se mejore el modelo, incorporando los efectos de estas acciones imprevistas y bruscas al modelo dinámico; la próxima vez que ocurra esa “imprevisión”, ya no habrá sido tan imprevista.... Ya lo decía el admirado Richard Feynmann: “la duda, el fallo y el decir que no lo sé, es bueno y saludable pues te hace darte cuenta que es necesario mejorar”.

### 3. Definiciones

#### 3.1. Sucesos y Partículas

Cualquier intento de modelar el cosmos implica la necesidad de definir qué es lo que se quiere modelar. El objetivo es comprender y predecir la dinámica del mayor número posible de fenómenos, por muy diferentes que parezcan serlos, utilizando unas leyes o principios comunes a ellos. Para ello y para empezar, es necesario definir un fenómeno como algo muy genérico, como un concepto muy amplio e identificable en muchos campos. Carl Sagan, ya lo definió acertadamente: Cosmos es todo lo que ha sido, es y será; eso es precisamente lo que se pretende en este trabajo: definir un fenómeno o acontecimiento como cualquier suceso que haya ocurrido o vaya a ocurrir en el Cosmos. Es una de las definiciones más importantes que se pueden hacer, pero también es, quizás, una de las más sencillas y fáciles, precisamente por la gran amplitud de concepto que posee y la gran variedad de fenómenos o sucesos que es capaz de incluir. Con esta definición quedan perfectamente definidos los fenómenos discretos (Terremoto, rayo de una tormenta, muerte de un amigo, “determinado” precio del petróleo) y los continuos (precio del petróleo, posición de una molécula, temperatura de una zona geográfica, el tiempo), sabiendo, por tanto, que un suceso discreto no es más que un suceso continuo debidamente discretizado a partir de cualquier otro suceso.

En el caso particular por ejemplo de la explosión de una bomba, un suceso sería la explosión de una bomba, mientras que una partícula sería una explosión concreta ocurrida en un momento determinado; la diferencia es muy sutil y sencilla: en esencia, una partícula es un suceso puntual; es decir: una medición.

#### 3.2. Dependencia entre sucesos

En Ciencia en general, la consideración de sucesos dependientes o no, radica en el cálculo de una serie de valores, que en resumen, “calculan” la correlación o relación entre los valores; el problema viene aquí: no calculan la correlación entre 2 sucesos sino en sus “valores”; pero la causalidad no implica

casualidad; 2 sucesos pueden determinarse como altamente correlacionados y por tanto, catalogarse como dependientes, sin serlo:

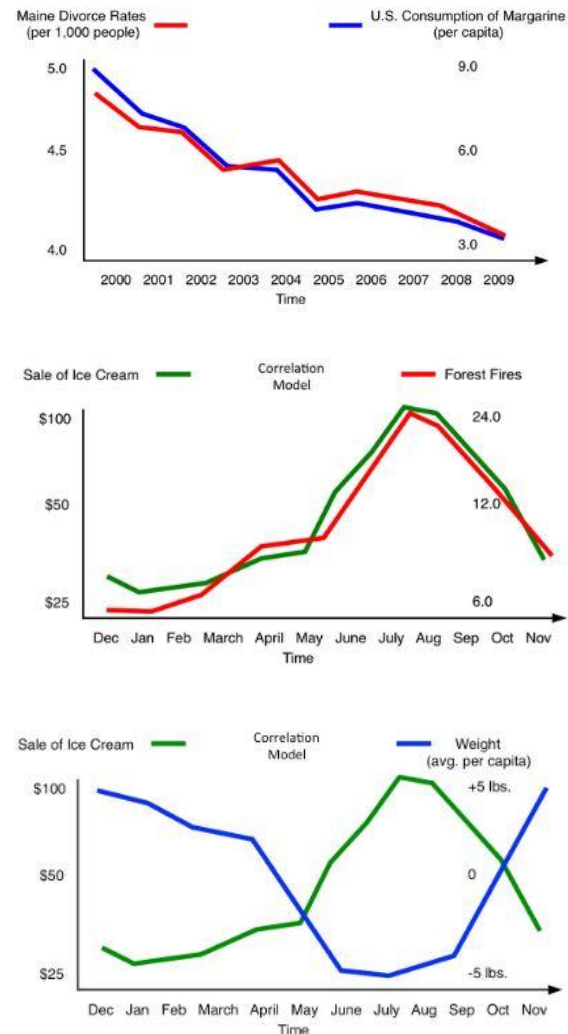


Figura 3: Consume de margarina y número de divorcios, ventas de crema helada y número de incendios en bosques, peso per cápita y venta de crema helada; 3 ejemplos de relación casual pero no causal.

Si se calcula la correlación entre los 2 sucesos de cada gráfica, se obtendrán valores que indican la gran dependencia entre ellos; pero es una dependencia entre los valores, no entre los sucesos propiamente dicho; sean 2 sucesos “X” e “Y” (las medias de los valores se indican mediante una barra superior); de esta forma, se puede calcular un coeficiente de correlación “r” entre ambos conjuntos de valores:

$$r = \cos(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}$$

Ecuación 1

El ángulo “ $\alpha$ ” es el ángulo que forman la representación de ambos grupos de valores; si son dependientes, lógicamente el valor estará más cercano a “-1” y a “1”, mientras que si no lo están, el ángulo será “0” pues el ángulo será de 90°.

➔ Establecer una dependencia o no, entre 2 grupos de valores, no implica en absoluto, haber establecido la dependencia o no entre los sucesos de donde parten los valores.

A pesar de “parecer” un problema obvio y sencillo, es uno de los más complicados que existen no sólo en términos económicos; en los años 80 y 90 del siglo XX, se empezaron a analizar métodos basados en ensayos reales en población, para conocer la dependencia o no entre sucesos (de hecho, se otorgó el premio Nobel al respecto, en el año 2021); hasta entonces, se utilizaban las llamadas funciones auxiliares; son funciones o sucesos considerándose independientes que se hacen variar para ver otras variaciones, pudiendo conocer por tanto, la posible dependencia. Si una gráfica entre 2 sucesos es una línea ascendente por ejemplo, es posible concluir erróneamente que ambos sucesos son linealmente dependientes; pero quizás, exista otro suceso que esté ocurriendo y que haga “subir” los 2 sucesos analizados:

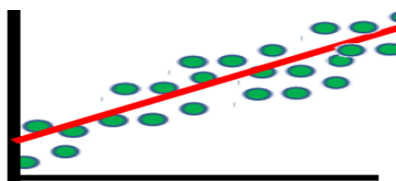


Figura 4: Partículas con una “supuesta” tendencia lineal.

Incluso, es posible que el grupo de valores de un suceso, sea realmente más de un grupo de valores; ello conllevaría un gran error

en la determinación de parámetros numéricos y por tanto de la dinámica:

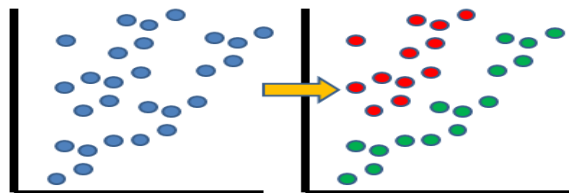


Figura 5: Valores de un supuesto único suceso que es susceptible de ser agrupado en 2 conjuntos de valores (2 sucesos).

Por tanto, saber si 2 sucesos son dependientes o no, no es un problema evidente; cualquier dependencia aparente (causa-efecto) puede deberse incluso al azar (o a lo que no se puede explicar como ya se verá a continuación); además, la posible dependencia puede observarse mucho después del intervalo de estudio y, por tanto, considerarse independientes sin serlo.

Esto hace que sea difícil definir cuándo dos sucesos son dependientes y cuantificar la relación. En estadística, existen muchos métodos para poder considerar varios sucesos dependientes o no....

En cualquier caso, se define desde el conocimiento más elemental y básico de la dependencia: 2 sucesos serán dependientes si en el intervalo de estudio se observa una relación causa-efecto; o lo que es lo mismo: ante una variación en uno de ellos, se observa una variación o reacción en el otro; esto conlleva una importante reflexión: cuanto más dependientes sean 2 sucesos, más rápidamente reaccionarán uno ante las variaciones del otro y viceversa? No es necesario: si efectivamente lo son, más que reaccionar rápida o lentamente, reaccionarán sí o sí.

Aquí pues, otro gran problema: al no saber “cuándo” reaccionarán, se hace más complicado el conocer la dependencia. Esta reflexión tiene mucho que ver con lo que más tarde se definirá como viscosidad.



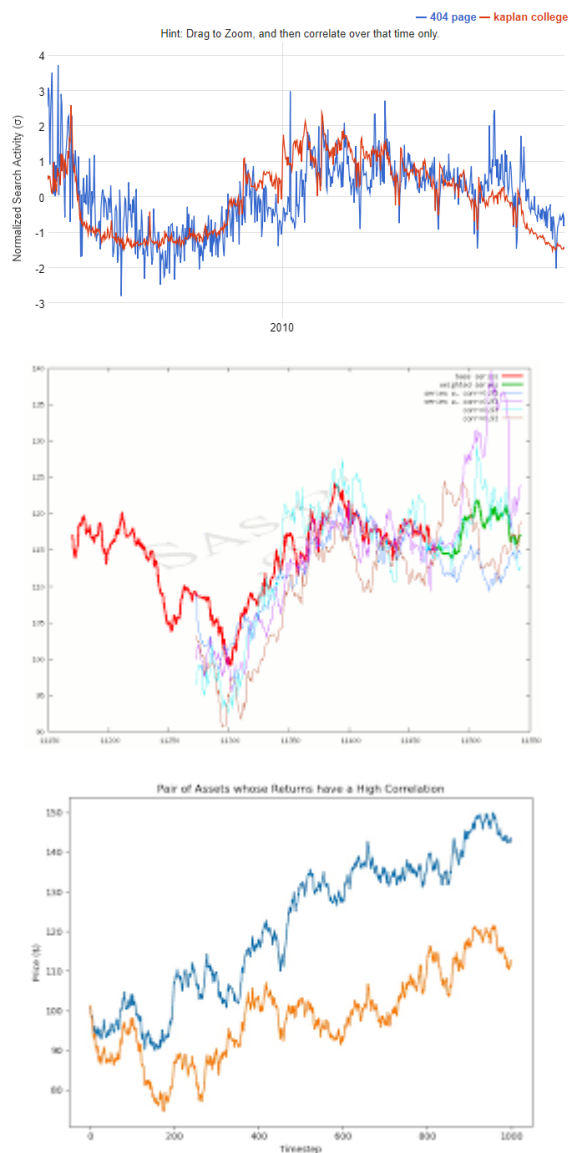


Figura 6: Algunos ejemplos de “dependencia” entre pares de “valores”, no implicando que los sucesos lo sean.

Particularizando en Economía, se dice que el suceso independiente es aquel que se varía para conocer la variación de otro suceso; al segundo suceso se le cataloga de dependiente si lógicamente, varía; pero como ya se ha mencionado, incluso aunque varíe, quizás el efecto no sea consecuencia de la supuesta causa; incluso también, una primera dependencia “evidente y clara”, no implica una reciprocidad “directa”:

$$\text{suceso}(1) \rightarrow \text{suceso}(2)$$

*No implica:*

Ecuación 2

$$\text{suceso}(2) \rightarrow \text{suceso}(1)$$

Para que exista dependencia, se necesita un sustrato o entorno; esto es: una base donde los sucesos analizados evolucionen. Sean 2 péndulos de igual longitud/masa oscilando con diferencia de fases; si se introducen dichos péndulos en una cámara sin aire, jamás oscilarán en la misma fase; esto es debido a la “comunicación” de presión entre las moléculas del aire y a través de él; es decir: la existencia de partículas permite la transmisión de información; en [60] Timoteo Briet Blanes, se analizan muchos otros fenómenos relativos a la dinámica de Galaxias basados en esta transmisión de información o presión:

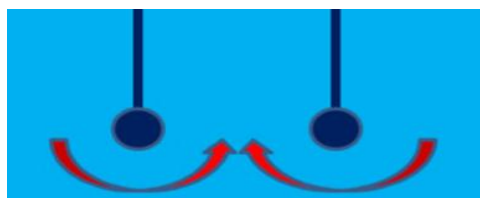


Figura 7: 2 péndulos de igual longitud oscilarán en igual fase, partiendo de fases distintas sin ausencia de aire.

Esta nomenclatura de “Transmisión de Información” es esencial para comprender y cuantificar la Dependencia de Sucesos: la dependencia existirá, si existe la transmisión de información.

Algunas consideraciones sobre el llamado Efecto Mariposa:

Matemáticamente hablando, se dice que el efecto Mariposa (transmisión infinita de información), se da, si el sistema es conservativo; es decir: que no hay pérdida de energía; una definición muy vaga, lógica y evidente, pero válida. Pero la cuestión es saber si el sistema es conservativo o no por tanto; ello, no es nada fácil....

Considerando la dinámica de un suceso prácticamente cualquiera “S”, se puede llegar a la conclusión de que los límites de Kolmogorov están presentes en “S”; esto es: las turbulencias

que se crean más y más pequeñas, se van mitigando hasta desaparecer por efecto de la viscosidad; de esto se deduce que el sistema no es conservativo y por tanto, el efecto Mariposa, tal y como se entiende, no es real; quizás sea incluso válido a gran escala, pero no a escala infinita....

### 3.3. Representación y Dimensión de un suceso / Partícula

Un análisis multivariable, consiste en analizar la dinámica conjunta de varios sucesos ( $X^1, X^2, \dots, X^n$ ); cada suceso ahora, no es más que un grupo de medidas de una variable. El conjunto de sucesos que comprenden un análisis se denota como " $\Omega$ ". La dimensión de " $\Omega$ " será el número de sucesos participantes:

$$\begin{aligned} X^i &\in \{\mathfrak{R}\} \\ \Omega &= \{X^1, X^2, \dots, X^n\} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 3}$$

Una partícula " $P_i$ " perteneciente al suceso " $X^i$ ", se puede expresar mediante una serie de coordenadas ( $x^1, x^2, \dots, x^n$ ):

$$\begin{aligned} P_i &= (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i) \\ x_j^i &\in X^i \end{aligned} \quad \text{Ecuación 4}$$

Por tanto, las partículas de cada suceso, también tienen dimensión " $n$ ".

Cualquier representación de un grupo de sucesos implica que todos ellos deben ser dependientes; no tiene "demasiado" sentido incorporar al grupo un suceso que sea independiente porque no añade conocimiento al problema analizado. Se puede incorporar un suceso independiente, quizá simplemente para observar posibles relaciones geométricas o para intentar relacionarlo con otro problema. Incluso, cabría la posibilidad de trabajar con sucesos de los cuales no se sabe si dependen o no; en caso de que lo sean lo cual, puede resultar muy complicado en muchas ocasiones, el modelo matemático aplicado predecirá correctamente la evolución. Conviene aquí aclarar algo importante sobre lo que se acaba de comentar; se puede pensar con razón, que si se analizan por

ejemplo 2 sucesos que se saben dependientes, se conoce por tanto la relación matemática entre ellos lo cual implica que se puede modelar su evolución o su dinámica. Esto es lógicamente así e incluso haría "inútil" esta nueva teoría, pero:

- La modelación que se puede obtener de la dependencia detectada, corresponde a un intervalo o rango determinado; el nuevo modelo que se describe en este artículo posee más alcance por cuanto es capaz de calcular la dinámica de ambos sucesos mucho más allá donde quizás, la dependencia sigue otros patrones.

- Es más: se pueden analizar 2 sucesos sin saber si son dependientes o no, calculando su dinámica; en el caso de que la dinámica calculada y la real coincidan, ambos sucesos son dependientes. De hecho, la inmensa mayoría de sucesos con los que se pueden trabajar, son dependientes de alguna forma pero desconociendo en qué medida; por eso, es importante, aplicando esta nueva modelación conocer efectivamente su dinámica dependiente.

Si se representa pues todo el espacio de análisis " $\Omega$ ", se obtiene una curva en el espacio de " $n$ " dimensiones:

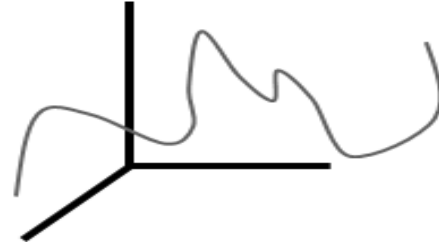


Figura 8: Representación de un grupo de sucesos  $\Omega$  (sólo es posible visualizar 3 dimensiones gráficas). Quizás se podría utilizar el color para representar una cuarta, pero poco más.

A pesar de que todo el espacio de análisis se represente mediante una línea  $n$ -dimensional, otras representaciones son importantes; en definitiva, son secciones de la gráfica anterior:

- Secciones (ortogonales o paralelas a los ejes) de 2 dimensiones; muy útiles como se verá

más adelante: son representaciones de sucesos por parejas.

→ Secciones en general, de “m” dimensiones ( $m < n$ ).

Hay probabilidades de ciertos eventos que pueden resultar algo raros o extraños: por ejemplo, en [40] Joseph B. Keller y J. Strzalko, J. Grabski, A. Stefanski, P. Perlikowski y T. Kapitaniak, demuestran en un artículo que la probabilidad de obtener cara o cruz en una moneda depende de la forma o el lugar en que se lance.... O incluso, si se piensa en un dado o en las bolas de una lotería como sucesos totalmente aleatorios, tanto los dados como las bolas, tienen diferente “masa” en cada cara al tener dibujados o marcados números o señales diferentes....:



Figura 9: Dados y bolas de lotería; en el caso de los dados, cada cara “pesa” diferente al tener escritos cantidad de puntos diferentes; por tanto, el “6” será más probable...

Si se ha tirado una moneda 20 veces y se sabe que las 20 han salido caras, ¿influye este hecho en que salga cara o no en la siguiente tirada?... o lo que es lo mismo: si se sabe que no ha llovido en 100 días, es más o menos probable que llueva mañana? ¿Influye por tanto el conocimiento de un suceso, en el resultado? No....

Existen diferentes dependencias entre partículas:

- Fija.
- Muelle.
- Amortiguador, shock absorber o damper (depende de la velocidad).
- Inerter (depende de la aceleración).
- Ninguna.
- Camino fijos (con cualquier geometría) a modo de “vías o raíles” (como intervalos de movimientos fijos).
- Combinaciones entre las anteriores.

- Otras....

Se podría pensar en un método de representación de sucesos “atados” o “ligados” entre sí mediante las relaciones anteriormente indicadas, y por tanto, conociendo sus “relaciones dinámicas”; y lo que es más importante para toda predicción: conociendo sus cuantificaciones. Se suponen 3 sucesos (círculos oscuros) dependientes de los que se conocen sus relaciones que se representan por ejemplo, por medio de muelles: si se deja el sistema libre, existirá un punto de equilibrio, donde los sucesos se mantendrán estáticos:

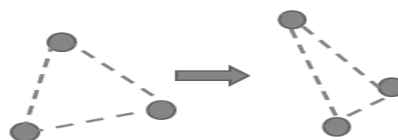


Figura 10: Estabilización de 3 sucesos.

Otro ejemplo; se supone que 2 sucesos son dependientes pero uno reacciona con un cierto retardo ante las variaciones del otro; basta unirlos con una relación tipo damper. Incluso cabe imaginarse un grupo de sucesos ligados de manera adecuada, de tal forma que ante el movimiento de uno de ellos o de varios, se observa el movimiento del conjunto de sucesos. Las posibilidades son enormes y conviene explorar este método. Es un magnífico trabajo de investigación.

Por ejemplo, sean 4 sucesos dependientes (4 precios de diferentes materias primas); a partir de datos conocidos de sus dinámicas, se construye un modelo “numérico” consistente en diseñar adecuadamente las ligaduras entre los 3 sucesos; se representan en función del tiempo o también podrían representarse en función de un precio base como el precio del petróleo o similar:



Figura 11: Ejemplo de representación de la dependencia entre 4 sucesos mediante relaciones o ligaduras.

Moviendo un suceso, el resto de sucesos se moverán en función de sus ligaduras, y por tanto, cambiando sus cantidades o “precios”. Es decir: a partir de datos conocidos, es posible predecir su evolución. Recordar simplemente que a pesar de que esta figura así dibujada en 2D, corresponde a la idea de desarrollar el procedimiento en “n” dimensiones.

Ante un evento o proceso determinado, como la economía de un país, el gobierno tiene 3 posibilidades de actuación:

1. Hacer algo y ver sus posibles consecuencias a lo largo de los años.
2. Hacer algo que no afecte a nada (y que la gente vea que se hace algo).
3. Hacer algo sin saber si influye o no.
4. Dejar que la dinámica global prevalezca y fluya...

La dinámica de la economía mundial o la dinámica global es la que siempre prevalece (cambiar el mundo es muy complicado, si se trabaja sólo); es como querer vaciar el mar, de vaso en vaso. Lo mismo ocurre con los pájaros que integran una bandada: un pájaro sólo conoce los movimientos de los que le rodean; desconoce por completo al resto; pero todo el grupo avanza y crea bellas figuras; si un solo pájaro intenta variar el movimiento de toda la bandada, será extremadamente difícil. Si el movimiento de un pájaro dependiera del movimiento de otros pájaros lejanos, sería necesaria la incorporación de derivadas de orden superior. La experiencia demuestra que con derivadas de orden 2 los modelos matemáticos son muy precisos (son útiles).



Figura 12: Movimiento agrupado y armonioso de una bandada de pájaros.

Más adelante, se verá cómo utilizar la Viscosidad, para analizar la dependencia entre sucesos.

### 3.4. Métrica del espacio

Se define métrica del este espacio “ $\Omega$ ” como la distancia “D” entre 2 partículas “ $P_i$ ” y “ $P_j$ ”:

$$P_i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$$

$$P_j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j)$$

$$D(P_i, P_j) = \sqrt{(x_1^i - x_1^j)^2 + \dots + (x_n^i - x_n^j)^2}$$

Ecuación 5

Quizás la métrica definida sea la más típica y más conocida y usual (métrica Euclidea). De cualquier manera, una métrica se define en función de aquello que se quiere minimizar; como se verá más adelante, una de las cosas a minimizar en relación al camino o trayectoria recorrida por una partícula, es la llamada Acción. Por tanto, no es descabellado definir una métrica entre 2 puntos como la acción “S” entre ambos; es decir: dado un punto en movimiento, tiene muchas posibilidades u opciones de ir hacia cualquier dirección; en cada una de esas posibles direcciones existirá una acción; por tanto, alrededor de dicho punto, se crearán una serie de círculos (trabajando en 2 dimensiones) que equivaldrán a la acción necesaria para llegar a dichas zonas:

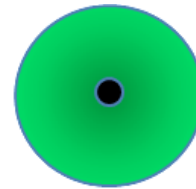


Figura 13: Zonas de Acción; la zona sombreada debe tener un gradiente de color, es decir: una variación continua de la intensidad, en función de la variación de Acción “S”, donde más oscuridad significa menos Acción.

### 3.5. Señal Estocástica o Aleatoria

#### 3.5.1. Introducción



Todo grupo de valores asociado a una variable, puede poseer una serie de variaciones como “dientes de sierra”; es decir: una serie de variaciones a modo como de vibraciones. El origen de estas variaciones que pueden estar ocultas o mitigadas, es difícil de explicar; se denominan señales estocásticas, señales aleatorias e incluso ruido blanco. Una señal puede, en relación al aleatoriedad, ser de 2 formas:

- Con ruido de fondo a modo de vibración o fluctuación.
- La propia señal puede ser considerada aleatoria, o quasi-aleatoria.

La señal estocástica de un suceso, puede ser considerada desde 4 puntos de vista:

- Como influencia de otros sucesos. Al no considerarse dichos sucesos en el análisis, se desconoce su comportamiento y por tanto su dependencia.
- Como influencia del entorno.
- Como influencia del propio hecho de medir o de las herramientas utilizadas para ese fin.
- Otras causas....

De cualquier forma, son 4 posibilidades complicadas de comprender. De hecho, hay que tener cuidado con las definiciones de dependencia u origen de la señal relacionadas o basadas en la probabilidad o aleatoriedad; habitualmente entre los científicos, se utilizan esas palabras para sustituir la ignorancia sobre las causas de un fenómeno.

Cuando se observan variaciones aleatorias, se observan quizás variaciones producidas por otros sucesos que tal vez no estén considerados en el análisis del cual provienen los datos; pero quizás sí se tienen en cuenta pero no se conoce su influencia; por otra parte, por supuesto que la propia herramienta de medición puede tener su variabilidad, como el caso de señales electrónicas.

Estas señales estocásticas, suelen ser pequeñas en relación a la propia señal, sea cual sea la escala a la que se mida la señal; por tanto, es lógico pensar que tengan poca influencia o representatividad sobre la variable, pero ello no

es realmente así: puede tener mucha influencia y conviene tenerla en consideración.

### 3.5.2. Localización del Ruido

Como se verá en el siguiente punto, uno de los 2 objetivos es “filtrar” la señal en el sentido de tener “sólo” la señal importante y desdeñar el ruido; el otro es eliminarlo (localizarlo por tanto).

Para poder detectarlo y localizarlo, se puede aplicar la teoría de Fourier. La transformada de Fourier, analiza la señal discreta o no, de tal forma, que la describe como una suma de senos y cosenos (funciones periódicas, con periodos múltiplos (armónicos) del periodo “original”); esta suma consta de una serie de sumandos; cuantos más sumandos, más parecida será la suma de Fourier a la serie inicial objeto de análisis; en [70] Javier Duoandikoetxea, se puede observar la nomenclatura y las definiciones para entender más este concepto:

$$P(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right]$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

Ecuación 6

Con este procedimiento, se obtienen las señales periódicas (armónicos) de las que se compone la señal inicial (unicidad de la solución); es decir; a título de ejemplo:

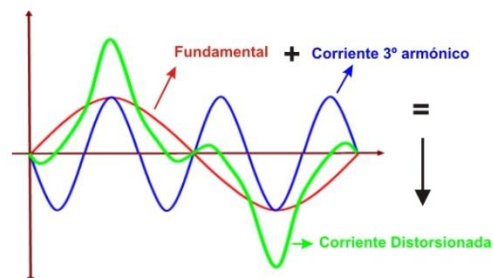


Figura 14: La señal inicial o “Distorsionada”, es suma de 2 señales: la “Fundamental” y la “Corriente armónica”.

La señal inicial, puede ser lo más complicada que se quiera:

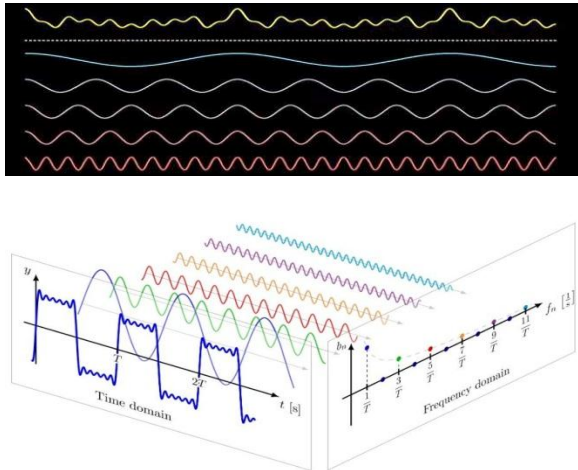


Figura 15: La señal superior o primera, es suma de las 6 señales inferiores; estas 6 señales o sumandos, son calculadas mediante la transformada de Fourier. La segunda imagen, expresa lo comentado de otra manera.

Los resultados que proporciona el análisis de Fourier sobre una tabla discreta o continua de valores, pueden estar representados de la siguiente forma:

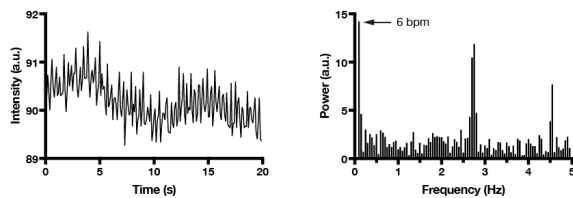


Figura 16: Se aprecian, como resultados, las ondas de las que se compone la señal inicial, en forma de frecuencias y amplitudes.

Cuál es el objetivo del proceso de filtraje o suavización? Son varios los objetivos:

- Eliminar la señal o componente de Fourier, que produzca una señal estocástica. Esta señal puede ser aquella que no se logre distinguir su origen....
- Eliminar las señales de estacionalidad por ejemplo; en el caso de trabajar sobre datos económicos, pueden existir periodicidades

debidas a los días de la semana o a los meses y por tanto, no formen parte del análisis requerido.

- Si ya se conoce la suma de funciones que da como resultado la función inicial, es posible quizás, “reconocer” alguna de esas señales periódicas y definirlas como otro tipo de sucesos que por tanto, serán dependientes con el suceso inicial:

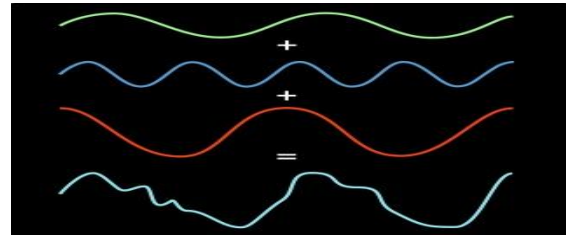


Figura 17: Se puede desconocer el “origen” de la señal inicial (curva inferior), pero quizás sean reconocibles las señales armónicas.

### 3.5.3. Tratamiento de la señal estocástica

Por todo lo dicho, una vez ya se tiene localizada la señal aleatoria, se puede trabajar utilizando los siguientes métodos:

- Eliminando el ruido.
- Suavizando la propia señal aleatoria incorporándola a la señal principal.
- Estudiándola para intentar sacar alguna conclusión de ella.

Esta última acción es la que se va a trabajar en este importante apartado. Se utilizará el llamado coeficiente de Hurst ([97] Diego Luengas Domínguez, Esperanza Ardila Romero, John Freddy Moreno Trujillo) aunque existen muchos otros, así como teoría de multi-fractales. La idea, a modo de resumen, es la siguiente:

- Distinguir una estructura fractal en la señal, calculando su dimensión.

Es un resumen muy esquemático o escueto pero realmente es así de simple. Lo que se intenta en definitiva, es conocer la dimensión de “trozos” o “intervalos” de datos de la señal, para de esta forma, poder extraer como conclusión de que tipo de evolución puede tener;

lógicamente, esto se hará suponiendo siempre que se trata de una señal quasi-aleatoria.

#### 3.5.4. Coeficiente de Hurst

Es un procedimiento basado, como siempre, en analizar repetibilidades y tendencias; no puede existir otra cosa para poder conocer o prever comportamientos; se aplica a una serie de datos, y es algo que no me gusta demasiado.... Reconociendo que es bastante útil en algunas ocasiones... sobre todo, en las ocasiones donde no se puede o no se sabe aplicar nada más....

El coeficiente de Hurst, se calcula sobre una serie de particiones de la señal: se realizan diversas particiones del conjunto de datos, siendo el tamaño de cada intervalo de la partición, más y más pequeño ([98] Rufino Iturriaga, Carina Jovanovich, [99] Anna Batlle Joher, Sandra Grèbol Montoro).

El tipo conjunto de datos sobre los que se puede aplicar este coeficiente:

- Datos “iniciales”, obtenidos directamente; se denotan por ejemplo “di”.
- Se puede generar otro grupo de datos “Ndi”, a partir de los datos originales; cada uno de estos nuevos datos, puede ser una combinación entre los datos originales (se expone a continuación una resta de orden 1 (distancia “1”), pero puede ser de cualquier orden e incluso operación):

$$Nd_i = d_{i+1} - d_i \quad \text{Ecuación 7}$$

Por ejemplo:

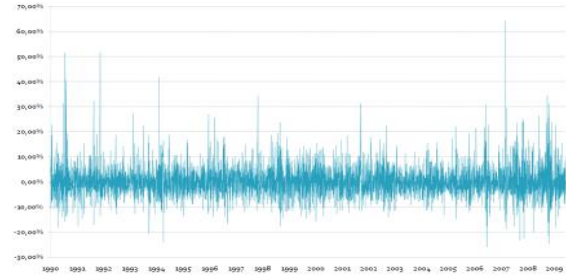
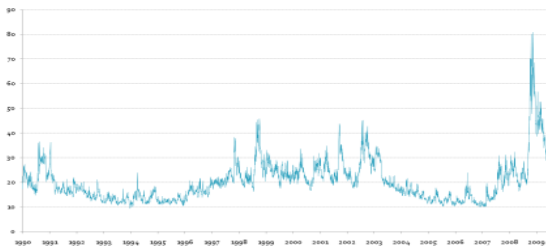


Figura 18: di, Ndi: Gráfico evolución de VIX Index entre enero 1990 – Marzo 2009.

El coeficiente de Hurst (H), se define como:

$$R/S \ N = a * N^H \quad \text{Ecuación 8}$$

a = Constante; N = número de datos; R/S N = Estadístico R/S y corresponde al rango de variación de la serie partido por su desviación típica.

Se particiona la muestra total en submuestras “i” de tamaño parecido, donde  $n=N/i$ . Se calcula la media y desviación típica de la serie temporal para cada submuestra:

$$m \ N, t_0 = \sum_{t=t_0+1}^{t_0+N} \frac{x_t}{N}$$

$$S \ N, t_0 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=t_0+1}^{t_0+N} [x_t - m \ N, t_0]^2}$$

Ecuación 9

Se obtiene una nueva serie para capturar la diferencia acumulada respecto a la media del índice:

$$N, t_0, \tau = \sum_{t=t_0+1}^{t_0+\tau} [x_t - m \ N, t_0] \quad 1 \leq \tau \leq N$$

Ecuación 10

Se determinan la diferencia máxima y mínima de cada partición. La diferencia de estos valores es el rango de cada submuestra:

$$R_{N,t_0} = \max_{\tau} N_{t_0,\tau} - \min_{\tau} N_{t_0,\tau}$$

Ecuación 11

Se obtiene el estadístico R/S (rango reescalado) dividiendo el rango por la desviación típica encontrada:

$$R/S = \frac{\sum_{t_0} R_{N,t_0}}{\sum_{t_0} S_{N,t_0}}$$

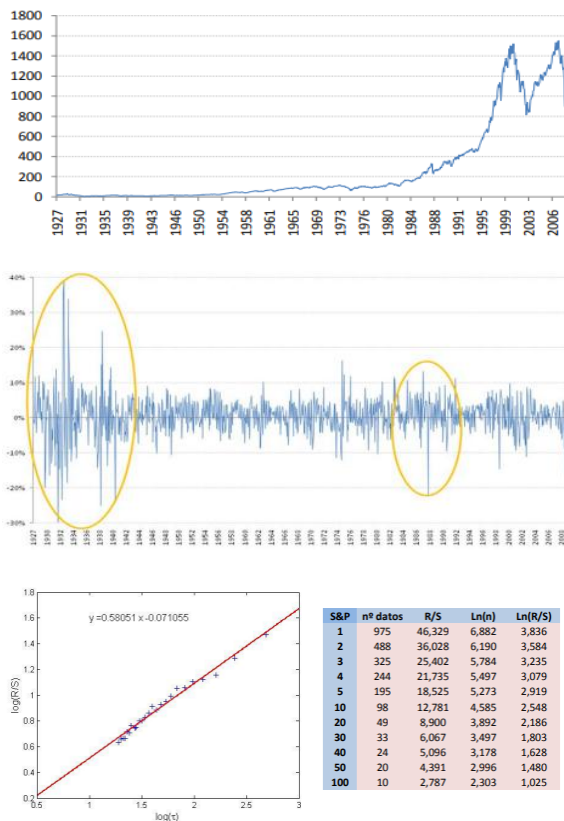
Ecuación 12

Para cada partición se calcula el promedio del rango reescalado. Dado que el crecimiento de R/S sigue la ley de potencia descrita anteriormente, la potencia de dicha ecuación es el coeficiente de Hurst, el cual se obtiene de la siguiente regresión:

$$\log R/S = a + H \cdot \log N$$

Ecuación 13

Ejemplo ([99]):



S&P 500		
Periodo datos	Coef. Hurst	Dimensión fractal
Diarios	0,5740	1,4260
Semanales	0,5805	1,4195
Mensuales	0,5807	1,4193
Anual	0,5869	1,4132

Figura 19: Ejemplo de cálculo de “H” sobre un conjunto de datos.

Qué conclusiones se extraen del cálculo del coeficiente de Hurst? Para ello, es necesario utilizar una relación proveniente de Mandelbrot (1982), y por tanto, entender la tabla anterior:

$$\text{Dimensión Fractal (F)} = \text{Dimensión Euclídea (D)} - H$$

Ecuación 14

Por tanto, en el ejemplo anterior, la dimensión fractal es  $F=2-H$ , cuyo valor se sitúa entre 1 y 2 (tendencia persistente). Así, la dimensión fractal toma valores:  $1 < F < 1,5$ .

- $H > 0,5$ ; dimensión fractal disminuirá y tenderá a acercarse a una recta.
- $H < 0,5$ ; Dimensión fractal aumentará y tenderá a acercarse a un plano.

Por tanto (muy importante) y a modo de resumen:

- Si  $H=0.5$ , los datos analizados, no siguen ninguna ley; es decir: se pueden considerar aleatorios.
- Si  $H>0.5$ , la serie de datos mantiene su tendencia; es decir: si la serie posee una tendencia alcista, es más probable que en el futuro se mantenga.
- Si  $H<0.5$ , es más probable que la tendencia cambie de orientación o dirección.

2 pequeñas puntualizaciones acerca la aplicación de “H”:

➔ Este coeficiente, quizás, se podría aplicar a series temporales relativas a terremotos.... Se extraería algo de su aplicación?

....



---

➔ Es posible aplicar este coeficiente a una serie de datos de “n” dimensiones sin más que aplicarlo a secciones bidimensionales; simple pero efectivo.

Lo que se analiza con “H”, calculándolo para diversos tamaños de particiones, es análogo a lo realizado con el proceso llamado “Box County” para calcular una dimensión fractal; por tanto, se está calculando la dimensión fractal para cada partición, de tal forma que se pueden extraer las conclusiones anteriores sabiendo dicha dimensión.

### 3.5.5. Multi-fractales

Como se acaba de observar, mediante “H” se es capaz de asignar una dimensión a cada tramo (partición) de la serie de datos; en definitiva, se identifica la serie como un conjunto de fractales; en esta ocasión, se analiza otro método de detección de la multifractalidad, calculándolas dimensiones correspondientes.

There are, and we are aware of this, many other phenomena, in principle different from all points of view, which are enormously similar in terms of their structure, representation or evolutionary dynamics. We find this structure or phenomenon, in situations so different, in scale, type or context, as: car wakes, sudden and chaotic alterations of the stock market or economy, turbulences in biological groups and information networks, internet, blocking of knots, politics, human relations, historical periods, medicine, psychology, meteorology, fluid dynamics, etc.

In short, turbulence is nothing more than "alterations or variations" with respect to, let's say, the "normal" of any type of dynamics; apparently, turbulence "twists" with respect to time (or to the chosen parameterization or representation); that is the essence of turbulence. This same "strange" or "abnormal" structure can also be found in other types of phenomena, not necessarily relative to the dynamics of a fluid.

An abrupt alteration of the stock exchange, for example, is nothing more than a turbulence caused by a series of initial and boundary conditions, which applied to a series

of simple laws, originate a chaotic dynamic with respect to time. On countless occasions, after a bus has passed, we have related the turbulence it leaves behind to the results or alterations that certain economic policies, for example, leave in society.

The characteristic of self-similarity is shared by all dynamic phenomena, whatever their context.

Turbulent displacements are very common, both in nature (atmospheric flows, rivers,...) and in different applications of technological interest (flows in ducts, turbo machinery, boilers, combustion chambers, heat exchange equipment, vehicle aerodynamics,...), to the extent that most of the flows of interest, from almost any medium-serious or applicable point of view, are turbulent. The existence of turbulence alters various physical parameters of the fluid itself, as well as the flow itself.

For this reason, it is necessary to understand and comprehend its origin in order to be able to analyze and predict it.

