ЦЕННОСТЬ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ ПРИНЦИП МИНИМАКСА И ЕГО ЭКОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Уткирбек Яхшиликович Тураев
Бойхуроз Шермухаммедович Рахимов
преподаватели Джизакского политехнического института

https://doi.org/10.5281/zenodo.6660775

Аннотация. *Практически все управленческие решения и финансовые операции происходят в условиях неопределенности. Поэтому их результаты непредсказуемы. Следовательно, полезность решений, принимаемых одной стороной, приводит к конфликтным ситуациям другой стороны. Ниже приведены некоторые примеры решений задач на анализ нижнего и верхнего значений платежной матрицы.*

Ключевые слова: *матричная игра, платежная матрица, нижняя оценка игры, верхняя оценка игры, принцип минимакса, седловая точка игры.*

THE VALUE OF THE MATRIX GAME, THE MINIMAX PRINCIPLE AND ITS ECONOMIC ANALYSIS.

Abstract. *Almost all management decisions and financial transactions are carried out under conditions of uncertainty. Because of this, their results are unpredictable. Consequently, the usefulness of decisions taken by one side leads to conflict situations on the other side. There are enlightened some examples of solutions for analyzing the lower and upper estimates of the payment matrix in this article.*

Keywords: *matrix game, payout matrix, lower game score, higher game score, minimax principle, saddle point of the game.*

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим игру, в которой участвуют два игрока, *A* и *B*. У игроков противоположные цели. Успех одного из них гарантирует поражение другого Достаточно проанализировать успех игрока *A* в этой игре.

Пусть игрок *A* имеет m стратегий $A_i, i = \overline{1,m}$, а игрок *B* имеет n стратегий n $B_j, j = \overline{1,n}$ Такая игра называется игрой размерности $m \times n$.

Рассмотрим игру $m \times n$ с платежной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Если игрок *A* выбирает стратегию A_i, то все его возможные выигрыши будут элементами i-й строки матрицы C.

Каждый положительный элемент c_{ij} платежной матрицы представляет собой сумму выигрыша игрока *A* при использовании соответствующих стратегий.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В худшем случае для игрока *A*, то есть когда игрок *B* использует стратегию, которая соответствует минимальному элементу этой строки, выигрыш игрока *A* равен числу

$$\min_{1\le j\le n} c_{ij}$$

Следовательно, чтобы получить самый крупный выигрыш, игрок *A* должен выбрать одну из стратегий, которая максимизирует число

$$\min_{1\le j\le n} c_{ij}$$

Число $\alpha = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} c_{ij}$ называется наименьшим счетом в игре.

Стратегия игрока А которая соответствует наибольшему из чисел

$$\min_{1\le j\le n} c_{ij}$$

называется максимальной.

Следовательно, для игрока B нужно выбрать такую стратегию, чтобы число

$$\max_{1\le j\le m} c_{ij}$$

было минимальным.

Число

$$\beta = \min_{1\le j\le n} \max_{1\le i\le m} c_{ij}$$

является наибольшим счетом игры, стратегия игрока *B*, соответствующая самому малому чисел

$$\max_{1\le j\le m} c_{ij}$$

называется стратегией минимакса.

Значить, если игрок *B* применит стратегию минимакса, то он при любом случае не проиграет больше числа β.

Принцип предосторожности, который заставляет игроков использовать стратегии максимакс и минимакс, называется принципом «максимин» или «минимакс» соответственно, стратегии максимин и минимакс обобщенно называются «стратегиями минимакс».

Определение. Игра называется игрой с седловой точкой, если ее верхняя и нижняя оценки совпадают, т.е. если имеет место равенство

$$\alpha = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} c_{ij} = \min_{1\le j\le n} \max_{1\le i\le m} c_{ij} = \beta$$

Игра может иметь несколько седловых точек.

В игре с седловой точкой противники имеют равные шансы и оптимальные стратегии в игре означают такие "состоянии равновесия", в которых ни кому из игроков не выгодно отстраняться от своей оптимальной стратегии, так как игроку это не выгодно.

Суммарное значение высшей оценки игры для игры с седловой точкой называется базисом игры и обозначается

$$V = \alpha = \beta$$

Теперь рассмотрим элемент $C_{i_0 j_0}$ платежной матрицы, который соответствует минимаксным стратегиям A_{i_0} и B_{j_0} для игры с седловой точкой. Этот элемент будет минимальным элементом в своей строке и максимальным элементом в своем столбце одновременно и выполняются равенства:

$$V = \alpha = \min_{1 \le i \le m} c_{ij} = \max_{1 \le j \le n} c_{ij} = \beta$$

Следовательно, выполняется равенство $C_{i_0 j_0} = V$. Элемент $C_{i_0 j_0}$ платежной матрицы называется седловой точкой.

РЕЗУЛЬТАТЫ и ОБСУЖДЕНИЕ

Теперь, используя вышеизложенные понятия, рассмотрим примеры определения нижней и верхней оценок игры с платежной матрицей, оценки результатов финансовых операций с точки зрения дохода.

