

## ТРАНСВЕРСАЛ ИЗОТРОП ЖИСМЛАР УЧУН ИККИ ЎЛЧОВЛИ ТЕРМОЭЛАСТИК БОҒЛИҚ МАСАЛАНИ СОНЛИ ЕЧИШ ВА УНИНГ ДАСТУРИЙ ТАЪМИНОТИ

Абдураимов Достонбек Эгамназар ўғли

Гулистон давлат университети катта ўқитувчиси

Нуркулов Жалолиддин Алишер ўғли

Гулистон давлат университети талабаси

<https://doi.org/10.5281/zenodo.6636433>

**Аннотация.** Мақолада трансверсал изотроп жисмлар учун икки ўлчовли термоэластик боғлиқ масалани сонли ечиш усули ва унинг дастурий таъминоти кўрсатилган.

**Калит сўзлар:** Композицион, конструкция, термоэластик, иссиқлик ўтказувчанлик, деформация, математик модел, динамик, тензор, квадрат пластина.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ЗАВИСИМОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ И ЕЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

**Аннотация.** В статье описывается метод численного решения двумерной задачи термоупругости для трансверсально-изотропных тел и его программное обеспечение.

**Ключевые слова:** Состав, конструкция, термоупругая, теплопроводность, деформация, математическая модель, динамика, тензор, квадратная пластина.

## NUMBER SOLUTION OF A TWO-DIMENSIONAL THERMOELASTIC CONNECTION PROBLEM FOR TRANSVERSAL ISOTROPIC BODIES AND ITS SOFTWARE

**Abstract.** The article describes the method of numerical solution of a two-dimensional thermoelastic problem for transversal isotropic bodies and its software.

**Keywords:** Composition, construction, thermoelastic, thermal conductivity, deformation, mathematical model, dynamic, tensor, square plate.

### КИРИШ

Табиатдаги учрайдиган айрим ходисалар ва жараёнлар амалиёт масалаларини ечиш билан боғлиқ бўлган ехтиёж хозирги кунда муҳим ва долзарб мавзулардан бири бўлиб хисобланади. Бу каби жараёнларни математик кўринишида ифодалаш, уни алгебраик, интеграл ёки дифференциал тенглама ёки тенгламалар системаси кўринишига келтириб ечиш мумкин бўлади. Хозирги замонда йирик табиий-илмий ва халқ хўжалиги масалаларини ечишда программа таъминотидан фойдаланиш кенг қўлланилмоқда. Мураккаб жараёнларни ва муаммоларни программа таъминотини яратишни ўрганишда шу объектларнинг математик моделини тузиш ва таҳлил етиш кенг тарқалмоқда.

### ТАДҚИҚОТ МАТЕРИАЛЛАРИ ВА МЕТОДОЛОГИЯСИ

Республикамининг кўпгина ишлаб чиқариш соҳаларида композицион материаллардан фойдаланиш замон талабига айланиб бормоқда. Конструкциялар ва улар элементларининг термоэластик ҳолатларини математик моделлаштириш ва сонли ечимларини аниқлаш долзарб муаммоларидандир. Композитцион материалларни математик моделлаш-тиришда материал бир жинсли ва анизотроп материал билан

алмаштирилади. Термоэластик масалалар қўйилишига қараб боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган чегаравий масалаларга ажралади. Умумий ҳолда боғлиқ масалада қаттиқ жисмнинг ҳаракат тенгламалари иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари билан биргаликда қаралади. [4] Шунини таъкидлаш лозимки температура ва унинг ҳосиласи ҳаракат тенгламасида қатнашади, деформация эса иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасига номалум сифатида қиради. Боғлиқ масалаларни математик моделларини ва уларни сонли ечиш алгоритмларини ўрганиш, олинган сонли натижаларга асосан янгидан-янги композицион материалларни таклиф этиш самолётсозлик, ракетасозлик, машинасозлик, автомобилсозлик, қурилиш, медицина ва ишлаб чиқаришнинг кўплаб бошқа соҳаларида катта фойда келтиради.

