YOSH TADQIQOTCHI JURNALI 2nd Sun

О ПОНЯТИЕ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ПРИМЕРЫ ИХ НАХОЖДЕНИЯ

Пармонов Хамид Фахриддин угли

Бухарский государственный университет,

Физико-математический факультет, hparmonov93@mail.ru

https://doi.org/10.5281/zenodo.6637574

АННОТАЦИЯ. В настоящей статье приведена краткий обзор методов вычисление максимумов и минимумов функций (методы: - метод исключения части переменных и метод Лагранжа), изложены трудности нахождения и эффективности. Для наглядности проиллюстрирована геометрическая интерпретация условного экстремума функции двух переменных. Указаны пути решения типичных задач и даны методические советы.

Ключевые слова: максимум и минимум функции, априори, ограничения условного экстремума функции, методы исключения части переменных, метод Лагранжа, дополнительные переменные, независимые переменные, наибольшее (наименьшее) значение функции, геометрическая интерпретация условного экстремума, неявная функция, градиент, вектор.

ANNOTATION. This article provides a brief overview of the methods for calculating the maxima and minima of functions (methods: - the method of eliminating part of the variables and the Lagrange method), and outlines the difficulties of calculation and efficiency. For clarity, a geometric interpretation of the conditional extremum of a function of two variables is illustrated. Ways of solving typical problems are indicated and methodological advice is given.

Keywords: maximum and minimum of a function, a priori, restrictions on the conditional extremum of a function, methods for eliminating some of the variables, the Lagrange method, additional variables, independent variables, the largest (smallest) value of the function, geometric interpretation of the conditional extremum, implicit function, gradient, vector.

Решение задач на вычисление максимумов и минимумов функций широко используется в различных областях науки и техники, а также в военном деле и в условиях чрезвычайных ситуаций при принятии мотивированных решений. Последние, в частности, принимаются обычно при наличии априорных (т.е. заранее заданных) ограничений на имеющиеся людские ресурсы, технику, приоритеты спасания и т.п.

Математически такие задачи формулируются как задачи на вычисление условного экстремума функции многих переменных, т.е. задачи вычисления экстремума функции n переменных, которые подчинены некоторым условиям (связям). Количество таких условий m должно обязательно быть меньше числа переменных n, т.е. должно выполняться условие $m < n$.

В существующей учебной литературе нет единообразных рекомендаций как именно надо решать задачи на условный экстремум. Например, в некоторых литературах (в т.ч. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, С-П.: Лань, 1 том, 1997 г.) рекомендуется сначала из m условий связи выразить некоторые m переменных через оставшиеся $m - n$ переменных, а затем решать более простую задачу на безусловный экстремум функции меньшего числа оставшихся $m - n$ переменных. Однако в (Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том, Москва, Наука, 1970 г.) справедливо отмечается, что подобное исключение m переменных либо очень громоздко и трудоемко, либо вообще невозможно, так как в общем случае сводится к решению систем из m нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений.

Чтобы не сталкиваться с такими трудностями в (Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Москва, Наука, том 2, 1970 г.) для решения задач на условный экстремум предлагаются использовать методы исключения части переменных и Лагранжа. В этом методе задача нахождения условного экстремума функции n переменных при наличии m связей сводится к более простой задаче на безусловный экстремум функции Лагранжа от большего числа $m - n$ переменных. Однако вдумчивый читатель может усомниться: «Известно, что чем больше число переменных n, тем труднее решается задача даже на безусловный экстремум, функции n переменных. А мы как раз и увеличили число переменных. Может быть, трудности за счет увеличения числа переменных будут превалировать над облегчением за счет перевода задачи на условный экстремум в задачу на Безусловный экстремум?». В общем случае такое рассуждение законно. Однако оно не учитывает тот факт, что в методе Лагранжа дополнительные переменные фактически являются постоянными, количество которых равно числу связей m. Поэтому на самом деле число существенных фактических переменных в методе Лагранжа остается равным n. Усложняется только вид исследуемой функции (Эвельсон Р.Л. Условный экстремум функции многих переменных, Новогорск, 2004, 41 с.)

Теперь более подробно опишем определение и основные понятия **у**словного экстремума, а также приводим некоторые теоремы по нахождение экстремума.