Пример 1. Найти нижнюю и верхнюю оценки игра с платежной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Найдём наименьший элемент в каждой строке платежной матрицы и запишем его справа от матрицы. Найдем наибольший элемент в каждом столбце платежной матрицы. В результате имеем

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 10 & 4 & 3 & 10 \end{matrix} \end{array}$$

Нижняя оценка игры $\alpha = max\{1, \ 3, \ -2\}$=3,

Верхняя оценка игры $\beta = min\ \{10, \ 4, \ 3, \ 10\ \}$=3,

$$\alpha = \beta = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} c_{ij} = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} c_{ij} = 3.$$

Пример 2. Найти нижнюю и верхнюю оценки игры с платежной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение. Выполним действия, подобные в первом примере. В результате имеем

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 & 4 & 5 \end{matrix} \end{array}$$

Нижняя оценка игры $\alpha = max\{-1, \ 2 \ -2 \ 1\} = 2,$

Верхняя оценка игры $\beta = min\ \{5, \ 4, \ 5\} = 4.$

Пример 3. $C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 & 6 \\ 8 & 4 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

Решение. Найдем числа $\alpha_i = \min_{1 \le j \le 4} c_{ij}, \ i = 1,2,3$ и $\beta_j = \max_{1 \le i \le 3} c_{ij}, \ j = 1,2,3,4.$

Будем иметь

$$\alpha_1 = 6, \alpha_2 = 2, \ \alpha_3 = 6 \ \text{va} \ \beta_1 = 9, \beta_2 = 6, \ \beta_3 = 9, \beta_4 = 6$$

Используя полученные результаты найдем нижнюю и верхнюю оценки игры:

$$\alpha = max \alpha_i = \max(6; 2; 6) = 6, \ \alpha = \alpha_1 = \alpha_3 = 6,$$

$$\beta = min \beta_j = \min(9; 6; 9; 6) = 6, \ \beta = \beta_2 = \beta_4 = 6.$$

Следовательно, $\alpha = \beta$, т.е. имеется седловая точка. Данные пары $(A_1; B_2), (A_1; B_4)$, $(A_3; B_2)$ и $(A_3; B_4)$ считаются седловыми точками игры. Базис игры $V = \alpha = \beta = 6$

Пример 4. Используя матрицу доходов, определите решение, приносящее максимальный доход.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение. Если игрок A выберит стратегию A_1 тогда, он имеет самое мало доход в 3 единицы.

$$c_1 = \min(3; 5; 6) = 3;$$

Аналогично находим минимальный доход в остальных строках:

$$c_2 = \min(1; 2; 4) = 1;$$

$$c_3 = \min(2; 4; 5) = 2;$$

Итак, решение, обеспечивающее наибольший из найденных минимальных доходов $\max(c_1; c_2; c_3) = \max(3; 1; 2) = 3$; т.е. стратегия 1 будет иметь доход 3 единицы.

ВЫВОДЫ

Игра, являющаяся одной из математических моделей реальной конфликтной ситуации, анализируется по определенным правилам. В общем случае правила игры ходы сторон оценивают последовательность действий, ходы каждой стороны, объем информации о ходах противоположной стороны, а также результат игры.

Список литературы

1. С.Отакулов, А.Мусаев. Математические методы в экономике. «Издательство инновационного развития» Ташкент, 2020.-259 стр.
2. Ломкова Е.Н., Эпов А.А. Экономико-математические модели управления производством. Учебное пособие. Волгоград, РПК "Политехник". 2005.-67с.

3. У.Я.Тураев. Электронная рабочая тетрадь как средство повышения эффективности организации самостоятельной работы студентов научный вестник НамГУ-научный вестник НамГУ, № 2, 2020, С. 409-414.
4. У.Я.Тураев, Б. Ш. Рахимов. Низкая и высокая оценка игры. Принцип минимакса. Актуальные проблемы и тенденции развития современных исследований, инноваций, техники и технологии. Сборник материалов республиканской научно-технической конференции–Джизак: ДжизПИ, 10-11 апреля 2020 года. Том 1. Стр. 407-409.
5. 5.Останов К., Тураев У. Я., Рахимов Б. Ш. Об обучении учащихся основным методам решения квадратных неравенств //European science. – 2020. – №. 1 (50).
6. 6.Останов К., Тураев У. Я., Рахимов Б. Ш. ИЗУЧЕНИЕ ПОНЯТИЯ «СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА» И ЗАКОНЫ ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ //ББК 72 С127. – 2019.
7. 7.Неъматов А. Р., Рахимов Б. Ш., Тураев У. Я. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА //Ученый XXI века. – 2016. – Т. 6.
8. 8.Неьматов А. Р., Рахимов Б. Ш., Тураев У. Я. EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE DECISION OF THE NONLINEAR EQUATION VOLTERRA //Учёный XXI века. – 2016. – №. 3-1 (16). – С. 3-6.
9. 9. Rahimov B. S. H., Ne'matov A. R., Fayzullayev S. E. LAGRANJ FUNKSIYASIDAN FOYDALANIB BA'ZI MASALALARNI YECHISH HAQIDA //Archive of Conferences. – 2022. – С. 41-43.
10. 10. Отакулов С., Рахимов Б. Ш. ОБ УСЛОВИЯХ УПРАВЛЯЕМОСТИ АНСАМБЛЯ ТРАЕКТОРИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ //Журнал Физико-математические науки. – 2020. – Т. 1. – №. 3.
11. 11.Отакулов С., Рахимов Б. Ш., Хайдаров Т. Т. Задача оптимизации квадратичной функции на неограниченном многогранном множестве //Science and Education. – 2020. – Т. 1. – №. 2. – С. 11-18.
12. 12.Останов К. и др. НЕКОТОРЫЕ НЕСТАНДАРТНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ //ББК 72 Н106. – 2018.