ALGEBRAIK MASALALARNI GEOMETRIK USULDA YECHISH

O'tkirbek Yaxshilikovich To'rayev
Jizzax politexnika instituti katta o`qituvchisi.

https://doi.org/10.5281/zenodo.6661089

Annotatsiya: *Ushbu maqolada ba'zi algebraik tenglamalar va tengsizliklarni geometrik shakllarning xossalaridan foydalanib yechish usullari o`rganilgan.*

Tayanch so`zlar: *tenglama, tengsizlik, algebraik tenglamalar sistemasi, vektor, funksiya.*

РЕШАЙТЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ

Аннотация: *В этой статье изучены некоторые алгебраические уравнения и неравенства и методы их решения использованием свойств геометрических фигур.*

Ключевые слова: *уравнение, неравенство, система уравнений, векторы, функция.*

SOLVE ALGEBRAIC PROBLEMS GEOMETRICALLY

Annotation: *This article explores some algebraic equations and inequalities and methods for solving them using the properties of geometric shapes.*

Keywords: *equations, inequalities, system of equations, vectors, function.*

KIRISH

Bugungi kun bizdan ta'lim-tarbiya berishning yangi usullarini ishlab chiqish, fanlararo bog'lanishni kuchaytirish, ijodkor va erkin hamda har tomonlama mustaqil fikrlay oladigan yoshlarni tarbiyalashdek dolzarb vazifani talab etadi.

Ushbu masalalarning ko'pchiligi matematika fanidan respublikamizning turli bosqich olimpiadalari masalasi sifatida keltirilganligi bois, ushbu usullardan dars davomida, ayniqsa matematik to'garaklarda, o'quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlashda foydalansa yanada yaxshiroq samara beradi degan umiddamiz.

Geometrik bo'lmagan masalalarni geometrik usulda yechish o'quvchilarda fanlararo bog'liqlikni teran tushunib yetadi, ilmiy tafakkuri, dunyo qarashi hamda ijodiy ishlash ko'nikmasini shakllantiradi. Biz masalamizni quyidagi turlarga bo'lib ifodalaymiz.

1. Dekart koordinatasi sistemasi yordamida yechiladigan masalalar;
2. Pifagor hamda kosinuslar teoremasi yordamida yechiladigan masalalar;
3. Vektorlar yordamida yechiladigan masalalar.

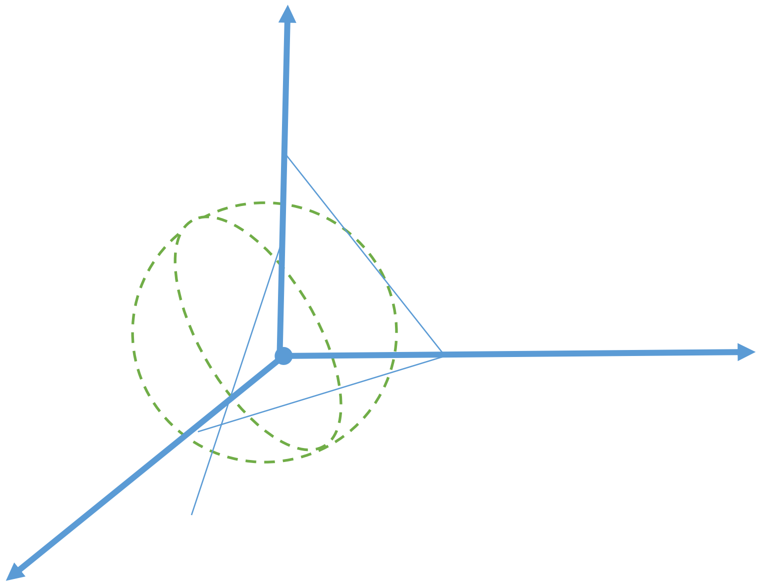
Quyida bu holatlarning har biriga alohida to'xtalib, ularga oid masalalar yechimini keltirib o'tamiz.