Рассмотрим функцию

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(M) \qquad (1)$$

при условии, что ее аргументы являются не независимыми переменными, а связаны между собой k соотношениями ($k < m$):

$$F_i = (x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \ (i = 1,2, \dots, k). \qquad (2)$$

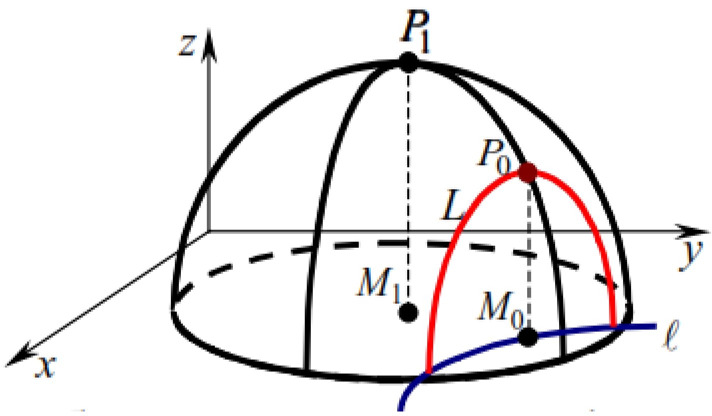
Эти соотношения называются условиями связи. Пусть координаты точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ удовлетворяют уравнениям (2).

Определение. Говорят, что функция (1) имеет в точке M_0 условный минимум (максимум) при условиях связи (2), если существует такая окрестность точки M_0, что для любой точки М $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ $(\mathrm{M} \neq \mathrm{M}_0)$ этой окрестности, координаты которой удовлетворяют уравнениям (2), выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$ $(f(M) < f(M_0))$.

Иначе говоря, условный максимум (минимум) - это наибольшее (наименьшее) значение функции в точке M_0 по отношению не ко всем точкам из некоторой окрестности точки M_0, а только к тем из них, которые связаны между собой условиями связи.

Геометрическая интерпретация условного экстремума функции двух переменных.

Пусть поверхность S – график функции $z = f(x, y)$;



M_1 — точка безусловного экстремума (сравниваем P и точки ее полной окрестности).

Далее рассмотрим два метода решения задачи об условном экстремуме функции.

Метод исключения части переменных (Бутузов В.П. Математический анализ в вопросах и задачах, Москва, Физматлит, 2001 г., 479 с.). Пусть в окрестности ω точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, т.е. в некотором параллелепипеде $Q \subset \omega$ эти уравнения имеют единственное решение относительно каких-то k переменных, например, относительно $x_1, x_2, \dots, x_k$:

$$x_i = \varphi_i(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m) \ (i = 1,2, \dots k). \qquad (3)$$

Тогда в параллелепипеде Q условия связи (2) эквивалентны соотношениям (3), в которых естественно рассматривать $(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m)$ как независимые переменные.

Если функции (3) удается найти в явном виде, то, подставляя их в (1), получим функцию $m - k$ независимых переменных:

$$u = f(\varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_m), x_{k+1}, \dots, x_m) \equiv$$
$$\equiv F(x_{k+1}, \dots, x_m) = F(M').$$

В пределах Q значение функции $F(M')$ в любой точке $M'(x_{k+1}, \dots, x_m)$ совпадает со значением функции $f(M)$ в соответствующей точке $\mathrm{M}(x_1, x_2, \dots, x_m)$, удовлетворяющей уравнениям (3), или, что то же самое, уравнениям связи (2). Поэтому вопрос об условном экстремуме функции (1) при условиях связи (2) в параллелепипеде Q сводится к вопросу о безусловном экстремуме функции $F(M')$.

Если нахождение функций (3) в явном виде затруднительно (или невозможно), то можно поступить следующим образом.

Предположим, что функции (3) подставлены в (1), в результате чего получается функция $F(M')$, и в уравнения (2), которые после этой подстановки обращаются в тождества. Дифференциал функции $F(M')$ в силу инвариантности формы первого дифференциала можно записать в виде

$$dF = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \qquad (4)$$

где $dx_{k+1}, dx_{k+2}, \dots, dx_m$— дифференциалы независимых переменных, а $dx_1, dx_2, \dots, dx_k$— дифференциалы неявных функций (3). Дифференцируя указанные выше тождества, получим

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_m} dx_m = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_k}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial x_m} dx_m = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Из этой линейной системы выразим дифференциалы $dx_1, dx_2, \dots, dx_k$ неявных функций (3) через дифференциалы независимых переменных $dx_{k+1}, dx_{k+2}, \dots, dx_m$. Подставляя полученные выражения для $dx_1, dx_2, \dots, dx_k$ в (4), приходим к равенству

$$dF = \sum_{i=k+1}^{m} A_i(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_i, \qquad (6)$$

где $x_j = \varphi_j(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m)$ $(j = 1,2, \dots, k)$.

Если в точке $M'_0(x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0)$ функция $F(M')$, имеет экстремум, то $dF|_{M_0'} = 0$, т.е.

$$\sum_{i=k+1}^{m} A_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0, x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0) dx_i = 0, \qquad (7)$$

где $x_j^0 = \varphi_j(x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0) = \varphi_j(M_0')(j = 1,2, \dots, k)$. Так как dx_i $(i = k+1, k+2, \dots, m)$ — дифференциалы независимых переменных, то из (7) получаем

$$A_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0, x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0) = 0 \qquad (8)$$

где $(i = k+1, \dots, m)$.