The two scientific theories or methods could be said to be the most important and the most established, and par excellence, are radically different and propose extreme things:

- The existence of universal laws, which govern everything: a reductionist approach to science.
- The previous theory is not enough; to explain the world much more is required; from any level or scale, new phenomena appear, rich and varied, with elements absent in the previous, simpler level; new symmetries are generated and new forms of organization emerge; hence the need to generate theories for each phenomenon or even for each scale.

What is the real one? Perhaps, as is always the case in science and in knowledge in general, it is a mixture of both.

Sir Horace Lamb (1849-1934), in an international tribute given to him on his eightieth birthday, in 1929, said: "When I die, I hope to go to heaven. There, I hope to be enlightened

about the solution of two problems, quantum electrodynamics and turbulence. On the first, I am very optimistic...

The first was solved by Richard P. Feynman (1918-1988), for which he was awarded the Nobel Prize in 1965. Feynman: "turbulence is the last major unsolved problem in classical physics". Numeric model for calculating fractals dimensions (in order to know if it is fractal-multifractal):

Hausssdorf's definition of dimension was introduced in 1918.

Let "A" a set of " $\mathbb{R}^n$ "; the external measurement is defined  $\alpha$ -dimensional of "A", as that: let " $B_i$ " a coating of " $A_i$ "; let " $\varepsilon_i$ " the diameter of each coating and be an arbitrary epsilon.

$$B_A = \left\{ \{B_i\} / i=1, \dots, \infty / A \subset \bigcup_i B_i / \varepsilon_i \leq \varepsilon / \forall i \right\}$$

Ecuación 15

We define external measurement  $\alpha$ -dimensional of set "A", as that.

$$S_{\alpha, \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{B_A} \sum_i \varepsilon_i^\alpha$$

Ecuación 16

For every "A" set, there is only one number "DH", named dimension Hausssdorf of "A", DH(A), for which the following is verified:

$$S_{\alpha}(A) = \infty \quad \alpha < DH$$

$$S_{\alpha}(A) = 0 \quad \alpha > DH \quad \text{Ecuación 17}$$

The topological dimension of a set is defined as the number of coordinates needed to express a point belonging to that set. We can remember that a fractal is that geometric structure whose Hausssdorf dimension is strictly greater than its topological dimension; given a fractal structure, we obtain from it a unique Hausssdorf dimension. There are several definitions of Hausssdorf's dimension applied to certain geometry; the most used method to

calculate the "DH" is the box-counting method; this value, although it does not coincide exactly with the Hausssdorf's dimension, coincides in the most interesting cases. The method consists of the following:

It place on the figure to be studied, in 2 or 3 dimensions, a rectangular grid with an epsilon " $\varepsilon$ " amplitude; I count the number of cells in which the figure enters some box and I call it " $N(\varepsilon)$ ". We repeat the experience for various values of reticular amplitude, and we place on a 2-dimensional graph, the values of " $\log(N(\varepsilon))$ " and " $-\log(\varepsilon)$ "; if we find the slope of the regression line that joins all the points found, we will have the dimension sought.

The problem arises when the set "A" to be studied is formed by points; it is true that we can also join these points by means of lines, and thus obtain a figure; but we do not intend to do this; we want to be able to study the discrete set of points, without having to generate another geometric figure from it. To do this, we need a series of concepts.

Let "A" be a set of points belonging to  $\mathbb{R}^n$ .  $A = \{X_i\} / i=1, \dots, n$ . Let's give this set "A", a measure of probability. We will count for each "Xi" the number of points of the set that we find inside a sphere of  $\mathbb{R}^n$  of radius " $\varepsilon$ ", with the center said "Xi". I will call " $n_i(\varepsilon)$ ", to this value. The probability that we will associate to each point of "A", will be the following one:  $p_i(\varepsilon) = n_i(\varepsilon)/N$ . In order that it is really a measurement of probability, we will impose the following condition:

$$\sum_{i=1}^N p_i(\varepsilon) = 1 \quad \text{Ecuación 18}$$

By Jensen et.al.1985, we have that the probabilities are related to the radius of the sphere, through a law of powers:

$$p_i \approx \varepsilon^{\alpha_i} \quad \text{Ecuación 19}$$

The exponents “ $\alpha_i$ ”, will be the characteristic exponents of the set "A". We can therefore consider the application that associates each point with its exponent:  $V: X_i \rightarrow \alpha_i$ ; studying how these values are distributed, will give us a lot of interesting information when it comes to characterizing set "A", with respect to dimensionality. A multifractal, is a fractal that has a distribution of characteristic exponents, instead of a single exponent.

That is: there are different zones with different fractal structures.

For each " $B_i$ " covering of the "A" set, of epsilon amplitude, we can consider the following partition function:

$$\Gamma_1(q, \tau, \{B_i\}, \varepsilon) = \sum_i \frac{P_i^q}{\varepsilon_i^\tau}$$

Ecuación 20

"Pi" is a measure of the "Bi" set. To eliminate the dependence with "Bi" we make the limit of " $\Gamma_1$ " for "q" and " $\tau$ " less or equal to 0; if we call " $\Gamma_2$ " to this limit, we can define the partition function, as follows:

$$\Gamma(q, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_2(q, \tau, \varepsilon)$$

Ecuación 21

$$\begin{aligned} \text{Define } \Gamma(q, \tau) &= \infty & \text{if } \tau > \tau(q) \\ &= 0 & \text{if } \tau < \tau(q) \end{aligned}$$

Ecuación 22

$$\text{Define function: } \delta q: \delta q = (q-1) \cdot \tau(q)$$

Ecuación 23

One of the reasons why this last definition is important, is  $\delta 0 = DH$ .

$$\Gamma(0, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\inf_{\tau \leq 0} \varepsilon_i^{-\tau}) / \varepsilon \rightarrow 0 \quad \tau \leq 0$$

Ecuación 24

If it change " $\alpha = -\tau$ ", it have:

$$\Gamma(0, \tau) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{\tau \leq 0} \varepsilon_i^\alpha = S_\alpha(A)$$

Ecuación 25

Since Hausdorff's dimension is unique, it follows that  $\delta 0 = DH$ . The generalised dimensions of Rényi are defined as follows: Grassberger, 1983:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\sum_{i=1}^N p_i(\varepsilon) \log(p_i(\varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)} = D_q(\varepsilon)$$

$$D_q(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1-q)^{-1} \frac{\log \sum_{i=1}^N (P_i(\varepsilon))^q}{\log(1/\varepsilon)}$$

Ecuación 26

These types of dimensions were introduced in 1983 by Hentschell and Procacia, as an attempt to define dimensions that were easier to establish relationships between them.

With the appearance of these dimensions, not only was this achieved, but also the dimensions used until then were defined, based on the generalized ones; dimension or capacity of Kolmogorov " $D_K$ ". The following dimensions are available: the information dimension " $D_I$ " and the correlation dimension " $D_C$ ".

$$D_K = \lim_{q \rightarrow 0} D_q$$

$$D_I = \lim_{q \rightarrow 1} D_q$$

$$D_C = \lim_{q \rightarrow 2} D_q$$

Ecuación 27

The number of times " $\alpha$ " takes a value within the closed interval  $(\alpha', \alpha' + d\alpha')$ , can be expressed as follows:

$$n(\alpha') d\alpha' = \varepsilon^{-f(\alpha)} d\alpha'$$

Ecuación 28

" $f(\alpha)$ ", is the fractal dimension of the subset of "A" that have the same characteristic exponent " $\alpha$ "; that is: " $V^{-1}(\alpha)$ " where  $\alpha \in (\alpha', \alpha' + d\alpha')$ .

To draw the function “ $f(\alpha)$ ”, we’ll draw the envelope to the straights “ $y=qx-\tau(q)$ ”, varying “ $q$ ” from “ $-\infty$ ” to “ $+\infty$ ”, (V. Martínez 1988).

The curve thus drawn has a single maximum and the value that the function takes at that point is the Hausdorff dimension of the set.

Very interesting things can be found in the works of P. Martien, S. Pope, P.L. Scott and R.S.Shaw on the time intervals between drops on a dripping tap in 1985, or the works of A. Provenzale, R. Vio and S. Cristiani on the variations of luminosity of quasar 3C-345 in 1993. From an apparently chaotic phenomenon in terms of its high unpredictability, we obtain a defined geometry, on which we define and calculate its multifractal dimensions. This characterization from the point of view of fractal geometry is applicable to other types of phenomena or time series. The fractal dimension of a random distribution of galaxies is  $D = 3$ ; the fractal dimension of galaxies located on the walls of low-pressure zones is  $D = 2$ ;  $D = 1$  on the walls, and  $D = 0$ , in galaxy clusters; in fact:  $D(r)$  with distance  $r$  (Mpc/h):

$$\begin{aligned} D(0) &\approx 1.5 \\ D(0.8) &\approx 0 \\ D(3) &\approx 2 \\ D(100) &\approx 3 \end{aligned}$$

En el caso particular de [9] Timoteo Briet Blanes, se trabaja sobre una tabla de datos de avistamientos temporales de una lluvia de meteoritos; la tabla sobre la que se analizan las dimensiones y por tanto, se establece su multifractalidad, corresponde a las diferencias de primer orden; siendo el resultado la (siendo  $\text{dif}2_{j-1} = \text{avistamiento}_{i+1} - \text{avistamiento}_i$ ):

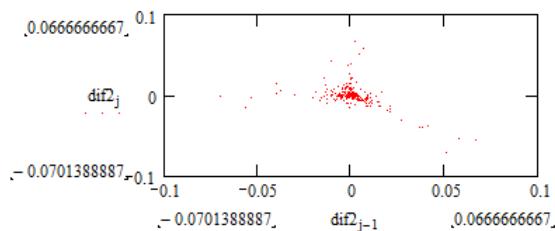


Figura 20: Gráfica correspondiente a las diferencias de primer orden de los avistamientos de estrellas fugaces de la lluvia de las Quadrántidas de 1992.

➔ Una de las cosas también muy importantes que posee la búsqueda de multifractales en una lista de datos, es que se puede aplicar perfectamente en “ $n$ ” dimensiones; basta para ello, considerar otros órdenes de diferencias, como el caso descrito (terremotos de nuevo quizás ¿...).

### 3.6. Filtrado de la señal; suavización

En este apartado, se describe el significado de suavizar la señal a analizar, tanto si se ha eliminado el ruido como si no, tanto si es a pequeña escala como si no; es decir: dependiendo de lo que se haya elegido como señal a estudiar.

Sea por ejemplo una gráfica correspondiente a unos datos en un rango determinado; sobre dicha gráfica se crea una línea de tendencia que interpole-extrapole todos los datos, y esto se puede hacer de muy variadas formas, obviando la señal aleatoria:

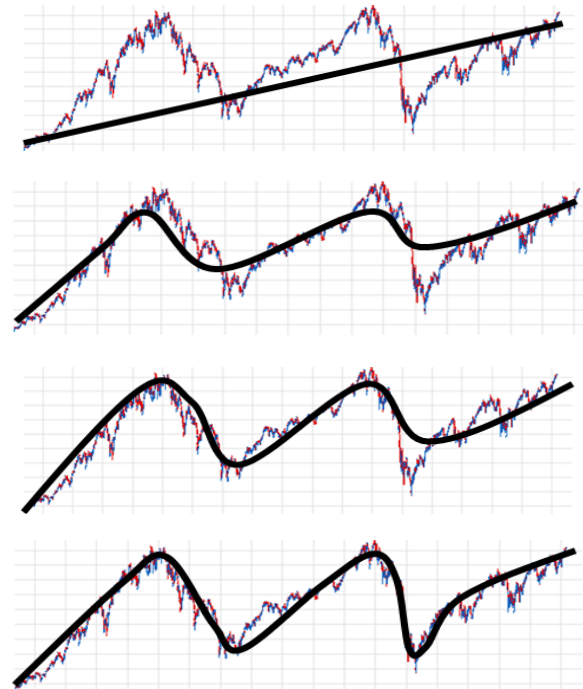




Figura 21: Diferentes líneas de tendencia sobre una gráfica de datos, con menor o mayor exactitud sobre la señal original.

La “nueva” curva de datos, será la curva con la que se trabajará; de esta forma, se han eliminado las posibles fuentes que pueden inducir a un error en la determinación o cálculo de la dinámica real, sencillamente porque se desconoce su origen. Este procedimiento se puede realizar tramo a tramo y de esta manera, disponer si se necesita, de una ecuación de la curva en cada tramo.

El objetivo es suavizar la curva de datos tanto como se quiera; recordar que esta curva de datos, puede corresponder a intervalos por ejemplo temporales con incrementos mensuales, pero también por horas; es decir: la escala de medición no importa para el proceso de suavización o mitigación de ruido no deseable:



Figura 22: “Dientes de sierra”, en datos mensuales y horarios. El “ruido” es independiente de la escala, rango o unidades de representación.

Conviene decir que cuanto más se “filtre” una señal, más señal “buena” se puede obviar; por tanto, la suavización es una tarea sumamente importante y trascendental. Se tienen por tanto, diversos métodos de filtraje:

- Líneas de tendencia como se acaba de ver.
- Considerar los máximos y mínimos o puntos que se consideren importantes, y a partir de ellos generar la “nueva” curva de datos; es un buen método por ser sencillo con la particularidad de no ser capaz de visualizar señales ocultas.
- Aplicar directamente la teoría de análisis de Fourier, con la ventaja de poder filtrar o quitar armónicos que quizás oculten la verdadera señal y en definitiva la señal útil

A continuación, algunos ejemplos gráficos de ajuste:

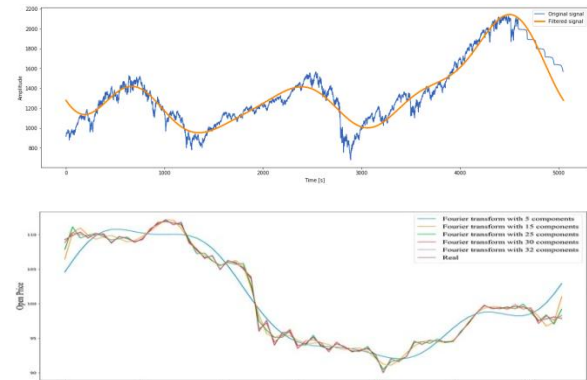


Figura 23: 2 casos de filtraje bastante duro (simple curva resultante).

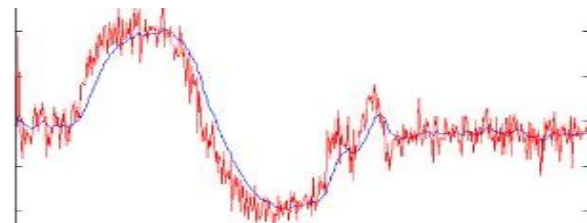


Figura 24: En este caso se observa que se ha eliminado la señal estocástica o aleatoria.

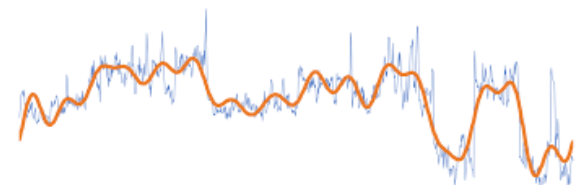


Figura 25: Sobre esta señal, se ha generado una curva a partir de un buen filtraje; la “nueva” señal, refleja perfectamente los cambios de la señal original, sin pérdida de información relevante.

### 3.7. Creación de partículas en 2D; discretización

Este proceso “discretiza” la “nueva” señal de datos creada en el punto anterior; la representación de un suceso “E1” con respecto otro suceso “E2”, se construye en base a las partículas o mediciones realizadas; es decir: se trata de un conjunto discreto de puntos representados en “n” dimensiones. Las partículas elegidas de un suceso para representarlo son extremadamente importantes pues:

- Su situación o disposición define la dinámica del suceso.
- Su cantidad influye como se verá más tarde, en la importancia del suceso, y también en otras variables como la densidad, presión, etc..

En resumen: no se trata de utilizar todas las mediciones realizadas, sino solamente unas cuantas de ellas que expresen o expliquen perfectamente el suceso analizado. Se trata en definitiva de “suavizar” la señal excluyendo efectos tales como estacionalidades e incluso el ruido aleatorio; es una tarea extremadamente importante como se puede intuir, pero necesaria; no es sencillo con “pocos” puntos (partículas), expresar lo que los datos quieren decir sin “filtrar” o excluir datos necesarios; una excesivo filtraje, conlleva una pérdida de información.

La discretización de una señal se puede realizar a diferentes escalas; es decir: si se tiene determinada señal temporal, se puede trabajar con escalas diarias o anuales; en cada escala, se tendrá una discretización determinada; lo importante de este hecho, es que la evolución de la señal, utilizando los modelos matemáticos que se desarrollarán más adelante, es independiente de la escala de trabajo; existe la denominada escala de Kolmogorov, que asegura este hecho y se analizará posteriormente.

Para elegir convenientemente estas partículas, se puede trabajar bajo el siguiente protocolo:

Se tienen “n” medidas de un suceso “X”; sea “ $x_i$ ” la i-ésima medida; se calculan las diferencias “ $dif_i$ ”:

$$dif_i = x_{i+1} - x_i \quad \text{Ecuación 29}$$

Se calcula el porcentaje “por<sub>i</sub>” de la variación de cada diferencia respecto el total (max(X),min(X)) son el máximo y mínimo de todas las medidas):

$$por_i = \frac{dif_i}{abs(max(X) - min(X))} * 100 \quad \text{Ecuación 30}$$

Se considera que el medida “i” es una partícula y debe incluirse en la representación de “X”, si la resta es mayor que la media de los porcentajes “mp”, en cuyo caso, se le asigna un “1” (en caso contrario, se le asigna un “0”):

$$if((x_{i+1} - x_i) > mp, 1, 0) \quad \text{Ecuación 31}$$

Para trabajar con otro tercer suceso “E3” (con respecto a “E2”) y compararlo con la primera gráfica, simplemente se hace un cálculo previo; se trata de una traslación del tercer evento hacia el primero; para ello, se suma a cada partícula la diferencia entre la media de ambos eventos; es decir: para que ambas medias coincidan). El objetivo que se pretende con la generación de las partículas, es que reflejen lo que realmente pasa en la dinámica del suceso; es decir: si el suceso varía, justo en esa zona debe generarse una partícula; en caso contrario, es decir, cuando el suceso apenas varía, no es necesario que existan partículas en esa zona.

Un ejemplo: sean 2 sucesos: precio del Keroseno y precio del petróleo en función del tiempo:

keroseno	petróleo		
dólares por galón	dólares por galón		
0,54	16,23	0,558	16,11
0,515	15,46	0,552	18,65
0,494	12,61	0,569	17,75
0,535	12,84	0,547	18,3
0,791	15,38	0,586	19,44
1,012	13,43	0,623	20,07
1,196	11,59	0,635	21,34
0,971	15,1	0,671	20,31
0,803	14,87	0,645	19,53
0,741	14,9	0,522	19,86
0,637	15,22	0,509	18,85
		0,543	17,28
		0,543	17,13

petróleo			
dólares por galón	resta	porcentaje variación	partículas
16,23			
15,46	0,77	7,8974359	0
12,61	2,85	29,230769	1
12,84	0,23	2,3589744	0
15,38	2,54	26,051282	1
13,43	1,95	20	1
11,59	1,84	18,871795	1
15,1	3,51	36	1
14,87	0,23	2,3589744	0
14,9	0,03	0,3076923	0
15,22	0,32	3,2820513	0
16,11	0,89	9,1282051	0
18,65	2,54	26,051282	1
17,75	0,9	9,2307692	0
18,3	0,55	5,6410256	0
18,68	0,38	3,8974359	0
19,44	0,76	7,7948718	0
20,07	0,63	6,4615385	0
21,34	1,27	13,025641	1
20,31	1,03	10,564103	0
19,53	0,78	8	0
19,86	0,33	3,3846154	0
18,85	1,01	10,358974	0
17,28	1,57	16,102564	1
17,13	0,15	1,5384615	0

Tabla 1: datos precios del keroseno y del petróleo, resta y porcentaje de variación.

Para los precios del Keroseno, se hace la traslación descrita en la definición y se calculan igualmente las partículas (Tabla (2)):

traslación	resta	porcentaje variación	partículas
16,72712			
16,70212	0,025	3,5612536	0
16,68112	0,021	2,991453	0
16,72212	0,041	5,8404558	0
16,97812	0,256	36,467236	1
17,19912	0,221	31,481481	1
17,38312	0,184	26,210826	1
17,15812	0,225	32,051282	1
16,99012	0,168	23,931624	1
16,92812	0,062	8,8319088	0
16,82412	0,104	14,814815	1
16,74512	0,079	11,253561	1
16,73912	0,006	0,8547009	0
16,75612	0,017	2,4216524	0
16,73412	0,022	3,1339031	0
16,77312	0,039	5,5555556	0
16,81012	0,037	5,2706553	0
16,82212	0,012	1,7094017	0
16,85812	0,036	5,1282051	0
16,83212	0,026	3,7037037	0
16,70912	0,123	17,521368	1
16,69612	0,013	1,8518519	0
16,73012	0,034	4,8433048	0
16,70112	0,029	4,1310541	0
16,73012	0,029	4,1310541	0

Tabla 2: “Traslación” de los precios del keroseno.

Con la traslación se ha conseguido colocar la misma media en ambos sucesos:

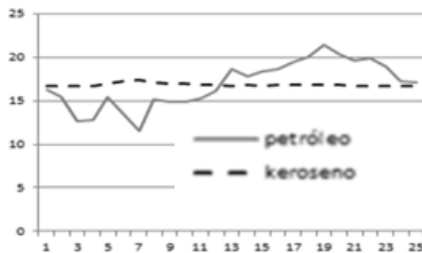


Figura 26: Posición final de las medias de los precios del keroseno y petróleo.

Como se aprecia en la siguiente imagen, las partículas reflejan las variaciones de la señal original del suceso; es decir: allí donde “pasa algo”, existen partículas; como se aprecia en las siguientes imágenes, si se utiliza “mp/2” en lugar de “mp”, la “coincidencia” o diferencia con la curva de datos iniciales, lógicamente es mucho mejor (datos originales del precio del

Petróleo y gráficas con “mp” y “mp/2); con un error más pequeño con la curva original, existen más partículas que define la curva de datos:

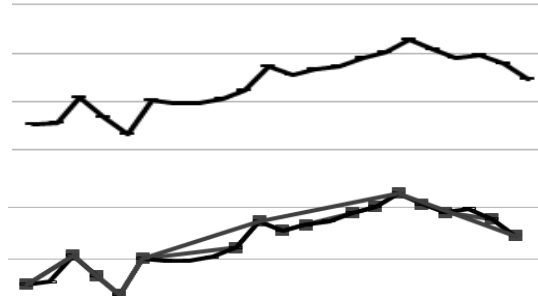


Figura 27: Comparación entre diferentes valores de media de porcentajes de variación en la elección de las partículas.

- Se creará una partícula, en los máximos y mínimos locales de la función interpolante de los puntos originales.
- Se creará una partícula-s en los tramos “suaves”.

La curva que une las partículas, es una especie de línea de tendencia del suceso completo; lógicamente, cuantas más partículas se elijan, mayor será la coincidencia con la curva del suceso, pero la cuestión es que hay que elegir la menor cantidad de partículas, minimizando el error con el suceso completo:

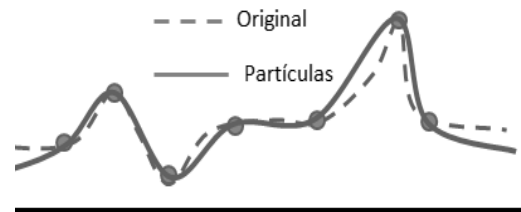


Figura 28: Elección óptima de las partículas: allí donde cambia la tendencia.

El error entre ambas curvas, debe ser el mismo para la representación de todos los sucesos existentes en el análisis a realizar. Matemáticamente se puede definir del siguiente modo:

“f” continua y diferenciable:

$$f : A \rightarrow \mathbb{R} / A \in \mathbb{R} / A = (a = x_1, x_2, \dots, x_n = b)$$

“g” continua y diferenciable:

$$B \subset A / \exists g : B \rightarrow \mathfrak{R} / f(\{B\}) = g(\{B\}) \Rightarrow \forall error \in \mathfrak{R}^+$$

¿Cuál es la cantidad mínima de puntos en “B” /

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < error$$

Ecuación 32

Este error debe ser el mismo en las creaciones de partículas en todos los sucesos (las curvas “f”, g” generadas deben realizarse con el mismo método y grado de interpolación).

### 3.8. Espacio de fases entre 2 sucesos

Sea la siguiente tabla correspondiente a las mediciones de 2 sucesos “A” y “B” en función del tiempo “t”; las “x” son valores no medidos mientras que las “o” sí lo son y además son partículas del suceso (Tabla (3)):

t	A	B
1	O	O
2	X	O
3	O	X
4	X	O
5	O	X

Tabla 3: Mediciones de 2 sucesos “A” y “B”.

Para obtener pares de valores y poder por tanto dibujar la gráfica, los valores “x” se calculan mediante interpolación lineal. Esta representación se extiende a “n” dimensiones de manera directa.

### 3.9. Círculo de influencia de una partícula

Dada una gráfica entre 2 sucesos (espacio de fases de los 2 sucesos) y dada una partícula “A” de uno de los 2 sucesos, se define un entorno centrado en “A” como un círculo de radio “r” llamado círculo de influencia n de “A”:

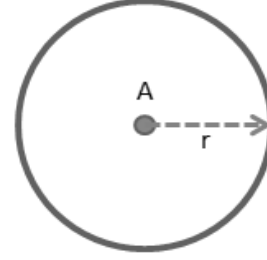


Figura 29: Círculo de influencia de la partícula “A”.

### 3.10. Velocidad

Intentar conocer cómo evoluciona un evento en la naturaleza, significa conocer las leyes o principios con los que varía. Cuando se conocen las leyes que lo definen y sus dependencias, se puede conocer perfectamente cómo evoluciona y por tanto, predecir sus estados en un futuro. Decir que un evento evoluciona de una forma determinada, significa que se conoce su velocidad en cada una de sus partículas (y por tanto su aceleración) en función del resto de eventos dependientes; es decir: se conoce su frecuencia de aparición en relación a cualquier otro evento. De hecho es tan importante que en las ecuaciones o modelos dinámicos que se definirán más adelante, en lugar de hablar de “E” como evento, “E” significará su velocidad (para mayor simplicidad y comodidad en la notación). Se define velocidad:

Velocidad relativa:

Sean 2 sucesos “X<sup>i</sup>” y “X<sup>j</sup>”; se define velocidad relativa de la partícula “K”-ésima del suceso “X<sup>i</sup>” con respecto al suceso “X<sup>j</sup>”, como el cociente de sus variaciones respectivas en dicha partícula:

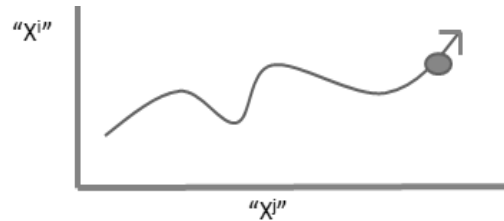


Figura 30: Representación espacio de fases entre los 2 sucesos; el punto oscuro corresponde a la partícula “K”.



$$Vel_K^{X^i \cdot X^j} = \frac{x_{K+1}^i - x_K^i}{x_{K+1}^j - x_K^j} \quad \text{Ecuación 33}$$

Cada valor así calculado, será un vector en “2” dimensiones.

Velocidad absoluta:

Sea un suceso “X<sup>i</sup>”; se define su velocidad absoluta como la suma de los vectores velocidad de cada una de las velocidades relativas de “X<sup>i</sup>” con respecto a cada uno de los demás sucesos.

Cuando se observa un fenómeno muy repetitivo o que ocurre con mucha o más frecuencia que otro, se intuye que tiene mayor velocidad; pero ya se han visto diferentes formas de ver la velocidad. Es muy importante por tanto, conocer las causas por las que la velocidad varía para poder predecir el comportamiento dinámico de un suceso. La aceleración es simplemente una causa de la variación de la velocidad y útil en la modelación numérica que se analizará más adelante.

Sería posible trabajar en espacios de más de 2 dimensiones para calcular la densidad de un suceso? Quizás; habría que analizarlo; lo mismo para la densidad o y otros parámetros.

### 3.11. Densidad / importancia

Cuando se analiza un grupo de “n” sucesos, es interesante conocer la importancia que tiene cada uno en relación al resto; esto se llama “peso” o importancia relativa, ya que es función de todos los demás. Este “peso” viene definido por una variable que es la densidad. Los pesos “W<sub>i,j</sub>” (peso del suceso “j” con respecto el suceso “i”), se calculan sabiendo que para cada suceso “j”:

$$\sum_{j=1}^n W_{i,j} = 1 \quad \text{Ecuación 34}$$

Este concepto de “peso” o “importancia” corresponde directamente con el concepto de “potencia”; es decir: cada suceso

tendrá una capacidad de influencia grande y una capacidad de ser influido pequeña.

Para poder aplicar un peso a cada suceso, se necesita definir el concepto de importancia o trascendencia. Qué significa que un suceso sea más importante que otro?

- Que sus variaciones influyan en “gran medida” sobre el resto de sucesos.
- Que sus variaciones influyan sobre la mayor cantidad del resto de sucesos.
- Que sus variaciones influyen “rápidamente” sobre el resto de sucesos; se llamará “rapidez”.
- Que su periodicidad de aparición sea “elevada” (densidad).
- Que su periodicidad de aparición sea “elevada” (velocidad).
- Etc....

Por tanto, existen muchos puntos de vista con los que analizar la importancia de un suceso; de cualquier manera, el más sencillo sea el primero; para ello, se toma como referencia en siguiente ejemplo siendo generalizable: sea un suceso “E<sub>1</sub>” perteneciente a “Ω” de dimensión “n”; para ver la importancia de cada suceso con respecto “E<sub>1</sub>”, basta con ordenar las siguientes expresiones, siendo la primera relación la correspondiente al suceso de mayor importancia:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E_i}{\partial E_m} / i \neq m; i, m = 1, \dots, n \\ & \rightarrow \frac{\partial E_1}{\partial E_i} > \frac{\partial E_1}{\partial E_j} > \dots \frac{\partial E_1}{\partial E_k} \\ & \frac{\partial E_1}{\partial E_i} = W_{1,i} \quad \text{Ecuación 35} \end{aligned}$$

Parte de este concepto de Potencia, corresponde a la definición de equilibrio, que se analizará más adelante.

En el Trading “tradicional”, se utilizan actualmente diversos índices basados en datos o tendencias más o menos cercanos en el tiempo; uno de estos índices, también llamados osciladores, se basan en la “fuerza” que tiene un

determinado suceso; esto es: se basa en lo que los que lo utilizan llaman “impulso”; esto es totalmente erróneo; en principio, impulso se define como la “masa” multiplicada por la “velocidad”; por tanto, 2 sucesos tienen “impulsos” diferentes a pesar de poder tener velocidades iguales, ya que su “masa” o importancia, pueden también ser totalmente diferentes. El concepto de “impulso” usado en la actualidad, se confunde con el concepto de “tendencia”; es decir: se supone que si un suceso tiene mayor velocidad que otro, “tenderá” a seguir con la misma tendencia más tiempo; y aquí radica el error: cuanta más importancia, más “inercia” tendrá y por tanto, mayor tiempo perdurará su tendencia, sea la que sea. De cualquier forma, a pesar de poder intuir o imaginar qué significa importancia relativa entre sucesos, es necesario cuantificar esta importancia.

Para conocer si un suceso influye en mayor o menor medida sobre otro, se puede proceder del siguiente modo:

- Conocer el rango donde cada suceso trabaja; es decir: la resta del máximo y mínimo valor.
- La variación pues del parámetro, será dividida por el rango calculado anteriormente; esto proporcionará una medida ponderada de su variación.

Sean 2 sucesos “ $X^i$ ” y “ $X^j$ ”; se define densidad relativa de la partícula “ $K$ ”-ésima del suceso “ $X^i$ ” con respecto al suceso “ $X^j$ ”, como el número de partículas de “ $X^i$ ” existentes en el círculo de influencia de “ $K$ ”:

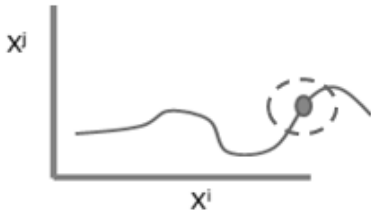


Figura 31: Representación espacio de fases entre los 2 sucesos; el punto oscuro corresponde a la partícula “ $K$ ” junto con su círculo de influencia.

### 3.12. Presión

En cualquier movimiento de un fluido la presión es una de las 2 propiedades más importantes para conocer y predecir su dinámica.

Puede ser considerada incluso, como una “sensación” o “sentimiento”; en el caso de peatones o en el caso de situaciones personales, una persona puede sentirse “presionada” por el entorno o por las condiciones del entorno; estas condiciones pueden ser de tipo económico, social, laboral, etc.... pero la presión como sensación existe y es absolutamente real. Incluso en la propia Economía, existe la sensación de presión; una variable puede estar más o menos presionada en función de otras variables o sucesos; es algo que se analizará más adelante.

Sea “ $Vol$ ” un volumen de partículas en 3D, “ $\rho$ ” la densidad en dicho volumen; se puede pensar en el concepto de presión “ $P$ ” como una definición a partir de la teoría cinética de los gases; por tanto, es proporcional a “ $m$ ” como masa total de las partículas, “ $1/Vol$ ”, “ $u$ ” velocidad media de las partículas, impulso ( $m*u$ ) y “ $N$ ” número de partículas; de esta forma:

$$P \propto \frac{mN u^2}{Vol} = \rho * u^2 * N \propto \rho u^2$$

$$\rightarrow P = \frac{1}{2} \rho u^2$$

Ecuación 36

La constante de proporcionalidad es y ha de ser “ $1/2$ ” pues con este valor, la Presión cumple las ecuaciones de Navier Stokes que más tarde se definirán y analizarán. “ $P$ ” también llamada en astrofísica “Ram pressure” (“ $c$ ” velocidad de la luz, “ $m$ ” masa, “ $E$ ” energía):

$$E = m c^2 = \frac{m}{Vol} c^2 u \propto \rho * Vol$$

$$E \propto P * Vol$$

Ecuación 37

Por tanto, cuanto más grande sea el volumen con la misma densidad o presión, la

Energía será mayor; es una medida de la energía existente y disponible en el volumen.

Sea “Pe” la cantidad de movimiento o impulso nombrado anteriormente:  $Pe=mu$ ; se supone 1 dimensión “x”; “m” constante pero “u” depende en cada punto; así:

$$\int Pe dx \cong \frac{1}{2} m u^2 = E \quad \text{Ecuación 38}$$

La presión es una medida de energía, al igual que la cantidad de movimiento ( $=mu$ ); en este caso, se intenta “normalizar” la medida de masa, transformándola en masa por unidad de volumen: la densidad:

$$P = \frac{Pe}{m} \rho u = Pe \frac{u}{Vol} \quad \text{Ecuación 39}$$

La presión es una medida que afecta desde 2 puntos de vista:

- La dirección o tendencia que toma el suceso analizado y determina su evolución; esto se verá más adelante.
- El transporte de energía; este factor se asemeja y mucho, al factor “k” del modelo K-ε relativo a la Turbulencia que se aplica a las llamadas ecuaciones de Navier Stokes.

El transporte de energía no es más que el transporte de una onda de presión a través de un grupo de partículas; es decir:

- Por un lado cuál es el tiempo que tarda cada partícula en pasar la “información” a las partículas que tiene a su alrededor.
- Y por otro qué pérdida existe en dicha transmisión.

Analizando por ejemplo el caso particular de la vibración de las cuerdas de una guitarra, se sabe que la velocidad “v” a la que vibran es proporcional a la tensión “Tc” que tengan e inversamente proporcional a la densidad “Dc” del material del que están hechas:

$$v^2 = \frac{Tc}{Dc} \quad \text{Ecuación 40}$$

En el caso de este Artículo y trabajando sobre las hipótesis y definiciones realizadas en él, se puede identificar esta Tensión a la Presión; de esta forma, se obtiene lo siguiente, utilizando la expresión calculada anteriormente:

$$u^2 = \frac{Tc}{Dc} = \frac{P}{\rho} \propto \frac{\rho u^2}{\rho} = u^2 \quad \text{Ecuación 41}$$

Se trata por tanto, de una relación consistente en cuanto a unidades; por otro lado y más importante, es que a partir de la expresión calculada aquí, se ha sido capaz de cuantificar la velocidad de vibración de las cuerdas de una guitarra; ello no es extraño por cuanto se trata de una transmisión de energía a través de una onda de choque en un medio determinado.

En el caso por ejemplo de la propagación de una idea o de una moda, la gran diferencia con el mundo físico en general es que la energía de la onda puede variar; este hecho hace recordar el principio de Pascal de los vasos comunicantes:

La fuerza que se aplica a la partícula “A”, será la misma que recibe la partícula “B”, por muchas partículas que existan en el interior del tubo; es más: la fuerza aplicada a “A” se reparte o divide entre las partículas que se encuentren en contacto con “A”, pero todas las partículas reciben la misma fuerza que “A”:

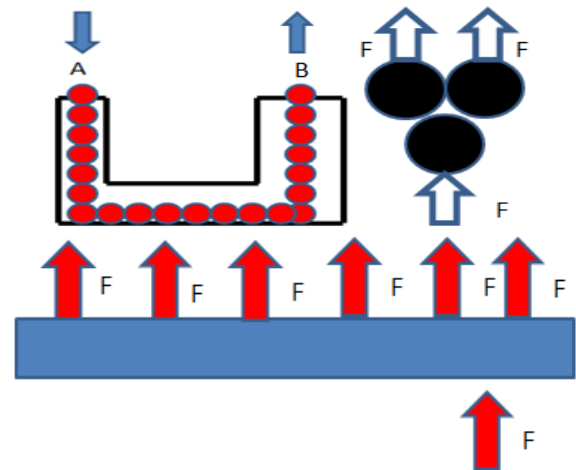


Figura 32: Tubería en “U” rellena de partículas; la fuerza aplicada a “A” se reparte sin reducirse.

Esto, se puede ver claramente al empujar una barra.

Las implicaciones de este hecho son enormes ya que se dispone por tanto, de una herramienta para poder cuantificar la Presión en función de la velocidad de propagación de una onda de presión. Esto tiene innumerables aplicaciones como dinámica de sucesos económicos pero también en dinámica de peatones y mil aplicaciones más.

### 3.13. Temperatura

De nuevo en términos de la teoría cinética de los gases, se puede calcular la presión para un 1 mol de moléculas; entonces, siendo “ $N_A$ ” es el número de Avogadro, “ $M$ ” la masa molecular, “ $R_g$ ” es la constante universal de los gases (en este caso depende de la velocidad, la densidad, la presión, etc), “ $u$ ” la media de las velocidades de las moléculas y “ $T$ ” la temperatura (“ $K$ ” constante de proporcionalidad):

$$P * Vol = m u^2 N_A = R_g * T \rightarrow$$

$$T \propto M * u^2 \propto u^2$$

$$\rightarrow P \propto \rho T \rightarrow P = K \rho T \rightarrow$$

$$\rightarrow T \propto \frac{P}{\rho K} \quad \text{Ecuación 42}$$

En el caso del agua, por ejemplo, un aumento de la temperatura implica un aumento de la velocidad media (vibración) de las moléculas (movimiento browniano); lógicamente, este aumento implica una mayor facilidad para transmitir el calor al estar más moléculas en contacto; numéricamente, esto se verá más adelante:



Figura 33: Mayor difusividad y por tanto, mayor “mezcla” entre fluidos calientes, frente a fríos.

### 3.14. Compresibilidad

Si se piensa por ejemplo en una variable física o económica cualquiera, es fácil percatarse de que dicha variable oscila normalmente entre un máximo y un mínimo; es como si el suceso en cuestión se resistiese a variar; es más: cuanto más cerca se encuentra de ciertos límites, más le cuesta hacerlo. Por otra parte, si supera un valor determinado, el suceso se “dispara” como no siguiendo las leyes o pautas que seguía anteriormente.