### ТАДҚИҚОТ НАТИЖАЛАРИ ВА МУХОКАМА

Куйида трансверсал изотроп жисмлар учун термоэластик масаланинг динамик боғлиқлигининг математик модели ва бу моделни сонли ечиш қаралади. [1] Трансверсал изотроп жисмлар учун боғлиқ динамик масаланинг икки ўлчовли ҳолда ҳаракат тенгламалари куйидагича:

$$C_{1111} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (C_{1122} + C_{1212}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C_{1212} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \beta_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + X_1 = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$C_{1212} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (C_{1212} + C_{2211}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{2222} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \beta_{22} \frac{\partial T}{\partial y} + X_2 = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2)$$

Трансверсал изотроп жисмлар учун иссиқлик тарқалиши тенгламаси:

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} - T \left( \beta_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \beta_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) = 0 \quad (3)$$

(3) бу тенглама учун бошланғич шартлар куйидагича

$$u(x, y, t)|_{t=0} = \varphi_1, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_1, \quad v(x, y, t)|_{t=0} = \varphi_2, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_2, \quad T(x, y, t)|_{t=0} = T_0 \quad (4)$$

ва чегаравий шартлар куйидагича бўлади

$$u(x, y, t)|_{x=0} = u_0; \quad u(x, y, t)|_{x=\ell_1} = \bar{u}_0; \quad u(x, y, t)|_{y=0} = u'_0; \quad u(x, y, t)|_{y=\ell_2} = \bar{u}'_0 \\ v(x, y, t)|_{x=0} = v_0; \quad v(x, y, t)|_{x=\ell_1} = \bar{v}_0; \quad v(x, y, t)|_{y=0} = v'_0; \quad v(x, y, t)|_{y=\ell_2} = \bar{v}'_0 \quad (5)$$

$$T(x, y, t)|_{x=0} = T_1(t); \quad T(x, y, t)|_{x=\ell_1} = T_2(t); \quad T(x, y, t)|_{y=0} = T'_1(t); \quad T(x, y, t)|_{y=\ell_2} = T'_2(t)$$

Бу ерда:  $\sigma_{ij}$  - кучлар тензори,  $X_i$  - хажмий кучлар,  $C_{ijkl}$  - жисмни характерловчи параметрлари,  $\varepsilon_{ij}$  - деформациялар тензори,  $\beta_{ij}$  - хажмий иссиқлик кенгайиши коэффициентлари,  $\delta_{ij}$  - Кронекер симболи, бунда;  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$   $c_\varepsilon$  - доимий температурада иссиқлик сиғим  $\beta_{ij}$  - иссиқлик кенгайиши тензори,  $\lambda_{ij}$  - иссиқлик куюми тензори ва Коши

муносабати,  $\delta$  - температура,  $\rho$  - зичлиги,  $t \geq 0$ ,  $0 \leq x \leq l_1$ ,  $0 \leq y \leq l_2$  да 3 та:  $x = ih_1$ , ( $i = \overline{0, k}$ ),  $y = jh_2$  ( $j = \overline{0, k}$ ),  $t = n\tau$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) параллел тўғри чизиклар оиласини куриб (1) - (3) тенгламаларни турли муносабатларда уларнинг хосилаларига алмаштирамиз.

$$C_{1111} \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h_1^2} + (C_{1122} + C_{1212}) \frac{v_{i+1,j+1}^n - v_{i-1,j+1}^n - v_{i+1,j-1}^n + v_{i-1,j-1}^n}{4h_1h_2} +$$

$$+ C_{1212} \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_2^2} - \beta_{11} \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2h_1} = \rho \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\tau^2}$$