Равенства (8) являются, таким образом, необходимыми условиями экстремума функции $F(M')$в точке M'_0, или, что то же самое, необходимыми условиями условного экстремума функции $f(M)$ в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ при условиях связи (2).

Метод Лагранжа (Бутузов В.П. Математический анализ в вопросах и задачах, Москва, Физматлит, 2001 г., 479 с.) Усложнение вида исследуемой на безусловный экстремум функции Лагранжа (по сравнению с исходной) за счет неизбежно необходимого учета всех наложенных связей или дополнительных условий приводит авторов к рассмотрению с помощью функции Лагранжа только необходимых условий экстремума, т.е. к нахождению возможных точек экстремума.

Рассмотрение достаточных условий экстремума, т.е. установление факта существования экстремума в найденных стационарных или критических точках вообще и его характера (т.е. максимума или минимума) не производится. Вместо рассмотрения достаточных условий экстремума рекомендуется использовать некоторые дополнительные физические или геометрические соображения, что может быть фактически реализовано лишь в простейших случаях [1-9].

Полное использование необходимых и достаточных условий экстремума на основе изучение знака второго дифференциала функции Лагранжа в стационарной точке имеется в (Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 2, Москва, Наука, 1970 г.). При этом остается не исследованным сомнительный случай, когда $d^2L = 0$ в стационарной точке.

Такая недоисследованность не случайна, а закономерна, так как связана с нерациональным способом вычисления второго дифференциала d^2L, требующим предварительного вычисления всех возможных частных производных второго порядка функции Лагранжа L и, кроме того, знания достаточно сложной через эти частные производные, особенно при $3 \leq n$. А если учесть, что для вычисления формулы для d^2L необходимо выписывать все частные производные второго порядка, в том числе и заведомо равные нулю (а число таких производных быстро увеличивается с ростом числа переменных n), то громоздкость такого способа вычисления d^2L становится очевидной.

Обычно при нахождении стационарных (критических) точек функции n переменных используется понятие градиента, который определяется как «вектор-столбец», составленный из ее частных производных первого порядка по $x_i, i = 1, \dots n$. Такое определение неудачно по двум причинам: во-первых, не видно о каком именно направленном отрезке (т.е., по определению, векторе) идет здесь речь и, во-вторых, градиент тоже является вектором, определенным в пространстве не более трех измерений. Вместо этого более целесообразно использовать применяемое в технике связи понятие скалярно-матричного дифференцирования и его обобщение – матрично-матричное дифференцирование.

Так, задача об условном экстремуме функции (1) при условиях связи (2) эквивалентна задаче об условном экстремуме функции Лагранжа

$$\Phi(M) = f(M) + \lambda_1 F_1(M) + \lambda_2 F_2(M) + \cdots + \lambda_k F_k(M),$$

(λ_i— произвольные числа) при тех же условиях связи (2), поскольку в точках M, удовлетворяющих уравнениям связи, справедливо равенство Ф(M) $=$ f(M). Имеет место следующая теорема.

Теорема (необходимое условие Лагранжа условного экстремума). Пусть: 1°) функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи (2); 2°) уравнения (2) удовлетворяют в некоторой окрестности точки M_0 условиям теоремы 4 о неявных функциях вида (3).

Тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ такие, что все частные производные первого порядка функции Лагранжа равны нулю в точке M_0.

Из теоремы, что для отыскания точек возможного условного экстремума функции (1) при условиях связи (2) нужно решить систему $m + k$ уравнений

$$\begin{cases} F_i = (x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \ (i = 1,2, \dots, k) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = 0 \ (i = 1,2, \dots, m) \end{cases} \qquad (9)$$

относительно $m + k$ неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Если $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_k^0$ — решение системы (9) (таких решений может быть несколько), то $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ является точкой возможного условного экстремума функции (1) при условиях связи (2). Дальнейшее исследование этой точки связано, как и в методе исключения части переменных, с рассмотрением второго дифференциала $d^2f|M_0'$, функции

$$F(M') = F(x_{k+1}, \dots, x_m) = \Phi\big(\varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_m)\big),$$

где $\Phi = f + \lambda_1^0 F_1 + \lambda_2^0 F_2 + \dots + \lambda_k^0 F_k$.

Его можно вычислить по формуле

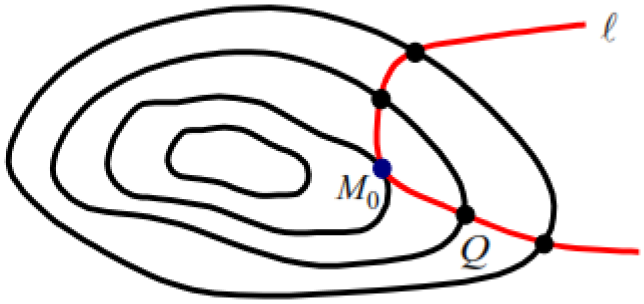
$$d^2F|_{M_0'} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) dx_i dx_j, \qquad (10)$$

где $dx_{k+1}, dx_{k+2}, \dots, dx_m$ - дифференциалы независимых переменных, а $dx_1, dx_2, \dots, dx_k$ - дифференциалы неявных функций (3) в точке M_0'.

