格子系（非保存的時間依存Ginzburg-Landau模型）の可逆測度（Gibbs状態）の特徴付け

Research Proposal · July 2022

DOI: 10.13140/RG.2.2.11774.87362

1 author:

Hiroki Yagisita
Kyoto Sangyo University

格子系（非保存的時間依存Ginzburg-Landau模型）の可逆測度（Gibbs状態）の特徴付け

Characterization of reversible measure (Gibbs state) of lattice system (non-conservative time-dependent Ginzburg-Landau model)

Hiroki Yagisita (Kyoto Sangyo University)

予想： $FS(\mathbb{N})$ で、$\mathbb{N}$ の「有限部分集合」の全体の集合を表す。$\{U_A\}_{A\in FS(\mathbb{N})}$ は列とし、任意の $A \in FS(\mathbb{N})$ に対して、U_A は $\mathbb{R}^A$ 上の（滑らかさなどに関する適当な条件を満たす）実数値関数であるとする。さらに、（「格子系」を考える、という意味合いで、）任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、「$k \in A, \frac{\partial U_A}{\partial x_k} \neq 0$ （すなわち、U_A は x_k について定数でない）となる $A \in FS(\mathbb{N})$ の個数は有限である」とする。そこで、$k \in \mathbb{N}$ に対して、$\mathbb{R}^\infty (:= \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ 上の実数値関数 H_k を

$$H_k(\{x_l\}_{l\in\mathbb{N}}) := \sum_{k\in A,\, \frac{\partial U_A}{\partial x_k}\neq 0} U_A(\{x_l\}_{l\in A})$$

で定める。$\{P_x\}_{x\in\mathbb{R}^\infty}$ は確率微分方程式の無限系

$$dX_k = dB_k - \frac{\partial H_k}{\partial x_k}(\{X_l\}_{l\in\mathbb{N}})dt$$

の（初期分布がそれぞれ δ_x の）解が定める（$\mathbb{R}^\infty$ 上の）Markov 過程とする。μ を $\mathbb{R}^\infty$ 上の確率測度とする。このとき、「μ が $\{P_x\}_{x\in\mathbb{R}^\infty}$ の可逆測度であるため」には、「任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、$\mathbb{R}^{\mathbb{N}\setminus\{k\}}$ の上の σ 有限なある測度 μ_k が存在して、

$$d\mu(\{x_l\}_{l\in\mathbb{N}}) = e^{-2H_k(\{x_l\}_{l\in\mathbb{N}})}dx_k d\mu_k(\{x_l\}_{l\in\mathbb{N}\setminus\{k\}})$$

であること」が必要十分である。

【追記】厳密には、確率測度と Markov 過程の「登場の順番」は入れ替えるべきなのかもしれません。例えば、「確率測度に関して、ほとんど至るところ、定義された Markov 過程」を考える、あるいは、「確率測度を初期分布とする解」を考える、など。

【注意】数学辞典の「相互作用 Brown 粒子系」の項に、「**カノニカルな Gibbs 状態**」と可逆測度の同値性が知られている、とあります。この既知の事実と強い関係がありそうですが、「カノニカルな Gibbs 状態」と「上記の予想の条件」の同値性の問題であって、既に（ほぼ？）解決済みかもしれません。

【感想】可逆な確率測度は、当該の拡散過程をコンパクト化するものであり、可逆な σ 有限な測度は「有限次元的な方向」を除いて、コンパクト化するものなのかもしれません。例えば、「無限次元の Ornstein-Uhlenbeck 過程」は可逆な確率測度を持ち、「確率測度が定める拡散過程」の生成作用素である Ornstein-Uhlenbeck 作用素のスペクトルは離散的であり、散乱は起こらない。同様に、「σ 有限な測度が定める拡散過程」の生成作用素は、「有限次元的な方向」に限った散乱を起こす、というように理解できるのかもしれません。そして、「そのようなものの摂動」として得られる自己共役作用素も事情はそんなに変わらないのかもしれません。

舟木直久『確率微分方程式』（岩波書店）