Para cuantificar este hecho constatable, es necesario definir el concepto de compresibilidad.

En un conjunto de partículas, cada una de ellas puede o no puede moverse en función de lo que el resto de partículas le dejen hacerlo; este hecho de “permitir” el movimiento, es lo que se denomina compresibilidad. Un fluido será más compresible si permite mayor movimiento a sus partículas y viceversa.

Por ejemplo, sea un grupo de bolas de billar y otro grupo de bolas de tenis; en el caso de las bolas de billar, la compresibilidad es muchísimo menor:



Figura 34: Bolas de billar frente a bolas de tenis; ausencia o imposibilidad de movimiento en el plano en el primer caso.

Efectos como el Helmholtz (reverberación de una corriente de aire; se aprecia como el aire “vibra” al abrir las ventanillas de un coche en la carretera), es causa directa de la compresibilidad del aire; si fuera agua, no existiría....



Figura 35: Reverberación y vibración que molesta a nuestros oídos, al abrir las ventanillas de un vehículo en movimiento.

Se supone 1 partícula “A” que se encuentra en el centro de un grupo; otra partícula se mueve entre los 2 círculos. La partícula “entrante”, le costará más acercarse a la partícula central, cuanto más cerca se encuentren. El radio “a” es esencial para poder cuantificar la compresibilidad del fluido de donde son las 2 partículas representadas:

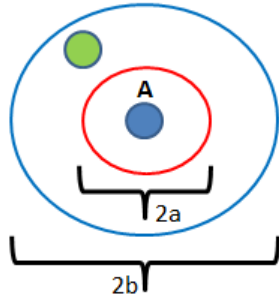


Figura 36: Radio menor y mayor y zona de compresibilidad de una partícula “A”.

Por otra parte, el radio del círculo grande, también es básico, por cuanto define la distancia máxima entre ambas partículas, superada la cual, la segunda partícula ya no está influenciada por la partícula central; es decir: es como si superado “b” ambas partículas tienden a no interactuar. 3 posibles definiciones sobre compresibilidad:

- “Z”: “Vol<sub>m</sub> “es un volumen molar, “R” es la constante del fluido. “T” es la temperatura; “R” depende de “a” y “b”:

$$Z = \frac{P Vol_m}{RT} \quad \text{Ecuación 43}$$

- “1/β” (“Vol” es el volumen):

$$\beta = \frac{\partial P}{\partial Vol} Vol \quad \text{Ecuación 44}$$

- Presión o variación de densidad (en 1 dimensión o dirección “x”):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad \text{Ecuación 45}$$

### 3.15. Viscosidad

Un coche situado en la cola producida por un semáforo en rojo, emprenderá su movimiento cuando el coche que le precede se haya movido; esto es: lo hará con un cierto tiempo de retardo ante el movimiento del otro vehículo (tiempo de retardo o “T<sub>d</sub>”). Este retardo ante una acción, también ocurre cuando el precio del petróleo cambia debido a la variación del índice de la Bolsa-Mercado de Nueva York; no lo hace inmediatamente. Se define Viscosidad como: “Viscosidad = μ = 1/T<sub>d</sub>”.

$$\mu = \frac{1}{T_d} \quad \text{Ecuación 46}$$

Otros casos para apreciar este tiempo:

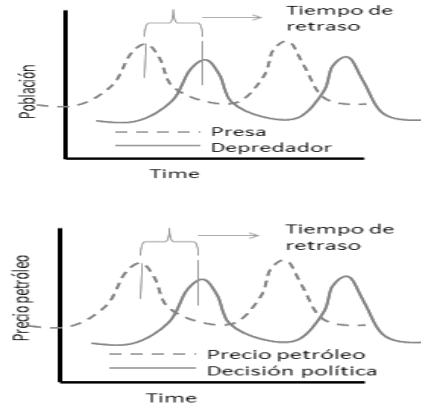


Figura 37: Retraso temporal de Input y output entre señales de: número de presas y depredadores en un entorno, precio del petróleo e implantación de cierta medida o decisión política.

Este retraso entre input y output (acción / reacción), se puede constatar también en un sistema spring-damper de un sistema de amortiguación; en términos de ingeniería de coches de competición, la masa suspendida responde con cierto retraso ante las vibraciones producidas por irregularidades del asfalto; recordar la posible representación y cuantificación de las relaciones dinámicas entre



sucesos a través de “ligaduras” que se ha definido anteriormente.

Se calcula ahora, el tiempo de reacción entre 2 partículas de un fluido (en este caso, el fluido es un fluido “tradicional”), para transmitir una onda sonora. Sean las coordenadas de este evento: “C” es la velocidad del sonido (onda de choque) en un fluido, “R” es la constante del fluido, “x” es el desplazamiento medio de las partículas (como un movimiento browniano), “P” la presión, “t” es el tiempo y “N<sub>m</sub>” el número de partículas en 1 metro lineal, “N<sub>A</sub>” es el número de Avogadro:

$$T_d = \frac{1/C}{N_m} = \frac{1}{C^3 \sqrt{\frac{P}{RT} N_A}} = \frac{1}{C^3 \sqrt{\rho N_A}}$$

Ecuación 47

La viscosidad de Einstein es (“D” es la difusividad y “r” el radio medio de las partículas o moléculas):

$$\mu_E = \frac{RT}{N_A} \frac{1}{6\pi D r} / x^2 \propto D * t$$

$$T_d = \sqrt[3]{\frac{\mu_E 6\pi D r}{P C^3}}$$

Ecuación 48

Es posible entonces en este momento, hacer una clasificación de los fluidos contra “T<sub>d</sub>”. Para eso, es necesario calcular todos con la misma presión y temperatura. La velocidad del sonido “C” (propagación de una onda de presión u onda de choque), para cada fluido, depende de la variación de la presión, frente a la densidad (recordar las cuerdas de una guitarra); es decir:

$$C \propto \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}$$

Ecuación 49

Esta expresión equivale a: la velocidad del sonido, depende de la temperatura “T”. Esto es muy importante:

$$C \propto T$$

Ecuación 50

Desde otro punto de vista, tiene un grupo de partículas y entre ellas, hay un muelle entre partículas (o volumen de fluido completo) con una constante “K”; de la ley de Hookes, es (“x” desplazamiento, “u” velocidad, “t” tiempo):

$$F = Kx = m \frac{u}{t}$$

$$K = \frac{m C^2}{N_A \mu_G} \propto \frac{m}{\mu_G}$$

Ecuación 51

Este “tiempo de retardo” o “fase de retardo” (entre la señal de entrada y la de salida), puede producir curvas de Lissajous: por ejemplo:

En un caso de aleteo, se representa la posición del ala frente a la sustentación generada por la misma, con diversas frecuencias de vibración;([27], [30] Timoteo Briet Blanes):

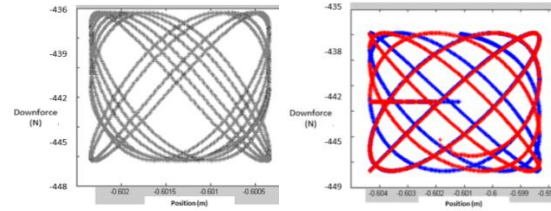


Figura 38: Curvas de Lissajous creadas a partir de la posición y fuerza de sustentación de un ala bateando o aleteando para 2 frecuencias 40 Hz y 10 Hz, respectivamente.

La Viscosidad, no es más que una especie de fuerza de fricción entre las partículas de un evento o fluido. Pero qué es la Difusividad “D” como propiedad del fluido? Es la tendencia a desvanecerse o difuminarse. En algunos artículos, se define viscosidad=constante/D; cuanta más grande sea “T” mayor, más rápida será una mezcla de fluidos en términos de difusividad:

$$D \propto \frac{T}{\mu r}$$

Ecuación 52

“r” es el radio medio de las moléculas.

Comparando esto, con la relación de Einstein para la difusividad (“ $K_B$ ” es una constante de Boltzmann) (muy similar):

$$D = \frac{K_B T}{6\pi\mu r} \quad \text{Ecuación 53}$$

La viscosidad es una función de la Densidad; es decir: la Viscosidad, depende de la Densidad por una función “ $f$ ”: (si la densidad es mayor, la viscosidad también):

$$\mu = f(\rho) \quad \text{Ecuación 54}$$

En la dinámica de los peatones, por ejemplo, una mayor densidad implica una mayor velocidad.

Uno de los mayores problemas con los que puede trabajar un matemático (o un economista) es saber si 2 sucesos son dependientes o independientes y en qué grado. Para saber si 2 sucesos son dependientes o no:

- 2 sucesos son más dependientes, cuanto más se acerque el “ $T_d$ ” o brecha de reacción a 0.
- Si 2 sucesos son más independientes, la “ $T_d$ ” o brecha de reacción se acerca más a infinito.

Si “ $T_d$ ” es 0, es decir, la brecha de reacción es “inmediata”, la viscosidad es infinita, es decir, las partículas actúan como las moléculas de un super-sólido; es el caso del cristal, llamado también material amorfo por la particular disposición de sus moléculas. Si “ $T_d$ ” no es infinito, significa que las partículas actúan como las moléculas de un fluido. Encontrar los límites de la viscosidad, para determinar si 2 sucesos son dependientes o no, no es fácil; de hecho, 2 sucesos pueden confundirse como independientes, al tener una “ $T_d$ ” extremadamente grande; si esta brecha es muy grande, pueden considerarse independientes, porque la variación o respuesta de un suceso puede ser causada por otro suceso diferente.

Más adelante, se analizará empíricamente el proceso para calcular la velocidad “ $u$ ” de una onda de presión en un grupo de peatones; con este valor se puede:

- a) Asignar un valor de Presión “ $P$ ”.
- b) Calcular la viscosidad “ $\mu$ ”.

Una de las aplicaciones novedosas de esta definición de viscosidad es utilizarla para generar un nuevo enfoque de software de resolución de las ecuaciones de Navier Stokes; este nuevo enfoque, podría proporcionar una mayor velocidad de resolución en códigos computacionales CFD....

En [60] Timoteo Briet Blanes, se analizan diferentes causas para que la materia o las partículas en general, se agreguen formando diferentes tipos de grupos; la viscosidad es esencial para estas agregaciones; por ejemplo, la formación de grupos de hojas por la calle, es causa directa de la viscosidad entre las hojas; el origen de esta acumulación es la ralentización de una sola hoja (se verá más adelante pero este hecho, se define como una inestabilidad o semilla del sistema resultante):



Figura 39: Grupo de hojas acumuladas por acción del viento.

La Universidad de Stanford, publica en redes sociales un experimento que ilustra perfectamente lo explicado en este apartado: la importancia y transcendencia de la viscosidad en el agrupamiento de partículas; el experimento consta de una serie de recipientes distribuidos en fila en los que en cada uno de ellos existe un mismo fluido de distinto color; se hace deslizar una gota del mismo fluido de un color determinado y se aprecia que sólo se agregará al recipiente que contenga fluido con su mismo color. El hecho de tener un color diferente, implica que tenga una viscosidad diferente; quizás también implique que tenga una tensión superficial diferente también, por supuesto que sí; en definitiva las diferencias son una unión de diferentes propiedades:

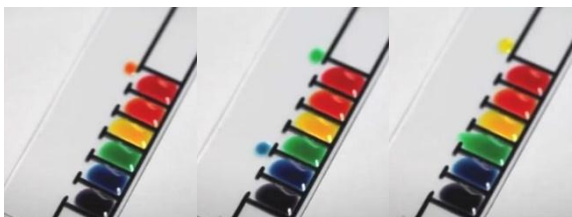


Figura 40: Las gotas deslizante, se adhiere y une al recipiente del mismo color.

De hecho, hay más: si se distribuyen gotas de diferentes colores a lo largo de una placa, a lo largo del tiempo, las gotas del mismo color se van uniendo:

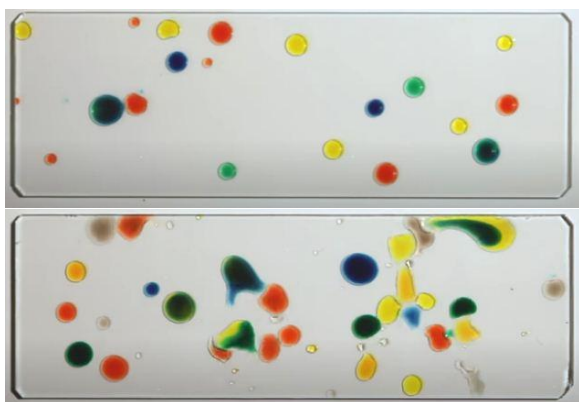


Figura 41: Las gotas del mismo color, se van uniendo a lo largo del tiempo, debido a diferentes propiedades del fluido como viscosidad, tensión superficial, etc.

En [60] Timoteo Briet Blanes, también se analizan otras causas de agregación de la materia, tales como la depresión; esta depresión produce una succión que arrastra partículas produciéndose la agregación. En un apartado posterior, se analizará el caso de interacciones entre las fuerzas que generan la agregación de la materia, en un caso muy particular pero a la vez general, como es el de las galaxias.

➔ Densidad y transmisión de información

A pesar de haber definido ya anteriormente el concepto de densidad, y una vez se ha definido y analizado el concepto de presión y densidad y sus consecuencias, es necesario ir un paso atrás, para terminar con la densidad. La densidad y la viscosidad están estrechamente unidas; como se verá más adelante, la reacción

que tienen los peatones es diferente dependiendo si se encuentran más cerca unos de otros; esto es: la viscosidad depende de la densidad (y viceversa por supuesto). Evidentemente si la densidad aumenta existen más partículas por unidad de medida, con lo que el tiempo de reacción ( $1/\text{viscosidad}$ ) es menor si se mantiene la velocidad de transmisión de una onda de presión. En caso de que no varíe el gap de reacción, la viscosidad lógicamente varía; este hecho es básico para entender futuras dinámicas y comportamientos.

Si “c” es la velocidad de una onda de presión en un medio con partículas (la presión es una energía):

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{Ecuación 55}$$

En el agua por ejemplo:  $E = 2.15 \cdot 10^9$  N/m<sup>2</sup> con densidad = 999.8 Kg/m<sup>3</sup>,  $c=1466.4$  m/s a 0° Celsius; s En sólidos:

- Hormigón: 3200 – 3600 m/s.
- Granito: 5950 m/s.
- Diamante: 12000 m/s.

Es decir: la presión y por tanto la densidad, y la viscosidad, están estrechamente unidas. A pesar de que la densidad se encuentre en el denominador, a mayor densidad mayor velocidad “c” de transmisión de la onda de presión, ya que el módulo de Young, varía más que la densidad. De hecho, a “E” se le denomina Dureza e indica justamente eso: lo resistente que es el material a la deformaciones.

### 3.16. Tensión y Expansión

La tensión “TE”, es la fuerza que ejerce un fluido para no expandirse (mayor separación entre partículas); puede entenderse como la fuerza que realizan las partículas, para no expandirse (“TE” es la tensión, “Z” compresibilidad, “ρ” densidad, “K” es una constante):

$$TE \left( \frac{Z}{\rho} \right)^{1/2} = K \quad \text{Ecuación 56}$$

Se puede definir la tensión, por (“T” temperatura, “P” presión, “Vol” volumen):

$$\frac{\partial P}{\partial T}, \frac{\partial Vol}{\partial P} \quad \text{Ecuación 57}$$

Fuerza de expansión “ $\alpha$ ”; el subíndice “n” entre paréntesis ( $A_n$ ) significa variable “A” con “n” constante:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{Vol} = \frac{\alpha}{Z} \quad \text{Ecuación 58}$$

$$\alpha = \frac{1}{Vol} \left( \frac{\partial Vol}{\partial T} \right)_p = - \frac{1}{\rho_d} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

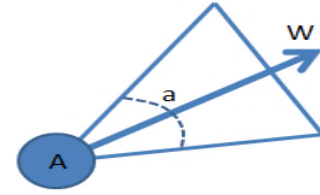
$$Z = \frac{1}{Vol} \left( \frac{\partial Vol}{\partial P} \right)_T \quad \text{Ecuación 59}$$

### 3.17. Variación Aleatoria de la Aceleración

En todo proceso de medida, existe la incertidumbre acerca la propia medida debida a diversas razones; por tanto, introducir una variación aleatoria “ $R_w$ ” de la aceleración “ $W$ ” de una partícula es absolutamente necesario. Existe un modelo numérico llamado modelo de Fokker Planck, que simula la dinámica de una señal bajo los efectos de una aleatoriedad y bajo determinado contexto de evolución, pero lo que se pretende ahora, es definir esta dinámica estocástica para poder introducirla más adelante en unas nuevas ecuaciones o modelo matemático. cuando una partícula se mueve, hay una variación atribuible a la aleatoriedad en la dirección del movimiento; este valor se denota por “ $R_w$ ”; se puede definir también como ruido o señal estocástica o Wiener, que siempre está presente, bien por las imprecisiones de las medidas o por la propia naturaleza del suceso o de los cálculos.

Se analiza a continuación el problema a resolver, trabajando en 3 dimensiones como caso

particular extensible a cualquier dimensión. Sea una partícula “A” con vector de aceleración potencial “ $W$ ” (esta aceleración será la resultante de la aplicación de cualquier modelo dinámico sobre el movimiento de la partícula). Esta partícula “A” pertenece a un suceso “ $X^i$ ” y se representa frente a cualquier de los otros sucesos “ $X^j$ ”. Se define un triángulo con “A” como vértice principal en la dirección de “ $W$ ”; este triángulo se define como triángulo de influencia potencial. Si la velocidad calculada mediante el Potencial es “alta” ( $\zeta?$ ), el ángulo “a” es “bajo” ( $\zeta?$ ):



$$a \in [-\alpha, \alpha]$$

Figura 42: Triángulo de influencia potencial.

El desplazamiento angular aleatorio “x” promedio de cada partícula, es proporcional a “T” y “1/viscosidad”; es decir:

$$x \propto \frac{T}{\mu} \propto \frac{u^2}{\mu} \quad \text{Ecuación 60}$$

En un movimiento Browniano, cada partícula posee un movimiento o vibración aleatoria; estos movimientos son una distribución Normal en cada coordenada, con “f” como función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{Ecuación 61}$$



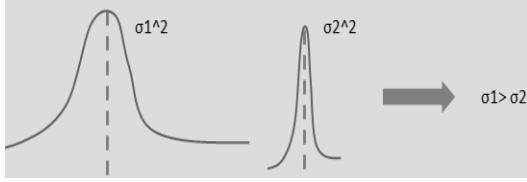


Figura 43: Función de densidad del valor estocástico.

La función de densidad se convierte en la siguiente, siendo “r” el vector aceleración potencial:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-W)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in [-2\pi, 2\pi]$$

$$\vec{W} = (\alpha, \theta) \quad \text{Ecuación 62}$$

$$\alpha, \theta \in [0^\circ, 360^\circ]$$

“α” y “θ” son las coordenadas polares del vector velocidad “W” y ambas son distribuciones Normales.

Resumen: el ángulo “α” depende de la velocidad de la partícula; este ángulo es menor si la velocidad “W” (valor absoluto de su módulo) es mayor y viceversa, incluso el ángulo puede ser de 360°, si la velocidad es cero; es decir: esta definición de “R<sub>w</sub>”, contiene el movimiento browniano. Dado que son vectores, se representa:

$$\vec{R}_W^E = \vec{R}_W \quad \text{Ecuación 63}$$

Es posible quizás, incluir este valor como fuerza exterior del sistema.

### 3.18. Energía Cinética y Potencial

Se utilicen o no principios de la física variacional o Lagrangiana, la energía que posee un sistema y la energía que es capaz de alcanzar, son 2 valores extremadamente importantes, ya que definen la dinámica del sistema. La energía debida a la velocidad de una partícula es la llamada energía cinética (K) y la energía que las partículas son capaces de alcanzar corresponde a la energía potencial (V).

La energía cinética, tradicionalmente se ha definido como (“v” es la velocidad):

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{Ecuación 64}$$

Cuando 2 sucesos evolucionan, uno de ellos suele ser más importante que el otro. La masa “m” que aparece en la expresión anterior de la energía cinética, es la “importancia” del suceso analizado; es decir: matemáticamente esta masa es un “peso” que “resalta” o “pondera” la velocidad del suceso y por tanto, aumenta su energía cinética “K”, al igual que su inercia.

Se sabe a partir de relaciones anteriores:

$$P = \frac{1}{2} \rho v^2 \rightarrow \frac{K}{\text{volumen}} = P$$

$$\text{Ecuación 65}$$

Es decir: la presión “P” es una medida de la energía cinética por unidad de volumen; muy importante esta consecuencia. Pero también se obtiene otra relación y es que la importancia “m” del suceso, depende de la su densidad: m=m(ρ); es una relación muy “obvia” pero aplicada aquí, es importante:

$$m = \text{volumen} * \rho \quad \text{Ecuación 66}$$

La relación entre la fuerza “F” que se aplica a una partícula en función de la energía potencial “V” existente o “disponible” entre 2 puntos “a” y “b” es (“x” única coordenada):

$$V = \int_a^b F dx \quad \text{Ecuación 67}$$

Dependiendo del problema a resolver, ambas energías, principalmente la energía potencial, cambia de expresión; sea un sistema de partículas con densidad determinada, sea un problema unidimensional “x”; la aceleración y la fuerza que el potencial suministra a una partícula, es proporcional a la variación de presión e inversamente proporcional a la densidad:



$$\frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{\rho} \rightarrow \nabla P \frac{1}{\rho}$$

$$F = m \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{\rho} \right) = m \left( \nabla P \frac{1}{\rho} \right) \quad \text{Ecuación 68}$$

La energía Potencial, como se ha dicho, es la energía que puede alcanzar una partícula y por tanto, dependiendo de qué problema se esté analizando, quizás tenga una expresión u otra; esta “expresión” diferente, se refiere al valor de “P”, es decir: de la presión; este es el valor que cambiará o puede cambiar en su caso. A continuación, se enumeran algunos de los valores o expresiones que puede tener:

- Tradicionalmente, la energía potencial “E<sub>p</sub>” de una partícula de masa “m” situada a una altura “h”, siendo “g” la aceleración de la gravedad es:

$$E_p = mgh \approx \rho gh \quad \text{Ecuación 69}$$

En esta ecuación, “m” hace el papel de factor de importancia, al igual que podría hacerlo la densidad “p”. La altura “h” se define como la distancia recorrida por la partícula.

Expresiones para la “P” o el potencial por tanto, en función de diferencias:

- Diferencia entre oferta y demanda; cuanta más diferencia haya, mayor “ritmo” o velocidad en la economía; es una definición quizás un poco “vaga”, pero puede servir y ser “útil” en ocasiones.
- Diferencia entre ingreso y gastos.
- En el caso por ejemplo del modelo poblacional evolutivo de presa-depredador (Lotka-Volterra), diferencia entre número de presas y número de depredadores.
- Etc....

La definición de un potencial a partir de una diferencia, no es mala idea y de hecho, puede resultar ideal y relativamente sencillo: cuanta más diferencia exista entre ambas variables elegidas para el estudio en particular, mayor aceleración producirá sobre la variable o

suceso estudiado; pero claro, estos sería realmente así si el sistema estuviera en equilibrio; si no lo está, las aceleraciones de un suceso quizás sean debidas a dicha inestabilidad o no a la variación de “P” ; por tanto, es necesario calcular el equilibrio del sistema y a partir de dicho estado, calcular las diferencias y el potencial. Como ya se vio, si se asemeja la relación entre sucesos como muelles, no todos los muelles han de estar en equilibrio en el sentido de no estar en tensión, sino de no moverse “apenas”; matemáticamente esto se puede expresar diciendo que las derivadas de cada suceso con respecto al resto, ha de ser lo mínimo posible;: dado un suceso “E<sub>i</sub>” perteneciente a “Ω”, i=1,...,n:

$$\frac{\partial E_i}{\partial E_j} \rightarrow \text{mínimo} / i \neq j \quad \text{Ecuación 70}$$

En el apartado correspondiente al modelo dinámico de Mínima Energía, se analizarán distintos métodos para calcular el potencial de un sistema dinámico cualquiera, conociendo su dinámica.

### 3.19. Trabajo

Cuando una partícula se mueve a lo largo de 2 puntos “1” y “2”, lo hace produciendo un Trabajo; esto es: una Fuerza “F” por cada unidad de longitud “d” ( “K<sub>1</sub>”, “K<sub>2</sub>” energías cinéticas de los puntos “1” y “2”; “d” distancia entre ambos puntos):

$$J = Fd = K_2 - K_1 \quad \text{Ecuación 71}$$

Y lo que es más importante, permite conocer el valor de “F”:

$$F = \frac{K_2 - K_1}{d} \quad \text{Ecuación 72}$$

Por otra parte, se pueden obtener algunas relaciones importantes donde interviene el trabajo aquí definido, sabiendo desde un punto de vista termodinámico, que la variación de energía es proporcional a la variación de masa\*temperatura:

$$J = Fd \propto Pd \quad \text{Ecuación 73}$$

Y más:

$$\begin{aligned} P &= \rho T \rightarrow \\ J &\propto \rho T d \\ J &\propto \text{energía} \cdot d \end{aligned} \quad \text{Ecuación 74}$$

### 3.20. TKE - Energía Cinética Turbulenta

Es un tipo de energía que representa la energía de una partícula en todas las dimensiones de su espacio de fases; como ejemplo extensible a más dimensiones, si la partícula tiene como componentes de la velocidad ( $u, v$ ); la “tilde” encima de cada componente, indica que son sus desviaciones estándar (“N” número de muestras, la barra encima de “u” indica la media):

$$\tilde{u} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})^2}{N-1}} \quad \text{Ecuación 75}$$

De esta forma:

$$TKE \propto \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 \quad \text{Ecuación 76}$$

Esta proporcionalidad es muy importante, puesto que dicho factor se puede considerar de varias formas:

$$\begin{aligned} TKE &= m(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \\ TKE &= \rho(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \end{aligned} \quad \text{Ecuación 77}$$

Por tanto y a la luz de la expresión, se trata de una energía y es la expresión de una presión “global” en todas las coordenadas del espacio de fases.

### 3.21. Similitudes entre Sucesos y Modelos Numéricos

Para poder saber si 2 fenómenos son análogos, se puede intentar detectar patrones en los modelos numéricos que describen ambos eventos; y viceversa; ambos sentidos, son extremadamente importantes. Richard Feynmann: “MATEMÁTICAS: A los que no saben de matemáticas les resulta difícil transmitir un sentimiento real en cuanto a la belleza, la belleza más profunda, de la naturaleza. Si quieres aprender sobre la naturaleza, apreciar la naturaleza, es necesario entender el lenguaje en el que ella habla.”;

“Un modelo matemático para un científico, aunque sea su deseo más deseado, aunque haya invertido mucha parte de su vida, aunque gracias a ella se haya casado y sea feliz, si no explica la realidad, el modelo es erróneo”.

Son 2 frases que ilustran perfectamente la necesidad de conocer las entrañas de un fenómeno para poder expresarlo mediante un modelo matemático; de igual forma, conociendo perfectamente el fenómeno-modelo, es posible discernir semejanzas entre fenómenos-modelos. Se enumeran “algunos” de los muchos fenómenos y modelos matemáticos que son semejantes de alguna forma entre ellos y que más adelante se apreciará más concretamente su semejanza con las llamadas ecuaciones de Navier Stokes (que se aplican a la dinámica de fluidos):

#### 3.21.1. Modelo Presa-Depredador

“X” depredador e “Y” presa; el sistema de ecuaciones diferenciales que describen la variación de población de ambas especies es:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy \end{aligned} \quad \text{Ecuación 78}$$

Es un modelo muy simple con “x” e “y” iniciales y punto fijo (a/b, c/d):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \frac{dx - c}{by - a} \quad \text{Ecuación 79}$$

Espacio de fase:

$$V = dx - c \ln(x) + by - a \ln(y)$$

Ecuación 80

Algunos espacios de fase con diferentes iniciales “x” e “y”, y “a”, “b”, “c” y “d”:

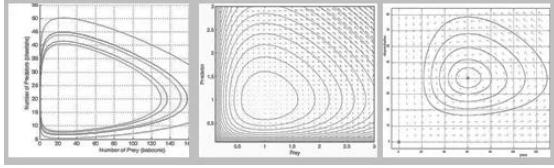


Figura 44: Espacios de fases del modelo presa-depredador dependiendo de valores iniciales.

Ahora, se representan algunas imágenes sobre el típico problema de la cavidad “2D” cuadrada con movimientos de fluidos en su interior:

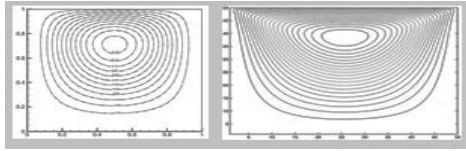


Figura 45: Espacios de fases de clásico problema del movimiento de un fluido en un recinto bidimensional.

De hecho, se pueden variar las condiciones de contorno o las condiciones iniciales en el problema de la cavidad, para “adecuar” sus atractores a la geometría o estructura buscada:

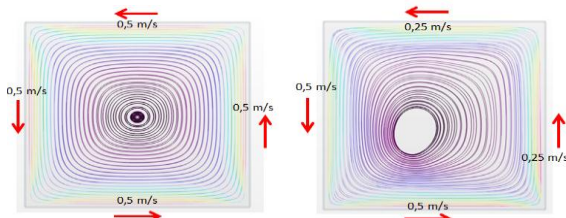


Figura 46: Variación de la condición de contorno de la pared de la derecha, para cambiar la zona atractora.

Geometrías muy similares, por tanto sus modelos numéricos deberían serlo también...

### 3.21.2. Modelo Romeo y Julieta (ecuación del Amor)

La expresión básica de este modelo es (“R” hombres, “J” mujeres):

$$\begin{aligned} \frac{dR(t)}{dt} &= aJ(t) \\ \frac{dJ(t)}{dt} &= -bR(t) \end{aligned} \quad \text{Ecuación 81}$$

Existen otras variaciones del mismo modelo de evolución añadiendo y especificando funciones que actúen como catalizadores acelerando o desacelerando sentimientos como la estabilidad económica, el género y la oposición familiar, o incluir derivadas parciales para que “R” y “J” no dependan sólo de “t”, matematizando expresiones como: “quiero más a una chica si la chica me quiere”, etc:

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= -\alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 (1 - \varepsilon_1 X_2^2) + A_1, \\ \frac{dX_2}{dt} &= -\alpha_2 X_2 + \beta_2 X_1 (1 - \varepsilon_2 X_1^2) + A_2, \end{aligned} \quad \text{Ecuación 82}$$

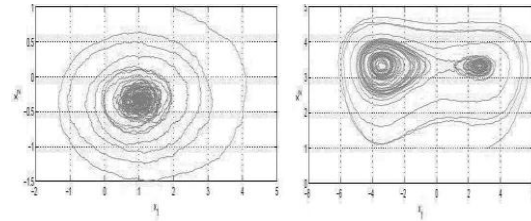


Figura 47: 2 Espacios de fases del modelo Romeo-Juliet dependiendo de las condiciones iniciales.

Se observa la inclusión de la llamada ecuación logística que se analizará más adelante; dicha ecuación está incluida también en las ecuaciones de Navier Stokes.

### 3.21.3. Modelo Lanchester

Son unas ecuaciones que durante la Segunda Guerra Mundial, predecían las pérdidas de aviones en un combate aéreo (“A” y “B”, número de aviones de ambos bandos):

$$\frac{dA(t)}{dt} = -bB(t)$$

$$\frac{dB(t)}{dt} = -aA(t) \quad \text{Ecuación 83}$$

Entonces, dada la evidente similitud ¿tienen las ecuaciones Romeo-Julietta y Lanchester, algunas similitudes como fenómeno? ¿Los eventos de Romeo-Julietta y los eventos de Lanchester son similares por tanto?; ¿O Romeo y Julieta, es similar al problema de Presa-Depredador o Cavity?

#### 3.21.4. Schrodinger ecuación

Esta ecuación ([46] D. Cabrera, P. Fernández de Córdoba, J.M. Isidro, J.M. Valdés Placeres y J. Vázquez Molina) que principalmente se aplica a calcular dinámicas de partículas subatómicas, se asemeja también mucho a las ecuaciones de Navier Stokes, si bien en este caso, se trabaja en el plano complejo y con la llamada función de ondas:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t)$$

Ecuación 84

Se puede demostrar, que las ecuaciones de Navier Stokes y la ecuación de Schrodinger están íntimamente unidas y se derivan mutuamente ([103] Olga Choustov, [104] Albert Chern)

#### 3.21.5. Alan Turing - modelo biológico

Es un modelo capaz de describir la formación y/o evolución de muchos factores biológicos, como por ejemplo, las manchas sobre la piel de algunos animales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(u, v) \end{aligned}$$

Ecuación 85

Se aprecia la similitud que tiene con las ecuaciones de Navier Stokes (más en concreto con la ecuación del calor o difusión).

#### 3.21.6. Fokker Planck modelo numérico

Es un modelo ([62] José Rafael Caro Barrera) encargado de simular la dinámica de una señal Browniana o Wiener, trabajando con el término de arrastre o fricción (viscosidad):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} [D_i^1(x_1, \dots, x_N) f] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [D_{ij}^2(x_1, \dots, x_N) f]$$

Ecuación 86

No hay mucho más que decir al respecto el parecido con las ecuaciones de Navier Stokes, pues es muy evidente. Simplemente añadir y recordar, que el movimiento Browniano, posee intrínsecamente la propiedad de difusividad; de hecho, si en estas ecuaciones se elimina la viscosidad, se obtiene la ecuación del calor.

#### 3.21.7. Modelo económico Black Scholes

Es un modelo encargado de analizar el comportamiento económico de ciertos valores, y predecir sus precios a medio o corto plazo. En nuestra opinión, fue un gran trabajo de incorporación de la física y las matemáticas a la economía, hasta el punto que obtuvieron el premio Nobel por ello; se trata de uno de los mayores avances que se alcanzaron en su tiempo, sobre la incorporación, ya imparable, de la física y de las matemáticas a la modelización de la economía; este es el hecho de analizarla con un poco más de detalle.

Esta ecuación nos dice el precio al que debe venderse un derivado financiero a lo largo del tiempo.

##### 3.21.7.1. Definiciones y similitud por términos

La ecuación es la siguiente, junto a su nomenclatura:

t=tiempo, S=Precio del producto, V=Precio del derivado, r=Tasa de interés de riesgo,  $\sigma^2$  (Sigma)=volatilidad de las acciones:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0$$

Figura 48: Expresión y nomenclatura de la ecuación o modelo de Black Scholes.

Este modelo tiene un “aceptable” parecido con las ecuaciones de Navier Stokes, sin más que identificar sus partes:

**The Navier-Stokes Equations**

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \cdot \nabla^2 \vec{v}$$

Labels: MASS (Density of the Fluid), ACCELERATION (Change in Velocity over Time, Speed and Direction of Fluid), FORCE (External Forces such as Gravity, Pressure Gradient, Internal Stress Forces (viscous effects)).

Figura 49: Ecuaciones de Navier Stokes.

Identificando términos en ambos modelos:

1.  $\frac{\partial V}{\partial t} \sim \frac{\partial u}{\partial t}$
2.  $\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
3.  $rS \frac{\partial V}{\partial S} \sim u \frac{\partial u}{\partial x}$
4.  $-rV \sim -fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$

Ecuación 87

Es más: se demuestra matemáticamente, la relación entre Navier Stokes y Black Scholes hasta el punto que se pueden derivar mutuamente.

### 3.21.7.2. Ecuación de Black Scholes / Ecuación del Calor

En un primer lugar, y observando con atención la expresión del modelo analizado, si se eliminasen los términos que describen el precio de los derivados y también su tasa de variación, la ecuación sería exactamente la ecuación de difusión (calor). Se ve a continuación cómo

transformar el modelo de Black Scholes en la ecuación de difusión:

$$(\partial V / \partial t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 (\partial^2 V / \partial S^2) + rS (\partial V / \partial S) - rV = 0$$

Ecuación 88

Primer cambio de variable:  $u = V e^{-rt}$   
 $V = u e^{rt}$

$$\begin{aligned} (\partial u / \partial t) &= (\partial V / \partial t) e^{-rt} - V r e^{-rt} \\ (\partial u / \partial t) + V r e^{-rt} &= (\partial V / \partial t) e^{-rt} \\ (\partial V / \partial t) &= e^{rt} (\partial u / \partial t) + V r = e^{rt} (\partial u / \partial t) + r u e^{rt} \\ (\partial u / \partial S) &= e^{-rt} (\partial V / \partial S) \\ (\partial V / \partial S) &= e^{rt} (\partial u / \partial S) \\ (\partial^2 V / \partial S^2) &= e^{rt} (\partial^2 u / \partial S^2) \end{aligned}$$

La ecuación se transforma en:

$$\begin{aligned} e^{rt} (\partial u / \partial t) + r u e^{rt} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 e^{rt} (\partial^2 u / \partial S^2) + r S e^{rt} (\partial u / \partial S) - r u e^{rt} &= 0 \\ (\partial u / \partial t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 (\partial^2 u / \partial S^2) + r S (\partial u / \partial S) &= 0 \end{aligned}$$

Ecuación 89

Segundo cambio de variable:  $S = e^x$   
 $x = \ln S$   
 $(\partial S / \partial x) = e^x$   
 $(\partial x / \partial S) = 1 / S$

$$(\partial u / \partial x) = (\partial u / \partial S) (\partial S / \partial x) = (\partial u / \partial S) e^x = S (\partial u / \partial S)$$

$$\begin{aligned} S^2 (\partial^2 u / \partial S^2) &= S^2 \partial / \partial S (\partial u / \partial S) \\ &= S^2 (\partial x / \partial S) \partial / \partial x (\partial u / \partial S) \\ &= S^2 (1/S) \partial / \partial x (1/S \partial u / \partial x) \\ &= S [ 1/S \partial^2 u / \partial x^2 + \partial u / \partial x \partial / \partial x (1/S) ] \\ &= \partial^2 u / \partial x^2 + S (\partial u / \partial x) (-1/S^2 \partial S / \partial x) \\ &= \partial^2 u / \partial x^2 - (1/S) e^x (\partial u / \partial x) \\ &= \partial^2 u / \partial x^2 - \partial u / \partial x \end{aligned}$$

La ecuación se transforma en:

$$\begin{aligned} (\partial u / \partial t) + \frac{1}{2} \sigma^2 (\partial^2 u / \partial x^2 - \partial u / \partial x) + r (\partial u / \partial x) &= 0 \\ (\partial u / \partial t) + \frac{1}{2} \sigma^2 \partial^2 u / \partial x^2 + (r - \frac{1}{2} \sigma^2) \partial u / \partial x &= 0 \end{aligned}$$

Ecuación 90

Tercer cambio de variable:  $z = x - (r - \frac{1}{2} \sigma^2) t$ , para cancelar el primer término derivativo, y  $t' = -t$  para ajustarse a la convención de signos habitual.

$$\begin{aligned} (\partial u / \partial t) &= (\partial u / \partial z) (\partial z / \partial t) + (\partial u / \partial t') (\partial t' / \partial t) = \\ &= (\partial u / \partial z) [-(r - \frac{1}{2} \sigma^2)] + (\partial u / \partial t') (-1) \\ \partial u / \partial x &= \partial u / \partial z \end{aligned}$$

$$\partial^2 u / \partial x^2 = \partial^2 u / \partial z^2$$

Y la ecuación se transforma en (eliminando la ' en la variable t):

$$\begin{aligned} -(\partial u / \partial t) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(\partial u / \partial z) + \frac{1}{2}\sigma^2(\partial^2 u / \partial z^2) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(\partial u / \partial z) &= 0 \\ -(\partial u / \partial t) + \frac{1}{2}\sigma^2(\partial^2 u / \partial z^2) &= 0 \end{aligned}$$

Obteniendo finalmente, la expresión de la ecuación del calor o de difusión:  $\partial u / \partial t = \frac{1}{2}\sigma^2(\partial^2 u / \partial z^2)$

Este hecho hace que el precio de la opción se “difunda” por el espacio de precios de las acciones; es decir: podemos considerar que la dinámica del precio de la opción, puede actuar bajo las leyes o ecuaciones de la dinámica de un fluido.