Формула (10) показывает, что для нахождения $d^2F|M_0'$ сначала вычисляется второй дифференциал функции Лагранжа в точке M_0, причем так, как если бы все аргументы $x_1, x_2, \dots, x_m$ были независимыми переменными, а затем $dx_1, dx_2, \dots, dx_k$ заменяются дифференциалами неявных функций (3) в точке M_0'.

В результате получается $d^2F|M_0'$ - квадратичная форма от $dx_{k+1}, dx_{k+2}, \dots, dx_m$. Если эта квадратичная форма положительно (отрицательно) определена, то в точке M_0 функция (1) имеет условный минимум (максимум) при условиях связи (2), а если $d^2F|M_0'$ – знакопеременная квадратичная форма, то в точке M_0 функция (1) не имеет условного экстремума [9-16].

Здесь для наглядности иллюстрируем геометрический смысл метода Лагранжа. Рассмотрим линии уровня $f(x,y) = C_1, \dots, f(x,y) = C_k$ функции $z = f(x,y)$ и кривую $\varphi(x,y) = 0$ (кривую l).



ISSN: 2181-3132

Точка Q не является точкой условного экстремума, т.к. в ее окрестности функция принимает значения как больше C_i, так и меньше C_i.

Точка условного экстремума M_0 – точка в которой l касается некоторой линии уровня $f(x, y) = C_m$.

В точке условного экстремума касательная к линии уровня $f(x, y) = C_m$ и к l – общая.

Рассмотрим примеры. Пример 1. Методом исключения части переменных найти экстремум функции

$$u = x + y + z^2 \qquad (11)$$

при условиях связи

$$\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases} \qquad (12)$$

Решение. Решая систему уравнений (12) относительно y и z, находим

$$y = x^2 + x + 1, z = x + 1 . \qquad (13)$$

Подставляя выражения (13) в равенство (11), приходим к функции одной переменной x: $u(x) = 2x^2 + 4x + 2$, для которой рассмотрим задачу о безусловном экстремуме.

Так как $u' = 4(x + 1) = 0$ при $x = -1$, то функция $u(x)$ имеет единственную точку возможного экстремума. Но $u''(-1) = 4 > 0$, поэтому при $x = -1$ функция $u(x)$ имеет минимум.

Из системы (13) находим соответствующие $x = -1$ значения y и z: $y = 1, z = 0$. Итак, функция (11) при условиях связи (12) имеет в точке (-1,1,0) минимум, причем $u(-1,1,0) = 0$.

Пример 2. Методом исключения части переменных найти экстремум функции

$$u = x + y - z \qquad (14)$$

при условиях связи

$$\begin{cases} 4x^3 + 4y^3 + 4z^3 + 12x + 12y + 12z = 13, \\ x + y = 1. \end{cases} \qquad (15)$$

Решение. Воспользуемся схемой метода исключения части переменных, не связанной с нахождением в явном виде каких-либо двух переменных через третью из уравнений связи (15). Предполагая, что система (15) определяет дважды дифференцируемые неявные функции $y(x)$ и $z(x)$, и считая, что они подставлены в уравнения связи, будем рассматривать равенства (15) как систему тождеств. Вычисляя дифференциалы от обеих частей тождеств (15), получим

$$\begin{cases} (x^2+1)dx + (y^2+1)dy + (z^2+1)dz = 0, \\ dx + dy = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} dy = -dx, \\ dz = \frac{-2x+1}{z^2+1}dx. \end{cases} \qquad (16)$$

Подставляя эти выражения для dy и dz в выражение для дифференциала функции (14), которое имеет вид $du = dx + dy - dz$, получим $du = \frac{2x-1}{z^2+1} \equiv Adx$. Рассмотрим теперь систему уравнений, состоящую из уравнений (15) и уравнения А = 0 (это и есть система (8) в данном случае). Она имеет единственное решение $x = ½, y = ½, z = 0$, т.е. $M_0(1/2, 1/2,0)$ - единственная точка возможного экстремума функции (14) при условиях связи (15). Дифференцируя выражение для du, получаем

$$d^2u = \frac{2(z^2+1)dx - (2x-1)2zdz}{(z^2+1)^2}dx.$$

Откуда, используя уравнения (16), находим $d^2u|M_0' = 2(dx)^2$. Так как $2(dx)^2$ - положительно определенная квадратичная форма (одной переменной dx, то функция (14) имеет в точке M_0 минимум при условиях связи (15).

Замечание. Задача решена в предположении, что система (15) определяет дважды дифференцируемые функции $y(x)$и $z(x)$. Теперь можно уточнить, что это условие должно выполняться в некоторой окрестности точки $M_0(1/2, 1/2,0)$.