TADQIQOT MATERIALLARI VA METODOLOGIYASI

Dekart koordinatasi sistemasi yordamida yechiladigan masalalar.

1-masala. Tenglamalar sistemasini yeching. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$

Yechimi. $x+y+z=3$ tenglama bilan berilgan tekislik to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi o'qlarini mos ravishda $A(3;0;0), B(0;3;0), C(0;0;3)$ nuqtalarda kesib o'tadi (1-chizma).



1-chizma.

$x^2+y^2+z^2=3$ esa markazi $O(0;0;0)$ nuqtada va radiusi $r=\sqrt{3}$ bo'lgan sfera tenglamasini ifoda qiladi. O nuqtadan ABC uchburchak tekisligigacha bo'lgan masofani aniqlaymiz. Buning uchun $OABC$ piramidani qaraymiz.

TADQIQOT NATIJALARI

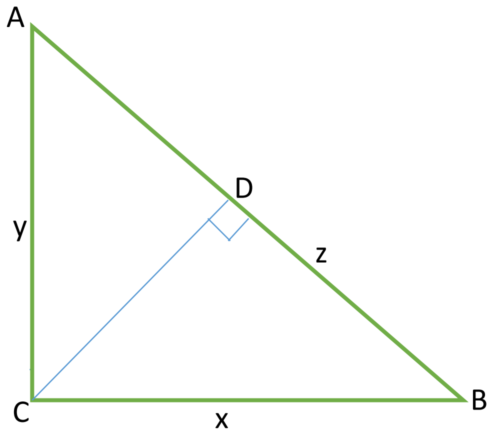
Ma'lumki, piramidaning hajmi $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot H$ formula yordamida topiladi, Bunda $H=OD$ ($D-ABC$ uchburchak markazi). Bunga ko'ra piramidaning hajmi

$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot H=\frac{3H\sqrt{3}}{2}$ ekanini topamiz. Ikkinchi tomondan bu piramidaning hajmi $V=\frac{1}{3}S_{\Delta OAB}\cdot CO=\frac{1}{3}\frac{1}{2}3^2\cdot 3=\frac{9}{2}$ bo'ladi. Bu ikkala tengliklardan $\frac{3H\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{2}$, $H=\sqrt{3}$ natijani olamiz. Bundan shuni aniqlaymizki, O nuqtadan ABC uchburchak tekisligigacha bo'lgan masofa $OD=\sqrt{3}$ bo'lib, sfera D nuqtada ABC-uchburchak tekisligiga urinadi. Demak, berilgan tenglamalar sistemasi yagona ildizga ega bo'ladi. Bu yechim $D(x;y;z)$ nuqtaning koordinatalaridan iborat bo'ladi. D nuqta ABC muntazam uchburchakning og'irlik markazi bo'lganligi bois, $x=y=z=1$ bo'ladi. U holda javob: $(1;1;1)$ bo'ladi.

Pifagor hamda kosinuslar teoremasi yordamida yechiladigan masalalar

2-masala. Tenglamalar sistemasini yeching $\begin{cases} x+y+z=60 \\ x^2+y^2=z^2 \\ \frac{xy}{z}=12 \end{cases}$

Yechimi. 1) Aytaylik x, y, z – musbat sonlar bo'lsin. Katetlari x, y va gipotenuzasi z bo'lgan ABC uchburchakni yasab olamiz.



2-chizma.

Bu uchburchakni perimetri 60 ga, gipotenuzaga tushirilgan balandligi 12 ga teng (2-chizma). Sistemadagi 1 −tenglamadan $(x+y)^2 = (60-z)^2$, sistemaning $2-$ va $3-$ tenglamalaridan esa $(x+y)^2 = z^2 + 24z$ tenglamalarni hosil qilamiz. Bu ikkita tenglamalarning chap qismlari tengligidan

$(60-z)^2 = z^2 + 24z \Longrightarrow 144 = 60^2 \Longrightarrow z = 25$ ekanligini topamiz. U holda,

$\begin{cases} x + y = 35 \\ xy = 300 \end{cases}$ bo'lib, bu noma'lumlarning qiymatlari 15 va 20 bo'ladi.