Lo importante de este proceso de obtención de la ecuación del calor como transformación de la ecuación de Black Scholes, es saber qué son y qué expresión tienen “u”, “t” y “z”.

Por todo lo dicho, el modelo descrito por Black Scholes, tiene una componente de difusividad evidente y cuantificable: es una parte esencial del modelo de Navier Stokes que se analizará detalladamente más adelante.

➔ Los modelos numéricos expuestos someramente son muy similares, por lo que los fenómenos que describen, deben serlo también. Por tanto y como conclusión:

- Es posible entonces y a título de ejemplos, aplicar la ecuación de Schrödinger, a la evolución de la Bolsa, o el modelo de Presa-Depredador al proceso de equilibrio de una dinámica económica ?....
- Las ecuaciones de Navier Stokes, son muy muy parecidas a los modelos numéricos indicados anteriormente; ello significa que se pueden tratar “Todos” aplicando ecuaciones de fluidos?.....:

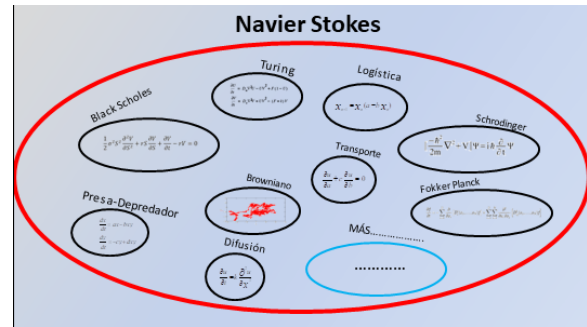


Figura 50: Las Ecuaciones de Navier Stokes, “engloban” muchos modelos matemáticos que se pueden aplicar a la Economía.

### 3.22. Número de Similitud

Para poder comparar los fenómenos entre sí o simplemente para conocer los valores límite o de transición entre los diferentes estados dinámicos (laminar / turbulento), se necesita un valor. Este valor se denota como “S”.

Con las definiciones vistas en este trabajo, de Presión, Densidad, Viscosidad, Velocidad y Área “A”, se calculan los exponentes de cada variable mediante el teorema “Pi” de Vaschy-Buckingham, de forma que al multiplicarlas desaparecen las unidades y se convierten en un número adimensional.

Se obtiene entonces, la siguiente relación:

$$S = \frac{\rho VA}{\mu} \quad \text{Ecuación 91}$$

Se puede definir número de similitud puntual y número de similitud direccional.

Un ejemplo típico para observar transiciones entre regímenes laminares y turbulentos, o conocer las causas de atascos, es el análisis de grupos de personas o peatones; dado un grupo de ellos:

- c) Densidad ➔ Número de peatones por metro cuadrado.
- d) Velocidad ➔ metro por cada segundo.
- e) “A” ➔ metros (la altura de cada persona no se tiene en cuenta).
- f) “μ” ➔ 1/tiempo gap.





Figura 51: Grupo de persona en una plaza, como consecuencia de querer entrar o salir a una discoteca, recinto deportivo, teatro, etc....

Para calcular el tiempo de desfase entre acción y respuesta: dado un grupo de personas, se empuja una de ellas; el tiempo que tardan (de media) las personas que la rodean en moverse, será el tiempo de desfase " $T_d$ "; esta prueba se debe hacer en las mismas condiciones de densidad (y quizás otras), como el problema a resolver. Notar que se pueden resolver igualmente, problemas relativos a tráfico de automóviles o en general, problemas relativos a movimiento de gran cantidad de partículas.

Algo a tener muy en cuenta e importante: en términos del cálculo de la viscosidad, se trata de un problema de cálculo de la velocidad de transmisión de una onda de presión. Relacionado con esta última apreciación, decir que más adelante se analizará tanto la energía como la difusión de esta onda de presión que equivaldrá a los parámetros " $k$ " y " $\epsilon$ " del modelo correspondiente de Turbulencia.

### 3.23. Inestabilidades

Una inestabilidad es una alteración del "Continuo"; esto puede parecer una definición "pobre", quizás sea así, sí; pero refleja muy bien lo que representa y las repercusiones son extraordinarias; de hecho, "TODO" lo que se aprecia en la naturaleza como fenómeno, evento o suceso, es producto de inestabilidades. A título de ejemplo ilustrativo de qué es y cómo se crea una geometría a partir de una inestabilidad, sea un flujo de aire alrededor de una esfera; el flujo es laminar (suave):

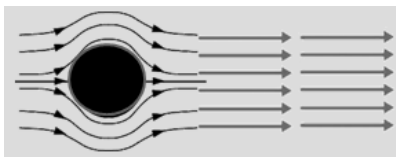


Figura 52: Flujo de un fluido en régimen laminar alrededor de un círculo.

En un momento determinado, entre el punto "A" y "B", debido a una Inestabilidad, hay una diferencia de presión; esta diferencia de presión en instantes diferentes hace que el flujo varíe:

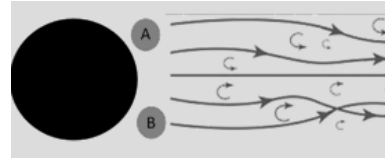


Figura 53: Flujo de un fluido en régimen turbulento alrededor de un círculo.

Existen muchos tipos de inestabilidades en función de su origen y condiciones iniciales, que dan lugar a geometrías características que se han sido nombradas: Karman, Rayleigh, Kelvin-Helmholtz, etc....

Por ilustrar sólo un caso particular más, por ejemplo la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, sean 2 fluidos (blanco y negro) en el que el fluido oscuro posee más densidad; en cierto momento, ocurre una inestabilidad de una molécula que tiende a moverse de una forma "anormal"; a partir de ahí, se produce la típica estructura:

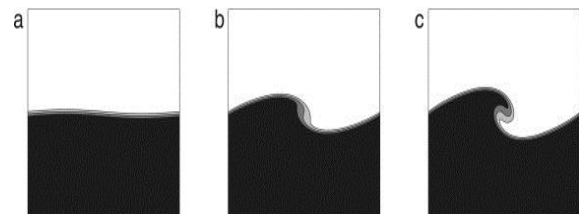


Figura 54: Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz que da lugar a unos especiales "vórtices".

Es posible que quizás en este caso, sean un poco más explicables 1 inestabilidad inicial, ya que entre ambos fluidos existen diferentes velocidades debido a la existencia de la capa límite.

Todas estas inestabilidades, se observan en la propia naturaleza como origen de sucesos muy curiosos y bonitos: pliegues de capas de sedimentos en geología, la expansión del universo a partir del llamado fondo cósmico de

microondas en donde las inestabilidades se llaman anisotropías, la expansión del material de una estrella supernova o en cualquier explosión-expansión, el perfil con dientes de sierra de una montaña, la complicada atmósfera de Júpiter, el avance de lava o agua por un terreno, etc.... En el Artículo [61] (Timoteo Briet Blanes), se analiza con detalle la formación a partir de una inestabilidad, de los vórtices de Karman; si no existieran las inestabilidades, todo sería suave y simple (muy aburrido para un Matemático)....:

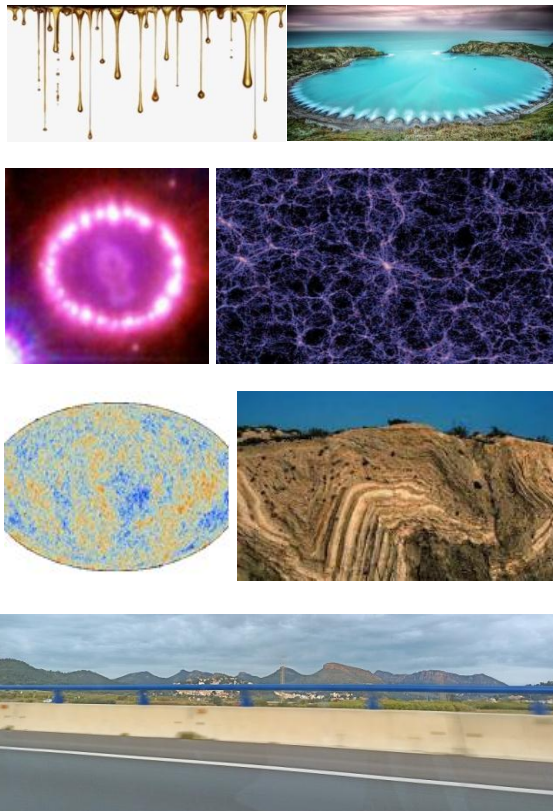


Figura 55: Dinámica de la miel, borde de un lago o playa, expansión de una explosión, red cósmica del universo, fondo cósmico de microondas, pliegues en montañas (última imagen hecha por mí....).

Las inestabilidades también ocurren en las relaciones humanas, en la economía, en la psicología, sociología, etc.... La inestabilidad es algo necesario; en caso contrario, TODO sería muy aburrido, monótono, irrelevante y hasta absurdo,.... Los dientes de sierra en general también son inestabilidades que pueden provocar alteraciones en la dinámica de cualquier evento. Cualquier modificación o

cambio en una dinámica “laminar” puede considerarse una inestabilidad. La creación de una nueva empresa en un entorno de varias empresas del mismo sector puede alterar en gran medida la dinámica de las empresas que ya existían, y también la dinámica global de la economía; por ejemplo, la creación de Twitter o Facebook supuso un cambio en las relaciones humanas pero también en la forma de gestionar una publicidad cada vez más globalizada, directa y particularizada.

Otra inestabilidad muy ilustrativa es la siguiente: la variación del flujo alrededor de un casco de determina la dinámica aguas abajo; esta variación del flujo está condicionada a partir de un punto llamado punto de estancamiento, que es donde las moléculas de aire que chocan deben ir en una dirección u otra; la inestabilidad en este punto determina la dirección de cada molécula:



Figura 56: Punto o zona de estancamiento en la parte frontal de un casco de piloto.

Este punto de estancamiento, debe ser entendido como un punto en donde la dinámica puede variar radicalmente; es decir: tomando direcciones completamente diferentes, ante una pequeña variación en alguna dirección.

El agua se puede encontrar en diferentes estados en función de la temperatura:

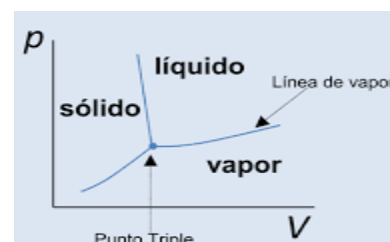


Figura 57: Estado del agua en función de la temperatura y presión.

- El agua de grifo por ejemplo, puede encontrarse en estado sólido (hielo) a 0° C; pero

también puede encontrarse líquida (agua destilada) a  $-30^{\circ}\text{C}$ ; pero en este último caso, basta una pequeña alteración variando su reposo (un pequeño golpe por ejemplo), para que se transforme rápidamente en hielo; se trata de un punto-instante crucial para el desarrollo de su dinámica: el agua permanece en estado líquido hasta que una “inestabilidad” se haga presente.

- En el llamado estado metaestable, el agua puede estar en estado líquido a más de  $100^{\circ}\text{C}$ ; de hecho, si se toma una cacerola con el interior extremadamente liso y sometemos al agua que hay en su interior a temperaturas mayores de  $100^{\circ}\text{C}$  ( $105^{\circ}\text{C}$  como ejemplo), se puede observar que no llega a hervir; para que lo haga, la superficie de la cacerola debe ser imperfecta, es decir: tener pequeñas rugosidades; es en estas rugosidades donde empieza a hervir: el agua permanece en estado líquido hasta que una “inestabilidad” se haga presente.

En sociología o en economía, es posible ver el mismo efecto; existen momentos en que una pequeña introducción de una medida, casi inapreciable, puede producir una dinámica en la mayoría de casos imprevista.

Las inestabilidades o los estados metaestables, pueden llegar a ser muy peligrosos en Economía, pero no sólo en ella; sobre todo, si no se conocen o no se predicen.

#### 4. Modelos Numéricos

##### 4.1. Introducción

Existen 2 tipos de movimiento:

- Aleatorio; también llamado Browniano.
- No Aleatorio o condicionado; también llamado DLA.

Como sus nombres indican, el primero es un movimiento donde la partícula describe una trayectoria totalmente aleatoria; en el segundo modelo, la trayectoria de la partícula se ve, más o menos afectada o condicionada, por algún tipo de fuerza.

El resto de modelos, son modelos *ad hoc*, que en la mayoría de casos son aplicables a

ciertos tipos de fenómenos en particular; también decir y es importante, que cualquier partícula en cualquier entorno, se mueve cumpliendo el Principio de Mínima Acción que se verá a continuación.

#### 4.2. Movimiento Browniano y DLA

Existe un tipo de movimiento donde la partícula describe una trayectoria totalmente aleatoria; esto es: la dirección que toma en cierto momento no depende en absoluto de la decisión que ha tomado antes; a este movimiento se le denomina Browniano ([66] Daniel Velásquez-Gaviria); en la siguiente imagen, se observa que partiendo de un punto inicial la partícula describe una trayectoria aleatoria que “tiende” a cubrir todo el espacio:

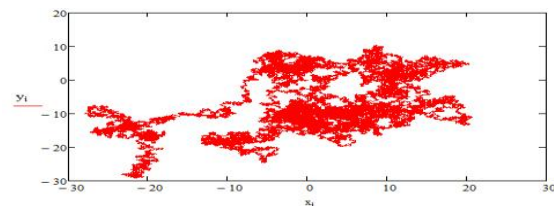


Figura 58: Trayectoria Browniana de una partícula; simulación realizada con Mathcad (Timoteo Briet Blanes).

Cuando Brown analizó este tipo de movimiento al cual le dio nombre estudiando el polen suspendido en el aire, no supo averiguar el porqué de las variaciones de trayectoria; Einstein le dio no solo forma matemática sino también explicación en función de las colisiones con las moléculas de aire; es decir: hay una razón para este tipo de movimiento, que quizás sea más o menos complicada de matematizar, pero la realidad es que existe la razón o la causa. Atribuir o calificar a cierta dinámica o cierto suceso de caótico o aleatorio, es admitir la ignorancia acerca el fenómeno y la imposibilidad de cuantificar o predecir su dinámica. Al igual que 2 sucesos pueden parecer independientes sin serlo, debido a otro suceso interviniente que no se tiene en cuenta, los granos de polen evolucionan gracias a las colisiones con las moléculas del fluido donde esté inmerso, las variaciones del movimiento Browniano se deben a algo; este “algo” debe tenerse en cuenta para el análisis global; en caso

contrario, aparece el término aleatoriedad puesto que se desconoce la razón o la causa. En economía ocurre exactamente lo mismo; las variaciones atribuibles como Brownianas, son causadas por otros sucesos que quizás no se estén teniendo en cuenta para el análisis conjunto; si se analizase en profundidad, se llegaría a ver que cualquier “aleatoriedad” tiene su causa.

Existen diversos modelos matemáticos para reproducir este movimiento Browniano, como son las ecuaciones de Langevin, Fokker-Planck o Black-Scholes; todos ellos se basan en el hecho de considerar que una variable o suceso “S” tiene una parte determinista (causa) y otra aleatoria (estocástica o Browniana) (“K<sub>1</sub>” y “K<sub>2</sub>” son números enteros, “W” es la variable estocástica o de Wiener, “t” el tiempo); es decir: el suceso “S” depende y por tanto varía, en función de algo conocido y de algo que se le califica como desconocido:

$$\frac{dS}{dt} = K_1 S \quad \text{Ecuación 92}$$

$$\frac{dS}{dW} = K_2 S \rightarrow$$

$$\rightarrow dS = K_1 S dt + K_2 S dW \quad \text{Ecuación 93}$$

La solución de esta ecuación es (“S<sub>s</sub>” es el valor de “S” en el instante “t”):

$$S_t = S_{t-1} e^{K_1 dt + K_2 dW} \quad \text{Ecuación 94}$$

Nota: la variación “aleatoria” de una trayectoria puede en algunos casos, ser calificada con más razón como tal; en cuanto se somete a una variable a una medida, puede existir un ruido blanco atribuible al propio proceso de medición; esto se puede ver en medidas electrónicas o incluso al medir un objeto con una cinta métrica: no siempre se coloca la cinta en la misma posición, no siempre se observa la medida de igual forma, etc.... todas estas razones implican una aleatoriedad atribuible. No obstante, existen sucesos más complicados; si se miden los intervalos de tiempo entre gota y gota en un grifo que gotea y representamos al igual que se hizo con los

intervalos temporales de la lluvia de meteoritos de las Quadrántidas ([9] Timoteo Briet Blanes), se observa una geometría fractal; en este caso particular, existen 2 fuentes de aleatoriedad:

- El propio hecho de medir.
- Factores que dependen de las moléculas de agua (vibración-inestabilidades).

.... Pero incluso las inestabilidades, pueden tener su razón....

Por otro lado, si la partícula es sometida a una fuerza que la haga variar su decisión aleatoria, esto es: que su trayectoria ya no sea totalmente aleatoria por la presencia pues, de un potencial, se dice que el movimiento es de tipo DLA; se puede ver en la siguiente imagen este hecho de no aleatoriedad:

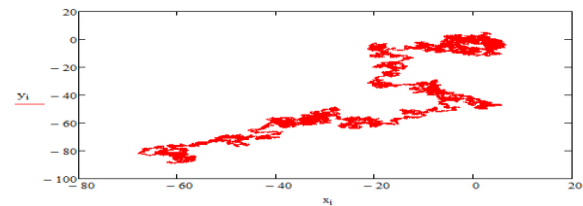


Figura 59: Trayectoria no aleatoria (condicionada) de una partícula sometida a un potencial; simulación realizada con Mathcad (Timoteo Briet).

#### 4.3. Entropía; el desorden “no aumenta”

Cualquier definición “tradicional” de Entropía, pasa por decir que es una medida del desorden; de hecho, la Real Academia Española de la Lengua, así la define; pero ello no es así; el hecho de orden o desorden es una simple apreciación subjetiva y no corresponde a lo que realmente ocurre en la naturaleza. Hay una definición típica en economía que dice que tiende al desorden, sin no existe un gobierno que defina claramente una serie de reglas sobre las que debe basarse un modelo económico.

Un sistema de partículas, por ejemplo un grupo de pequeñas esferas de polipropileno, se introducen en un recipiente con agua con la misma densidad que las citadas partículas; si se deja evolucionar el sistema, se puede llegar a ver que las esferas se posicionan de una determinada forma “regular” e incluso en algunas ocasiones,

se agrupan también regularmente en la parte superior, como flotando sin ninguna fuerza como la gravedad que las haga bajar o las mantenga suspendidas. Por tanto, se ha pasado de un estado de desorden a un estado de orden; contradice esto el concepto de entropía? pues no. La entropía es una medida de la cantidad de posiciones diferentes que un sistema puede tener y el sistema, simplemente tenderá a situarse en aquel estado que tenga más probabilidad; es decir: las esferas analizadas se sitúan en aquellas posiciones más probables, al igual que al lanzar un montón de hojas numeradas no caen al suelo perfectamente ordenadas; ello se debe en este caso, a que cada partícula es una esfera (posee volumen); cuanto más pequeñas sean las esferas, más improbable es que alcancen los estados anteriormente nombrados y más probable que aparentemente, estén desordenadas sencillamente porque la cantidad de estados es mucho mayor.

Otro ejemplo donde se puede apreciar perfectamente este hecho, es tirando un grupo de bolas de billar en una caja: todas se van a posicionar regularmente, con los espacios entre ellas exactamente iguales.

Por tanto, efectivamente sí la entropía tiende a aumentar siempre, pero no tiende al desorden como siempre se dice. La definición de entropía debe cambiar y es una medida de los estados posibles “L” (“K” constante de Boltzmann):

$$K * \log(L) \quad \text{Ecuación 95}$$

En términos económicos, qué significa que un suceso tiende al estado más probable? Es necesario contestar, analizar y cuantificar esta importante pregunta.

#### 4.4. Principio de Mínima Acción

Una partícula en movimiento tenderá a tener una dirección sobre la cual, tenga que desarrollar la mínima energía posible; por eso se dice habitualmente que la naturaleza es “perezosa”: si una partícula ha de ir hacia un sitio determinado, irá sin duda, pero gastando la menor cantidad de energía posible. Este hecho

de minimizar la energía para conseguir algo, se aprecia en innumerables fenómenos en la naturaleza, y no solamente en la creación de paths o caminos:

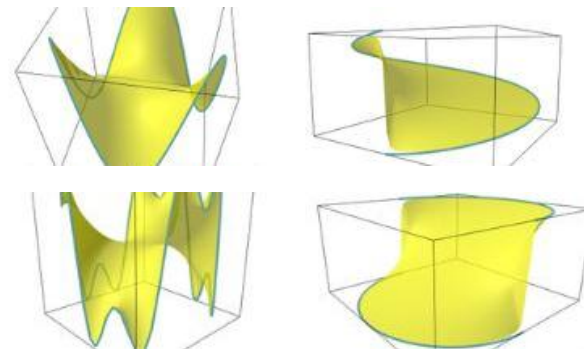


Figura 60: Película de jabón, entre alambres; la superficie jabonosa, tiende a ser la mínima posible.

Matemáticamente hablando, se dice que la trayectoria entre “a” y “b” que recorrerá una partícula, cumple que la acción “S” es la mínima posible; siendo la acción (“L” se denomina Lagrangiano, “t” es el tiempo):

$$S = \int_a^b L dt = \int_a^b (K - V) dt \quad \text{Ecuación 96}$$

Ante el posible y necesario movimiento de una partícula sometida a una fuerza, ésta ha de decidir hacia dónde ir; se calculan la energía cinética y potencia de cada una de las posibles direcciones que puede tomar, y el menor valor de “K-V” será la elegida.

Quién no ha oído la frase: “hijo mío, tienes mucho potencial”; qué significa? Simplemente se intenta describir la capacidad que tiene de realizar algún trabajo; si no existiera ese “potencial” no habría dinámica de ningún tipo posible: cuando se mueve siempre se sirve de las potencialidades que posee y a la vez que se reducen dichas potencialidades por estar consumiéndolas, su velocidad varía; cuando una partícula se mueve con una energía cinética “K” tiende a quitarse o desprenderse de energía; en ese caso, a tener menos velocidad; para ello, sustituye esa energía que le “sobra” por energía existente en la energía potencial “V”; esta energía potencial es un depósito o almacén de reserva de energía que la partícula toma; de



hecho, si no existe energía potencial, la partícula no cambia de velocidad, pues no existe “nada” que le haga modificar su trayectoria. Ese trasvase de energía se hace de la manera más rápida posible pues la partícula “necesita” reducir su velocidad lo más rápidamente posible; por esta razón, la diferencia “K-V” ha de ser la menor posible.

➔ Si una persona está enferma, no tiene fuerzas para hacer nada y de hecho, no puede hacer nada.

Si se utiliza por ejemplo, “una de las definiciones” realizadas anteriormente sobre la energía potencial, se obtiene:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - mgh \quad \text{Ecuación 97}$$

Se observa que para minimizar “S”, se puede obviar perfectamente la importancia del suceso; esto es clave para entender perfectamente todo este trabajo.

Trabajando en fluidos, se puede tomar como “g” (1 dimensión “x”, “P” presión y “ρ” densidad):

$$g = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{\rho} \quad \text{Ecuación 98}$$

Entonces minimizar “S” equivale a maximizar la “g” (aceleración de succión); es decir: allí donde exista mayor diferencia de presión, la partícula tenderá a ir. En este caso particular, se ha optado por suponer que el movimiento de una partícula de un fluido, sólo depende de la presión (no existe viscosidad, gravedad, etc....).

Es posible pensar sobre el problema inverso; es decir: conociendo la dinámica de una partícula, calcular la acción “S” que define las trayectorias de su movimiento. Es un problema crucial, trascendente y muy importante. Este problema se resume en calcular la energía potencial ya que la energía cinética se conoce. Se supone una partícula “A” moviéndose en un espacio de 2 dimensiones (como siempre, se puede extrapolar a “n” dimensiones); pasando

cierto intervalo temporal, “A” se mueve convirtiéndose en la partícula “B”; porqué ha ido “hacia” “B” y no a otro lugar?: porque la acción entre “A” y “B” es la mínima; esto es: “K<sub>x</sub>” es la energía cinética en “x”, “V<sub>x</sub>” es la energía potencial en “x”, “B<sub>i,j</sub>” los puntos del espacio de coordenadas (x,y) (genéricamente “B<sub>..</sub>”):

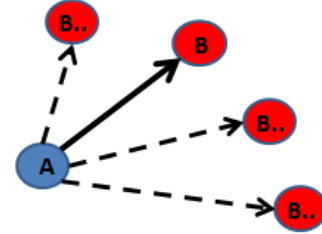


Figura 61: Posibles trayectorias de la partícula “A”, dependiendo de la acción “S”.

$$K_B - V_B < K_{B_{x,y}} - V_{B_{x,y}} \quad \text{Ecuación 99}$$

La energía potencial depende del tipo de problema o del contexto, pero se puede conocer de qué factores, variables o valores depende; incluso se puede imponer dicha dependencia; esto último, es extremadamente importante. De hecho, se puede resolver el siguiente problema: sea un balón en caída libre; se impone la necesidad de que la energía potencial depende sólo de la gravedad “g”, de la altura “h” y de su masa “m”; se puede llegar a la conclusión de que la energía potencial es “mgh”.

#### 4.4.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

##### 4.4.1.1. Euler-Lagrange con fuerzas conservativas (caso particular)

“L” mínima es la solución de la ecuación de Euler-Lagrange ([52]) (1 dimensión o coordenada generalizada “y”, “t” es el tiempo):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \text{Ecuación 100}$$

A continuación, se analizan las ecuaciones de Euler-Lagrange, para poder usarlas como modelo matemático de predicción en innumerables campos. Su deducción se basa en: sea un espacio en 2D y 2 trayectorias entre 2



puntos: una “real” y otra “alternativa”; estudiando la diferencia entre ambas trayectorias (proceso extraído de uno de tantísimos vídeos de YouTube):

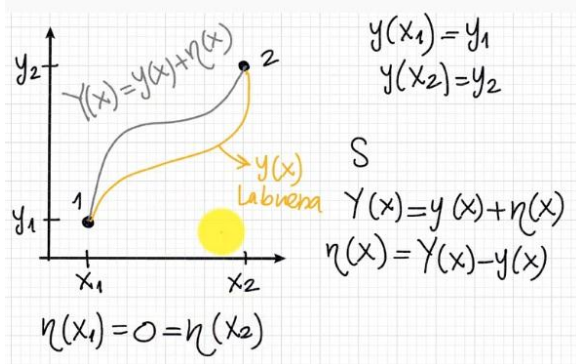


Figura 62

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= 0 \text{ cuando } \alpha = 0 \\ S(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} f(Y, Y', x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x) dx \\ Y(x) &= y(x) + \alpha\eta(x) \Rightarrow S = S(\alpha) \\ \alpha &= 0 \Rightarrow Y(x) = y(x) \\ \frac{dS}{d\alpha} &= 0 \text{ cuando } \alpha = 0 \\ S(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} f(Y, Y', x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x) dx \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} f(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x) &= \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta(x_1) = 0 \\ \eta(x_2) = 0 \end{array} \right. \\ \eta' &= \frac{d\eta}{dx} \\ \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial y'} dx &= \left[ \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \\ \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial y'} dx &= - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \\ \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) dx &= 0 \end{aligned}$$

Ecuación 101

Luego si la integral es nula, el integrando, ya que es para toda “η”, es también nulo, obteniendo por tanto, las ecuaciones de Euler Lagrange; es decir: para que se minimice la trayectoria, se han de cumplir dichas ecuaciones.

#### 4.4.1.2. Euler-Lsgrange con fuerzas no conservativas

##### a) Ejemplo:

Análisis de un péndulo simple: cuál es la ecuación de su dinámica, suponiendo que:

- En el centro de rotación (rótula) existe una fuerza de Torsión.
- La masa que oscila, tiene una fuerza de resistencia aerodinámica.

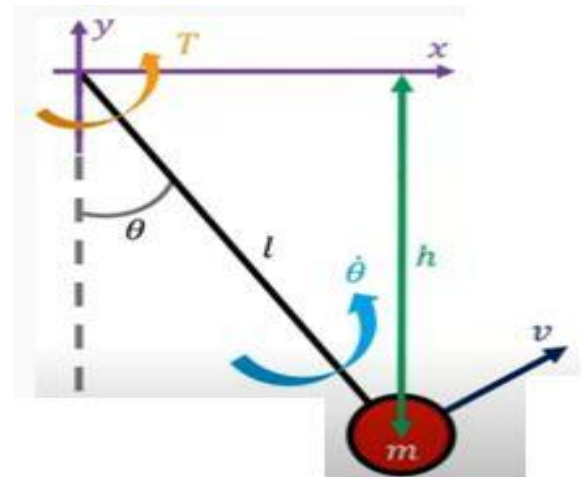


Figura 63: Análisis de la trayectoria de un péndulo simple.

$$\begin{aligned} \text{Lagrangiano: } L &= T - V & \text{Energía cinética (T) y energía potencial (V).} \\ \text{Energía cinética: } T &= \frac{mv^2}{2} & T = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} \\ \text{Energía potencial: } V &= mgh & V = -mgl\cos\theta \\ \text{Lagrangiano: } L &= \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl\cos\theta \\ \text{Ecuación de Euler-Lagrange: } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= Q_i & \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = T - b\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta} \end{array} \right. \\ ml^2\ddot{\theta} - (-mgl\sin\theta) &= T - b\dot{\theta} \end{aligned}$$

Ecuación 102

b) Relación entre Navier Stokes (incompresibles) y Euler-Lagrange

Se intenta incorporar a las ecuaciones de Euler Lagrange, un término que represente una fuerza No Conservativa; esto es: en este caso la Viscosidad como fuerza de fricción:

Sea el Lagrangiano “L”, siendo “V” el potencial:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V \quad \text{Ecuación 103}$$

En este caso aplicado a fluidos, el potencial “V” es:

$$V = m \frac{P}{\rho} \quad \text{Ecuación 104}$$

Si se aplica la ecuación de Euler Lagrange con fuerzas NO conservativas, se obtiene (1 dimensión “x”, “t” el tiempo y “x” la única coordenada generalizada del problema analizado):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q \quad \text{Ecuación 105}$$

El objetivo es introducir la fricción en la ecuación de Euler Lagrange; en este caso, lo que se requiere, es introducir la Fricción como fuerza de fricción en el problema; esta fuerza es (“v” es la velocidad):

$$F(\text{fricción}) = \frac{\mu}{\rho} m \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = Q \quad \text{Ecuación 106}$$

Sustituyendo en la ecuación de Euler Lagrange (ya calculada), se obtiene:

$$m \ddot{x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} m = \frac{\mu}{\rho} m \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{Ecuación 107}$$

Interesante observar que la masa no importa, pues se elimina, generando la siguiente expresión para la aceleración:

$$\ddot{x} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{Ecuación 108}$$

Pero:

$$\ddot{x} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{Ecuación 109}$$

Que combinándolas, se obtiene la ecuación de Navier Stokes:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{Ecuación 110}$$

c) Relación entre Navier Stokes (compresibles) y Euler-Lagrange

Basta con trabajar con la Fuerza que se aplica a una partícula (en régimen compresible) a partir de su Potencial (fluidos) en las Ecuaciones de Euler Lagrange, tal y como se ha hecho para el caso incompresible.

**FALTA**

➔ Al igual que se hará con las ecuaciones de Navier Stokes posteriormente, estas ecuaciones de Euler-Lagrange:

- Se pueden extender a “n” dimensiones.
- En la demostración de dichas ecuaciones, se han utilizado 2 variables: “x” e “y”; estas 2 variables son coordenadas cualesquiera del problema a resolver: “NO NECESARIAMENTE”, como tradicionalmente se hace, la coordenada “x” es el “t” tiempo (“f” efectivamente sí es el Lagrangiano “L”).

4.4.2. Potencial en la caída libre de un cuerpo

Sea una partícula localizada en un punto cuya altura o posición respecto la base se mide mediante “y” (como siempre “g” es la aceleración de la gravedad y “t” el tiempo); se deja caer sometándose a un solo potencial (supongamos un espacio de 1 dimensión):

$$L = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgh \quad \text{Ecuación 111}$$

Sustituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \text{Ecuación 112}$$

$$m \ddot{y} = -g$$

Integrando 2 veces, se obtiene la ecuación de la trayectoria en caída libre la partícula (“v<sub>0</sub>” es la velocidad inicial y proviene de ser constante de integración):

$$y = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \quad \text{Ecuación 113}$$

Si se trabaja por ejemplo en 2 dimensiones (x,y), se obtendrían 2 ecuaciones de Euler-Lagrange, una para cada coordenada generalizada del problema:

$$L = \frac{1}{2} m \left( \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) - V(x, y) \quad \text{Ecuación 114}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \text{Ecuación 115}$$

El problema que se plantea ahora, es justo el contrario que el acabado de realizar:

Se conoce la trayectoria de la partícula y por tanto, la velocidad y posición en cada instante: se pretende calcular la energía potencial o fuerza que se ejerce sobre la partícula para que describa la trayectoria conocida.

En el caso que se está analizando, se necesita calcular el potencial tal que se maximice al variar la posición de la partícula (altura) pues “S” ha de ser mínima. Para ello y suponiendo que el potencial depende de la masa “m”, de la aceleración de la gravedad “g” y de la

altura “h”, no queda más remedio de que el potencial sea “mgh”:

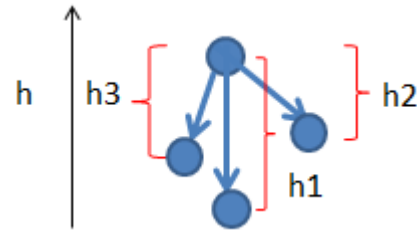


Figura 64: “h1” es la máxima variación de altura de la partícula en su caída libre: sentido vertical (“h”).

Esta expresión también se deduce al integrar la fuerza con que es estirada la partícula hacia abajo; en este caso, dicha fuerza es el peso “mg”. Este razonamiento, también se relaciona con el gradiente o vector de máxima variación.

3 posibilidades o métodos de encontrar el potencial:

- Suponer que la acción es mínima sólo a través de la trayectoria o dinámica conocida y aplicar el teorema Pi-Vaschy-Buckingham, calcular la expresión de dicho potencial.
- Hacer la misma suposición y con ello, disponer de una serie de valores numéricos para interpolar y crear una función que describa el potencial sobre el que se basa la dinámica.

➔ Nota: Según me dice José Antonio López Ortí (Catedrático de Matemáticas aplicadas en la Universidad Jaume I de Castellón y ex profesor mío en la Licenciatura de Matemáticas): “Suponiendo que queremos calcular el potencial de 2 partículas “orbitando” entre sí magnéticamente hablando, resulta que el campo NO ES CONSERVATIVO, es SOLENOIDAL esto es: su divergencia es cero y hay un vector “A” llamado potencial vector de modo que el campo magnético es el rotacional de “A”. Calcular ese potencial vector debe ser más complicado y además ya no tiene el significado mecánico del potencial (energía potencial) ordinario”.

#### 4.4.3. Cálculo “trayectoria” de un péndulo simple

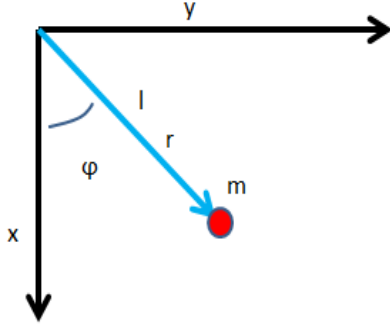


Figura 65 : Esquema de un péndulo simple.

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + mgx$$

$$\vec{r} = (l \cos \varphi, l \sin \varphi)$$

$$\vec{r}^* = \left( -\varphi^* l \sin \varphi, \varphi^* l \cos \varphi \right) = \mathbf{v}$$

Ecuación 116

$$x = l \cos \varphi \quad \text{Ecuación 117}$$

Aplicando Euler-Lagrange, se obtiene la trayectoria buscada:

$$\varphi^* + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad \text{Ecuación 118}$$

#### 4.4.4. Densidad crítica del Universo

La densidad crítica del universo, se define como la densidad a partir de la cual, el universo dejaría de expandirse, tal y como la hace en la actualidad

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 + \frac{GmM}{x} \quad \text{Ecuación 119}$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange, suponiendo la expresión de la expansión de Hubble ( $V=Hx$ , siendo “H” la “constante de Hubble”, “V” la velocidad de una galaxia y “x” la distancia a nosotros de dicha galaxia):

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{8\pi G\rho}{3}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \ddot{x}$$

$$H^2 x + \ddot{x} = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad \text{Ecuación 120}$$

Ordenando se obtiene:

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad \text{Ecuación 121}$$

#### 4.4.5. Modelo de la expansión del Universo

Vamos a considerar que la viscosidad del universo trabaja como un amortiguador (damper) frenando una dinámica; la masa y por tanto la gravedad, actúa como un muelle (spring)

So (“KS” es la constante del muelle (Hooke), y “KD” es la difusividad del damper) (es posible que “KS” y “KD” sean no constantes) ( $V_{\text{vacío}} = F_v$ ):

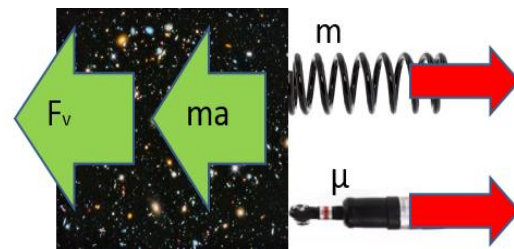


Figura 66 : Esquema spring-damper de la expansión del Universo: 2 fuerzas en oposición.

$$F_v - K_s x - K_d \frac{\partial x}{\partial t} = ma$$

Ecuación 122

Sobre las constantes (en forma general) (“f” y “g” funciones):

$$K_s = f(mass, x) = f(m, x)$$

$$K_D = g(viscosity, x) = g(\mu, x)$$

Ecuación 123

Es posible suponer (opción razonable), que:

$$K_s = x$$

$$K_D = Velocity = V$$

Ecuación 124

También:

$$K_D \frac{\partial x}{\partial t} = K_D V = F_{viscous}$$

$$K_s x = Force(Gravitational)$$

Ecuación 125

También, es posible sustituir la aceleración “a” en la “force”:

$$F = ma = m \frac{\partial V}{\partial x} = m \left( \frac{P_x}{\rho} - g \right) =$$

$$= H^* x + H^2 x$$

$$/V = H x$$

Ecuación 126

Muy similar a la ecuación de Navier Stokes.....

Aplicando Euler-Lagrange:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K_s x^2 + K_D \dot{x}$$

Ecuación 127

$$\frac{\partial L}{\partial x} = K_s x$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} + K_s x$$

Ecuación 128

Ordenando se obtiene:

$$m \ddot{x} + K_s x + K_D \dot{x} = 0$$

Ecuación 129

#### 4.4.6. Cálculo del potencial de una partícula “orbitando” alrededor de otra

Supongamos una partícula alrededor de otra, conociendo perfectamente la masa y la trayectoria (2D) (posición frente al tiempo) (ejemplo extraído de los vídeos que edita la Universidad Politécnica de Valencia en su canal de YouTube):

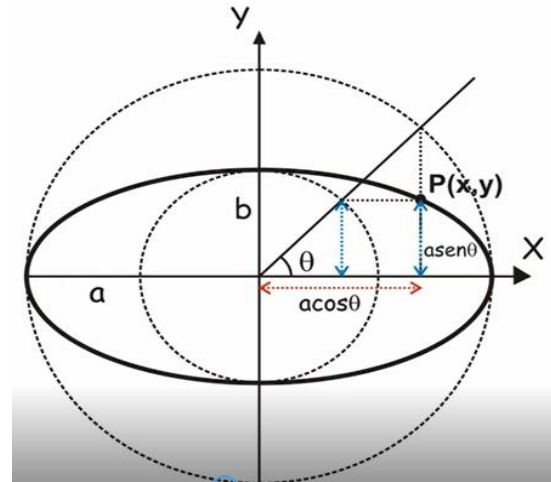


Figura 67 : Trayectoria de una partícula alrededor de otra.