(6)

$$C_{2222} \frac{v_{i,j+1}^n + 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{h_2^2} + (C_{1212} + C_{2211}) \frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j-1}^n + u_{i-1,j-1}^n}{4h_1h_2} +$$

$$+ C_{1212} \frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{h_1^2} - \beta_{22} \frac{T_{i,j-1}^n - T_{i,j+1}^n}{2h_2} = \rho \frac{v_{i,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^n + v_{i,j}^{n-1}}{\tau^2}$$

(7)

$$\lambda_{11} \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{h_1^2} + \lambda_{22} \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{h_2^2} - c_\varepsilon \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\tau} -$$

$$- T_0 \left( \beta_{11} \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^{n-1} + u_{i-1,j}^{n-1}}{4h_1\tau} + \beta_{22} \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1} - v_{i,j+1}^{n-1} + v_{i,j-1}^{n-1}}{4h_2\tau} \right) = 0$$

(8)

Юқоридаги (6)-(7) ва (8) - тенгламалардан  $u_{i,j}^{n+1}$ ,  $v_{i,j}^{n+1}$ ,  $T_{i,j}^{n+1}$  ларни топамиз.

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left( C_{1111} \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h_1^2} + (C_{1122} + C_{1212}) \frac{v_{i+1,j+1}^n - v_{i-1,j+1}^n - v_{i+1,j-1}^n + v_{i-1,j-1}^n}{4h_1h_2} + \right.$$

$$\left. + C_{1212} \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_2^2} - \beta_{11} \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2h_1} \right) + 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}$$

(9)

$$v_{i,j}^{n+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left( C_{2222} \frac{v_{i,j+1}^n + 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{h_2^2} + (C_{1212} + C_{2211}) \frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j-1}^n + u_{i-1,j-1}^n}{4h_1h_2} + \right.$$

$$\left. + C_{1212} \frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{h_1^2} - \beta_{22} \frac{T_{i,j-1}^n - T_{i,j+1}^n}{2h_2} \right) + 2v_{i,j}^n - v_{i,j}^{n-1}$$

(10)

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{\tau}{c_\varepsilon} (\lambda_{11} \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{h_1^2} + \lambda_{22} \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{h_2^2} - T_0 (\beta_{11} \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^{n-1} + u_{i-1,j}^{n-1}}{4h_1\tau} + \beta_{22} \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1} - v_{i,j+1}^{n-1} + v_{i,j-1}^{n-1}}{4h_2\tau})) + T_{i,j}^n$$

(11)

(9)-(11) тенгламалар  $t^{n+1}$  қатламда  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$ ,  $T(x, y, t)$  функцияларнинг қийматларини топишга имкон беради, агар олдинги 2 та қатламнинг қиймати маълум бўлса, 2 та бошланғич қатламлардаги ( $n=0$  à  $n=1$ ) бошланғич шартлардан  $u(x, y, t)$  ва  $v(x, y, t)$  функцияларнинг қийматини топамиз,  $T(x, y, t)$  функциянинг қийматини эса 1-қатламда (11) муносабатдаги аралаш хосилани бошқа муносабатга алмаштириш орқали топамиз.[2]

$$u_{i,j}^1 = \frac{\tau^2}{\rho} (C_{1111} \frac{u_{i+1,j}^0 - 2u_{i,j}^0 + u_{i-1,j}^0}{h_1^2} + (C_{1122} + C_{1212}) \frac{v_{i+1,j+1}^0 - v_{i-1,j+1}^0 - v_{i+1,j-1}^0 + v_{i-1,j-1}^0}{4h_1h_2} + C_{1212} \frac{u_{i,j+1}^0 - 2u_{i,j}^0 + u_{i,j-1}^0}{h_2^2} - \beta_{11} \frac{T_{i+1,j}^0 - T_{i-1,j}^0}{2h_1}) + 2u_{i,j}^0 - u_{i,j}^{-1}$$