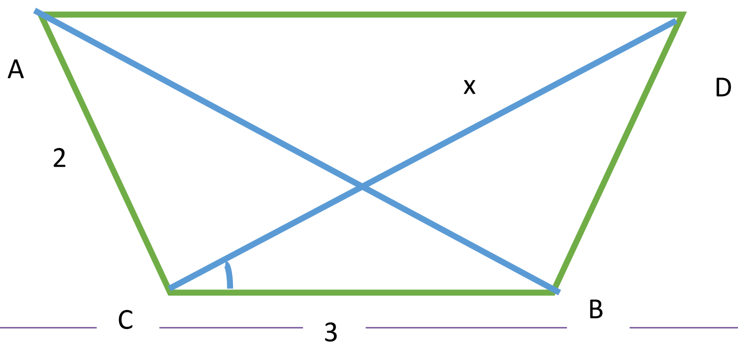
Sistemaning yechimi: $(15; 20; 25)$ va $(20; 15; 25)$ bo'ladi.

2) Masala shartida x, y, z −larning musbat yoki manfiyligi haqida hech narsa aytilmagan. Sistemadagi 3 −tenglamadan aytaylik noma'lumlardan ikkitasi manfiy bo'lsin. $z > 0$ ekanligiga biz yuqorida ishonch hosil qildik. U holda $x < 0$ va $y < 0$ bo'lishi kerak. $x + y = 35$ ekanligidan x va y larning manfiy bo'lishi mumkin emas. Demak javob : $(15; 20; 25)$ va $(20; 15; 25)$.

3-masala. Funksiyaning eng kichik qiymatini toping.

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$$

Yechimi. Quyidagi chizmadan foydalanamiz:



3-chizma.

XULOSA

Bunga ko'ra ACD to'g'ri burchakli uchburchakda $AC = 2, CD = x, < ACD = 90^0$ va BCD uchburchakda esa $BC = 3, CD = x, < BCD = 30^0$ munosabatlar o'rinli (3-chizma). ACD uchburchakka Pifagor teoremasini tadbiq etib $AD = \sqrt{x^2+4}$ BCD uchburchakka esa kosinuslar teoremasini qo'llasak, $DB = \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$ natijalarni olamiz. U holda $f(x) = min(AD + DB) = AB$ munosabat o'rinli bo'ladi. ΔABC uchburchakka kosinuslar teoremasini tadbiq etib, $AB = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot cos120^0} = \sqrt{19}$ ekanini topamiz. Javob: $\sqrt{19}$.

Vektorlar yordamida yechiladigan masalalar.

4-masala. Agar $a + b + c = 1$ va $a \geq -\frac{1}{4}, b \geq -\frac{1}{4}, c \geq -\frac{1}{4}$ ekani ma'lum bo'lsa, u holda $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}$ tengsizlikni isbotlang.

Yechimi. Biz bu masalani vektorlarning skalyar ko'paytmasidan foydalanib yechamiz. Buning uchun avval 2 ta vektor tuzib olamiz.

$\vec{a}\left(\sqrt{4a+1}; \sqrt{4b+1}; \sqrt{4c+1}\right)$ va $\vec{b}(1;1;1)$. Bu vektorlar uchun $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ tengsizlikni qo'llasak quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi.

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$$

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = \sqrt{\sqrt{4a+1}^2 + \sqrt{4b+1}^2 + \sqrt{4c+1}^2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{21}.$$

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ ga ko'ra $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}$ bo'ladi. Tengsizlik isbotlandi.

Mustaqil yechish uchun masalalar.

1) Agar $x + y + z = 5$ bo'lsa, $\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+16} + \sqrt{z^2+25}$ ifodani eng kichik qiymatini toping.