Lo datos del problema son: Masa= m

<b>DATOS :</b>	<b>TRAYECTORIA:</b>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
	$x = a \cos \theta = a \cos \omega t$	
	$y = b \sin \theta = b \sin \omega t$	$con : \theta = \omega t$

Ecuación 130

Resolviendo:

$$\vec{r} = O\vec{P} = x\vec{i} + y\vec{j} \rightarrow \vec{r} = a \cos wt\vec{i} + b \sin wt\vec{j}$$

Ecuación 131

A partir de esta ecuación se obtiene la velocidad y la aceleración:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = -aw \sin wt\vec{i} + bw \cos wt\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -aw^2 \cos wt\vec{i} - bw^2 \sin wt\vec{j} = -w^2 \vec{r}$$

Ecuación 132

Obteniendo la Fuerza que “atrae” a las 2 partículas y que es la responsable de la trayectoria:

$$\vec{F} = m\vec{a} = -maw^2 \cos wt\vec{i} - mbw^2 \sin wt\vec{j} = -mw^2 \vec{r} = -k\vec{r}$$

Ecuación 133

Se aprecia claramente, que la fuerza que existe entre ambas partículas, es una fuerza tipo muelle (constante “K”). Ahora, basta con integrar esta fuerza para obtener finalmente el potencial buscado.

#### 4.4.7. Cálculo del Potencial en Dinámica de Fluidos

##### 4.4.7.1. Introducción / generalización

Más adelante se verá con detalle las llamadas ecuaciones de Navier Stokes; no obstante se hace una pequeña incursión en ellas, para ilustrar este importante punto. Resumiendo mucho, las ecuaciones de Navier Stokes, proporcionan una relación entre las aceleraciones, presiones y posiciones de las partículas que componen un fluido; por tanto, se puede extraer de ellas, la aceleración; en 1 dimensión “x” dichas ecuaciones quedan de la siguiente forma (“u” velocidad, “μ” viscosidad, “ρ” densidad, “P” presión):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ecuación 134

En esta expresión, existen 2 aceleraciones:

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}$$

Ecuación 135

Despejando cualquiera de ellas, se obtiene la aceleración “a”; por tanto: la fuerza y el potencial son por tanto (“m” masa, “x1” y “x2” los extremos de la trayectoria analizada):

$$F = ma$$

$$V = \int_{x1}^{x2} F dx$$

Ecuación 136

El potencial “fluídico” “Vf” de una partícula de masa “m” inserta en una zona de densidad “ρ” y presión “P”, es:

$$V_f = m \frac{P}{\rho}$$

Ecuación 137

Este valor del potencial es extremadamente importante y será utilizado en innumerables aplicaciones:

- Cuanto mayor sea “P”, más energía va a tener disponible la partícula.
- Cuanto menor sea “P”, más improbable es que alrededor de la partícula, se encuentre alguna zona de menor presión, cosa absolutamente necesaria para iniciar algún tipo de movimiento.

➔ “P” es la energía más importante que existe; es la responsable de toda dinámica; es el mejor de los “combustibles”.

##### 4.4.7.2. Incompresible

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( m \frac{P}{\rho} \right) = \frac{m}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Ecuación 138

##### 4.4.7.3. Compresible

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( m \frac{P}{\rho} \right) = \frac{m}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} +$$



$$+ P \left( \frac{\partial m}{\partial x} \frac{P}{\rho} - m \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad \text{Ecuación 139}$$

#### 4.4.8. Cálculo de la trayectoria en un Problema general

Se supone la siguiente situación; se dispone de una gráfica de un valor “t” con respecto a otro “x”:

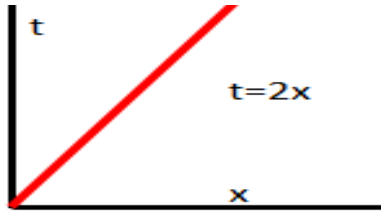


Figura 68 : Representación de “t” con respecto “x”.

Si se escribe el Lagrangiano y a partir de él, las ecuaciones de Euler Lagrange, se obtiene (eligiendo las “tradicionales” energías cinética y potencial):

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mg2x \quad \text{Ecuación 140}$$

$$\ddot{x} = 2g$$

#### 4.4.9. Cálculo de la relación entre 2 señales input-output

Lo que se intenta a continuación, es establecer una relación matemática entre 2 señales input-output. Esta relación permitirá conocer las evoluciones del output, en función del input; esto es esencial para poder conocer en su caso, un posible potencial entre ambas señales. Se consideran lógicamente, que la señal input y la señal output son dependientes; hay que establecer de qué forma lo son y cuantificarla.

##### 4.4.9.1. Relaciones matemáticas a partir de las gráficas

Caso 1: Señal output es una traslación del input:

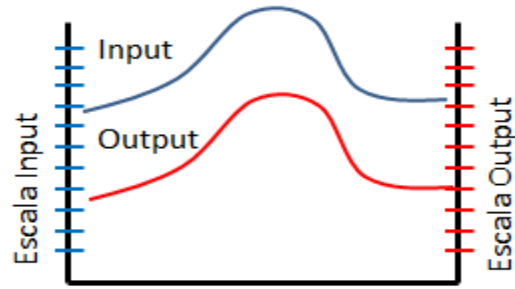


Figura 69: Output como traslación de la señal input.

En este caso, la expresión matemática que relaciona ambas señales es:

$$g(x) = f(x) + \text{constante} \quad \text{Ecuación 141}$$

Esta relación, también puede verse bajo el prisma del comportamiento de un muelle; es decir: ambas señales están sujetas bajo la acción de un muelle. La fuerza que hace falta para variar una distancia “x” un muelle de constante “K” es  $F=Kx$ .

Caso 2: Señal output = división de input entre una constante:

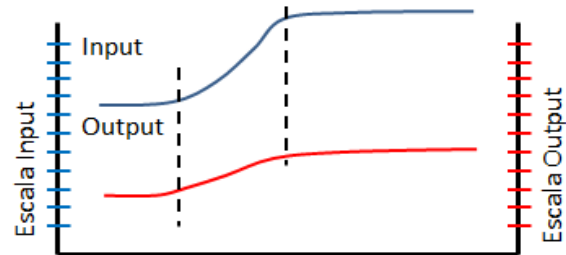


Figura 70: los inicios de las variaciones de inclinación de ambas señales, son los mismos; en el caso de la señal output, las variaciones son menos acentuadas.

En este caso:

$$g(x) = f(x) / \text{constante} \quad \text{Ecuación 142}$$

Caso 3: Ambas señales tienen un retraso “a” entre ellas:

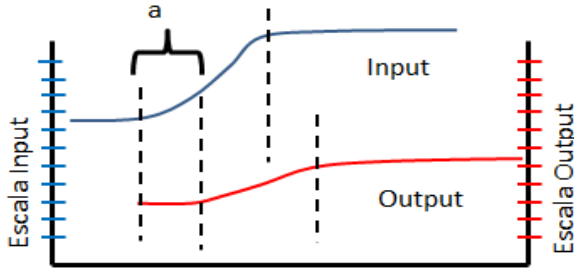


Figura 71: Retraso entre input y output.

En este caso, la expresión matemática que las relaciona es:

$$g(x) = f(x-a) \quad \text{Ecuación 143}$$

Caso 4: La señal output responde a la señal input como un damper, aumentando o reduciendo la intensidad del input:

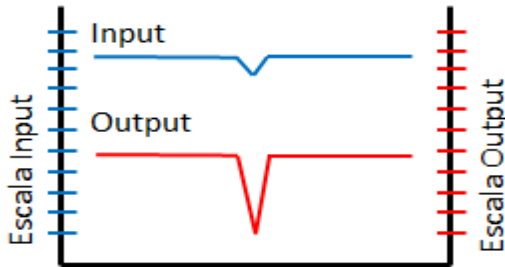


Figura 72: La señal output, amplía o reduce la señal input.

El modelo matemático que relaciona el desplazamiento “x” con la fuerza “F” aplicada entre ambas señales es:

$$F = F(\text{velocidad}_x) \quad \text{Ecuación 144}$$

Es decir: la fuerza depende de la velocidad del desplazamiento.

Caso 5:

$$F = F(\text{aceleracion}_x) \quad \text{Ecuación 145}$$

En este caso, el link se denomina Inerter.

Caso 6 y siguientes:

Combinaciones entre los y vistos y quizás más....

Estas relaciones matemáticas entre las señales input y output, deben realizarse en cortos tramos.

#### 4.4.9.2. Función de Transferencia entre input y output

##### 4.4.9.2.1. Transformada de Laplace

Sea una función “f(t)”; se define su transformada de Laplace “F” como:

$$F(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Ecuación 146

Lógicamente no se detalla su concepto pero decir que su utilidad, se centra en 2 campos: resolución de ecuaciones diferenciales y generación de la llamada Función de Transferencia; en el primer caso:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 5[sY(s) - y(0)] + 4Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$y(0) = 0; y'(0) = 0$$

$$s^2 Y(s) + 5sY(s) + 4Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s)(s+1)(s+4)}$$

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+4} = \frac{1}{(s)(s+1)(s+4)}$$

$$A = \frac{1}{4}; B = -\frac{1}{3}; C = \frac{1}{12}$$

$$Y(s) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{s} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{s+1} \right) + \frac{1}{12} \left( \frac{1}{s+4} \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} e^{-t} u(t) + \frac{1}{12} e^{-4t} u(t)$$

Ecuación 147 : Ejemplo de resolución de una ecuación diferencial utilizando transformadas de Laplace.

##### 4.4.9.2.2. Función de Transferencia

Se trata de una herramienta matemática extraordinariamente importante, potente y útil: es capaz de predecir el comportamiento de sistemas físicos.

Sea “I” el input o entrada de valores de un sistema y “O” el output o valores resultantes de un sistema físico:



Figura 73: Señal Input y señal Output de un sistema; es necesario saber su relación.

Lo que se pretende es conocer la relación Matemática que une ambas señales para poder modelizarla y poder de esta forma, predecir su comportamiento; es decir: calcular la denominada Transfer Function:



Figura 74: Transfer Function “G” entre Input y Output.

Para este sistema:

$$O = G * I$$

$$G = \frac{O}{I} \quad \text{Ecuación 148}$$

Para la anterior ecuación tanto “I” como “O” son las transformadas de Laplace de ambas señales; para calcular ambas transformadas:

Calcular los polinomios interpolantes de cada señal; esta es un proceso importante; debe hacerse con cuidado puesto que una mala simplificación o interpolación de las señales, implicará un mal cálculo de “G”. Hay que estudiar muy bien el rango o tramo de la señal para interpolar.

**FALTA**

Una vez ya se tiene ambos polinomios, bastará con aplicar tablas como la siguiente (se enumeran sólo unas cuantas transformadas a modo de ejemplo):

	Función		Transformada
	$f(t)$	$\Leftrightarrow$	$F(s) = L\{f(t)\}$
1	1	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{s}$
2	$t^n ; n = 1, 2, \dots$	$\Leftrightarrow$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\Leftrightarrow$	$\sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{s}}$
4	$e^{at}$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{s-a}$

Tabla 4: Transformadas de Laplace de algunas funciones.

Al disponer de polinomios como señales de entrada y salida, con la transformada de Laplace de “t” ya será suficiente:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Ecuación 149

Entender este concepto de Función de Transferencia y sobre todo su UTILIDAD, es simple:

Sean 2 señales Económicas; por ejemplo, sean el precio del Petróleo “I” y el precio del Oro “O” en un intervalo temporal determinado; se supone ahora, es lo importante realmente, que tenemos la gráfica del precio del petróleo, en otro intervalo temporal y se desea saber cómo ha evolucionado el precio del Oro:

- Calcular la Transfer Function “G” entre “I” y “O”.

- Sea “In” la nueva señal “I”.

Calcular  $O = G * I_n$  Ecuación 150

Impresionante, la verdad ;;;

Es necesario en este punto, hacer ejemplos al respecto para ver cuáles debe ser el intervalo idóneo de análisis, el grado óptimo de los polinomios interpolantes, etc....

**FALTA**

#### 4.5. Ecuación Logística

Se utiliza habitual y principalmente para conocer la variación de poblaciones; “x<sub>i</sub>” es la

población en el instante “i”, “a” y “b” son constantes a determinar y depende del tipo de población y de las tasas de crecimiento de la especie analizada:

$$x_{n+1} = x_n(a - b x_n) \quad \text{Ecuación 151}$$

Hay una relación entre esta ecuación y la ecuación de transporte no lineal de Navier Stokes: para poder apreciar dicha relación, se realiza un cambio de variable:

$$y_{n+1} = y_n(a - b y_n) \rightarrow y = \frac{xa}{b} \rightarrow x_{n+1} = a x_n(1 - x_n)$$

$$x_{n+1} = a x_n(1 - x_n) \rightarrow x = \frac{yb}{a} \rightarrow y_{n+1} = y_n(a - b y_n)$$

Ecuación 152

Iterando la siguiente ecuación, se encuentran duplicaciones de los periodos en los llamados puntos fijos de esta ecuación recursiva, en función del valor de “λ”:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \quad \text{Ecuación 153}$$

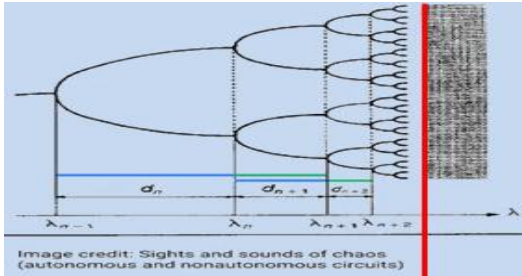


Figura 75: Duplicación de los periodos de los puntos fijos de la ecuación logística en función de “λ”.

La línea vertical marcada en negro resaltado, indica la zona donde empieza la Turbulencia; es decir: es donde empieza la bifurcación “descontrolada” de los puntos fijos de la ecuación. Esto es muy importante pues a partir de una ecuación extremadamente simple y sencilla, se puede originar la Turbulencia.

En cuanto a la convección de fluidos por temperatura en el interior de una cacerola, también hay bifurcaciones: si la temperatura es alta, el agua tiende a subir; si “L” es grande,

puede haber más de 2 “circulaciones”; eso es porque la molécula “A”, no puede ir a la derecha: puesto que otras moléculas empujan a “A” hacia arriba:

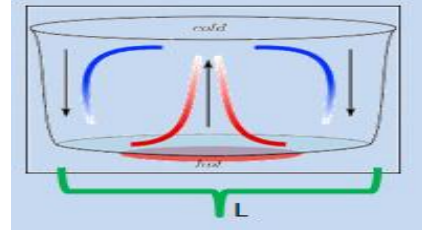


Figura 76: Corrientes verticales de agua caliente en una cacerola.

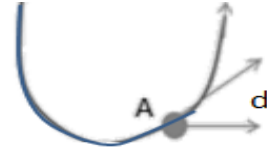


Figura 77: Imposibilidad por parte de la partícula “A” de ir hacia la derecha siguiendo las direcciones “d”.

Si la temperatura aumenta, se producirá una bifurcación o duplicación de la circulación.

Trabajando con la ecuación de transporte no lineal en 1 dimensión (x) y observando su relación con la ecuación logística, se obtiene un parámetro importante (CFL) (“t” es el tiempo; “u” es una variable cualquiera):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u = u(n, t) = u_n^t$$

$$u_n^{t+1} - u_n^t = u_n^t \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{n-1}^t - u_n^t)$$

$$\text{Ecuación 154}$$

$u_n^t \frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow$  Número de Courant-Friedrich-Levy (CFL), debe ser menor que 1 para que la ecuación converja.

$$\text{Punto fijo de: } x = ax(b - x) \rightarrow$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{2}{x_{n-1} - x_n} \quad \text{Ecuación 155}$$

La gráfica mostrada anteriormente representando las bifurcaciones sucesivas de los puntos fijos, es un fractal; y es más: es una sección de otro fractal muy conocido que es el fractal de Mandelbrot:

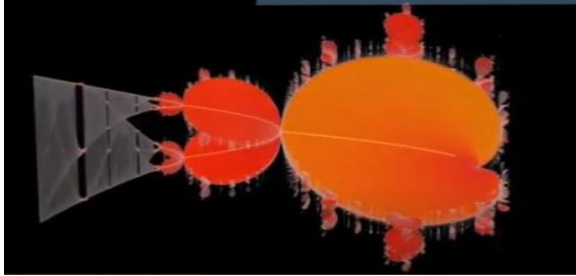


Figura 78: Bifurcaciones de la ecuación logística, como parte o sección del fractal de Mandelbrot.

Por tanto y muy importante: dentro de la ecuación de Navier Stokes, está la propia semilla de turbulencia....

#### 4.6. Aceleración Potencial

Un grupo de partículas evoluciona en función de las dinámicas o movimientos de cada una de las partículas que forman el grupo; una partícula "A" se mueve dependiendo de las partículas que tiene a su alrededor; sobre "A" intervienen muchas fuerzas provenientes del movimiento del resto de partículas del mismo y otros sucesos pero la composición de todas esas fuerzas, equivale a un solo vector fuerza que actúa sobre "A"; este vector fuerza, es el que la hace desplazarse y define por tanto, su dinámica.

La fuerza resultante con la que "A" es desplazada, es proporcional a la variación de presión alrededor de "A"; es decir: si alrededor de "A" no existe diferencia de presión con respecto a la presión en "A" la partícula no se mueve; si esta diferencia de presión es positiva la partícula es empujada mientras que si es negativa es succionada; es decir: la partícula avanza hacia la zona con menor presión; matemáticamente hablando, depende de ("x" es la coordenada correspondiente):

$$\frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{Ecuación 156}$$

Pero a su vez, si la partícula "A" tiene más densidad que otra, la aceleración que se produzca en "A" es menor; es razonable este hecho, puesto que entonces a la zona con diferencia de presión le cuesta más arrastrar a "A". Por tanto la aceleración que la diferencia de presión induce sobre "A" es:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{\rho} \quad \text{Ecuación 157}$$

En este caso, la densidad también hay que entenderla como masa o importancia; cuanto más importancia tiene un suceso, más le cuesta variar su dinámica ya que posee mayor inercia; este concepto de inercia debe entenderse como mayor permanencia o presencia.

Una partícula "A" de un suceso "X<sup>i</sup>" determinado tendrá una aceleración potencial con respecto a cada uno del resto de sucesos dependientes "X<sup>j</sup>"; se denota aceleración potencial de la partícula "A", como el vector "W" (se obvian superíndices y subíndices). Para calcular estas aceleraciones potenciales, se procede a los siguientes pasos, trabajando en el espacio de fases de los 2 sucesos "X<sup>i</sup>" y "X<sup>j</sup>" (extensible como siempre, a un espacio de fases de "n" dimensiones):

- Alrededor de la partícula "A", se establece un círculo de influencia.
- Dicho círculo, se divide en "m" número de sectores:

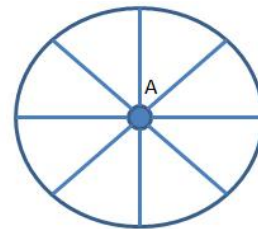


Figura 79: División en sectores del círculo de influencia de la partícula "A".

- Se calcula la presión existente en cada uno de esos sectores, conociendo por tanto, el vector director debido a la variación de presión:

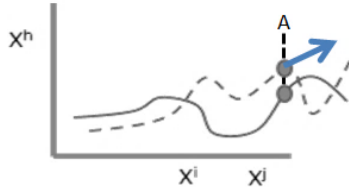


Figura 80: Cálculo de “W” para el suceso “Xi” frente a cualquier otro suceso “Xj”.

- Se calcula finalmente la suma de todos los vectores calculados en el punto anterior, siendo esta suma, el vector “W” buscado.

Por tanto, si se quiere conocer hacia dónde se dirigirá un suceso “A”, es necesario conocer hacia dónde cada uno de los otros sucesos estira o empuja a “A”; luego bastará pues con sumar todos los vectores para obtener el resultado pretendido.

#### 4.7. Ecuaciones de Navier Stokes incompresibles

La modelación matemática de la dinámica de un fluido se basa en la consideración y aceptación de varias leyes de conservación que deben cumplir las partículas del fluido y sus dinámicas:

- Conservación del momento lineal.
- Conservación del momento angular.
- Conservación de la masa; ecuación de continuidad.
- Conservación de la energía térmica y mecánica.

Las ecuaciones de Navier Stokes, son las ecuaciones que desde hace siglos se aplican para resolver problemas relativos a la dinámica de fluidos. Tienen la característica de ser no lineales y de no poder resolverse analíticamente, siendo necesario el uso de métodos numéricos para poder hacerlo. Un fluido puede considerarse incompresible para mayor inicial simplicidad en sus ecuaciones dinámicas; esto es: densidad y viscosidad constantes.

Sea una función Real ( $\Re \rightarrow \Re$ ) definida en un espacio en 2 dimensiones ( $u=u(x,t)$ ) (“x” dimensión espacial, “t” dimensión temporal, “a” aceleración):

$$a = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{Ecuación 158}$$

Mediante un balance de aceleraciones (“a(viscosa)” es la aceleración debida a la viscosidad, “A” son las aceleraciones externas al sistema):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\rho} - u \frac{\partial u}{\partial x} + a(\text{viscosa}) + A$$

Ecuación 159

Diversa nomenclatura a partir de cada parte de la ecuación (Figura (65)):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\rho} + a(\text{viscosa})$$

A      B      C      D

Figura 81: División en partes de la ecuación.

Nomenclatura de dichas “partes”:

- |           |   |                          |
|-----------|---|--------------------------|
| B + C     | → | Ecuación de Euler.       |
| A + B + D | → | Ecuación de Burger.      |
| A + D     | → | Ecuación del calor.      |
| A + B     | → | Ecuación del Transporte. |
| Otras.... |   |                          |

Usando otro razonamiento y partiendo de una expresión ya deducida aquí:

$$P = \frac{1}{2} \rho u^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \rho u \frac{Du}{Dx} = \rho u \frac{\partial u}{\partial x}$$

Ecuación 160

Aplicando el teorema Pi-Vaschy-Buckingham (acc = aceleración); los corchetes indican dimensiones:

$$[\mu]^a [\rho]^b [u]^c [x]^d = [acc] \quad \text{Ecuación 161}$$

$$\begin{aligned} a &= 1 & c &= 2 \\ b &= -1 & d &= -2 \end{aligned}$$



$$\rightarrow a(viscosa) = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{Ecuación 162}$$

El valor de “ $\mu/\rho$ ” es el cociente entre la viscosidad y la densidad de “ $u$ ”, medidas a lo largo del eje “ $x$ ”; esto es algo extremadamente importante.

Cuál es la razón por la cual, este trabajo se inclina por utilizar un modelo matemático aplicado a dinámica de fluidos, a sucesos de muy diferente tipo aparentemente? Es decir: se hace una equivalencia dinámica, entre el movimiento de fluidos y la dinámica de sucesos del cosmos. Principalmente, por varios motivos o razones:

- Existencia de Transporte y Difusividad, como partes esenciales del modelo de Navier Stokes:

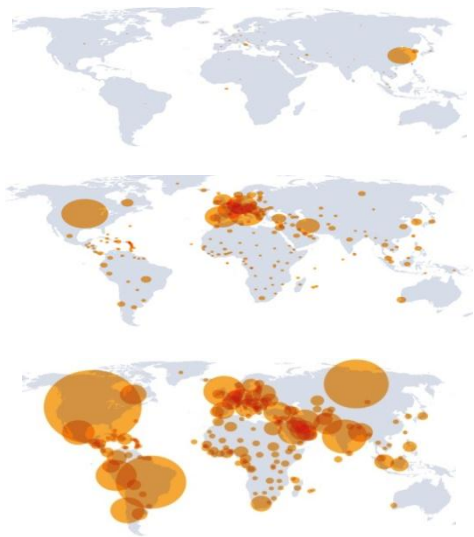


Figura 82: Evolución de la pandemia Covid en 2021; se visualiza un fenómeno de transporte combinado con otro de difusividad.

- En cualquier análisis de cualquier variable, se constata que todo lo que sube o baja, no lo hace infinitamente; es decir: se comporta como una onda.
- La Turbulencia existe, como alteración más o menos brusca, de la “tranquilidad”.
- Existe una visión “intuitiva” o “natural” del ser humano, de asemejar sucesos cotidianos, a sucesos relativos al movimiento de los fluidos:

Economía Turbulenta, Tiempos Turbulentos, Tráfico Denso, etc....

- El movimiento ondulatorio es un tipo de movimiento muy típico en variables pero también en fenómenos; por ejemplo, los llamados “Solitones” que se producen en dinámica de automóviles; son debido a la densidad ya la viscosidad del tráfico:



Figura 83: Tráfico de automóviles; dependiendo de la densidad y de la viscosidad, se pueden formar atascos y ondas de presión; estas ondas se denominan Solitones.

- La evolución de una señal mediante Navier Stokes, es independiente de la escala de trabajo (escalas de Kolmogorov). Este hecho es esencial en este trabajo basado en dinámica de fluidos.
- Se suele decir que hay “modas” que arrastran otras “modas”.
- Etc....

Con la aplicación de este modelo numérico, se abre una ventana enorme, por cuanto se va a poder trabajar con las variables incluidas en dicho modelo, como sucesos.

Se analizan ahora los diferentes términos de la ecuación generada:

- Ecuación de advección o transporte lineal; ecuación del transporte: Para saber cómo funciona y actúa una ecuación diferencial sobre una partícula, se discretiza averiguando las dependencias con las partículas que la rodean; estas dependencias permitirán calcular la variable o ecuación sobre la partícula.

Ecuación del Transporte con “ $u$ ” variable cualquiera, velocidad “ $c$ ” (velocidad de “ $u$ ” con respecto “ $t$ ”), “ $a$ ” y “ $b$ ” coordenadas de “ $u$ ” (el superíndice corresponde al eje “ $a$ ” y el subíndice corresponde al eje “ $b$ ”):

$$\frac{\partial u}{\partial a} + c \frac{\partial u}{\partial b} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow u_i^{n+1} = u_i^n - c \frac{\Delta a}{\Delta b} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

Ecuación 163

La discretización de las ecuaciones diferenciales, se puede realizar mediante el método de diferencias finitas de diferente orden y esquema: avanzadas, retardadas, centrales, orden 1, 2, 3, etc....

La variación de “u” respecto “a” es la variación de “u” respecto “b”; es decir, “u” tiene una traslación (transporte) en el eje “b”:



Figura 84: Translación de una onda.

Sean 3 sucesos u,a,b (u=u(b,a)):

“a” = Tiempo; “b” = Precio del Petróleo; “u” = Precio del Gas; “c” = Velocidad de “u”:

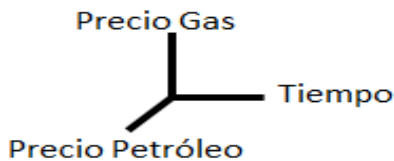


Figura 85: Representación en 3D de los 3 eventos: Precio Gas, Precio Petróleo y Tiempo:

“i” → i-ésimo precio gas.

“n” → n-ésimo tiempo.

Solución analítica: sea la condición “inicial”: u(b,0)=f(b): Solución → f(b-ca). La solución pues, es un Transporte a lo largo del eje “Tiempo=a” con una velocidad “c”:

Es importante recordar que “c” o velocidad de desplazamiento, es la velocidad con respecto “a” o lo que es equivalente, respecto el tiempo. Es importante recordar este hecho evidente, puesto que es posible trabajar con otra combinación de ejes con el fin de obtener diferentes dinámicas; por ejemplo, se toma: “a” = Precio Petróleo; “b” = Tiempo; “u”

= Precio del Gas; “c” = Velocidad de “u”. En este caso, la velocidad “c” sería la velocidad del precio del gas con respecto el precio del petróleo; el hecho de poder intercambiar las variables o sucesos entre sí, es una de las cosas más importantes en este trabajo; de hecho, se modifica la elección de sucesos con el fin de obtener determinadas dinámicas o incluso, adaptar el modelo en función de los datos que se tengan para tener condiciones iniciales y de contorno.

- Ecuación de transporte no lineal; es un caso quizás, más genérico que el anterior; ahora, la velocidad “c” no es constante; ello hace que la dinámica del sistema sea lógicamente, diferente y muy curiosa incluso:

$$\frac{\partial u}{\partial a} + u \frac{\partial u}{\partial b} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow u_x^{n+1} = u_x^n - u_i^n \frac{\Delta a}{\Delta b} (u_x^n - u_{x-1}^n)$$

Ecuación 164

Dependiendo, como se verá más adelante, del cociente entre los incrementos de discretización, es posible que se originen turbulencias ya que se pueden formar discontinuidades:

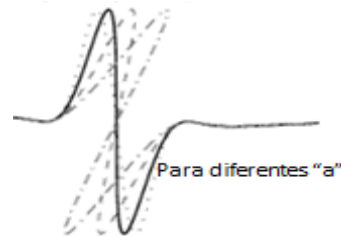


Figura 86: Variación de la curva en función de “a”; se aprecia la generación de no continuidad.

Sean 3 sucesos u,a,b (u=u(b,a)):

Los valores más altos de “u” se propagarán más rápido que los valores más bajos: es decir: esto lleva a un empinamiento de la onda, ya que los valores ascendentes avanzarán más rápido que los descendentes pudiendo producirse la discontinuidad o turbulencia:

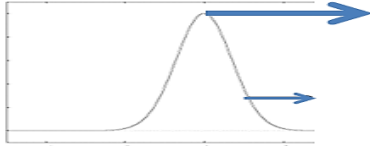


Figura 87: Los puntos “superiores” avanzan más rápidamente pudiendo generar discontinuidad.

Al igual que antes, es posible intercambiar los sucesos entre sí, para describir otras dinámicas. Por último, hacer énfasis en el hecho de que “c” ya no es constante como se ha dicho; por tanto la velocidad se puede cambiar por una expresión que realmente exprese aquello que ocurre; es decir: si se conociese por ejemplo, la velocidad de propagación del precio del gas en función del precio del petróleo, bastaría con hacer “b” precio del petróleo, “u” precio del gas y “a” tiempo.

- Laplaciano (difusividad); ecuación del calor (“u” es la Temperatura “T”, “t” el tiempo, “x” la coordenada espacial, “k” es el coeficiente de transferencia de calor o conductividad); en (Figura (72)), se aprecia la “suavización” de una señal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u_x^{n+1} = u_x^n - k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{x+1}^n - 2u_x^n + u_{x-1}^n)$$

Ecuación 165

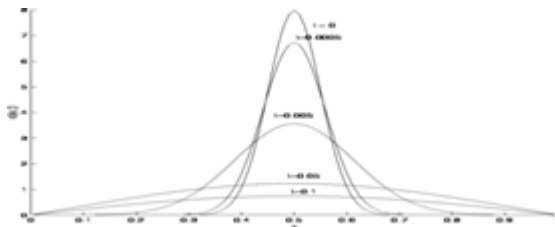


Figura 88: Suavización (difusión) de una onda.

Esto significa que la tasa de intercambio a lo largo del tiempo viene dada por la tasa media de cambio en el espacio.

Si se interpreta como la temperatura (y por lo tanto  $\partial u / \partial t$ , es la tasa de cambio de la temperatura), entonces se puede ver que hay más

intercambio de calor en las regiones donde la temperatura es muy variable, y menos intercambio de calor cuando la temperatura varía ligeramente:

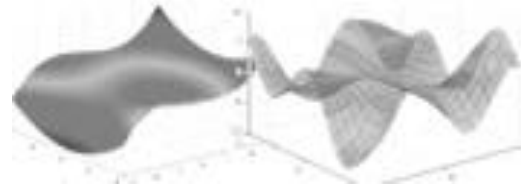


Figura 89: Menor y mayor tasa de difusión, dependiendo del tipo de gráfica.

Respecto “k”, es importante saber que es un parámetro que mide la conductividad de “u” a lo largo del eje “x”.

La aplicación o inclusión de esta ecuación en este trabajo es evidente; al igual que antes se pueden elegir 3 sucesos cualesquiera dependientes (u,t,x) en cualquier orden, conociendo “k” que es el coeficiente de “transmisión” de “u”; es decir: si por ejemplo “u” fuera “la moda de utilizar WhatsApp” o “la aceptación por parte de la sociedad de cierta medida económica o política implantada por el gobierno de un país”, se podría conocer cómo se distribuye ambos sucesos en un país, conociendo este factor “k”; para conocerlo, es posible recurrir a datos reales y cuantificarlo adecuadamente mediante experimentación.

➔ Notar: en el campo de la política, sociología o incluso la economía, se puede constatar con una mayor energía en la población, esto es, un mayor ajeteo o movilización, favorece la transmisión de una moda por ejemplo; en definitiva facilita la transmisión de información. Se puede ver claramente por tanto, la aparición de la ecuación del calor en esta reflexión....

- Euler, Burger, etc....: para trabajar con estas ecuaciones, basta seguir el procedimiento descrito en los anteriores casos (la nomenclatura es la misma que ya se ha utilizado y por tanto, se omite):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A - u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{Ecuación 166}$$

Ahora, de nuevo, se abre una ventana de posibilidades todavía más grande si cabe; a partir de ahora, se va a poder trabajar con las variables incluidas en las ecuaciones de Navier Stokes, sin tener en cuenta si son variables espaciales o temporales, e incluso intercambiándolas entre sí.

Ejemplo: sean 3 sucesos “u”, “x” and “t”:

Dependiendo qué variable y en qué dirección se quiera conocer, se pueden intercambiar las variables-eventos entre sí; 6 posibilidades pues:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{\rho_x} + \left( \frac{\mu}{\rho} \right)_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} + x \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\partial P}{\partial u} \frac{1}{\rho_u} + \left( \frac{\mu}{\rho} \right)_u \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} + x \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial t} \frac{1}{\rho_t} + \left( \frac{\mu}{\rho} \right)_t \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial t}{\partial u} + t \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{\rho_x} + \left( \frac{\mu}{\rho} \right)_x \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} + t \frac{\partial t}{\partial u} = -\frac{\partial P}{\partial u} \frac{1}{\rho_u} + \left( \frac{\mu}{\rho} \right)_u \frac{\partial^2 t}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial t} \frac{1}{\rho_t} + \left( \frac{\mu}{\rho} \right)_t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ecuación 167

Y es más: notar que “t” se ha definido como suceso genérico, no como “tiempo”....

Como resumen y ampliación de los casos vistos en este punto, señalar como se verá más adelante, que en el caso de que “Ω” esté compuesto por más de 3 sucesos, se puede trabajar con las ecuaciones de Navier Stokes descritas en este punto, en dimensiones mayores

que 3; para ello, de forma genérica, las ecuaciones en “n” dimensiones son (suponiendo ausencia de fuerzas o aceleraciones exteriores) (también se omite en este caso, la incorporación del factor “R” aleatorio para mayor comodidad y facilidad de comprensión):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \dots &= -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{\rho_x} + \left( \frac{\mu}{\rho} \right)_x \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dots \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \dots &= -\frac{\partial P}{\partial z} \frac{1}{\rho_z} + \left( \frac{\mu}{\rho} \right)_z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \dots \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \dots &= -\frac{\partial P}{\partial y} \frac{1}{\rho_y} + \left( \frac{\mu}{\rho} \right)_y \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

.....  
Ecuación 168

Cada ecuación añadida, equivale a la inclusión de 2 sucesos más; es decir: se dispone de un modelo numérico para 3 sucesos, 5, 7, 9, etc.... Qué significado tienen estas ecuaciones en más de 3 dimensiones? Cómo se produce la dinámica de partículas en 5 dimensiones por ejemplo? Cómo son las dependencias entre “dimensiones” o “ejes coordenados” en más de 3 dimensiones? Son algunas de las preguntas a contestar más adelante, cuando se analicen las soluciones para dimensiones mayores que 3.

#### 4.8. Ecuaciones de Navier Stokes compresibles

Todos los fenómenos que existen, no son ni laminares ni incompresibles; por ello, disponer de un modelo de densidad y viscosidad no constantes es absolutamente necesario; a continuación, se escriben las ecuaciones correspondientes a 3 sucesos y a 7 sucesos, respectivamente; de esta forma, se puede extender el concepto a “n” sucesos o dimensiones:

Sean las ecuaciones para 3 sucesos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial x} \rho = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + 4 \left( \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right)$$

Ecuación 169

Sean las ecuaciones para 7 sucesos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} \right)\end{aligned}$$

Ecuación 170

Las ecuaciones de Navier Stokes incompresibles, son un caso particular de las ecuaciones compresibles; para ello, basta hacer que la viscosidad sea constante y la segunda viscosidad “ $\lambda$ ” sea nula; se ve esto en 5 dimensiones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \\ = 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \\ = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \\ = \mu \nabla^2 u + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \mu \nabla^2 u\end{aligned}$$

Ecuación 171

Uno de los objetivos que se pretendían en este trabajo, uno de los principales, era predecir la posición de una partícula con cierto grado de incertidumbre; esto es: con cierto grado de aleatoriedad. La ecuación de Langevin y la ecuación de Fokker-Planck ([63] N. Lucero-Azuara, M. Chavelas-Astudillo, N. Sánchez-Salas, J.I. Jiménez-Aquino, [64] Alejandro Almodóvar del Pozo, [65] Carolina Castañeda Gaviria) modela el comportamiento Browniano a una partícula bajo ciertas condiciones de fricción, temperatura, potencial y otras.

$$\underbrace{m \frac{d^2 x_i}{dt^2}}_{\text{Inercial}} = \underbrace{\sqrt{2k_B T \gamma} \xi_i}_{\text{Ruido Blanco}} - \underbrace{\gamma v_i}_{\text{Fricción}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left( V'(x) \frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

Ecuación 172

Para ello, incorporan un término estocástico en su formulación obteniendo por tanto, la posición de la partícula con una función de probabilidad. En el caso de este Artículo, se ha introducido un término aleatorio (“R”) lo cual hace que la aceleración calculada de cada partícula, sea en realidad una función de probabilidad. Por tanto, el nuevo modelo, utilizando otra nomenclatura más compacta, queda de la siguiente forma (“E” es la velocidad de un suceso):

$$\begin{aligned}\vec{\rho} \nabla \vec{E} = \vec{V} + \nabla \left( \vec{\mu} \left( \nabla \otimes \vec{E} + \left( \nabla \otimes \vec{E} \right)^T \right) \right) + \\ + \nabla \left( \vec{\lambda} \nabla \vec{E} \right) + R \vec{I}_W + \vec{A}_{ext}\end{aligned}$$

Ecuación 173

En el caso de fluidos por ejemplo, existe la llamada ecuación de continuidad, que no es más que una expresión que indica la variabilidad de la cantidad de moléculas que intervienen en el problema; es decir: el fluido puede considerarse compresible o incompresible, siendo diferente la ecuación de continuidad; en el caso de ser incompresible, la densidad es constante y esto en términos matemáticos, significa que la divergencia del campo de velocidades es nulo; genéricamente, para fluidos, la ecuación de continuidad es:

$$\nabla \cdot \vec{\rho} + \nabla \cdot \left( \vec{\rho} \vec{E} \right) + R \vec{2}_W = 0$$

Ecuación 174

2 reflexiones o análisis respecto esta ecuación:

- Es necesario añadir un término estocástico, que lógicamente no es el mismo que el añadido a la ecuación anterior.
- A diferencia de la dinámica de un fluido en general, es posible que la energía (masa, densidad, etc) del sistema grupo de sucesos varíe, no manteniéndose por tanto, constante; ello no es solamente debido al término estocástico, sino que realmente puede suceder.

Para analizar este hecho, se creará otro modelo más preciso más adelante.