Покажем, что данное требование выполнено. Функции

$$F_1(x,y,z) = 4x^3 + 4y^3 + 4z^3 + 12x + 12y + 12z - 13$$

и

$$F_2(x,y,z) = x + y - 1$$

дифференцируемы в любой окрестности точки M_0.

Частные производные

ISSN: 2181-3132

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 12(y^2+1), \frac{\partial F_1}{\partial z} = 12(z^2+1), \frac{\partial F_2}{\partial y} = 1, \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0$$

непрерывны в точке M_0.

Функции $F_1(x,y,z)$и $F_2(x,y,z)$ равны нулю в точке M_0. Наконец,

$$\frac{D(F_1F_2)}{D(y,z)}|_{M_0} = -12 \neq 0.$$

Система (15) в некоторой окрестности точки M_0 определяет единственную пару дифференцируемых функций $y(x), z(x)$. Более того, так как функции $F_1(x,y,z)$и $F_2(x,y,z)$дважды дифференцируемы в любой окрестности точки $M_0(1/2,1/2,0)$, то и функции $y(x), z(x)$ дважды дифференцируемы [17-22].

Пример 3. Методом Лагранжа найти экстремум функции (11) при условиях связи (12).

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1)$$

и рассмотрим систему уравнений (9):

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0, \\ F_1 = z - x - 1 = 0, \\ F_2 = y - xz - 1 = 0. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение: $x = -1,\ y = 1,\ z = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = -1,$ т.е. M_0 $(-1,1,0)$ - единственная точка возможного экстремума функции (11) при условиях связи (12).

Отметим, что в окрестности точки M_0 система (12) определяет единственную пару неявных функций $y(x), z(x)$. Хотя в данном случае их легко найти в явном виде, нам эти явные выражения не понадобятся. Предполагая, что в систему (12) подставлено ее решение $y(x), z(x)$, и дифференцируя полученные тождества, приходим к равенствам

$$\begin{cases} dz - dx = 0, \\ dy - xdz - zdx = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим

ISSN: 2181-3132

$$\begin{cases} dz = dx, \\ dy = (x+z)dx = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Теперь вычисляем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2\Phi = 2(dz)^2 - 2\lambda_2 dxdz,$$

и, подставляя $\lambda_2 = -1$ и выражение (18) для dz, получаем положительно определенную квадратичную форму от одной переменной dx: $4(dx)^2$. Отсюда следует, что функция (11) при условиях связи (12) имеет в точке M_0 условный минимум [23-24].

Пример 4. На эллипсоиде $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ найти точку, наиболее удаленную от точки (0,0, 3).

Решение. Расстояние ρ между точками (x, y, z) и (0,0,3) определяется формулой $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2}$. Поэтому исходная задача равносильна задаче об условном максимуме функции

$$u = \rho^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2 \tag{19}$$

при условии связи

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8. \tag{20}$$

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = x^2 + y^2 + (z-3)^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8)$$

и рассмотрим систему уравнений (9):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 2y + 4\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 2z - 6 + 8\lambda z = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8. \end{cases} \tag{21}$$

Так как эллипсоид (20) более всего вытянут вдоль оси Ox, то абсцисса искомой точки не может быть равна нулю, т.е. $x \neq 0$. Поэтому из первого уравнения системы (21) следует, что $\lambda = -1$. Тогда из второго и третьего уравнений системы (21) имеем $y = 0, z = -1$. Наконец, из последнего уравнения системы (21) находим $x = \pm 2$. Итак, функция (19) имеет две точки возможного условного максимума, $M_1(2,0,-1)$ и $M_2(-2,0,-1)$. Предполагая, что

Yosh Tadqiqotchi Jurnali 2nd Sun

в уравнение (20) подставлено его решение $z = z(x, y)$, и дифференцируя полученное тождество, находим

$$xdx + 2ydy + 4zdz = 0,$$

откуда

$$dz = -\frac{x}{4z}dx - \frac{y}{2z}dy. \quad (22)$$

Теперь вычисляем второй дифференциал функции Лагранжа [25-35]

$$d^2\Phi = 2(1+\lambda)(dx)^2 + 2(1+2\lambda)(dy)^2 + 2(1+8\lambda)(dz)^2,$$

и, подставляя $\lambda = -1$, координаты точки M_1 или M_2 и выражение (22) для dz, получаем в каждом случае отрицательно определенную квадратичную форму от двух переменных $dx, dy, -2(dy)^2, -3{,}5(dx)^2$. Отсюда следует, что функция (19) имеет в точках M_1 и M_2 условный максимум при условиях связи (20), т.е. на эллипсоиде (20) имеются две точки, M_1 $(2,0,-1)$ и M_2 $(-2,0,-1)$, наиболее удаленные от точки $(0,0,3)$.