2) Tenglamani yeching: a) $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2 - 3x\sqrt{3} + 9} = \sqrt{19}$;

b) $\sqrt{2x^2 + 2 - 4x + x\sqrt{2}} + \sqrt{2x^2 + 2 - 2x} = \sqrt{6}$

3) Tenglamalar sistemasini yeching. $\begin{cases} x + y + z = 30 \\ x^2 + y^2 = z^2 \\ xy = 6z \end{cases}$

4) $\sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$ ifodaning eng kichik qiymatini toping.

5) Quyidagi tenglamani yeching. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

6)Musbat a,b,c conlari uchun quyidagi tengsizlikni isbotlang: $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}=\sqrt{a^2-ac+c^2}$

7)Funksiyaning eng kichik qiymatini toping. $f(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3x\sqrt{3}+9}$

8) 10) Agar $a-b+c=6$ ekani ma'lum bo'lsa, $\sqrt{a+1}+\sqrt{2-b}+\sqrt{c+3}\leq 6$ tengsizlikni isbotlang.

9) Tenglamani yeching. $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{1+x^2}$

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. С.Отакулов, А.Мусаев. Математические методы в экономике. «Издательство инновационного развития» Ташкент, 2020.-259 стр.
2. Ломкова Е.Н., Эпов А.А. Экономико-математические модели управления производством. Учебное пособие. Волгоград, РПК "Политехник". 2005.-67с.
3. У.Я.Тураев. Электронная рабочая тетрадь как средство повышения эффективности организации самостоятельной работы студентов научный вестник НамГУ-научный вестник НамГУ, № 2, 2020, С. 409-414.
4. У.Я.Тураев, Б. Ш. Рахимов. Низкая и высокая оценка игры. Принцип минимакса. Актуальные проблемы и тенденции развития современных исследований, инноваций, техники и технологии. Сборник материалов республиканской научно-технической конференции–Джизак: ДжизПИ, 10-11 апреля 2020 года. Том 1. Стр. 407-409.
5. Останов К., Тураев У. Я., Рахимов Б. Ш. Об обучении учащихся основным методам решения квадратных неравенств //European science. – 2020. – №. 1 (50).
6. Останов К., Тураев У. Я., Рахимов Б. Ш. ИЗУЧЕНИЕ ПОНЯТИЯ «СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА» И ЗАКОНЫ ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ //ББК 72 С127. – 2019.
7. Неъматов А. Р., Рахимов Б. Ш., Тураев У. Я. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА //Ученый XXI века. – 2016. – Т. 6.
8. Неьматов А. Р., Рахимов Б. Ш., Тураев У. Я. EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE DECISION OF THE NONLINEAR EQUATION VOLTERRA //Учёный XXI века. – 2016. – №. 3-1 (16). – С. 3-6.

9. Rahimov B. S. H., Ne'matov A. R., Fayzullayev S. E. LAGRANJ FUNKSIYASIDAN FOYDALANIB BA'ZI MASALALARNI YECHISH HAQIDA //Archive of Conferences. – 2022. – С. 41-43.
10. Отакулов С., Рахимов Б. Ш. ОБ УСЛОВИЯХ УПРАВЛЯЕМОСТИ АНСАМБЛЯ ТРАЕКТОРИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ //Журнал Физико-математические науки. – 2020. – Т. 1. – №. 3.
11. Отакулов С., Рахимов Б. Ш., Хайдаров Т. Т. Задача оптимизации квадратичной функции на неограниченном многогранном множестве //Science and Education. – 2020. – Т. 1. – №. 2. – С. 11-18.
12. Останов К. и др. НЕКОТОРЫЕ НЕСТАНДАРТНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ //ББК 72 Н106. – 2018.
13. Sh.A.Alimov, O.R.Xolmuhamedov, M.A.Mirzaahmedov. Algebra 9-sinflar uchun darslik. T: "O'qituvchi", 2009.
14. I.Isroilov, Z.Pashayev. Geometriya, I qism. T., "O'qituvchi", 2004.