#### 4.9. Ecuación de Poisson

Sea un ejemplo en particular: derivando respecto “x” y respecto “y” las ecuaciones de Navier Stokes con 5 eventos, se obtiene una expresión que relaciona las velocidades con la presión:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right) \quad \text{Ecuación 175}$$

#### 4.10. Relación entre Navier Stokes, Euler-Lagrange y el principio de mínima energía o mínima acción

**FALTA**

#### 4.11. Lotka Volterra

##### 4.11.1. Introducción

Es un modelo, como ya se vio anteriormente, que describe la variación de población entre 2 especies competitivas; los modelos más simples se basan en que las variaciones de cada especie sólo se ven afectadas por las variaciones del resto de especies, sin intervención del entorno o por causas estocásticas. La evolución de 2 especies por ejemplo, puede resultar extremadamente simple por tanto si se eligen condiciones competitivas sencillas, pero también complicada (real) si se eligen condiciones “reales” de competencia:

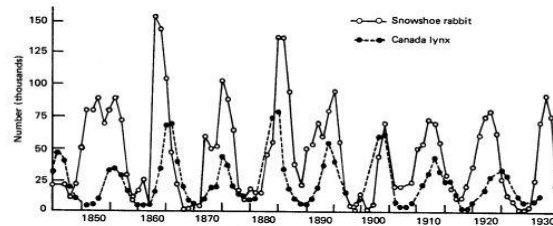
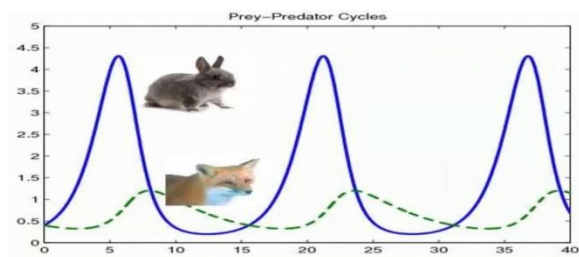


Figura 90: Evolución “teórica simple” y “real” de la población de conejos y zorros-lince.

La Economía en general, es un campo en el cual muchos factores compiten entre sí; desde este punto de vista, es posible modelar sucesos económicos utilizando el modelo de Lotka Volterra; no es descabellado en absoluto, pero sí complicado, puesto que hay que conocer las relaciones existentes entre todos los sucesos analizados; una vez se conocen dichas relaciones, lógicamente es posible conocer la evolución conjunta.

#### 4.11.2. Caso particular en Economía; 2 sucesos

Un pequeño ejemplo:

Como se ha visto, el modelo de Lotka Volterra, es un modelo que describe la evolución conjunta de “n” especies competitivas; sean 2 sucesos “A” y “B”, correspondientes al precio del Petróleo y a la cantidad extraída del mismo; se pueden considerar perfectamente, 2 sucesos competitivos; de esta forma, es posible aplicar el modelo evolutivo de Lotka Volterra, obteniendo el siguiente tipo de gráficas evolutivas para los 2 sucesos en función del tiempo:

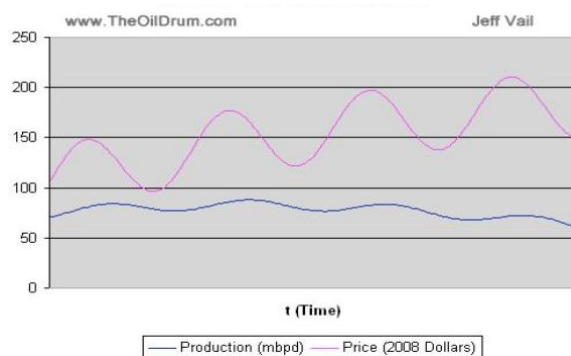


Figura 91: Evolución del precio de petróleo en función del petróleo extraído, aplicando el modelo de Lotka Volterra.



#### 4.11.3. Caso particular con 3 especies de seres vivos

Se puede trabajar con 3 especies dependientes para conocer la dinámica de sus poblaciones? Se puede trabajar con Lotka Volterra, obteniendo el siguiente tipo de gráficas:

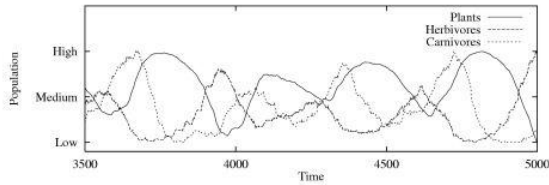


Figura 92: Evolución de la población de plantas, herbívoros y carnívoros en un entorno determinado.

Notar como ya se ha dicho anteriormente, que es necesario conocer los tipos de dependencias y sus relaciones numéricas, entre las 3 especies y quizás entre el entorno; no es fácil, pero necesario e ineludible. Más adelante se analizará el proceso para poder simular la evolución de “n” especies entre sí,

#### 4.11.4. “n” especies

El modelo de Lotka Volterra pues, se puede extender a “n” especies o “n” sucesos en general (“ $\alpha_{ij}$ ” es un valor que relaciona la dependencia entre la especie “ $x_i$ ” y la especie “ $x_j$ ”; “ $r$ ” es un valor de evolución; “ $t$ ” es el tiempo); el modelo en “N” dimensiones (“N” sucesos) más sencillo es el siguiente:

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \left( 1 - \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} x_j \right) \quad \text{Ecuación 176}$$

#### 4.11.5. Limitaciones y alcances

Como ya se ha visto, las 2 condiciones que debe cumplir un modelo matemático para poder simular “casi” cualquier tipo de sucesos, son:

- Transporte (lineal y no lineal).
- Difusividad.

El modelo de Lotka Volterra por ejemplo, no cumple estas condiciones; de hecho, como hace Peng Zhou en [83], se puede modificar el modelo para que efectivamente las cumpla. A continuación, se observa el modelo modificado trabajando sobre 2 especies: “Recientemente, existe un creciente interés por el estudio de la dinámica de poblaciones en entornos advectivos en los que los organismos adoptan una estrategia de dispersión que incluye tanto movimientos aleatorios (difusión) y movimientos dirigidos (advección). Un ejemplo típico de estos entornos advectivos son los ecosistemas fluviales, en los que el flujo de agua unidireccional influye en la dispersión de los individuos. Un modelo general de competencia entre dos especies para las comunidades de algas en ríos fue formulado por Lutscher et al. de la siguiente manera:”

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 u_{xx} - \alpha_1 u_x + u[r_1 - a_{11}u - a_{12}v] \\ v_t &= d_2 v_{xx} - \alpha_2 v_x + v[r_2 - a_{21}u - a_{22}v] \end{aligned}$$

Ecuación 177

Donde “u” y “v” dependen de “x” y de “t”, y corresponden a la densidad poblacional en la posición “x” y el tiempo “t”; “ $\alpha_i$ ” es la tasa de advección; “ $d_i$ ” es la tasa de difusión; “ $r_i$ ” significa las tasas de crecimiento; “ $a_{ij}$ ” es un valor que cuantifica la competencia; “ $u_t$ ” es la derivada de “u” con respecto a “t” que es el tiempo.

De cualquier manera y tal como se aprecia perfectamente en la expresión de Lotka Volterra modificada y por tanto, adaptada a este problema en particular, se ha incorporado:

- Un término derivativo de orden 2.
- Un término lineal y no lineal de transporte.

Es decir: se ha incorporado el término difusivo y el de transporte; ello hace que cada vez se parezca más y más a la ecuación de Navier Stokes....

#### 4.12. Equilibrio de un sistema formado por varios sucesos

##### 4.12.1. Navier Stokes - 1

Existen muchas escuelas económicas y por tanto muchas teorías sobre el concepto de Equilibrio Económico y su cuantificación o evolución

Uno de ellos se basa en la dualidad Oferta-Demanda denominado modelo Walrasiano (existen otros muchos como el modelo que propone un enfoque Marshaliano por ejemplo basado en el precio, no en la cantidad); este modelo, como se aprecia en la Figura siguiente, establece que las variaciones sucesivas y dependientes ente ambos valores, hace que “busquen” su estabilidad o equilibrio:

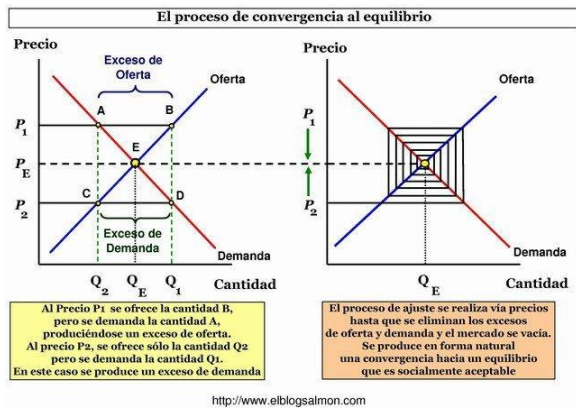


Figura 93: Modelo Walrasiano oferta-demanda del equilibrio económico. Algo parecido ocurre cuando por ejemplo, se resuelve la ecuación  $\sin(x)=x$  por medio del método matemático del punto fijo.

Evidentemente es un modelo muy simple, pero con “grandes” números puede resultar válido y sobre todo útil. Sea “D” depredador, “P” presa, “t” tiempo, “λ” es el coeficiente que se utilizará más adelante en el análisis de la ecuación logística (“a” y “b” >0, “c” y “d” <0); haciendo un cambio de variable, se observa que cada ecuación del modelo Lotka Volterra se convierte en una ecuación de tipo logística:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= aD - bDP \\ \frac{dP}{dt} &= cP - dDP \end{aligned} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda D_n \left( \frac{a}{\lambda} - \frac{b}{\lambda} P \right) - D_n = D_{n+1}$$

$$\lambda P_n \left( \frac{c}{\lambda} - \frac{d}{\lambda} D \right) - P_n = P_{n+1}$$

Ecuación 178

Existen variaciones sobre el modelo “base” o “típico”; por ejemplo la ecuación logística o el crecimiento poblacional del depredador con un valor máximo “M” en ausencia de presa, es una de ellas:

$$\frac{dD}{dt} = aD \left( 1 - \frac{D}{M} \right) \quad \text{Ecuación 179}$$

De esta forma, el modelo presa-predador, es similar a la ecuación logística y por tanto también a la ecuación de Navier Stokes.

El objetivo que se pretende a continuación, es modelar el comportamiento de un grupo de depredadores y presas, utilizando la ecuación del Navier Stokes. Para ello, se trabaja con la ecuación de 3 eventos (u,x,t):

Cabría hacer una pregunta totalmente lógica que sería si este modelo sirve para el propósito buscado, o lo que es lo mismo, si está bien definido para el problema a analizar; la respuesta es que sí, puesto que todas las variables del problema (número de presas “P”, número de depredadores “D” y tiempo “t”) están relacionados (“V” es en este caso, el potencial, con densidad y viscosidad constantes):

$$\rho \left( \frac{\partial P}{\partial t} + P \frac{\partial P}{\partial D} \right) = V + \mu \frac{\partial^2 P}{\partial D^2} \quad \text{Ecuación 180}$$

El potencial “V” depende de las tasas de reproducción de cada especie, de su relación o interdependencia, de las condiciones iniciales, de posibles enfermedades que afectan más a una especie que a otra, etc.

Para calcular la variación de la población de predadores con respecto a la población de depredadores, se utilizan las ecuaciones logísticas de cada población:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = r_1 P \left( 1 - \frac{P}{K_1} \right)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = r_2 D \left( 1 - \frac{D}{K_{21}} \right)$$

Ecuación 181

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{\partial P}{\partial D} = r_3 \frac{P}{D} \left( \frac{1 - P/K_1}{1 - D/K_2} \right) \quad \text{Ecuación 182}$$

Por tanto:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial D^2} = \frac{-P}{D^2} \frac{r_3 - \frac{r_3 P}{K_1}}{r_3 - D \frac{r_3}{K_2}} + \frac{P}{D} \left( \frac{r_3 - \frac{r_3 P}{K_1}}{r_3 - D \frac{r_3}{K_2}} \right) \frac{r_3}{K_2} \quad \text{Ecuación 183}$$

Sustituyendo se obtiene la expresión final, correspondiente a la evolución de las 2 especies, mediante la ecuación de Navier Stokes incompresible; de esta forma se obtendrán 2 tipos de representaciones:

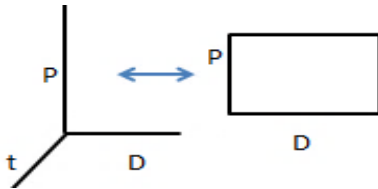


Figura 94: 2 representaciones de los datos que se obtienen de la ecuación de Navier Stokes aplicada a la evolución de 2 especies de animales dependientes.

Cuando se tienen los valores de ciertas 2 variables o sucesos “A” y “B”, se pueden secuenciar respecto el tiempo, pudiendo calcular sus funciones interpolantes; por tanto, es sencillo

obtener los 2 cocientes requeridos en las ecuaciones de Navier Stokes:

$$\frac{\partial A}{\partial B}, \frac{\partial A}{\partial B^2} \quad \text{Ecuación 184}$$

El modelo de Lotka-Volterra, es un modelo basado en hipótesis “lógicas” ya analizadas en otros problemas de crecimiento y variación de poblaciones, que se han traducido de forma matemática a través de una serie de expresiones; el modelo basado en Navier Stokes desarrollado aquí, se basa en un conocimiento previo de los sucesos conjuntos para de esta forma, conocer y crear una “dependencia numérica”. Desde este punto de vista, ambos métodos de modelación del fenómeno pueden parecer diferentes, pero hay que tener en cuenta que para mejorar el modelo de Lotka-Volterra (adaptarlo más fielmente a la realidad) es necesario igualmente basarse en datos reales.

Porqué es importante este modelo de evolución poblacional de 2 especies competidoras? La razón es simple y evidente: en términos económicos, la presa actúa como “Demanda” y el depredador actúa como “Oferta”. Es una analogía simple pero muy efectiva y clarificadora del problema analizado. A pesar de que el modelo de Lotka-Volterra y la analogía descrita anteriormente, son extremadamente simples y quizás faltos de rigor en cuanto a exactitud por falta de variables o información, es un modelo “inicial” que se puede variar para hacerlo mucho más real y útil. El modelo “inicial” posee una evolución en la que se aprecian patrones; la realidad no es así; se introducen variaciones en el modelo para reproducir más fielmente la realidad:

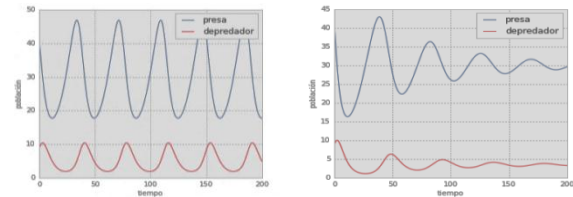


Figura 95: Evolución de las poblaciones de presas y depredadores a partir del modelo Lotka-Volterra “tradicional” y “con variaciones”.

Las “variaciones” del modelo descrito en este apartado, requiere de cambios en la

cuantificación de las aceleraciones causadas por fuerzas externas y en la expresión del potencial “V”; el potencial, puede considerarse como parte integrante de las fuerzas internas del sistema.

Para calcular el punto de equilibrio del modelo, basta con hacer que las derivadas de ambas poblaciones se anulen:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dP}{dt} = 0 \quad \text{Ecuación 185}$$

Representando los espacios de fases de los 2 modelos (inicial y modificado), se obtiene:

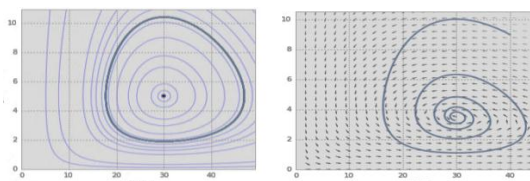


Figura 96: Espacios de fases del modelo de Lotka-Volterra inicial y el modificado.

Se observa que la evolución es muy diferente; a pesar de que tienen puntos de equilibrio, ambos se acercan a él de forma muy diferente; incluso cabría la posibilidad de que presas o depredadores, desaparecieran (ausencia de equilibrio); es decir: el número inicial de ambas especies, la relación entre ellas, sus factores de reproducción, etc.... inciden en la dinámica de ambas poblaciones.

Por tanto, representando el espacio de fases de un sistema de ecuaciones diferenciales (“n” dimensiones), se visualiza el punto o puntos de equilibrio:

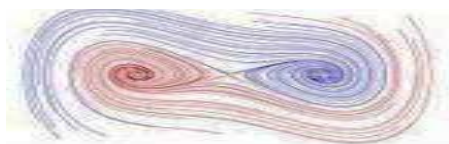


Figura 97: Espacio de fases de las ecuaciones de Lorentz (3 dimensiones) de modelación de fenómenos atmosféricos; este sistema, posee 2 puntos de equilibrio; la trayectoria, pathline o streamline, alterna ambos puntos.

Una vez se alcanza el equilibrio, éste puede resultar estable o inestable:



Figura 98: Posiciones de equilibrio estable, inestable e indiferente de una bola.

Es decir: qué significa que un suceso esté en equilibrio estable o inestable?: un suceso se encuentra en equilibrio estable cuando una perturbación hace que varíe manteniéndose cerca del equilibrio, tendiendo de nuevo a él progresivamente; por el contrario, se encontrará en equilibrio inestable cuando varíe muy lejos del valor de equilibrio tendiendo a no volver al punto inicial. Quizás desde otro punto de vista, un suceso se encuentra en equilibrio estable si al variar lo hace lentamente y en poca cantidad, mientras que el inestable variará de forma rápida y en mucha cantidad. Son conceptos esenciales para definir el equilibrio.

Todo sistema compuesto de sucesos, tiende a un equilibrio; este equilibrio podría parecer ilógico o antinatural, pero no lo es; es algo natural y “lógico”; el sistema intenta en definitiva no solamente usar la mínima energía posible sino que en la posición de equilibrio, la energía latente sea también la mínima posible; esto es esencial para entender cómo se llega a un posible equilibrio y cómo se mantiene. Este equilibrio, considerándolo como un punto “E”, puede ser tan grande como se quiera; esto es: “E” puede ser un intervalo “I” de tal forma que el suceso varia en el interior de “I”, siendo por tanto este intervalo el punto-zona de equilibrio. Por eso, la Economía, “siempre” se encuentra en equilibrio: sus parámetros cuantificables no están disparados o cerca del infinito; “normalmente”, se encuentran dentro de un determinado rango; bien es verdad que pueden aumentar desmesuradamente (las crisis existen....), pero en cierta forma, la economía tiende a regularse por ella misma. En ocasiones muy inestables, el equilibrio puede no alcanzarse, dependiendo de las condiciones de cada uno de los sucesos. La posición o condición de equilibrio de un sistema con respecto a cada uno de los sucesos por tanto, depende del tipo de estabilidad; existen sucesos más importantes que

otros por lo que una inestabilidad de dichos sucesos provoca una mayor inestabilidad del sistema; es más: son necesarias menos partículas de un suceso “pesado” para desequilibrar el sistema:



Figura 99: Diferencia de “peso” entre un balón de fútbol y unos lingotes de oro.

Pero se puede ir más allá, intentando aplicar las propias ecuaciones de Navier Stokes al problema de la oferta/demanda, sin pasar por otras equivalentes; para ello se tiene en cuenta además de la propia oferta y demanda, la cantidad de producto y su precio; si se aplica las ecuaciones de Navier Stokes en 2 dimensiones estáticas, se tienen 4 variables, sin el tiempo “t”: Oferta “O”, demanda “D”, cantidad “Q” y precio “M”; la presión “P”, debe definirse adecuadamente para poder resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$O \frac{\partial O}{\partial Q} + D \frac{\partial O}{\partial M} = -\frac{\partial P}{\partial Q} \frac{1}{\rho_Q} + \left( \frac{\mu}{\rho} \right)_Q \left( \frac{\partial^2 O}{\partial Q^2} + \frac{\partial^2 O}{\partial M^2} \right)$$

$$O \frac{\partial D}{\partial Q} + D \frac{\partial D}{\partial M} = -\frac{\partial P}{\partial M} \frac{1}{\rho_M} + \left( \frac{\mu}{\rho} \right)_M \left( \frac{\partial^2 D}{\partial Q^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial M^2} \right)$$

Ecuación 186

Notar que esta última expresión, utiliza una “distribución” de las variables; se puede utilizar cualquier de las muchas distribuciones que se quieran, en función de las condiciones iniciales y de contorno que se tengan o se puedan tener.

#### 4.12.2. Navier Stokes – 2

Otro de los métodos para calcular el equilibrio de un sistema o grupo de sucesos, se basa en utilizar las ecuaciones de Navier Stokes estrictamente; esto es: su versión en régimen estático (si se utiliza la variable tiempo “t”, obviarla pues).

Por ejemplo, en el caso de la ecuación  $g(x)=\sin(x)=x$ , se puede utilizar el procedimiento llamado de punto fijo, para obtener la solución “iterada” de esta expresión.

Dado que:  $f(x)=0$  puede reescribirse  $f(x)$  en la forma:  $f(x)=g(x)-x=0$ , por lo que es posible esperar que exista un valor de  $x_i$  que sea igual a  $g(x_i)$ , dicho valor corresponderá a una raíz de  $f(x)$ , y podría obtenerse a partir de un esquema iterativo, donde cada valor se obtiene evaluando a  $g(x)$  en el valor previo:

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{Ecuación 187}$$

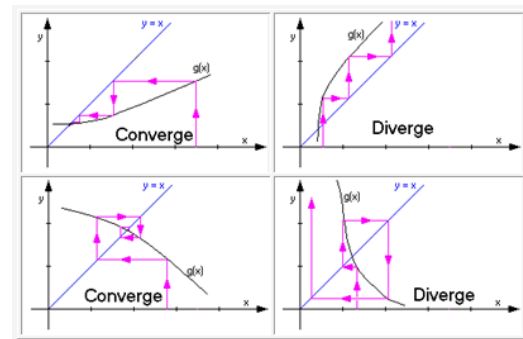


Figura 100: Posibilidades de convergencia o no, dependiendo de la pendiente de la función.

Una condición suficiente que garantiza la convergencia es que si  $g(x)$  y  $g'(x)$  son continuas en un intervalo alrededor de una raíz de la ecuación  $x = g(x)$  y si se cumple que:

$$|g'(x)| \leq 1 \quad \text{Ecuación 188}$$

Si efectivamente la ecuación converge a la solución, ésta, es una solución de equilibrio; esto es: para las condiciones iniciales y de contorno del problema, la solución calculada es una solución a la que la ecuación tiende.

Sea un ejemplo CFD en 2 dimensiones, consistente en analizar el flujo de aire alrededor de un perfil alar:

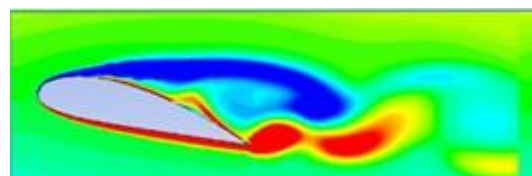




Figura 101: Solución estática del flujo de aire alrededor de un perfil de ala.

Si se aplican las ecuaciones no transitorias de Navier Stokes, se puede calcular una solución que cumpla las ecuaciones de Navier Stokes en todos y cada uno de los puntos del problema a resolver; es decir: se obtendrá una solución estacionaria del problema; si más tarde se aplican las ecuaciones de Navier Stokes en modo transitorio (teniendo en cuenta la variable tiempo o cualquier otra sustituyéndola), se tendrán soluciones en función de la variable “tiempo” que oscilarán alrededor de la solución estática:

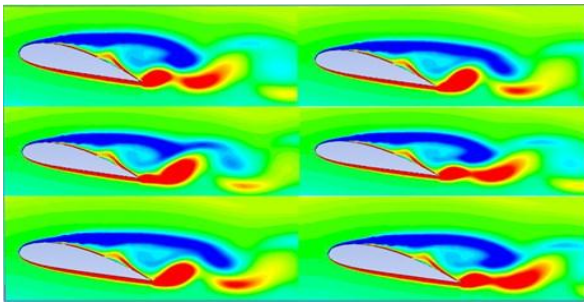


Figura 102: Soluciones en función del tiempo, del flujo de aire alrededor de un perfil de ala.

Lo mismo pasaría con otro ejemplo CFD calculando el flujo alrededor de un círculo:

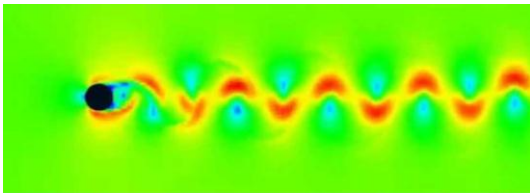


Figura 103: Las soluciones transitorias del flujo de aire alrededor de un círculo, da como resultado una vibración denominada vórtices de Karman.

#### 4.12.3. Links

Se trata de definir las relaciones entre los sucesos mediante links o relaciones matemáticas tipo muelle, damper, inerter, etc.... Buscar el equilibrio del sistema es el objetivo y se analizará más adelante.

#### 4.13. Relación entre Entropía, Acción y Equilibrio

Estos 3 conceptos están íntimamente ligados; de hecho anteriormente, se ha sugerido la siguiente pregunta: qué significa que un suceso tiende al estado más probable?:

Analizando la relación existente, la respuesta es evidente y surge por sí sola.

- Cuando una partícula o sistema de partículas se mueve, lo hace hacia un estado de mínima Energía; esto es: mínima Acción; en dicho punto, la partícula/s se encuentra “tranquila”, sin tensiones aparentes; es decir: la partícula/s tiende a tener más y más Entropía (en sistemas aislados, sin intervención de fuerzas externas, o con fuerzas conservativas).
- El Equilibrio es un punto / zona de máxima Entropía.

#### 4.14. Modelo dinámico K-ε (No confundir “K” con la energía cinética “K”, descrita anteriormente).

##### 4.14.1. Escalas de Kolmogorov: K-ε

Las turbulencias en un fluido pueden ser tan grandes en un inicio, como la escala del propio fluido; existen otras turbulencias que se forman a partir de las más grandes y así sucesivamente; Leonardo Da Vinci, ya fue capaz de apreciarlo y plasmarlo mediante dibujos (impresionante curiosidad y perspicacia la suya; la admiro y la envido profundamente):



Figura 104: Leonardo Da Vinci: Existen remolinos dentro de otros remolinos....

Pero, existe un momento en que la viscosidad es capaz de eliminar las pequeñas



turbulencias creadas trasformando en muchas ocasiones su energía en forma de temperatura; este límite se denomina escala de Kolmogorov “ $L_k$ ” (escala de la turbulencia más pequeña) y depende de la tasa de disipación de energía cinética “ $\varepsilon$ ” y la viscosidad “ $\mu$ ” (“ $h$ ” es la pérdida de energía entre 2 puntos y “ $t$ ” es el tiempo que tarda la partícula en ir entre dichos 2 puntos):

$$L_k = \left( \frac{\mu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \leftrightarrow \varepsilon = \frac{h}{t} \quad \text{Ecuación 189}$$

Igualmente existe el llamado “tiempo- $t$ ” y “velocidad- $u$ ” de Kolmogorov:

$$t_k = \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$u_k = (\mu \varepsilon)^{\frac{1}{4}} \quad \text{Ecuación 190}$$

Estos son valores muy importantes a la hora de diseñar una simulación CFD....

“ $h$ ” se puede calcular experimentalmente y es muy útil en dinámica de peatones por ejemplo, pero también en transmisión de información en general. Desde este punto de vista de la equivalencia dinámica independiente de la escala de trabajo, “ $h$ ” es de vital importancia y trascendencia y conviene estudiar más el modelo “tradicional” “ $k$ - $\varepsilon$ ” de modelación de la turbulencia.

Hay 2 asuntos muy interesantes a analizar:

- La energía y su tasa de disipación.
- El efecto de la escala de Kolmogorov en señales económicas.

#### 4.14.2. Energía “ $K$ ” y su disipación “ $\varepsilon$ ”

La presión se ha visto que es una medida de energía; cuantifica por tanto qué energía tiene una onda principalmente en función de su

velocidad. Por tanto y tal y como se he hecho siempre en este artículo, se extiende esa definición a “ $n$ ” dimensiones, dimensiones correspondientes a “ $\Omega$ ”. Esta energía se define como “ $K$ ” o energía cinética turbulenta “ $TKE$ ” del suceso “ $E$ ” (“ $u_i$ ” es la velocidad de “ $E$ ” en el eje “ $i$ ”) en un punto determinado; es decir: la energía de una partícula:

$$K_E = m \sum_{i=1}^n u_i^2 \quad \text{Ecuación 191}$$

Es posible por tanto, calcular su disipación, mediante un ensayo empírico; esto es muy útil en el caso por ejemplo de analizar dinámicas de grupos de peatones, tráfico de automóviles, bandadas de pájaros, etc....

De las expresiones anteriores, se obtiene que la disipación de energía cinética turbulenta, depende exclusivamente de la viscosidad (al menos en primera aproximación, aunque muy buena aproximación....).

Para que se alcancen los valores “límites” de Kolmogorov, es necesario como se ha dicho ya, que la viscosidad llegué a destruir o a impedir la formación de las más pequeñas turbulencias; para ello, las fuerzas viscosas deben ser iguales a las fuerzas inerciales o de velocidad; esto es: el número de Reynolds debe ser igual a 1; combinando este hecho con las expresiones anteriormente citadas, se obtiene:

$$\varepsilon = \frac{(\rho u)^4}{\mu}; \varepsilon = \frac{L \rho u}{t^2}; \varepsilon = \frac{u^3}{L \rho} \quad \text{Ecuación 192}$$

De esta forma, combinándolas, se obtiene una relación entre los 3 valores mínimos de Kolmogorov; relación muy interesante para poder apreciar variaciones mutuas entre los valores del fluido y los valores de Kolmogorov:

$$\frac{(\rho u)^4}{\mu} = \frac{L \rho u}{t^2} = \frac{u^3}{L \rho} \quad \text{Ecuación 193}$$

#### 4.14.3. Escala de Kolmogorov en Economía

Se trata de averiguar si existe algún punto a partir del cual, las turbulencias se comporten de un modo particular...; este comportamiento particular hace referencia al hecho de que quizás, puedan ser previsibles en cierta forma, y por tanto prescindibles; quizás estas turbulencias sean las causantes de la señal estocástica, y si esto fuera realmente así, se podría conocer cuándo no tenerla en cuenta o cuándo no es relevante.

Es más: las turbulencias podrían ser fruto de periodicidades y de las frecuencias de la señal analizada; toda señal, tiene una especie de frecuencia natural “f”, intrínseca a la naturaleza de la propia señal; esta frecuencia se puede expresar:

$$f = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{Ecuación 194}$$

Es decir: la señal tiene una menor frecuencia si tiene más importancia o relevancia (“K” es una constante).

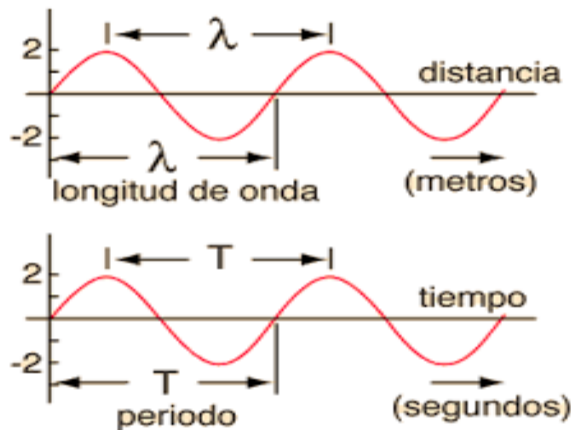


Figura 105: Frecuencia y Amplitud de una onda.

➔ Como ya se ha hecho en varias ocasiones a lo largo de este trabajo, la frecuencia, se define como número de ciclos por unidad de eje de abscisas.

➔ Otro punto muy importante a tener en cuenta en relación a las ondas, es que los “picos” son zonas de alta presión; ello es muy importante si se relaciona con el principio de mínima energía o muchos modelos numéricos dinámicos analizados anteriormente. Por el contrario, en los “valles”, son zonas de baja presión.

## FALTA

### 4.14.4. Métodos de cálculo de “K” y “ε”

Para calcular estos 2 importantes valores, se puede recurrir al uso de herramientas experimentales tales como las técnicas CFD. El cálculo de “K”, es directo e inmediato, proporcionando su valor en cualquier punto; también es posible configurar un canal matemático, de tal forma que ofrezca una media de “K” en una zona determinada; incluso, mediante este mismo trabajo, se sabe que se pueden analizar flujos de peatones, con lo que se calcula la energía cinética turbulenta “K” también es directo en ese tipo de problemas; por supuesto que otro caso importante a analizar y estudiar detenidamente, es el caso de la creación de la capa límite; es esencial tener bien configurada y conocida la “TKE” en dicha zona. Calcular el valor de la disipación de “TKE”, es quizás, no tan directo; de cualquier forma, se genera un canal matemático para calcular dicha disipación en un determinado punto; si “y” es la coordenada a través de la cual se quiere conocer la disipación y “δ” es la longitud en dicha coordenada o dirección en el interior de la cual se quiere calcular “ε” (“ρ” densidad y “u” velocidad):

$$\varepsilon = \int_0^{\delta} (\rho u) dy \quad \text{Ecuación 195}$$

En la anterior ecuación, la densidad varía y la velocidad “u” es la diferencia de velocidades entre los 2 puntos donde se quiere calcular la disipación de energía cinética turbulenta. Lógicamente, existe otra forma de calcular la disipación de “TKE” entre 2 puntos que es calcular la “K” en ambos puntos y restarlas.... A título de ejemplo, en el caso tridimensional sobre una simulación CFD de los vórtices producidos por el aire alrededor de una estructura a modo de edificio, se representan las componentes de la velocidad, la velocidad en módulo y por último la “TKE” ([90] Timoteo Briet Blanes, Software CFD – Star CCM+):

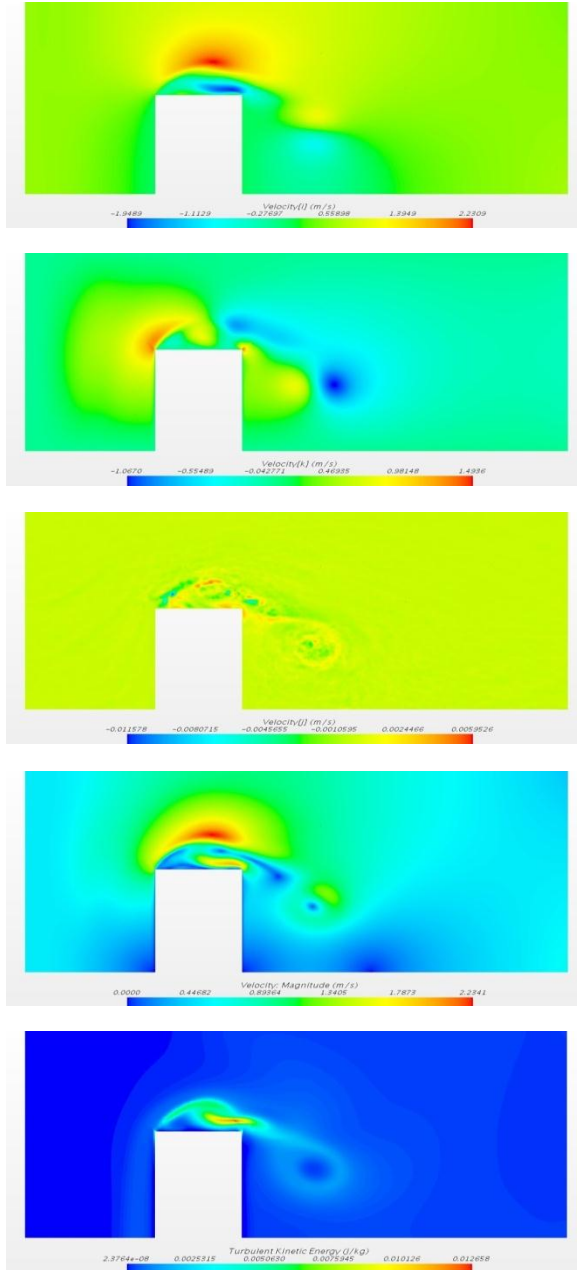


Figura 106: Campo de velocidades: 3 Componentes de la velocidad, módulo de la velocidad y “TKE”.

#### 4.14.5. Modelo dinámico K-ε

Introduciendo los conceptos de “K” y “ε” descritos en las ecuaciones de Navier Stokes, se obtiene el siguiente modelo dinámico, incluyendo también, los términos estocásticos definidos anteriormente; en primer lugar, se exponen las ecuaciones del modelo incompresible sin introducir los términos

estocásticos; en [91], [92], [93] y [94], se encuentran numerosas expresiones para las ecuaciones de Navier Stokes, incluyendo el modelo de Turbulencia “K-ε” aquí simplemente descrito:

Momento:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot ((\nu + \nu_T)[\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T])$$

Energía Cinética Turbulenta “TKE”:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot \left( k \mathbf{u} - \frac{\nu_T}{\sigma_k} \nabla k \right) = P_k - \varepsilon,$$

Disipación de “TKE”:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \varepsilon \mathbf{u} - \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) = \frac{\varepsilon}{k} (C_1 P_k - C_2 \varepsilon).$$

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad P_k = \frac{\nu_T}{2} |\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T|^2$$

Ecuación 196

“ν” es la viscosidad/densidad y “ν<sub>T</sub>” es la viscosidad/densidad de los remolinos incluida para simular la existencia de la turbulencia no resuelta (el resto de parámetros, son constantes). Esta Viscosidad de los remolinos, también se llama Viscosidad Turbulenta y su inclusión en las ecuaciones de Navier Stokes, es esencial para poder resolverlas; a continuación, 1 ejemplo al respecto:

- Tobera en 2 dimensiones por donde sale aire ([102]); Suponiendo que el ancho del espacio es h = 1 m, la velocidad del chorro U = 1 m / s y la densidad del fluido ρ = 1 kg / m<sup>3</sup>, Coeficiente de viscosidad μ = 10<sup>-5</sup> Pa • s, entonces el número de Reynolds de flujo Re = ρUh / μ = 105:

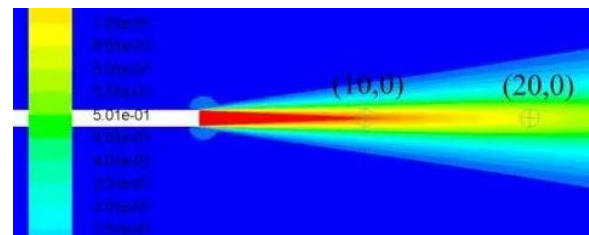


Figura 107 : Campo de velocidades en el problema bidimensional de una tobera.

Si se calculan ambos lados de las ecuaciones de Navier Stokes en este ejemplo, se obtiene:

选取的点	$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$
(10, 0)	-4.45955170E-02	-9.08409293E-05
(20, 0)	-1.21940731E-02	5.31157549E-05

Tabla 5: Valores de los términos de las ecuaciones de Navier Stokes en el problema de una tobera bidimensional.

Los 2 valores (izquierda y derecha) son muy diferentes; en cambio, si se introduce la Viscosidad Turbulenta, los resultados de ambos lados, son muy muy iguales:

选取的点	$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$
(10, 0)	-4.45955170E-02	-4.3240008255e-02
(20, 0)	-1.21940731E-02	-1.2164792650e-02

Tabla 6: Valores de ambos lados de las ecuaciones de Navier Stokes en el problema de una tobera bidimensional, con la incorporación de la Viscosidad Turbulenta.

➔ Determinar la viscosidad turbulenta en un suceso económico por ejemplo (como factor disipador de la energía), no es nada fácil (esto se puede extender a cualquier tipo de suceso); por tanto, se puede recurrir a sucesos de los que se tengan datos; es decir: un suceso pasado y conocido; de esta forma, se puede calcular dicha viscosidad, puesto que debe cumplir las ecuaciones de Navier Stokes (igualando ambos lados de la ecuación y despejando la viscosidad turbulenta); esto es esencial ya que permitirá:

- Conocer mucho mejor el suceso en sí. Por tanto y mediante semejanzas, entender otros.
- “Conocer” cualitativa y cuantitativamente la viscosidad turbulenta, en cualquier situación, para de esta forma, poder “intuirla” en otros fenómenos o sucesos.