(12)

$$v_{i,j}^1 = \frac{\tau^2}{\rho} (C_{2222} \frac{v_{i,j+1}^0 + 2v_{i,j}^0 + v_{i,j-1}^0}{h_2^2} + (C_{1212} + C_{2211}) \frac{u_{i+1,j+1}^0 - u_{i-1,j+1}^0 - u_{i+1,j-1}^0 + u_{i-1,j-1}^0}{4h_1h_2} + C_{1212} \frac{v_{i+1,j}^0 - 2v_{i,j}^0 + v_{i-1,j}^0}{h_1^2} - \beta_{22} \frac{T_{i,j-1}^0 - T_{i,j-1}^0}{2h_2}) + 2v_{i,j}^0 - v_{i,j}^1$$

(13)

$$T_{i,j}^1 = \frac{\tau}{c_\varepsilon} (\lambda_{11} \frac{T_{i+1,j}^0 - 2T_{i,j}^0 + T_{i-1,j}^0}{h_1^2} + \lambda_{22} \frac{T_{i,j+1}^0 - 2T_{i,j}^0 + T_{i,j-1}^0}{h_2^2} - T_0 (\beta_{11} \frac{u_{i+1,j}^1 - u_{i-1,j}^1 - u_{i+1,j}^{-1} + u_{i-1,j}^{-1}}{4h_1\tau} + \beta_{22} \frac{v_{i,j+1}^1 - v_{i,j-1}^1 - v_{i,j+1}^{-1} + v_{i,j-1}^{-1}}{4h_2\tau})) + T_{i,j}^0 \quad (14)$$

6)

тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$a_i u_{i+1,j}^{n+1} + b_i u_{i,j}^{n+1} + c_i u_{i-1,j}^{n+1} = f_i \quad (15)$$

бунда  $a_i = \frac{C_{1111}}{h_1^2}$ ,  $b_i = -2(\frac{C_{1111}}{h_1^2} + \frac{\rho}{\tau^2})$ ,  $c_i = \frac{C_{1111}}{h_1^2}$  ва

$$f_i = \rho \frac{-2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\tau^2} - (C_{1122} + C_{1212}) \frac{v_{i+1,j+1}^n - v_{i-1,j+1}^n - v_{i+1,j-1}^n + v_{i-1,j-1}^n}{4h_1h_2} - C_{1212} \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_2^2} + \beta_{11} \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2h_1}$$

(7)-тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$a_i v_{i+1,j}^{n+1} + b_i v_{i,j}^{n+1} + c_i v_{i-1,j}^{n+1} = f_i \quad (16)$$

Бунда  $a_i = \frac{C_{1111}}{h_1^2}$ ,  $b_i = -2\left(\frac{C_{1111}}{h_1^2} + \frac{\rho}{\tau^2}\right)$ ,  $c_i = \frac{C_{1111}}{h_1^2}$  ва

$$f_i = \rho \frac{2v_{i,j}^n + v_{i,j}^{n-1}}{\tau^2} - (C_{1122} + C_{1212}) \frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j-1}^n + u_{i-1,j-1}^n}{4h_1 h_2} +$$

$$+ C_{1212} \frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{h_2^2} + \beta_{22} \frac{T_{i,j-1}^n - T_{i,j-1}^n}{2h_1}$$

(8)-тенгламани эса қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$a_i T_{i+1,j}^{n+1} + b_i T_{i,j}^{n+1} + c_i T_{i-1,j}^{n+1} = f_i \quad (17)$$

Бунда  $a_i = \frac{\lambda_0}{h_1^2}$ ,  $b_i = -\frac{2\lambda_0}{h_1^2} - \frac{C_\varepsilon}{\tau}$ ,  $c_i = \frac{\lambda_0}{h_1^2}$  ва

$$f_i = \lambda_{22} \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{h_2^2} - \lambda_{11} \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{h_1^2} - T_0 \left( \beta_{11} \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^{n-1} + u_{i-1,j}^{n-1}}{4h_1 \tau} + \right.$$

$$\left. + \beta_{22} \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1} - v_{i,j+1}^{n-1} + v_{i,j-1}^{n-1}}{4h_2 \tau} \right) - C_\varepsilon \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\tau}$$