Для выполнение самостоятельно приведем следующие упражнения и задачи.

1. Исследуйте на условный экстремум методом исключения части переменных функцию:

а) $u = 2x^2 + y^3$ при условии связи $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c$;

б) $u = x^3 + y^3$ при условии связи $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} (a > 0)$;

в) $u = \sin(x + y)$ при условии связи $x^2 + y^2 = 1$;

г) $u = x^2 + y^2 + 2z^2$ При условии связи $3x - y + 2z = 5$;

д) $u = x^3 + y^2 - z^3 + 5$ при условии связи $x + y - z = a$;

е) $u = x - 2y + z$ при условии связи $x + y^2 - z^2 = 1$;

ж) $u = xy^2z^3$ при условии связи $x + 2y + 3z = 6, (x > 0, y > 0, z > 0)$;

з) $u = \cos(x - 2y + 2z)$ при условии связи $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

и) $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ при условии связи $x^2 + y^2 + z^2 = 1, (a > b > c > 0)$;

2. Исследуйте на условный экстремум методом Лагранжа:

а) функцию $u = sin(xyz) + cos(x + y + 2z)$, при условии связи $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

б) функцию $u = e^x + sin(xy) + tgz$ при условиях связи $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1$;

3. При каких значениях диаметра основания d и высоты h цилиндрическая банка, объем которой равен 54π, имеет наименьшую поверхность?

4. При каких размерах прямоугольная банка объемом 25 см^3, открытая сверху (т.е. без верхней грани), имеет наименьшую поверхность?

5. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением, поверхность которой равна 10πм^2, имеет наибольшую вместимость?

6. Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема, вписанного в эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

7. Найдите наибольшую площадь треугольника, у которого заданы сторона а и противолежащий угол А;

8. Известны стороны a, b треугольника и величина угла α между ними. Разделите этот треугольник на две равновеликие части отрезком прямой, пересекающим заданные стороны и имеющим наименьшую длину;

Имеется также другой способ нахождения экстремума функции (теоретическая часть этого способа предлагается самостоятельно изучить читателю).

Пример 4. Укажите, что функция

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

достигает своего строгого максимума в точке (0,0).

Решение. Пусть $\delta>0$ $(0<\delta<1)$ и рассмотрим окрестность точки $(0,0)$ $U_\delta((0,0))$. Тогда, для $\forall(x,y)\in U_\delta((0,0))\setminus\{(0,0)\}$

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}<f(0,0)=1.$$

Значить, данная функция достигает своего строгого максимума в точке (0,0).

Пример 5. Исследуйте на экстремум функции

$$f_1(x,y)=x^4+y^4,$$

$$f_2(x,y)=-(x^4+y^4),$$

$$f_3(x,y)=x^3+y^3 \ .$$

Решение. Для этих функций точка $(0,0)$ является стационарной точкой. В этой точке

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0.$$

Тогда функция $f_1(x,y)$ в точке (0,0) достигает своего минимума, а функция $f_2(x,y)$ максимума, а функция $f_3(x,y)$ не достигает экстремума (Теоретическая часть изучить рекомендуется читателю).

Пример 6. Исследовать на экстремум функцию

$$z=x^3+3xy^2-15x-12y=f(x,y).$$

Решение 1. Задачу решим поэтапно. Найдем частные производные и составим систему уравнений:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0, \frac{\partial z}{\partial y}=0; \ \frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y^2-15=0, \frac{\partial z}{\partial y}=6xy-12=0$$

или

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0, \\ xy-2=0. \end{cases}$$

Решая систему, получим четыре стационарные точки

$$P_1(1,2); \quad P_2(2,1); \ P_3(-1,-2); \ P_4(-2,-1).$$

Найдем производные 2-го порядка

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x, \qquad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=6y, \qquad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x$$

и составим дискриминант $\Delta = AC-B^2$ для каждой стационарной точки.

Для точки

$$P_1: \quad A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1}=6, \qquad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_1}=12, \qquad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1}=6,$$

$$\Delta = AC-B^2=36-144<0.$$

Значит, в точке P_1 экстремума нет.

2) Для точки P_2: $A=12, \ B=6, \ C=12; \ \ \Delta = 144-36>0, \ A>0.$

В точке P_2 функция имеет минимум. Минимум этот равен значению функции при $x = 2$, $y = 1, z_{min} = 8 + 6 - 12 - 30 = -28$.

3) Для точки P_3: $A = -6$, $B = -12$, $C = -6$; $\Delta = 36 - 144 < 0$. Значить в этой точке экстремума нет.