#### 4.15. Intensidad de Turbulencia

Existe un valor que cuantifique de alguna manera la turbulencia que existe en una zona determinada de un flujo de partículas? Este valor existe y se denota por Intensidad de

Turbulencia “It” y depende de la energía cinética turbulenta “K” y de la velocidad media “u”:

$$It = \frac{\sqrt{(2/3)K}}{u} \quad \text{Ecuación 197}$$

#### 4.16. Zona de influencia dinámica de una partícula

Las ecuaciones de Navier Stokes incluyen derivadas hasta el orden 2 como máximo; esto significa que el movimiento de cada partícula depende sólo de las partículas que la rodean.

Sin embargo, desde un punto de vista matemático (quizás no físico), la zona de dependencia del movimiento de una partícula “A” puede hacerse más grande, de modo que dependa de muchas partículas, no sólo de las que están cerca de ella. De este modo, puede lograrse una mayor precisión en cualquier predicción. Para ello, es necesario tener muchos datos, y esto no es fácil. Para alcanzar eso, es posible trabajar discretizando cada derivada en Diferencias Finitas de orden 1, 2, 3, 4, etc....:

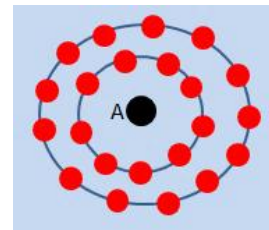


Figura 108: Zona de influencia dinámica de la partícula “A”.

#### 4.17. Modelos Numéricos en “n” dimensiones

...Reflexión: Solución de la ecuación del calor en 3 dimensiones: con unas condiciones iniciales o de contorno, por ejemplo, de temperatura fija en los ejes y variable en el resto, se obtiene una solución. Pero.... si se resuelve el mismo problema en 4 dimensiones espaciales:

¿Es la solución en la cuarta dimensión la misma que en la quinta, sexta, etc. ...., con el mismo tipo de condiciones iniciales y/o de contorno? El cuarto eje por ejemplo, ¿con qué

ejes o planos se toca y por tanto comparte temperatura?, ¿Cómo se distribuye la temperatura en los planos “extras”? Buenas preguntas para reflexionar y analizar más adelante.

2 ejemplos típicos:

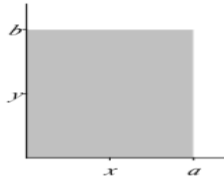
- Ecuación del calor: Por [44], la solución general en 2D de la ecuación del calor es:

$$u_t = c^2 \nabla^2 u = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$$

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0, & \quad 0 \leq y \leq b, t \geq 0 \\ u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, & \quad 0 \leq x \leq a, t \geq 0. \end{aligned}$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), (x, y) \in R,$$

where  $R = [0, a] \times [0, b]$ .



$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \mu_m x \sin \nu_n y e^{-\lambda_{mn}^2 t},$$

$$\mu_m = \frac{m\pi}{a}, \nu_n = \frac{n\pi}{b}, \lambda_{mn} = c \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2}, \text{ and}$$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dy dx$$

Ecuación 198

Será muy interesante observar la dinámica del calor cuando se analicen las soluciones en un espacio de más de 3 dimensiones espaciales y 1 temporal; en definitiva lo que se pretende conocer es cómo se realiza la Transmisión de Información en un espacio “n” dimensional; esta pregunta es la básica a resolver; si se conoce, se conocen muchas cosas....

- Ecuación de ondas: La solución general es:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación de onda} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \\ \text{cf1: } u(x, 0, t) = u(x, b, t) &= 0 \quad \text{ci1: } u(x, y, 0) = f(x, y) \\ \text{cf2: } u(0, y, t) = u(a, y, t) &= 0 \quad \text{ci2: } \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{solución: } u(x, y, t) &= \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} b_{m,n} \phi_{m,n}(x, y) \cos(c \lambda_{m,n} t) \\ \phi_{m,n}(x, y) &= \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad \lambda_{m,n} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \\ b_{m,n} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \phi_{m,n}(x, y) f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Ecuación 199

Es fácil extender estas soluciones a 4 dimensiones espaciales + “t” como tiempo; sería muy interesante observar el comportamiento de las “dimensiones extra”; magnífico proyecto de investigación. El porqué de la importancia es evidente: se podría entonces conocer la dependencia que tienen las condiciones iniciales y de contorno cuando se modelan más de 3 eventos; también daría pie a resolver preguntas como: importa el orden de los sucesos a la hora de incluirlos en las ecuaciones?, etc.... es un análisis esencial.

Si se resuelve un modelo numérico con 2 eventos por ejemplo, se puede representar el espacio de fases correspondiente. Se puede pues, calcular las líneas de corriente para conocer la evolución de ambos eventos de forma dependiente, en función del punto inicial o semilla; estas líneas de corriente o streamlines, son geodésicas del espacio analizado:

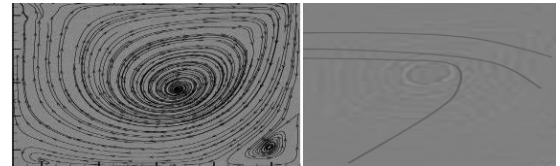


Figura 109: 2 casos de streamlines sobre el mismo problema dependiendo del punto semilla que las genera y de las condiciones iniciales y/o contorno del problema.

Estas líneas de corriente o trayectorias, representarán la evolución de los eventos entre sí; a lo largo de un estudio, las ecuaciones del modelo utilizado deberán modificarse para adaptar la evolución calculada a la evolución real; es decir: si de repente, hay un factor imposible de determinar o conocer que afecta a

la evolución del suceso, se modifica el modelo y se introduce un nuevo punto semilla real junto a unas condiciones iniciales y de contorno; a partir de esto, se obtendrá otra trayectoria: en resumen, el objetivo es mejorar el modelo y la predicción por tanto.

Trabajando en dimensiones mayores a 2, es posible apreciar geometrías imposibles de ver con menos dimensiones; estas “nuevas” perspectivas hacen que se conozca mucho mejor la dinámica de cierto evento; esto conlleva otros problemas como el hecho de tener que relacionar los sucesos estudiados:

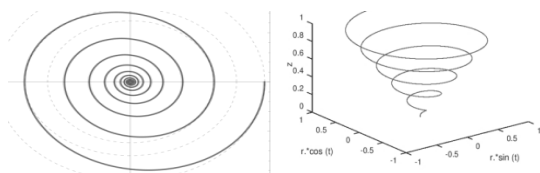


Figura 110: 2 “perspectivas” de la misma curva o streamline.

Sean ahora 2 eventos sobre los que se resuelve su espacio de fases; este espacio se puede representar quizás, mediante una especie de canal con agua circulando por él, pudiendo calcular las streamlines como se ha dicho anteriormente. Si en dicho canal, se coloca un círculo, las streamlines que se pueden calcular, obviamente serán diferentes; es decir: la dinámica conjunta entre ambos eventos será diferente. Un problema a resolver es cómo diseñar la implantación de estos “objetos” para conocer “realmente” la dependencia dinámica entre los sucesos; magnífico trabajo de investigación:



Figura 111: El sentido del flujo de agua es hacia la derecha. Dependiendo del objeto “obstáculo” introducido, el flujo será obviamente diferente.

Sea ahora un problema de 3 dimensiones espaciales  $(x,y,z)$  y una temporal “ $t$ ”; por tanto, se trabaja en 4 dimensiones.... Así, es posible representar, por ejemplo ternas o

parejas de dimensiones:  $(x,y,z)$ ,  $(x,z,t)$ ,  $(x,y)$ , etc.... Si en una función de 3 coordenadas  $(x,y,z)$  se representa por ejemplo  $(x,y)$  o  $(y,z)$ , significa que se muestran los datos de una sección perpendicular u ortogonal; es decir: secciones planas. Pero obviamente, también es posible, trabajar con secciones realizadas mediante curvas o incluso mediante superficies. De hecho, el fractal de Bifurcación es una sección el fractal de Mandelbrot....

¿Qué significa una sección plana (2D) con inclinación en un espacio 3D? Es una representación con escala o deformación en algún eje (en este caso, entre “ $b$ ” y “ $a$ ” y “ $c$ ”); es decir:

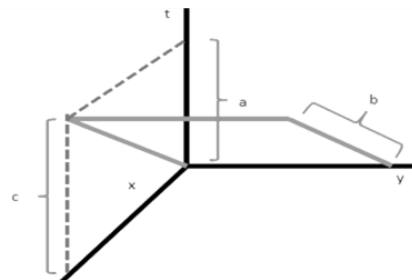


Figura 112: Deformación de los ejes de coordenadas, en función de la sección realizada.

Pero incluso la dimensión del espacio a estudiar, podría ser “fractal”; es decir; la dimensión “ $n$ ” del espacio, no es necesario que sea un número natural; podría ser un número real.

- ¿Qué “forma” pueden tener las ecuaciones de un modelo numérico, en una dimensión fractal?
- ¿Cómo se debe hacer la “sección” para obtener un gráfico en dimensión fractal?
- ¿Cómo hay que hacer la “sección” para obtener una geometría en 3D, a partir de una geometría en 6 dimensiones, por ejemplo?
- ¿Qué significan físicamente las dimensiones (más de 3) en cualquier modelo numérico?
- ¿Qué significa físicamente una dimensión fractal?
- ¿Hay funciones o procesos para obtenerlas, con la dimensión fractal que desee?
- ¿Hay funciones con la misma dimensión fractal?
- La cuarta dimensión, ¿toca alguna arista en la 3ª dimensión?



- ¿Cómo trabajar con ecuaciones en “n” dimensiones (también fractales)? Es decir: con soluciones en “n” dimensiones. Por ejemplo: trabajar con la ecuación de la onda o del calor en 5 o 3,5 dimensiones....

- ¿Es posible crear una geometría fractal, a partir de una intersección entre geometrías no fractales?

### FALTA

“Observar” en dimensiones mayores de 3 ó 4, es imposible para el ser humano: no puede imaginar, visualizar o representar una gráfica en 5 dimensiones por ejemplo; pero puede “razonar” de determinadas maneras especiales; a continuación, se analiza un caso particular trabajando en “n” dimensiones. Sean 10 sucesos dependiente de los que sabemos pues, la dependencia entre ellos; por tanto, como ya se vio anteriormente, se podría generar un espacio en 10 dimensiones colocando los sucesos uniéndolos mediante muelles, dampers, barras, etc.... Representemos de esta forma, 3 sucesos cualesquiera; de esta forma y tal como se vio, moviendo (variando) uno de ellos se aprecia la variación de los otros 2. Estos movimientos o variaciones de los 3 sucesos, han influido también en el resto de sucesos haciendo que varíen; por tanto, se pueden sustituir alguno de los sucesos representados en un principio por otro, para observar las variaciones no observadas anteriormente; es como mover la cámara de nuestros ojos, cambiando la vista en el interior del espacio de 10 dimensiones, observando gráficas en 3 dimensiones de entre todas las posibles gráficas de 3 dimensiones que existen en el problema analizado. No se trata de cuantificar, se trata de visualizar y entender las variaciones de los sucesos.

A raíz de este “enfoque” visual y siguiendo con el mismo tipo de representación, una pequeña reflexión: si el problema a analizar contiene 2 sucesos tan sólo, la variación de uno de ellos implica la variación del otro; es más: la variación del segundo no tiene límite si el primero varía también sin límite. Esto no ocurre si se analizan 20 sucesos: las variaciones de muchos de ellos estarán acotados en un intervalo, prácticamente independientemente de

cuánto varíe el resto; esto es la esencia del caos que anteriormente ya se ha nombrado.

En un espacio de fases de “n” variables, se pueden generar, como se ha visto, muchas secciones; estas secciones pueden tener muchos aspectos:

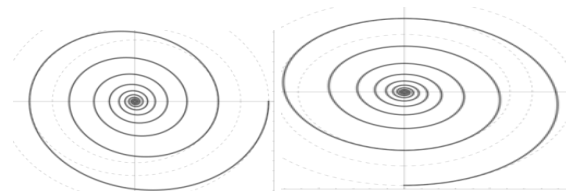


Figura 113: 2 secciones bidimensionales de un espacio de fases de un análisis cualquiera.

En [60] Timoteo Briet Blanes, se analizó detenidamente entre otras cosas, las interacciones entre galaxias como pieza fundamental de su evolución o dinámica individual y colectiva; de hecho, se analizó:

- Creación del path de baja presión como resultado de: ram pressure o arrastre de partículas:



Figura 114: Cola de una galaxia compuesta por la propia masa de la galaxia / vórtices generados por un ala: la materia tiende a enroscarse y agregarse alrededor de ese “tubo” de baja presión.

- En [36] J. H. Lee et al, se analizan las interacciones ente galaxias que comparten “materia oscura”.

- Efecto Magnus entre 2 galaxias contra-rotantes:

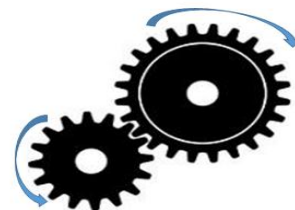


Figura 115: 2 galaxias contra-rotantes, se ayudan a girar mutuamente.

- En [14] Francesca Fragkoudi, se analizan los movimientos u órbitas resonantes e estrellas en galaxias.
- Path de una galaxia dependiendo su sentido de giro:



Figura 116: Dirección de movimiento de una galaxia dependiendo de su sentido de giro.

- Se clasifican las galaxias en función de su velocidad de giro, masa, brillo, etc....
- En [37] Ekta Patel y otros, analizan los “puentes” de materia ente galaxias que comparten el path:



Figura 117: Puente de materia entre 2 galaxias, causada, tal vez, por un path.

- Se pueden conocer los “caminos” que han recorrido y recorrerán las galaxias, conociendo “parte” de sus caminos recorridos.
- Etc....

En definitiva se analizan infinidad de posibilidades de interacción entre galaxias; estas interacciones conllevan la dependencia entre sus dinámicas y sus geometrías. Desde este punto de vista, cabe hacerse una pregunta fundamental:

- ¿Las geometrías resultantes de seccionar el espacio de fases, interactúan entre sí?

Es algo necesario a estudiar....

## FALTA

Por otro lado y último, una pequeña reflexión sobre los errores que se pueden cometer, “Seccionando” el espacio de fases:

Sea el siguiente ejemplo; una geometría que dependiendo de punto de vista, parece tener una estructura diferente:

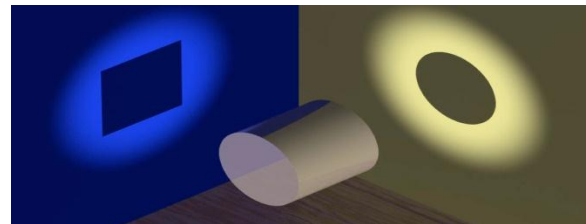


Figura 118: Diferentes perspectivas de una figura, puede implicar “imaginársela” de diferente forma.

Toda representación de un Suceso, es el resultado de observar cierta sección de su espacio de fases; por ejemplo, sea la siguiente sección en 2 dimensiones:



Figura 119: Sección en 2 dimensiones de un espacio de fases de un suceso cualquiera.

Esta sección bidimensional corresponde a una visualización en 2D de un espacio de más dimensiones; pero pueden cometerse errores, si se intenta extrapolar resultados o dependencias a otras dimensiones:

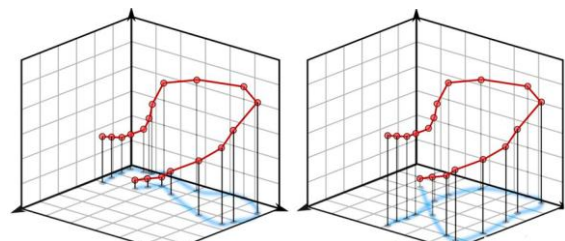


Figura 120: La línea en 2D puede corresponder a diferentes evoluciones en otras dimensiones.

Cuestión importante a analizar: si se ha de trabajar con un suceso cuya representación es complicada (como es el caso habitual en trading diario por ejemplo), se podría cambiar o adaptar el rango de datos o medidas, o la combinación de sucesos dependientes representados, etc, para simplificarla ¿? Hay que tener en cuenta que una representación de un suceso no es más que una sección del espacio de fases y por tanto, es posible elegir una sección, quizás más simple, peor definitoria también del suceso a analizar.

Es más: se puede encontrar una relación de lo expuesto en este punto, con la “posible” dependencia o no entre 2 sucesos; si se representan 2 grupos de valores correspondientes a 2 sucesos, se puede apreciar e incluso calcular, la correlación entre ambos:

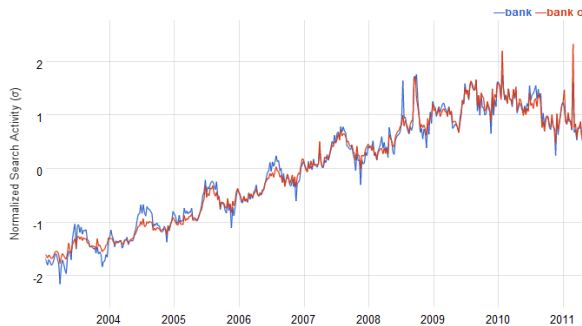


Figura 121: Posible dependencia entre un par de grupos de valores de 2 sucesos.

Pero como se vio, no ha de existir necesariamente dependencia entre sucesos: la imagen / comparación de los 2 grupos de datos, no es más que una sección del espacio en “n” dimensiones del espacio de fases conjunto; por tanto, esta representación sea algo simplemente casual.

#### 4.18. Modelización por links

En puntos anteriores, se han descrito las posibles relaciones entre sucesos como muelles, dampers, inerters, etc.... Estas relaciones o “links”, determinan las fuerzas que actúan entre los sucesos analizados; estas fuerzas, a su vez, definen una serie de potenciales. A continuación, se ven 2 ejemplos de cómo trabajar con este tipo de sistemas.

Sean 2 muelles “A” y “B” colocados en una línea recta, uniéndolos por uno de sus extremos a una masa “m”; se supone que la constante de “A” es el doble que la de “B”; para determinar el punto de equilibrio “E” entre ambos muelles, basta con conocer la relación entre ambas constantes (“FA” “FB” fuerzas de cada muelle, “KA” “KB” las constantes de cada muelle, “XA” “XB” los desplazamientos de la masa “m” con respecto a los extremos de cada muelle, “o” puntos de anclaje fijos):

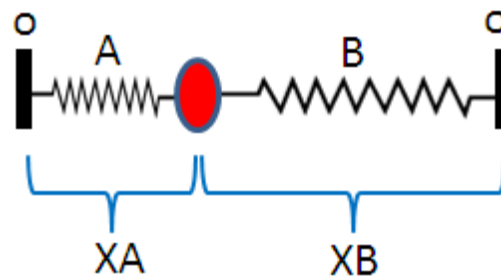


Figura 122: Esquema de 2 muelles en serie con una masa central.

De esta forma:  $XB=2*XA$

La esencia de este “sencillo” cálculo (proyecciones en cada eje o plano), se sigue a continuación (la suma de las fuerzas en cada eje, deben anularse para estar en equilibrio):

Sean 3 sucesos de los que se conocen los potenciales conjuntos (uno a uno); se supone que para poder simular las variaciones entre ellos, se han de representar en un espacio en 2 dimensiones (x,y) (considerando “z” nula):

Ejemplo extraído de Internet: Una partícula libre de masa m (también sometida a la gravedad) está unida a tres muelles de longitud natural nula y constantes elásticas  $k_A$ ,  $k_B$  y  $k_C$ . Cada uno de los muelles tiene el otro extremo fijado en un punto. Las coordenadas de los puntos de fijación son A(-a,0,0), B(a,0,0) y C(0,a,0). Calcula la posición de equilibrio de la partícula. Se tiene una partícula libre sometida a cuatro fuerzas activas, una por cada muelle más la gravedad. Al no estar sometida a ninguna ligadura la partícula tiene tres grados de libertad. Su posición de equilibrio es:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad \text{Ecuación 200}$$

Donde  $x$ ,  $y$ ,  $z$  pueden tomar cualquier valor.

Como los muelles tienen longitud nula, las fuerzas a la que cada uno somete a la partícula cuando esta se encuentre en una posición  $\vec{r}$  son:

$$\begin{aligned} \vec{F}_A &= -k_A(\vec{r} - \vec{r}_A) \\ \vec{F}_B &= -k_B(\vec{r} - \vec{r}_B) \\ \vec{F}_C &= -k_C(\vec{r} - \vec{r}_C) \end{aligned} \quad \text{Ecuación 201}$$

Donde los vectores  $\vec{r}_A$ ,  $\vec{r}_B$ ,  $\vec{r}_C$  son los vectores que apuntan al punto de anclaje de cada muelle. Según los datos del problema:

$$\begin{aligned} \vec{r}_A &= \vec{OA} = -a \vec{i}, \\ \vec{r}_B &= \vec{OB} = a \vec{i}, \\ \vec{r}_C &= \vec{OC} = a \vec{j} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 202}$$

Se supone la gravedad actuando en la dirección negativa del eje OY. La fuerza gravitatoria sobre la partícula es:

$$\vec{F}_g = -mg \vec{j} \quad \text{Ecuación 203}$$

Para que haya equilibrio mecánico la resultante del sistema de fuerzas aplicadas sobre la partícula debe tener resultante nula. Esta condición proporciona una ecuación vectorial que equivale a tres ecuaciones escalares, una por cada componente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n &= \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_g = \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow &\begin{cases} -(k_A + k_B + k_C)x - (k_A - k_B)a = 0 \\ -(k_A + k_B + k_C)y + k_C a - mg = 0 \\ -(k_A + k_B + k_C)z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ecuación 204}$$

Despejando se obtiene el punto  $(x,y)$  de equilibrio:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(k_B - k_A)a}{k_A + k_B + k_C} \\ y &= \frac{k_C a - mg}{k_A + k_B + k_C} \\ z &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ecuación 205}$$

La posición de equilibrio se encuentra en el plano OXY, esto es, el definido por los puntos de anclaje de los muelles.

Este caso particular, se muestra bajo condiciones o links de muelles; para tener un buen modelo numérico entre varios sucesos, es necesario disponer y colocar más elementos de otro tipo, como dampers, barras fijas, inerters combinaciones entre todos ellos, etc.... Es más: el objetivo final es disponer de una herramienta o procesos para calcular los movimientos de cada suceso, en función de sus relaciones o potenciales, en “n” dimensiones.

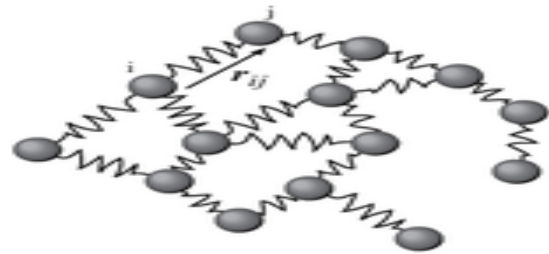


Figura 123: Esquema de una posible “red” de links entre varios sucesos.

Es un magnífico procedimiento para conocer las evoluciones de sucesos entre sí; pero para ello, es necesario conocer los potenciales que los unen; no es nada fácil esto, ya que hay que preguntarse sobre las dependencias de cada suceso con el resto. Lo importante realmente, es tener un procedimiento de cálculo para conocer los cambios en función de otros cambios, no sólo (que también) conocer el equilibrio del sistema.

De cualquier manera, para obtener los potenciales entre sucesos es suficiente con calcular las relaciones tipo “muelle” entre ellos; con ello, se consigue una precisión más que aceptable, a la vez que mucho más cómodo y sencillo de establecer las relaciones. Ya se analizó en su momento, este cálculo de potenciales para problemas económicos por ejemplo.

#### 4.19. → Resumen; dinámica Instantánea y Transitoria

→ El objetivo fundamental que se persigue con este estudio, es conocer la dinámica de un suceso y por tanto poder predecir sus movimientos.

Para ello, es posible trabajar desde 2 puntos de vista:

- Dinámica Estática, Puntual o Instantánea.
- Dinámica Transitoria.

#### • Dinámica Estática (corto plazo):

Se trata de conocer la próxima posición de una partícula, a través del estudio de varios modelos numéricos de predicción descritos en este trabajo:

- Fractalidad.
- Mínima Acción.
- Mínima Energía.
- Relaciones o Links.
- Función de Transferencia.

Se trata en definitiva de conocer la inmediata posición o dinámica del suceso a corto plazo; recordar de nuevo que:

- Cuando se habla de “corto plazo” se hace referencia a cualquier variable no sólo la temporal.

- Si por ejemplo, en el caso temporal, la mínima escala de medida son días, semanas o meses, se pueden hacer predicciones a 2 ó 3 días, semanas o meses.

#### • Dinámica Transitoria (medio-largo plazo):

Si por el contrario, se necesita hacer predicciones a más largo plazo, es necesario contar con los fenómenos de difusividad, transporte y pérdida de energía cinética principalmente; estas propiedades sólo las posee las ecuaciones de Navier Stokes. De igual manera, las ecuaciones de Euler Lagrange para fuerzas no conservativas, también son útiles en predicciones a largo plazo.



Figura 124: 2 posibilidades de cálculo dinámico: Instantáneo y Transitorio.

Quizás falte la incorporación de términos estocásticos de una manera adecuada, pero eso, es motivo de más investigación al respecto.

#### 4.20. Modelización Matemática de las emociones humanas y su influencia

**FALTA**

#### 4.21. Incorporación de la función de Onda a las ecuaciones de Navier Stokes

**FALTA**

### 5. Ejemplos / Casos / Aplicaciones

#### 5.1. Dinámica de peatones en el Acuario de Tokio

Se analiza una comparación entre un ejemplo realizado en un Artículo publicado hace años y el mismo ejemplo aplicando las definiciones y ecuaciones descritas en este trabajo. En el artículo [8] de Kazunori Shinohara y Serban Georgescu, simulan las trayectorias o tendencias “naturales” de un grupo de personas en el acuario de Tokio. La viscosidad funciona en este artículo, como una fuerza de atracción o



mejor dicho de “pegamento” o de “adhesión” (no de separación) entre las personas:

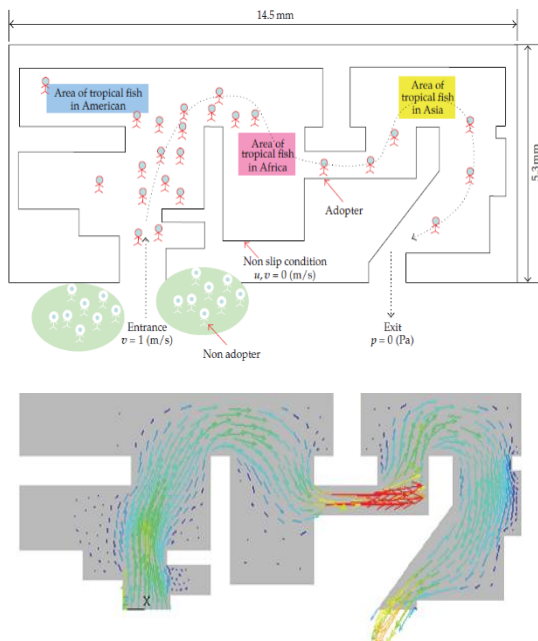


Figura 125: Flujo de peatones en el acuario de Tokio en el Artículo [8].

Aplicando las nuevas definiciones en las ecuaciones de Navier Stokes vistas en este Artículo generando pues una simulación CFD (Code Fluids Dynamics), se obtienen los siguientes resultados:

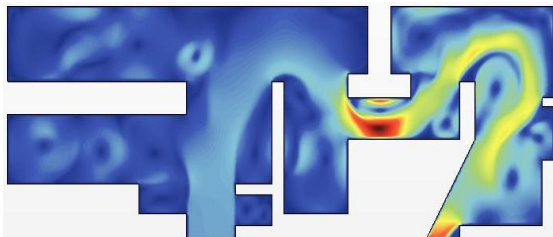


Figura 126: Flujo de peatones en el acuario de Tokio a partir de este Artículo.

En este tipo de estudio ([11] Timoteo Briet Blanes), es posible calcular la presión en cualquier punto o zona, velocidades, turbulencias, etc. También se pueden “detectar” zonas de posibles turbulencias o acumulaciones (atascos que pueden resultar peligrosos) de personas, incluso los caminos principales que le gente realizaría a partir de un punto inicial:

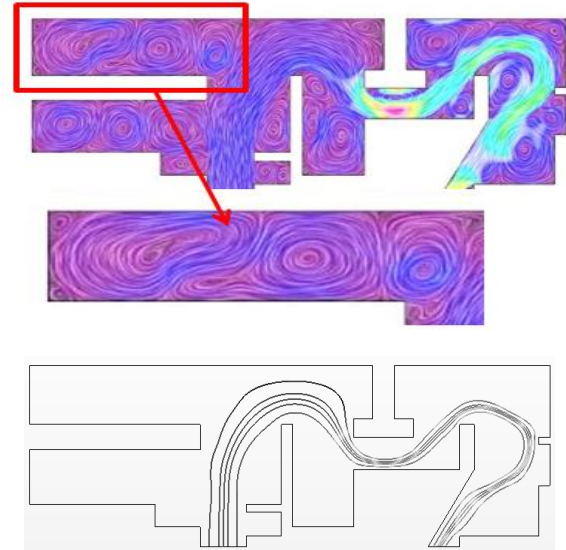


Figura 127: Otras representaciones de los flujos de peatones en el acuario de Tokio.

Como se aprecia claramente, la mejora respecto el Artículo [8], es clara en diferentes aspectos:

- Mayor claridad en la representación.
- Mayor definición en los resultados, pudiendo entonces, una mayor exactitud en la previsión de posibles atascos peligroso durante una evacuación forzosa.
- Mayor abanico de posibilidades en cuanto a cantidad de variables y fenómenos a predecir.

## 5.2. Dinámica de peatones por las calles del centro de Castellón (España)

En este caso, se analiza la dinámica de los peatones en unas calles determinadas del centro de la Ciudad de Castellón; la elección se ha hecho en base a la gran cantidad de peatones que circulan por ellas, especialmente en sus fiestas patronales:



Figura 128: Plano a través de Google Earth, de las calles de Castellón a analizar.



Los resultados obtenidos son (Figura (103)):

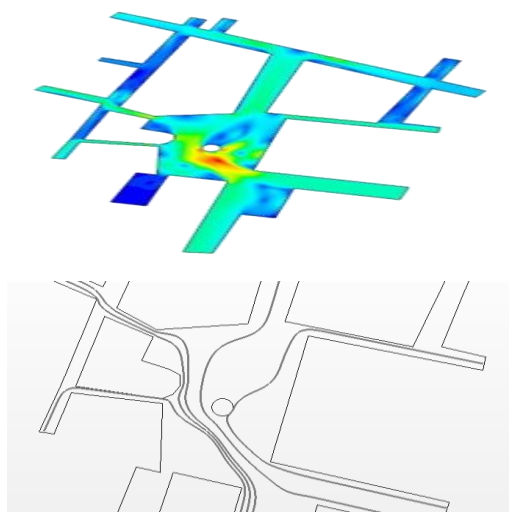


Figura 129: Campos de presiones y líneas de flujo de peatones.

Es la herramienta perfecta para diseñar y planificar una red de calles en una ciudad, analizando las posibles direcciones, anchuras, longitudes, etc., para minimizar los atascos y facilitar el paso ante una rápida evacuación; lo mismo puede aplicarse a estadios de fútbol, estaciones de tren, etc.

### 5.3. Dinámica de peatones por las calles del centro de Alcoy (España)

Se trata de un análisis de las zonas por donde discurren principalmente, la gente y eventos en las fiestas patronales de Alcoy (San Jorge); este estudio pretende revelar las zonas potencialmente mejorables para permitir un trasiego de una mayor cantidad de gente y con mayor seguridad; ello es imprescindible para un buen proyecto de prevención de aglomeraciones en caso de accidente imprevisto:



Figura 130: Plano a través de Google Earth, de las calles de Alcoy a analizar.

Este análisis desvelará asuntos importantes como:

- Detección de las zonas peligrosas: calles, esquinas, zonas en plazas, etc.
- Posible corte de calles o acceso a otras para prevenir zonas peligrosas por embotellamientos y atascos.
- Instalación de paneles informativos acerca direcciones prohibidas o preferenciales, accesos, etc....
- Etc.... en [67] Diego Gella, Daichi Yanagisawa, Rodrigo Caitano, María Victoria Ferreyra, Iker Zuriguel, analizan diferentes “obstáculos” para facilitar la salida de peatones de un recinto.

### 5.4. Pre-Medidas que las Administraciones Públicas deben tomar y prever

Hoy en día, los grandes barcos tienen en la parte inferior frontal sumergida, un bulbo o protuberancia. La función de este bulbo es crear una serie de olas o turbulencias, que al unirse con las olas generadas por el propio barco, se anulan o al menos se eliminan casi por completo. De esta manera, reducen en gran medida la resistencia fluido dinámica de la embarcación. Este bulbo delantero, se coloca delante de la embarcación, como una especie de avance, como abriendo el camino, como allanando el camino de la embarcación que viene detrás:



Figura 131: Bulbo de proa de un barco en funcionamiento.

En la aplicación de una medida económica o política en cualquier país, es necesario llevar a cabo una serie de medidas menores antes de la medida principal. De este modo, se suavizan o mitigan los efectos perjudiciales o incluso la simple aceptación de la medida por parte de la sociedad o de la propia economía.

Hablando en términos de análisis de fluidos en barcos y mediante simulación CFD por ejemplo, las pre-medidas económicas que adopta un gobierno pueden simularse mediante un “bulbo”; dependiendo de su forma, el flujo del fluido hacia la parte posterior cambiará, es decir, las consecuencias de la medida política o económica variarán según la medida aplicada:

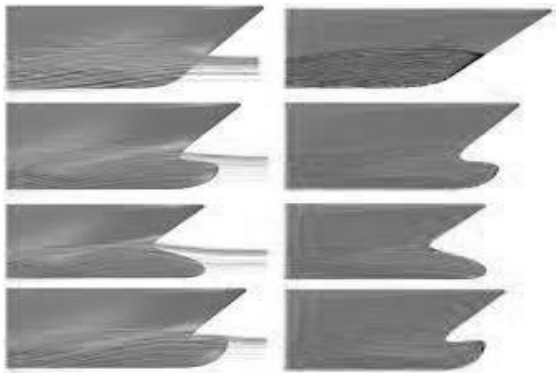


Figura 132: Diferentes geometrías de bulbos de proa.

Dónde radica la importancia de este ejemplo a la hora de explicar la dinámica de un grupo de sucesos? A continuación algunas reflexiones totalmente lógicas o naturales al respecto:

- Cómo mitigar los efectos de una medida económica?
- Qué medidas económicas adoptar para poder adoptar más tarde más medidas económicas quizás, de mayor impacto social?
  - Cómo mitigar una medida económica con otra medida económica?

En todas estas preguntas, el término “mitigar” se refiere a la aceptación por parte de la sociedad o del mercado de aquello que el Gobierno considere necesario aplicar.

#### 5.5. Medidas de las Administraciones Públicas para fomentar los grupos de relaciones como motor de la Sociedad y del conocimiento

Una Sociedad que se precie y presuma de ser avanzada, dispone de los mecanismos adecuados para que el trasiego de información y conocimiento en general, sea real y accesible para todos los ciudadanos. Para cualquier

Administración pública, una de las tareas más importantes y necesarias, es justamente la de facilitar estos mecanismos de transmisión con el fin de convertir a la gente en seres perfectamente informados y formados; ello no es fácil ni sencillo, pero es absolutamente necesario.

Una de las herramientas que se utilizan, es fomentar el contacto entre personas, creando grupos de trabajo, grupos de aficiones o hobbies, grupos de investigación, etc. Conseguir esto y encima de manera adecuada, sin saturamientos o incluso atascos, sin aislamientos y en su justa medida, es realmente complicado y arduo. Pero repetimos que es absolutamente necesario.

Existen diversas formas o métodos por las cuales la materia tiende a agregarse en la naturaleza; en el trabajo [60] de Timoteo Briet Blanes, se analizan con detalle todos estos métodos, clasificándolos y observando con detenimiento qué tipo de agregaciones o grupos se forman a partir de determinados principios de acción dinámica.

Básicamente y resumiéndolo mucho, son procedimientos basados en las propias propiedades de los fluidos, considerando por tanto a un grupo de partículas, como un fluido (agua, aire, etc). Estas propiedades son principalmente la viscosidad, la densidad, la tensión y la expansión; prácticamente nunca actúan aisladamente, esto es: trabajan en la mayoría de ocasiones varias propiedades haciendo que las partículas se agreguen o se unan de una manera característica y muchas veces diferenciadora.

Un caso típico es el de la acumulación de hojas secas o semillas en un jardín: esta agrupación se inicia a partir de una partícula que por la razón que fuera (inestabilidad) se ha detenido o ralentizado su movimiento; alrededor de ella, se van acumulando más y más partículas, pudiendo formarse pequeños o grandes grupos:



Figura 133: Acumulación de semillas en un jardín.

El hecho de que más partículas se unan a la partícula inicial, es debido al roce entre ellas y al roce entre las partículas y el suelo del propio jardín; es decir a una fuerza de fricción, es decir, a la Viscosidad entre partículas y jardín. Y esta es la esencia de este fenómeno: conocer sus causas y aplicar su conocimiento al campo de la Política, Sociología o Economía y mucho más.

Porqué se ha parado una partícula inicialmente? Debido a una inestabilidad; esto es: el jardín no tiene una rugosidad uniforme y las semillas u hojas tampoco; por tanto, existirá un instante y lugar determinado en donde se creen las condiciones idóneas para que una partícula se frene, y a partir de ahí, la dinámica evoluciona. Las condiciones del entorno pues, pueden condicionar la acumulación de partículas y su dinámica en general; en zonas de playa la gente se agrupa, las ovejas se protegen del sol detrás de un árbol, son 2 casos entre miles, de que el entorno condiciona la dinámica grupal de partículas:



Figura 134: Agrupación de gente en la playa y disposición detrás de un árbol de ovejas para protegerse del sol.

Por tanto, cualquier administración pública puede y debe tomar medidas políticas,

económicas o sociales que permitan la creación “o no” de grupos de personas que compartan la misma afición, o que pertenezcan a la misma religión, o que compartan ideales de muchos tipos. Esto es clave para cualquier proyecto político de futuro.

También puede utilizarse este hecho, quizás para lo contrario; es decir: para por ejemplo combatir el terrorismo, la aparición de sectas religiosas, etc.... Las relaciones humanas es algo extremadamente importante y es algo que hay que cuidar y mimar desde cualquier instancia pública o privada.

En un bandada de pájaros, las agrupaciones y formación de estructuras preciosas es algo muy habitual; las pájaros, son partículas del grupo dinámico, y funcionan análogamente a cómo funcionan las moléculas del aire por ejemplo; es decir, también funcionan bajo la acción de la viscosidad; en este caso, la viscosidad se considera un sentimiento, una acción voluntaria o involuntaria del movimiento ante movimientos de otros pájaros que existan alrededor:



Figura 135: Bandada de pájaros.

La dinámica de grupos sociales y por tanto interacciones sociales, es un tema apasionante propio de la denominada sociofísica que se analizará en próximos apartados; lo esencial es saber que estas interacciones son fricciones en definitiva y como tal, deben abordarse desde el punto de vista de la viscosidad a la hora de aplicar los modelos matemáticos vistos en este trabajo.

## 5.6. Similitudes con problemas de Fluidos

Algunos casos al respecto las similitudes entre problemas o propiedades de los Fluidos y fenómenos “naturales”:

- Salida de ovejas de un establo; cuando se abren las puertas de un establo donde se encuentran gran cantidad de ovejas, se producen curiosas geometrías justo en la salida; dichas geometrías recuerdan a fenómenos propios de fluidos:

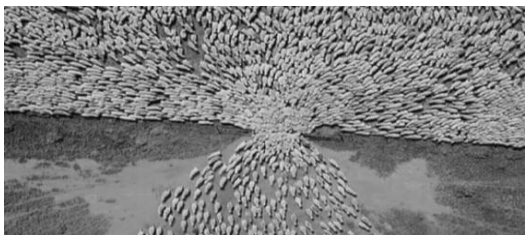


Figura 136: Salida de ovejas de un establo.

Esta geometría es muy similar al escape de una tobera.