(15)-тенгламани  $u(x, y, t)|_{x=\ell_1} = u_0$ ,  $u(x, y, t)|_{x=\ell_1} = \bar{u}_0$ , чегаравий шартлар билан, (16)-тенгламани  $v(x, y, t)|_{x=0} = v_0$ ,  $v(x, y, t)|_{x=\ell_1} = \bar{v}_0$  чегаравий шартлар билан (17)-тенгламани  $T(x, y, t)|_{x=0} = T_1(t)$ ,  $T(x, y, t)|_{x=0} = T_2(t)$  чегаравий шартлар билан бирга, тўрлар методи билан ечилган.

Тест масаласи, киритилувчи константалар: **Lyambda11**, **Lyambda22** - Иссиқлик куюми тензорлари; **Betta11**, **Betta22** - Биринчи ва иккинчи ҳаракат тенгламасидаги ҳажмий иссиқлик кенгайиши коэффициентлари; **C1111**, **C1122**, **C1212**, **C2222** - жисмни характерловчи параметрлари; **Ro** – жисм зичлиги; **C<sub>ε</sub>** – доимий температурадаги иссиқлик сифими; **T<sub>0</sub>** – жисмга қўйиладиган температураси; **h<sub>1</sub>** - X ўқи бўйича тугун нуқталар орасидаги баландлик. **h<sub>2</sub>** - Y ўқи бўйича тугун нуқталар орасидаги баландлик; **tao** - Қаламларнинг вақт оралиғи; **n** - қадамлар сони.

**Lyambda11 - 0.5, Lyambda22 - 0.3, Betta11 - 0.05, Betta22 – 0.09, C1111 – 0.75, C1122 – 0.91, C1212 – 0.9, C2222 – 0.89, Ro – 1.1, C<sub>ε</sub> – 3.4, T<sub>0</sub> – 5, h<sub>1</sub> – 0.1, h<sub>2</sub> – 0.1, tao – 0.01, n – 10. [3]**

#### ХУЛОСА

Хулоса қилиб айтганда амалиётда учрайдиган кўплаб масалаларни математик моделлари термоэластик ёки термопластик боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган масалаларни ўрганишга келтирилади. Келгуси мақолаларимизда боғлиқ масалаларга қўшимча ташқи таъсирлар орқали унинг ҳолатини ўзгаришини, уларни сонли ечиш усуллариини ўрганиш ва бу масалаларнинг дастурий таъминотини яратиш билан давом эттираимиз.

#### Фойдаланилган адабиётлар

1. Биргер И.А. Теория пластического течения в неизотермических нагружениях // Изв. АН СССР, Механика, -1964. -№ 3. -С.78-83.

2. Биргер И.А Демьянушко И.В. Теория пластичности при неизотермических нагружениях // Инж. Жур. МТТ. -1968. - № 6.
3. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. -М.: Мир, 1970. -256 с.
4. Каландаров А.А., Адамбаев У., Худазаров Р.С. Связанные и несвязанные задачи термо-упруго-пластичности // Вестник НУУз, мех-мат серия.-2010.-№3.-С.92-95.
5. Халджигитов А.А., Каландаров А.А., Абдураимов Д.Э. “Инновацион ва замонавий ахборот технологияларини таълим, фан ва бошқарув соҳаларида қўллаш истиқболлари” мавзусидаги халқаро илмий – амалий онлайн конференцияси материаллари. 2020 йил 14-15 май, 548-551 бетлар.
6. Глушаков С.В., Ковал А.В., Смирнов С.В. Язык программирование С++: Учебный курс // Харьков: Фолио; М.: ООО «Издательство АСТ», 2001.- 500 с.
7. Култин Н.Б. С++ Builder в задачах и примерах.-СП б.: БХВ-Петербург, 2005.-336 с.