4) Для точки

$$P_4: \quad A = -12, \qquad B = -6, \qquad C = -12; \quad \Delta = 144 - 36 > 0, \qquad A < 0.$$

В точке P_4 функция имеет максимум, равный

$$z_{max} = -8 - 6 + 30 + 12 = 28.$$

На наш взгляд, в приведенном решении имеются некоторые методические недостатки:

1) не дан способ решения системы уравнений для нахождения стационарных точек. Эта система уравнений является нелинейной, и не всегда способ решения будет таким же тривиальным;

2) перечислены все стационарные точки, в то время как желательно иметь их общий вид для того, чтобы сократить процесс распознавания экстремума;

3) студентам необходимо помнить формулу для дискриминанта Δ, а также его знак и знаки составляющих его величин при распознавании наличия или характера экстремума. Все это чревато потенциально возможными ошибками. Особенно при отсутствии должного понимания того, что использованные критерии ни что иное, как критерии знакопостоянства (или его отсутствия) для второго дифференциала d^2z согласно формулам (10) при $n = 2$.

В связи с вышеизложенным более предпочтительно, по-видимому, нижеследующее решение, использующее только понятие полного дифференциала.

Решение 2. Находим 1-й и 2-й дифференциалы заданной функции z при любых x и y:

$$dz = 3x^2dx + 3(y^2dx + 2xydy) - 15dx - 12dy$$

$$= dx(3x^2 + 3y^2 - 15) + dy(6xy - 12) = 3(x^2 + y^2 - 5)dx + 6(xy - 2)dy;$$

$$d^2z = 3(2xdx + 2ydy)dx + 6(xdy + ydx)dy = 6xdx^2 + 6xdy^2 + 12ydxdy.$$

$$dz = 3[(x^2 + y^2 - 5)dx + 2(xy - 2)dy];$$

$$d^2z = 6(xdx^2 + xdy^2 + 2ydxdy).$$

Находим стационарные точки из условия $dz = 0$ при всех dx, dy:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2=9, \\ (x-y)^2=1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=3\varepsilon\ (\varepsilon=\pm 1) \\ x-y=\delta\ (\delta=\pm 1) \end{cases} \begin{cases} 2x=3\varepsilon+\delta, \\ 2y=3\varepsilon-\delta, \end{cases}$$

$$x=\frac{3\varepsilon+\delta}{2};\ y=\frac{3\varepsilon-\delta}{2},\ \ \varepsilon=\pm 1, \delta=\pm 1.$$

Придавая всевозможные значения знакам ε и δ, получим все 4 возможные стационарные точки. Возможны два случая:

1) $\varepsilon=\delta$, тогда

$$x=2\delta, y=\delta, d^2z=6(2\delta dx^2+2\delta dy^2+2\delta dxdy)=$$

$$12\delta(dx^2+dy^2+dxdy)=12\delta\left[\left(dx+\frac{1}{2}dy\right)^2+\frac{3}{4}dy^2\right],$$

откуда видно, что при всех dx и dy, не равных одновременно нулю, знак d^2z совпадает со знаком δ, т.е. $\mathrm{sgn}(d^2z)$ $=\delta$, откуда сразу получаем при $\delta=1$

$$sgn(d^2z)=1>0,\ \ x=2,\ \ \ \ y=1,$$

$$z_{min}=f(2,1)=8+6-30-12=-28,$$

а при $\delta\ =-1$

$$sgn(d^2z)\ =-1<0,\ \ \ \ x=-2,\ \ \ \ y=-1,$$

$$z_{max}=f(-2,-1)=-8-6+30+12=28.$$

2) $\varepsilon=-\delta$, тогда

$$x=-\delta, y=-2\delta, d^2z=6(-\delta dx^2-\delta dy^2-4\delta dxdy)=$$

$$=-6\delta(dx^2+dy^2+4dxdy)=-6\delta[(dx+2dy)^2-3dy^2].$$

Отсюда видно, что знак d^2z зависит от соотношения между dx и dy, т.е. экстремума нет.

Пример 6. Найти экстремальные значения функции $z=f(x,y)=xy$ при условии $x+y=a$.

Решение. Составим функцию Лагранжа $L(x,y,\gamma)=xy+\gamma(x+y-a)$.

Имеем

$$dL=xdy+ydx+\gamma(dx+dy)=(y+\gamma)dx+(x+\gamma)y;$$

$$d^2L = dydx + dxdy = 2dxdy,$$

откуда видно, что d^2L при любых dx и dy может менять знак, т.е. не является знакопостоянным, а потому функция Лагранжа не имеет экстремума.