- Es posible observar la existencia de una capa límite en las paredes de una calle por donde circula una manifestación de personas; aquellas que se encuentran más cerca de la pared, circulan a menor velocidad; esto se debe al roce de las personas con los obstáculos de la pared, pero también al propio roce entre ellas:



Figura 137: Agrupación de gente en las calles de una ciudad durante una manifestación o similar.

- Observando un rebaño de ovejas, se pueden descubrir muchos movimientos y dinámicas generales que se asemejan enormemente a dinámicas de fluidos:

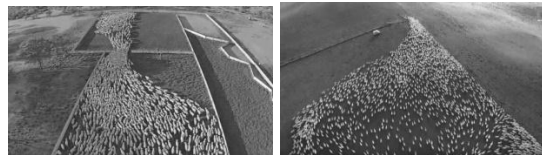
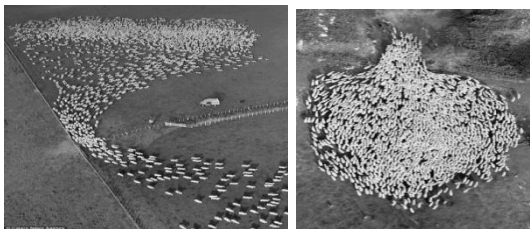


Figura 138: Diferentes geometrías producidas por grupos de ovejas en movimiento.

- Para protegerse del frío, las ovejas “tienden” a estar unidas formando círculos; es como una burbuja en 3D; en este caso, hay ovejas que se sacrifican temporalmente por el bien del grupo:



Figura 139: Acumulación de ovejas en círculo.

#### 5.7. Adaptación del contexto para adecuar las medidas a implantar por parte de la Administración

Este punto es una unión de varios puntos ya vistos; anteriormente se ha nombrado un método para prever medidas por parte de la Administración en vistas a adecuar convenientemente otras medidas que se necesiten implantar; esta adecuación no es más que intentar que su impacto desde cualquier punto de vista sea progresivo, que no sea traumático para determinados grupos sociales, etc.... Admitiendo como se ve y se explica en este Artículos, el movimiento de los fluidos en general, es capaz de explicar movimientos dinámicos de grupos de partículas, entendiendo grupo de partículas como grupo de sucesos. Por tanto, es posible actuar de 2 formas:

- Conocer las condiciones de un fluido para su dinámica sea “laminar” o suave; en tal caso de dinámica laminar, se pueden adoptar esas condiciones como medidas (pre y post medidas) junto a medidas de más calado social, económico, etc....
- Dado un flujo de partículas, diseñar condiciones para que el flujo sea laminar o que en general, tenga la dinámica que se requiera o se necesite.

Respecto este último caso, en [39] Yongxiang Zhao, Meifang Li, Xin Lu and Ting Li, analizan la colocación de obstáculos en tuberías por donde circulan partículas para aliviar la presión que ejercen sobre la salida:

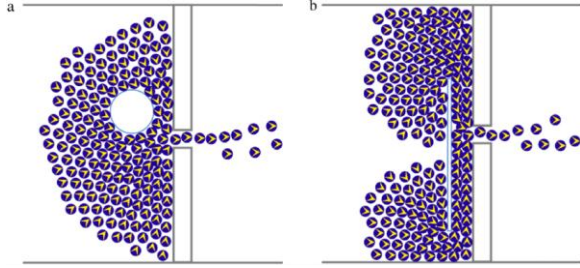


Figura 140: Variación de caudal a la salida, en función de diversos obstáculos; estos obstáculos, facilitan la salida de peatones por ejemplo.

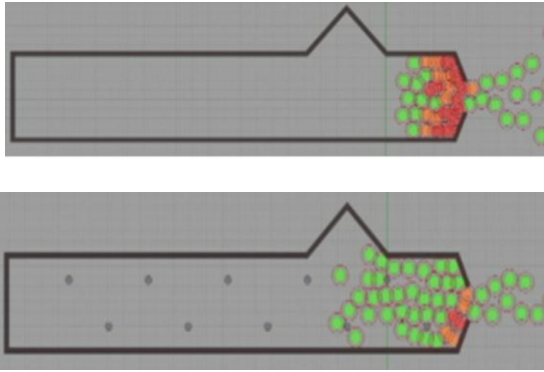


Figura 141: La colocación de una serie de obstáculos, reduce la presión en el conducto y también a la salida, aumentando el caudal de extracción (evacuación).

Es un método genial para diseñar, así se hace, sistemas de rápida evacuación en recintos deportivos para evitar peligrosas avalanchas o atascos. ES más: se pueden diseñar sistemas o medidas económicas, que parezcan impedir quizás la libre circulación de divisas o incluso impedir en cierta forma la creación de empresas; pero son “obstáculos” que ayudarán más adelante a la economía en general, ante situaciones de crisis por ejemplo; es una campo magnífico de ensayo y un objetivo mucho mejor.

#### 5.8. Aplicación simple de las ecuaciones de Navier Stokes incompresibles a una placa plana, inclinada y curva

Se analizan 3 casos, para observar la idoneidad y la “lógica” del nuevo modelo

aplicado a estos casos denominados “casos tipo” o “casos modelo”:

Placa Plana: Corresponde a una señal “u” constante:

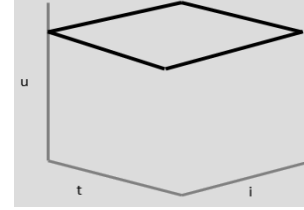


Figura 142: Señal constante.

$$-\frac{\partial P}{\partial i} \frac{1}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial i^2} \quad u = u_{i,t}$$

Ecuación 206

“μ” = 0 y Potencial nulo.

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{4}{3} \left( \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right)$$

$$u_{i,t} (u_{i+1,t} - u_{i,t}) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow u_{i+1,t} = u_{i,t}$$

Ecuación 207

Placa Inclinada: Corresponde a una señal “u” cuya variación es lineal:

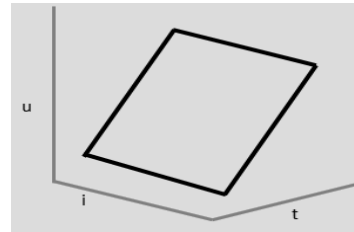


Figura 143: Señal con variación lineal.

$$-\frac{\partial P}{\partial i} \frac{1}{\rho} = A = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial i} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial i^2}$$

Ecuación 208

“μ” = 0; en este caso, existe un potencial “A” no nulo, porque en el eje “i”, “u” es no constante:

Potencial:



$$B = u_{i,t+1} - u_{i,t} \quad \text{Ecuación 209}$$

Si “B” es pequeño, significa que la densidad es también pequeña; entonces la Presión es pequeña también. Si “B” fuera constante, equivaldría a considerar el flujo con divergencia de la velocidad nula.

Placa Curva: Corresponde a una señal “u” con variación progresiva, es decir: curva:

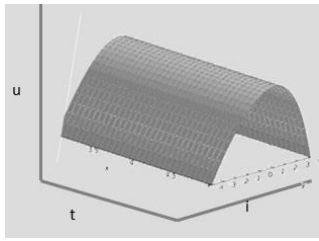


Figura 144: Señal con variación curva.

Viscosidad y potencial no nulos.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial i} - u \frac{\partial u}{\partial i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial i^2} \quad \text{Ecuación 210}$$

Es una combinación entre el caso anterior de placa inclinada más una viscosidad que actúa como freno.

### 5.9. Ecuación del Calor en “n” dimensiones

Se supone que la constante de difusividad “k”, es la misma en todas direcciones; recordar que este valor equivale a la viscosidad y que la viscosidad podía ser diferente y variable dependiendo de la dirección; no obstante, para el objetivo planteado, es suficiente analizar las soluciones con “k” constante e igual.

#### 5.9.1. 1 Dimensión

En primer lugar, se analiza el caso más simple que corresponde al caso 1 dimensional; sea “x” la variable espacial y “t” la variable temporal; sea “u” la temperatura; sea “k” la constante de difusividad del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{Ecuación 211}$$

La expresión de la ecuación en diferencias finitas, eligiendo un esquema en particular, queda del siguiente modo (los superíndices corresponden a la variable temporal, mientras que los subíndices corresponden a la variable-s espaciales):

$$u_x^{n+1} = u_x^n - k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{x+1}^n - 2u_x^n + u_{x-1}^n) \quad \text{Ecuación 212}$$

De analiza la dinámica de la temperatura en una barra, con una temperatura inicial en los extremos y en la propia barra:

Programa en Matlab:

```
%=====
%=====
%=====
% ECUACIÓN DEL CALOR EN UNA
% BARRA EN 1D
% Dibuja en gráfica en 3D la evolución espacio-
% temporal de la temperatura
%-----
%-----
% Para saber más sobre un comando teclear
% 'help nombre comando'
%=====
%=====
% %
% Borra workspace, ventana de comando y
% figura
clear; clc;
% %
% ----- Variables espaciales (eje X) -----
% xmin = valor mínimo coordenada X
% xmax = valor máximo coordenada X
% Nx = n° de puntos totales en el eje X
% dx = paso en el eje X
% x = vector de puntos del eje X
xmin = 0;
xmax = 0.2;
Nx = 15;
%Calcula el paso en el eje X
```



```

dx = (xmax-xmin)/(Nx-1);
%Crea vector de puntos del eje X desde 'xmin'
hasta 'xmax' con paso 'dx'
x = xmin:dx:xmax;
%%
% ----- Variables temporales -----
% tmin = instante inicial = 0
% tmax = instante final
% dt = paso en el eje tiempo
% t = vector de puntos del tiempo
tmin = 0;
tmax = 0.1;
dt = 0.001;
%Crea vector de puntos del tiempo desde 'tmin'
hasta 'tmax' con paso 'dt'
t = tmin:dt:tmax;
%%
% ----- Otras Variables -----
% alpha = difusividad térmica [m^2/s]
% r = coeficiente de la ec. diferencial
% -----
% Para garantizar estabilidad de la solución r
debe ser 0.5 o menor
% Al no poner ';' al final de la linea, el valor de r
se muestra en el
% espacio de trabajo
alpha = 0.05;
r = alpha*dt/(dx^2)
%%
% ----- Inicialización del problema -----
% Temp0 = vector de temperaturas iniciales en
cada punto del eje X
% TempL = temperatura a la izquierda (Left)
% TempR = temperatura a la derecha (Right)
TempL = 230;
TempR = TempL;
% Crea vector de N puntos. Cada punto vale 1,
pero al multiplicar por 400,
% cada punto vale 400
Temp0 = ones(1,Nx)*400;
%%
% ----- Solución del problema -----
% Crea un bucle FOR para el tiempo y otro para
el EJE X
% Temp = vector de temperaturas para cada
punto del eje X
% iT = índice para el tiempo
% iX = índice para el eje X
% --- Bucle FOR para el tiempo (desde 2 hasta
longitud de t) ---

```

```

for iT = 2:length(t)
    Temp = Temp0;
    % -- Bucle FOR para el eje X (desde 1 hasta
N) --
    for iX = 1:Nx
        if iX == 1 || iX == Nx
            %en los extremos de la barra
Temperatura = TempL
            Temp(iX) = TempL;
        else
            %calcula Temperatura fuera de los
extremos de la barra
            Temp(iX) = Temp(iX)+r*(Temp(iX+1)-
2*Temp(iX)+Temp(iX-1));
        end
        tiempo(iX) = t(iT);
    end
    Temp0 = Temp;
    % Dibuja evolución Temperatura en cada
punto del eje X en cada instante
    plot3(tiempo,x,Temp0);
    % Sobreescribe en la gráfica anterior
    hold on;
    % Etiqueta los ejes
    label('tiempo(s)');ylabel('distancia(m)');zlabel('te
mperatura(°C)');
end
grid on;

```

Los siguientes análisis, se basan en la estructura del programa anterior. De esta forma, la comparación y el análisis será mucho más fácil de comprender.

### 5.9.2. 2 Dimensiones

Sea “y” la otra coordenada espacial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{Ecuación 213}$$

$$u_{x,y}^{n+1} = u_{x,y}^n - k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{x+1,y}^n - 2u_{x,y}^n + u_{x-1,y}^n) - k \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (u_{x,y+1}^n - 2u_{x,y}^n + u_{x,y-1}^n)$$

Ecuación 214

Programa en Matlab:

FALTA

### 5.9.3. 4 Dimensiones

Sea “w” la otra coordenada espacial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \right)$$

Ecuación 215

$$\begin{aligned} u_{x,y,z,w}^{n+1} = & u_{x,y,z,w}^n - k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{x+1,y,z,w}^n - 2u_{x,y,z,w}^n + u_{x-1,y,z,w}^n) - \\ & - k \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (u_{x,y+1,z,w}^n - 2u_{x,y,z,w}^n + u_{x,y-1,z,w}^n) - \\ & - k \frac{\Delta t}{\Delta z^2} (u_{x,y,z+1,w}^n - 2u_{x,y,z,w}^n + u_{x,y,z-1,w}^n) - \\ & - k \frac{\Delta t}{\Delta w^2} (u_{x,y,z,w+1}^n - 2u_{x,y,z,w}^n + u_{x,y,z,w-1}^n) \end{aligned}$$

Ecuación 216

Programa en Matlab:

FALTA

→ Análisis:

FALTA

### 5.10. Ecuación de Ondas en “n” dimensiones

#### 5.10.1. 1 Dimensión

FALTA

#### 5.10.2. 2 Dimensiones

FALTA

#### 5.10.3. 4 Dimensiones

FALTA

→ Análisis:

FALTA

### 5.11. Ecuaciones de Navier Stokes en “n” dimensiones

FALTA

#### 5.11.1. 1 Dimensión

FALTA

#### 5.11.2. 2 Dimensiones

FALTA

#### 5.11.3. 4 Dimensiones

FALTA

→ Análisis:

FALTA

### 5.12. Evolución conjunta de “n” especies

FALTA

#### 5.12.1. 2 Especies

FALTA

#### 5.12.2. 4 Especies

FALTA

→ Análisis:

FALTA

### 5.13. Ejemplos de problemas económicos / fluidos aplicando las ecuaciones de Schrodinger, Black Schole y Navier Stokes

Se han visto a lo largo de este trabajo, las relaciones existentes entre las ecuaciones mencionadas en el título de este punto; estas relaciones no sólo han sido desde un punto de vista de escritura término a término, sino desde un punto de vista matemático-físico; esto es: se pueden deducir todas ellas, a partir de las ecuaciones de Navier Stokes, y viceversa. Por ello, se van a describir diversos problemas de índole económico, y se van a resolver aplicando indistintamente las ecuaciones nombradas anteriormente.

FALTA

## 6. Conclusiones

Basándose en conceptos propios de las relaciones entre las moléculas de un fluido como es la teoría de los gases perfectos, se han desarrollado una serie de definiciones que alimentan un modelo matemático capaz de analizar la dinámica conjunta de varios sucesos.

Estas nuevas definiciones tienen la ventaja de ser genéricas aplicables en cualquier campo y no son definiciones ad hoc; esto es: definidas para cada caso de estudio o análisis.

## 7. Desarrollos futuros

---

Si bien se han alcanzado muchos objetivos que se pretendían conseguir en un principio, quedan muchas cosas que mejorar y quizás crear otras nuevas que han surgido a lo largo del largo proceso de elaboración de este modelo matemático. Se ha disfrutado mucho pensando esta modelación, obteniendo resultados, comparando fenómenos y describiendo en definitiva, la realidad; es uno de los trabajos fundamentales y más satisfactorios que puede realizar un matemático. Pero a pesar de ello, hay que validar el modelo en muchos tipos de fenómenos, no sólo económicos o aplicado a movimiento de peatones; de ahí la necesidad seguramente, de modificar parte del modelo para adaptarlo a otros campos; estos cambios, comportan en total seguridad, la incorporación de otros modelos o una combinación adecuada.

#### 8. Agradecimientos, reconocimientos y presentación

Creo que no hay mejor agradecimiento y más que merecido que agradecer a mi familia el haberme aguantado toda mi vida; gracias a ellos soy lo que soy y gracias a ellos este trabajo continúa. Gracias en especial a mis padres que en los últimos pocos años, han dejado este mundo.

**IMPORTANTE:** → Aprovecho estos agradecimientos para expresar mi deseo de volver a trabajar en una Universidad en cualquier parte del mundo, compartiendo y avanzando en este tipo de actividades que se relatan en el Artículo. Creo firmemente que la Ciencia es el pilar del futuro de la Sociedad, hay que promocionarla y apoyar incondicionalmente su divulgación, sus investigaciones y el “libre” acceso a ella. Hace varios años que dejé de lado mi faceta docente universitaria alrededor del mundo e incluso mi faceta profesional relacionada con la Ingeniería de Automóviles; el objetivo era centrarme y “tener tiempo” para poder avanzar en este Artículo-Trabajo; al menos en principio, no me es necesaria la realización de Tesis Doctoral alguna pues no necesito puntos, méritos o como se quieran denominar para poder “ascender” (tengo 2 posibles Tesis prácticamente ya preparadas para leer, a falta de pequeños detalles); mi placer es

poder Investigar por Investigar; puro placer en definitiva; no hay mayor placer que éste; doy fe de ello cada instante.

Por otro lado, también quiero agradecer y animar a todos los lectores de este Artículo, que realicen estudios, experimentos empíricos, comparaciones, etc.... Obtener resultados y aplicaciones en diferentes campos, sería excelente para poder intercambiar, comparar y compartir opiniones y conocimiento, con el fin de avanzar; hay muchas Tesis y Trabajos de Investigación, que pueden surgir de este Artículo.

La Ciencia se construye compartiendo conocimiento. No encuentro otra mejor razón para hacer Ciencia y disfrutar con ello, que utilizarla para mejorar la Sociedad.

Por último, decir simplemente que sería muy interesante realizar una presentación de este Artículo a una audiencia adecuada, describiéndolo con exactitud, haciendo énfasis en las novedades aportadas y en sus novedosas aplicaciones; quizás la combinación de Matemáticas-Física con Economía, es algo que requiere aclaración conceptual al combinar diversos campos científicos.

En cualquier caso, no veo mejor trabajo en CIENCIA, que la colaboración entre diversas áreas.

#### 9. Bibliografía

[1] Nonlinear analysis of pedestrian flow Reynolds number in video scenes; Shang Liu, Peiyu Li, School of Science & Technology, Tianjin University of Finance & Economics, China; Elsevier.

[2] Balance in the Turbulent World of Economy; (a) A. Jakimowicz and (b) J. Juzwisyb; (a) Institute of Economics, Polish Academy of Sciences, pl. Defilad 1, PL00901 Warsaw, Poland, (b) Department of Mathematics and Cybernetics, Wroclaw University of Economics, Komandorska Street 118/120, PL53345 Wroclaw, Poland; Proceedings of the 7th Symposium FENS, Lublin, May 14-17, 2014.

- 
- [3] Vortex Stabilization of Market Equilibrium in Theory and in Practice of Economics; (a) A. Jakimowicz and (b) J. Juzwisyb; (a) Institute of Economics, Polish Academy of Sciences, Palace of Culture and Science, 1 Defilad Sq., PL-00-901 Warsaw, Poland, (b) Department of Mathematics and Cybernetics, Wrocław University of Economics Komandorska 118/120, PL-53-345 Wrocław, Poland; Proceedings of the 5th Symposium on Physics in Economics and Social Sciences, Warszawa, Poland, November 25-27, 2010.
- [4] Verifier assumptions of the economics theory of whirlpools; Jacek Juzwisyb; Department of Mathematics, Wrocław University of Economics, Komandorska Street 118/120, 53-345 Wrocław, Poland; Mathematical economics, No. 6(13).
- [5] The Role of Entropy in the Development of Economics; Aleksander Jakimowicz; Department of World Economy, Institute of Economics, Polish Academy of Sciences, Palace of Culture and Science, 1 Defilad Sq., 00-901 Warsaw, Poland; Entropy 2020, 22, 452.
- [6] Path Dependence in Neoclassical Economic Growth Theory; A. Jakimowicz; Institute of Economics, Polish Academy of Sciences, pl. Defilad 1, PL-00901 Warsaw, Poland; Proceedings of the 7th Symposium FENS, Lublin, May 14–17, 2014.
- [7] Characteristics of Complexity in Selected Economic Models in the Light of Nonlinear Dynamic; A. Jakimowicz; Department of Quantitative Methods, Faculty of Economic Sciences, University of Warmia and Mazury in Olsztyn M. Oczapowskiego 4, 10-719 Olsztyn, Poland; Proceedings of the 6th Polish Symposium of Physics in Economy and Social Sciences (FENS2012), Gdansk, Poland.
- [8] Modelling Adopter Behaviour Based on the Navier Stokes Equation: Tokio Tower Aquarium; Kazunori Shinohara and Serban Georgescu; International Scholarly Research Network ISRN Mathematical Analysis Volume 2011, Article ID 894983, 10 pages doi:10.5402/2011/89498.
- [9] Multifractals in meteorits rain; Timoteo Briet Blanes; 1993.
- [10] Density and Viscosity of a galaxy matter, including dark matter; Timoteo Briet Blanes; 2020.
- [11] Simulation CFD of people in Aquarium Tokio; Timoteo Briet Blanes; 2020.
- [12] Simulation pedestrians in Castellón center; Timoteo Briet Blanes; 2020.
- [13] Navier-Stokes Equations and Turbulence; C. Foias, Indiana University, Bloomington O. Manley R. Rosa, Universidade Federal do Rio de Janeiro R. Temam, Indiana University, Bloomington; Encyclopedia of Mathematics and its Applications.
- [14] Orbits of stars in a Milky Way-like barred spiral galaxy; Francesca Fragkoudi.
- [15] From the actual Universe in high scale, trough reverse engineering; Y. Brenier, U. Frisch, M. H´enon, G. Loeper, S. Matarrese, R. Mohayaee, A. Sobolevski.
- [16] Multifractals in universe in high scale; Vicent Martínez; University Valencia (Spain).
- [17] A first-principle mechanism for particulate aggregation and self-assembly in stratified fluids; Roberto Camassa, Daniel M. Harris, Robert Hunt, Zeliha Kilic & Richard M. McLaughlin; <https://www.nature.com/articles/s41467-019-13643-y>; December 2019.
- [18] Computational Methods for Fluid Dynamics; Joel H. Ferziger, Milovan Perić, Robert L. Street; Springer.
- [19] Density, velocity and flow relationships for closely packed crowds; R.A Smith; Department of Mechanical and Process Engineering, University of Sheffield, Mappin Street, Sheffield, SI 3JD, UK.
- [20] Aggregate Dynamics for Dense Crowd Simulation; Rahul Narain, Abhinav Golas, Sean Curtis, Ming C. Li; University of North Carolina at Chapel Hill.
-

- 
- [21] Dynamic Innovation Diffusion Modelling; Kazunori Shinohara, Hiroshi Okuda; Springer Science+Business Media, LLC. 200; Comput Econ (2010) 35:51–62 DOI 10.1007/s10614-009-9191-5.
- [22] Criterio de turbulencia y estimativas de la ecuación de Burgers; Jorge Horna Mercedes, Jony Dionicio Vereau, Raúl Martínez Zocón, Azucena Zavaleta Quipúzcoa.
- [23] Relation between velocity and density in gas dynamic: Euler equations.
- [24] Hydrodynamics; H. Lamb.; 6th ed., Cambridge Uni-versity Press, Cambridge 1993.
- [25] Computational Methods in Financial Engineering; Erricos Kontoghiorghe, Berc Rustem, Peter Winker; Springer.
- [26] Predicting foreign currency exchange rates using the numerical solution of the incompressible Navier–Stokes equations; Agus Kartono, Marina Febriyanti, Setyanto Tri Wahyudi, Irmansyah; Department of Physics, Faculty of Mathematical and Natural Sciences, IPB University (Bogor Agricultural University), Jalan Meranti, Building Wing S, 2nd Floor, Kampus IPB Dramaga, Bogor 16680, Indonesia.
- [27] Aero post rig analysis: improving grip between tires and track; Timoteo Briet Blanes.
- [28] Dynamic Innovation Diffusion Modelling; Kazunori Shinohara, Hiroshi Okuda; Comput Econ (2010) 35:51–62, DOI 10.1007/s10614-009-9191-5.
- [29] Predicting Prices of Oil and Gold; Ayush Sengupta, Benjamin Lin, Komal Sanjeev, and Sreevathsan Ravichandran; Department of Computer Science, Stony Brook University, Stony Brook, NY 11794-4400.
- [30] How to Design a Race Car, Step by Step; Timoteo Briet Blanes.
- [31] Benford law in galaxies distances; Timoteo Briet Blanes; 2017.
- [32] Computer simulation of the collision of two gas clouds. Filamentary structures forming at the same time after the collision; Tsuyoshi Inoue.
- [33] A first-principle mechanism for particulate aggregation and self-assembly in stratified fluids; <https://www.nature.com/articles/s41467-019-13643-y>; Roberto Camassa, Daniel M. Harris, Robert Hunt, Zeliha Kilic & Richard M. McLaughlin; December 2019.
- [34] Tuning Contact Line Dynamics and Deposition Patterns in Volatile Liquid Mixtures; Asher P. Mouat, Clay E. Wood, Justin E. Pye, and Justin C. Burton; Phys. Rev. Lett. 124, 064502 – Published 14 February 2020.
- [35] Wakes of ram pressure stripped disc galaxies; Elke Roediger, Marcus Brüggen and Matthias Hoeft.
- [36] Galaxy Rotation Coherent with the Motions of Neighbors: Discovery of Observational Evidence; J. H. Lee et al; The Astrophysical Journal, 2019.
- [37] The Orbital Histories of Magellanic Satellites Using Gaia DR2 Proper Motions; Ekta Patel and other's.
- [38] Reconstruction of the early Universe as a convex optimization problem; Y. Brenier. U. Frisch. M. Henon. G. Loeper. S. Matarrese. R. Mohayaee. A. Sobolevski.
- [39] Analyzes the obstacles in “ducts” in order to reduce the “high pressure”; Yongxiang Zhao, Meifang Li, Xin Lu and Ting Li.
- [40] The probability of heads; Joseph B. Keller; Department of Mathematics and mechanical Engineering Stanford University; Stanford CA 94305.
- [41] Dynamics of coin tossing is predictable; J. Strzalko, J. Grabski, A. Stefanski, P. Perlikowski and T. Kapitaniak; Physics Reports, 469: 59–92, December 2008.
- [42] Rotation galaxies in filaments; Peng Wang, Dr. Noam Libeskind, Sarah Hönig; AIP.de; <https://www.nature.com/articles/s41550-021-01380-6>
-

- 
- [43] Dynamical Friction in Nonlocal Gravity; Mahmood Roshan, Bahram Mashhoon; Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), P. O. Box 19395-5531, Tehran, Iran 3Department of Physics and Astronomy, University of Missouri, Columbia, Missouri 65211, USA.
- [44] The two dimensional heat equation; Ryan C. Daileida; Trinity University, Partial Differential Equations March 6, 2012.
- [45] Fluid Dynamics Support Class 4 - Compressible Navier-Stokes and Wave; 7th February 2014; Jorge Lindley email: J.V.M.Lindley@warwick.ac.uk
- [46] THE SCHRÖDINGER EQUATION IN THE CONTEXT OF FLUID MECHANICS; D. Cabrera, P. Fernández de Córdoba, J.M. Isidro, J.M. Valdés Placeres y J. Vázquez Molina; Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada, Universitat Politècnica de València, España; Departamento de Matemáticas, Universidad de Pinar del Río “Hermanos Saiz Montes de Oca”, Cuba.
- [47] Index of financial pressure and financial crisis forecasting (fluid approach); Ognjen Vukovic; University of Liechtenstein, Furst Franz Josef Strasse 15, Vaduz, Liechtenstein.
- [48] Logistic equation analysis; Feigenbaum number; Robert May; Nature 1976.
- [49] BIFURCATIONS OF FREE THERMAL VIBRATIONAL CONVECTION IN CYLINDRICAL FLUID LAYER IN MICRO-GRAVITY NUMERICAL AND ANALYTICAL RESEARCH; Albert N.Sharifulin; Department of Applied Physics Perm State Technical University, 614000, Perm, Komsomolsky prospect, 29, Russia.
- [50] Stock market's physical properties description based on Stokes' law; Geoffrey Ducournau; PhDs, Institute of Economics, University of Montpellier.
- [51] Econophysics Macroeconomic Model; Victor Olkhov; TVEL, Kashirskoe sh. 49, Moscow, 115409, Russia.
- [52] NEWTONIAN AND LAGRANGIAN MECHANICS OF A PRODUCTION SYSTEM; Matti ESTOLA and Alia Asha DANNENBERG; University of Eastern Finland, Department of Health and Social Management.
- [53] Simulating negative temperatures by imposing wealth upper-bounds in exchanges; A.R. Villag Gomez-Manrique and M. del Castillo-Mussot; Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, 04510, Ciudad de México, México.
- [54] Stock market: the econophysics approach; S. Prabakaran.
- [55] The Quest of Economic Temperature; Matthew Yen, Daming Zhang; Department of Industrial Technology, California State University, USA.
- [56] ECONOPHYSICS. STATISTICAL MECHANICS OF MONEY: THERMODINAMIC CONSEQUENCES OF LIMITATIONS IN ECONOMIC TRANSACTIONS; D. Pedro Valverde Caramés; Jefe de Área. Servicio de Estudios Tributarios y Estadísticas; Agencia Estatal de Administración Tributaria.de España.
- [57] Entropy in Macroeconomic Models: Another perspective of Production; Martín Pomares Calero; Docente de Departamento de Física; Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua Function.
- [58] The Role of Temperature in Economic Exchange - An Empirical Analysis; Bojan Dimitrijević and Ivan Lovre; Faculty of Business in Service, EDUCONS University.
- [59] TERMODINÁMICA Y ECONOMÍA; José Luis Pereyra Díaz. Bachiller egresado de la escuela de física, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UNT. Trujillo 12 de Agosto de 2015.
- [60] Agregación de la materia, Expansión del Universo, Dinámica de Galaxias, Ecuaciones de Schrodinger y Dirac; Timoteo Briet Blanes; 2021.
-



- 
- [61] Vórtices de Karman; Timoteo Briet Blanes; Divulga Meteo – Blog.
- [62] APLICACIONES DE LA FÍSICA ESTADÍSTICA EN LA VALORACIÓN DE ACTIVOS FINANCIEROS: DE LA ECUACIÓN DE FOKKER-PLANCK AL MODELO DE BLACK-SCHOLES. SOLUCIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS PARA UNA OPCIÓN PUT EUROPEA; JOSÉ RAFAEL CARO BARRERA; Dpto. de Estadística, Econometría, Investigación Operativa y Métodos Cuantitativos. UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA, ESPAÑA.
- [63] Desplazamiento cuadrático promedio para una partícula browniana con diferentes diámetros; N. Lucero-Azuara, M. Chavelas-Astudillo, N. Sánchez-Salas, J.I. Jiménez-Aquino; Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional - Edif. 9 UP Zacatenco, CP 07738, Ciudad de México, México, Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana–Iztapalapa - Apartado Postal 55-534, CP 09340, Ciudad de México, México.
- [64] Descripción continua de sistemas de partículas Interactivas; Alejandro Almodóvar del Pozo; proyecto de Grafo; Facultat de Ciències; Universitat de les Illes Balears.
- [65] Movimiento Browniano de partículas con Volatilidad dependiente de la posición; Carolina Castañeda Gaviria; Proyecto de grado; Departamento de Física; Universidad de los Andes; Bogotá, 22 de Julio 2005.
- [66] Introducción al Movimiento Browniano para Finanzas en R.; Daniel Velásquez-Gaviria; Maastricht University.
- [67] On the dual effect of obstacles in preventing silo clogging in 2D; Diego Gella, Daichi Yanagisawa, Rodrigo Caitano, María Victoria Ferreyra, Iker Zuriguel; [www.nature.com/articles](http://www.nature.com/articles)
- [68] ECONOMÍA, SOCIEDAD Y MEDIO AMBIENTE; Sumak Kawsay; Universidad de Trujillo 2018; Facultad Ciencias Económicas.
- [69] Flujos de efectivo en el contexto de la ecuación Económica de continuidad; Fernando Gómez Villarraga; Universidad de La Salle. Ingeniero Químico Universidad Nacional de Colombia; 14 de julio de 2006.
- [70] LECCIONES SOBRE LAS SERIES Y TRANSFORMADAS DE FOURIER; Javier Duoandikoetxea; UNAN-Managua, 2003.
- [71] An introduction to Digital Signal Processing; Karl, John H.; Academic Press, Chapter Eight, 1989.
- [72] Digital Signal Processing; Oppenheim, Alan V. and Schaffer, Roland W.; Prentice-Hall, Inc., Chapter Five, 1975.
- [73] CoSIR: Optimal control of SIR epidemic dynamics by mapping to Lotka-Volterra System; Harsh Maheshwari, Shreyas Shetty, Nayana Bannur, Srujana Merugu; doi: <https://doi.org/10.1101/2020.11.10.20211995>
- [74] Applications of the Poincaré–Hopf Theorem; Epidemic Models and Lotka–Volterra Systems; Mengbin Ye, Member, IEEE, Ji Liu, Member, IEEE, Brian D.O. Anderson, Life Fellow, IEEE, and Ming Cao Senior Member; IEEE.
- [75] Extending the Lotka-Volterra Equations; Lalith Devireddy; June 6, 2016.
- [76] A Quantitative Study of the Interactions between Oil Price and Renewable Energy Sources Stock Prices; Goran Dominioni, Alessandro Romano, Chiara Sotis; Energies 2019, 12(9), 1693; <https://doi.org/10.3390/en12091693>
- [77] Exchange-Rate Devaluation in a Semi-Industrialized Country; Diaz Alejandro, Carlos (1965); The M.I.T. Press.
- [78] Estabilización Economía con Controles de Precios; Fernández, Roque y Mantel Rolf; Ensayos Económicos, BCRA, 1986.
-

- 
- [79] What have Populists Learned from Hyperinflation? in *The Macroeconomics of Populism in Latin America*; Dornbusch R. and E. Edwards (Ed.); The University of Chicago Press.
- [80] *Elements of Physical Biology*; Williams and Wilkins; Baltimore.
- [81] **MODELOS MULTIDIMENSIONALES (COMPETENCIA)**; JOSÉ LUÍS ARROYO BARRIGÜETE.
- [82] An Entire Solution to the Lotka–Volterra Competition-Diffusion Equations; Yoshihisa Morita; Article in *SIAM Journal on Mathematical Analysis* January 2009.
- [83] On a Lotka-Volterra competition system: diffusion vs advection; Peng Zhou; Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016.
- [84] *Turbulencia*; Universidad de Oviedo; Área de mecánica de fluidos.
- [85] *Modelos de Turbulencia*; Gustavo Richmond Navarro.
- [86] **DINÁMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL: ¿QUE ES?**; Kessler; Junio 2016. Available: <https://www.esss.co/blog/es/dinamica-de-fluidos-computacional-que-es/>
- [87] *Turbulence Modeling for CFD*; 2006. D. C. Wilcox.
- [88] Navier-Stokes Equation; Available: <http://www.claymath.org/millennium-problems/navier%E2%80%93stokes-equation>
- [89] LES of Turbulent Flows: Lecture 3; Dr. Jeremy A. Gibbs; Department of Mechanical Engineering, University of Utah – 2016.
- [90] Simulation CFD building, in order to calculate KTE and others parameters; Timoteo Briet Blanes.
- [91] **IMPLEMENTATION OF K-EPSILON TURBULENCE MODELS IN A TWO DIMENSIONAL PARALLEL NAVIER-STOKES SOLVER ON HYBRID GRIDS**; ONUR OZAN KALKAN.
- [92] A nonequilibrium equality for free energy differences; C. Jarzynski; Institute for Nuclear Theory, University of Washington Seattle, WA.
- [93] A note on the numerical treatment of the  $k - \epsilon$  turbulence model; Adrián J. Lew, Gustavo C. Buscaglia and Pablo M. Carrica; Centro Atómico Bariloche and Instituto Balseiro, 8400 Bariloche, Argentina.
- [94] On the implementation of the  $k - \epsilon$  turbulence model in incompressible flow solvers based on a finite element discretization; D. Kuzmin and O. Mierka; Institute of Applied Mathematics (LS III), University of Dortmund Vogelpothsweg 87, D-44227, Dortmund, Germany.
- [95] Finite Difference Methods for The Heat Equation; Xianyi Zeng; Department of Mathematical Sciences, UTEP.
- [96] Finite difference example: 1D implicit heat equation; Excerpt from GEOL557 Numerical Modeling of Earth Systems by Becker and Kaus (2016).
- [97] Metodología e interpretación del coeficiente de Hurst; Diego Luengas Domínguez, Esperanza Ardila Romero, John Freddy Moreno Trujillo; Universidad del Rosario y Universidad Nacional de Colombia.
- [98] Fractals, economics and business; RUFINO ITURRIAGA, CARINA JOVANOVIĆ; UNNE, RESISTENCIA, ARGENTINA.
- [99] Fractales en Mercados Financieros; ANNA BATLLE JOHER; SANDRA GRÈBOL MONTORO.
- [100] Análisis Fractal de la Precipitación en España; Sergio Escudero Medina; FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS; GRADO EN INGENIERÍA MATEMÁTICA; Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada; Curso 2020/2021.
-

---

[101] Black Scholes Equation and Heat Equation; Charles D. Joyner Georgia; Southern University, 2016.

[102] Manual Fluent (CFD Comercial).

[103] Quantum-like Models in Economics and Finances; Olga Choustov; International Center for Mathematical Modeling in Physics and Cognitive Sciences University of Vaxjo, S-35195, Sweden.

[104] Fluid Dynamics with Incompressible Schrödinger Flow; Albert Chern; CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY - Pasadena, California 2017 Defended May 23, 2017.

[105] TWO- AND THREE-DIMENSIONAL INVERSE PROBLEM OF DYNAMICS; MIRA-CRISTIANA ANISIU; STUDIA UNIV. "BABES,-BOLYAI", MATHEMATICA, Volume XLIX, Number 4, December 2004.

[106] Solution of an inverse problem of the dynamics of a particle; Sergey Shorokhov; Celestial Mechanics, 1988.

[107] Advanced control engineering; Njejo Pendo.

[108] Multivariate Transfer Function Modeling. An Application; Wafor Godwin O. River State University, Port Hrcourt – Nigeria Etuk Ette H. River State University, Port Harcourt – Nigeria Emeka Amos River State University, Port Harcourt – Nigeria.

[109] Using Euler-Lagrange Variational Principle to Obtain Flow Relations for Generalized Newtonian Fluids; Taha Sochi; University College London - Department of

Physics & Astronomy - Gower Street - London - WC1E 6BT. Email: t.sochi@ucl.ac.uk

[110] The Lagrangian Method; David Morin; morin@physics.harvard.edu

[111]

- Navier Stokes/K- $\epsilon$
- Euler - Lagrange

- Fractal
- Mínima Acción
- Mínima Energía
- Transfer Function
  - Links

**Predicción  
LARGO plazo**

**Predicción  
CORTO plazo**

**DINÁMICA  
TRANSITORIA**

**DINÁMICA  
INSTANTÁNEA**



# Timoteo Briet Blanes

La Ecuación que sustituye a Dios.



Licenciado en Matemáticas, Cosmólogo,  
Profesor de Aerodinámica y Simulación CFD  
en Ingeniería Industrial en diversas  
Universidades.  
Especialista en Aerodinámica, Simulación CFD  
y Modelización Numérica.



Profesor Universitario en Ingeniería Industrial y Profesor en varios Masters de Ingeniería de competición alrededor del mundo (Valencia, Barcelona, Madrid, Le Mans, Buenos Aires, etc). Diseñador de vehículos: Xerus Bus (Tata Motors), Lmp1-Lmp3 Le Mans, Pikes Peak Enviante, etc.

Trabajos en Rúbrica Ingeniería, Ferrari, Renault Argentina, Aprilia, Tata Motors, BP Oil. Profesor Universitario (UPV Valencia, Ismans Le Mans, UJI Castellón, Nebrija Madrid, etc....), etc.

*Dinámica de grupos de peatones, Sociología, Relaciones Humanas, etc.*



Nacimiento: Alcoy --- (Alicante), 1966.