Но экстремум может существовать при наличии условия связи $x + y = a$, дифференцируя которое приходим к связи не только между переменными x и y, но и к связи между их дифференциалами $dx + dy = 0$, т.е. $dy = -dx$. Подставив это соотношение в найденное значение второго дифференциала

$$d^2L = 2dxdy = 2dx(-dx) = -2dx^2,$$

видим, что $d^2L < 0$, т.е. функция Лагранжа имеет максимум, который может быть только в стационарной точке, в которой $dL = 0$ и выполняется условие связи. А так как условие $dL = 0$ должно выполняться при всех dx и dy, то, приравнивая к нулю коэффициенты при dx и dy, получаем систему уравнений для нахождения стационарных значений x, y и γ:

$$\begin{cases} y + \gamma = 0 \\ x + \gamma = 0 \\ x + y = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\gamma \\ x = -\gamma \\ -\gamma - \gamma = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = -\gamma \\ x = -\gamma \\ \gamma = -\dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$z_{max} = f\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

Примечание. Легко видеть, что условие данного примера аналогично условию примера 5 при $a = l$. В последнем с помощью условия связи удалось исключить одну из переменных и свести задачу на вычисление условного экстремума функции двух переменных $z = xy$ к более простой задаче на вычисление безусловного экстремума функции одной переменной $z = x(a - x)$. Но так просто бывает не всегда.

Отметим, что студенты в большинство случаев путают методы вычисления экстремума (локального и глобального). Думаем, что предложенные здесь методические рекомендации по исследованию экстремумов с иллюстрацией, помогает изучение данной темы.

Нахождение экстремумов функции многих переменных имеет многочисленные приложение [25-39]. Кроме того, в работах [40-43] предложены различные интерактивные методы по преподавание математики, которые помогают студентам освоение темы по функциям многих переменных.

Для укрепления темы предлагаем теоретические вопросы и задачи по нахождения условного экстремума.

1.Сформулируйте определение условного экстремума функции;

2. Объясните, в чем состоит метод исключения части переменных. Сведите задачу об условном экстремуме функции $u = x^2 + y^2$ при условии связи $x + y = 2$ к задаче о безусловном экстремуме;

3. Изложите схему метода исключения Части переменных, не связанную с нахождением в явном виде каких-то переменных через остальные;

4. Что такое функции Лагранжа?

5. Сформулируйте теорему о необходимых условиях Лагранжа условного экстремума. Составьте систему уравнений (9) для задачи об условном экстремуме из задания 2 и решите ее.

6. Объясните, как исследовать далее точку возможного условного экстремума, найденную методом Лагранжа. Проведите такое исследование для точки, найденной в задании 5.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES):

1. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче со смещением для линейного уравнения гиперболического типа // Академик Тошмухаммад Ниёзович Кори-Ниёзийнинг хаёти ва ижоди, чет эл олимлари иштирокида илмий-амалий конференция тезислари тўплами, Тошкент, 2017, 84-85 б.

2. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida // Models and methods for increasing the efficiency of innovative research, Germany, 10 (2022), p. 184-186.

3. Rasulov X.R. Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type // Modern problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2021, Fergana, Uzbekistan, p. 149.

4. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. (2022) Ikkita buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptic tenglama uchun chegaraviy masala haqida // Central Asian Academic Journal Of Scientific Research, 2(5), 544-557 b.

5. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.

6. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.

7. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.

8. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

9. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

10. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

11. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.

12. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.

13. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.23-26.

14. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.

15. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.

16. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // «Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения» Международная научная конференция Сборник тезисов Башкортостан РФ (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66.

17. Rasulov X.R. (2020). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // Uzbek Mathematical Journal, №3, pp.117-125.

18. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

19. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.

20. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.

21. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.

22. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.27-30.

23. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.

24. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.

25. Rasulov H. Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // Центр научных публикаций (buxdu. uz) 5:5 (2021).

26. Rasulov Kh.R., Sobirov S.Zh. A problem of the Gellerstedt type for one mixed-type equation with two lines of degeneration // Scientific progress, 2:1 (2021), p. 42-48.

27. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.

28. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа // Ученый XXI века. 53:6-1, 2019. С.16-18.

29. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.

30. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 559-567 бетлар.

31. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с. 19-22.

32. Х.Р Расулов, Ф.М. Джуракулова (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // Scientific progress. 2:1, 455-462 бетлар.

33. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.

34. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

35. Rasulov Kh.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy // Irish Interdisciplinary Journal of Science & Research (IIJSR), 6:2 (2022), p. 8-14.

36. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida // «Zamonaviy ta'lim tizimini rivojlantirish va unga qaratilgan kreativ g'oyalar, takliflar va yechimlar», 35-sonli Respublika ilmiy-amaliy on-line konferensiyasi, 2022, 192-195 b.

37. Расулов Х.Р. Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида // Аниқ фанларни касбга йўналтириб ўқитиш муаммолари ва ечимлари, Республика илмий-амалий конференция материаллари тўплами, 2018, Навоий, 14-15 б.

38. Расулов Х.Р. Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун нолокал масала ҳақида // Аниқ фанларни касбга йўналтириб ўқитиш муаммолари ва ечимлари, Республика илмий-амалий конференция материаллари тўплами, 2018, Навоий, 17-18 б.

39. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

40. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари // Science and Education, scientific journal, 2:9 (2021), p.7-20.

41. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p. 586-595.

42. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим иррационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.596-607.

43. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // Наука, техника и образование, 72:8 (2020) с.29-32.