Involta Ilmiy Jurnali Vol. 1 No.6 (2022)

“Involta” Ilmiy Jurnali

Vebsayt: https://involta.uz/

УДК 511.1

НАТУРАЛ СОНЛАР ДАРАЖАЛАРИ ЙИҒИНДИСИНИ ТОПИШ

Умаров Хабибулло Рахматуллаевич

Қўшмурадов Лазизжон Жумабой ўғли

Гулистон давлат университети

e-mail: umarovhr@mail.ru

Аннотация. Ушбу мақола натурал сонлар даражалари йиғиндисини топиш масаласига, яъни қуйидаги кўринишдаги йиғиндини топишга бағишланган:

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k.$$

Ушбу иш математикани ўрганишни бовловчиларга-биринчи курс талабаларига ва ўрта мактабнинг юқори синф ўқувчиларига мўлжалланган. Бундай ўқувчиларни натурал сонлар даражалари йиғиндисини топиш масаласи қизиқтириши, табиийдир.

Мақолада натурал сонлар даражалари йиғиндисининг асосий формулалари турли исботлари билан келтирилган.

Калит сўзлар: натурал сонлар даражалари йиғиндиси, математик индукция методи, рекуррент формула, детерминант, ҳинд усули, геометрик усул, Люка, Пифагор жадвали

Summary. The present paper is devoted to the question of summing the powers of the numbers of a natural number, i.e. the question of finding the sum of the form:

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k.$$

The work is focused on a beginning mathematician-student of the first year and a student of the upper secondary school. Such a reader can naturally be interested in the question of summing up the degrees of the numbers of a natural number adjacent to the material directly stated in schools.

The paper given the basic formulas for sums of powers of a natural numbers with various proofs.

Keywords: summation of powers of natural numbers, method of mathematical induction, recurrence formula, determinant, Hindu summation method, geometric method, Lucas, multiplication table of Pythagoras.

Аннотация. Настоящая работа посвящена вопроса о суммировании степеней чисел натурального ряда, т.е. вопросу о нахождении суммы вида:

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k.$$

Работа ориентируется на начинающего математика-студента первых курсов и ученика старших классов средней школы. Такой читатель естественно может заинтересоваться вопросом о суммировании степеней чисел натурального ряда, примыкающим к непосредственно излагаемому в школах материалу.

В работе приводятся основные формулы для сумм степеней чисел натурального ряда с различными доказательствами.

Ключевые слова: суммирование степеней натурального чисел, метод математической индукции, рекуррентная формула, детерминант, индусский

способ суммирования, геометрический способ, Люка, таблица умножения Пифагора.

Кириш

Одатда, математиканинг кўпгина масалалари натурал сонлар даражалари йиғиндисини топиш масаласи, яъни қуйидаги

$$1^k+2^k+3^k+...+n^k,\quad k\in N \qquad (I)$$

кўринишдаги йиғиндиларни ҳисоблаш масаласи боғлиқдир. Ушбу ишда натурал сонлар даражалари йиғиндисини топиш масаласи билан шуғулланамиз.

Натурал сонларнинг $k-$даражали йиғиндисини S_k орқали белгилаймиз, яъни

$$S_k=1^k+2^k+3^k+...+n^k.$$

Дастлаб биринчи, иккинчи ва учинчи даражали йиғиндиларни ҳисоблашнинг элементар методларини келтирамиз. Кейин эса (I) йиғиндини ҳисоблашнинг рекуррент формуласи, яъни S_0, S_1, S_2, ..., S_{k-1} қийматлар маълум бўлган ҳолда S_k ни ҳисоблаш формуласини, ва шунингдек, (I) йиғиндининг умумий детерминант орқали ифодасини келтириб чиқарамиз.

Тадқиқотнинг мақсади. Амалиётда (I) кўринишдаги йиғиндилар учун тайёр формулалар мавжуд бўлиб, одатда уларнинг тўғри эканлиги (кўпинча) математик индукция усули билан исботланади (Саъдуллаев., Мансуров, 1993). Қуйида биз бу каби тенгликларнинг айримларини келтириб чиқариш билан шуғулланамиз.

Тадқиқот объекти ва қўлланилган методлар

Натурал сонлар қаторининг дастлабки n тасининг даражалари йиғиндиси ва бу каби йиғиндига олиб келинувчи амалий масалалар тадқиқот объекти бўлиб ҳисобланади.

Қуйида (I) кўринишдаги йиғиндини ҳисоблашнинг ҳиндлар томонидан қайд қилинган ва француз математиги Люка (Lucas) томонидан такомиллаштирилган ихчам геометрик методи баён қилинади.

Ушбу методнинг моҳияти шундан иборатки, сонларни квадрат шаклидаги жадвалга жойлаштириб, бу сонларни икки хил усулда гуруҳлаб, йиғиб чиқилади ва ҳосил бўлган бу икки натижани бир-бирига тенглаштирилади. Худди шундай, турли даражали йиғиндилар орасидаги ажойиб боғланишларни ҳосил қилинади. Келгусида бу усулни умумлаштириш, квадрат жадвални кубик жадвал билан алмаштириш мумкин.

Олинган натижалар ва уларнинг таҳлили

1. Дастлабки n та натурал сонлар йиғиндиси. Бизга дастлабки n та натурал сонлар йиғиндисини топиш масаласи қўйилган бўлсин. Бу йиғиндини S_1 орқали белгилаймиз. У ҳолда:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n. \qquad (1)$$

Бу йиғиндини қўшилувчиларга нисбатан тескари тартибда ёзамиз, яъни

$$S_1 = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1. \qquad (2)$$

(1) ва (2) ифодаларни ҳадма-ҳад қўшамиз:

$$2S_1 = [1+n] + [2+(n-1)] + [3+(n-2)] + \ldots + [(n-1)+2] + [n+1]. \qquad (3)$$

Квадрат қавс ичидаги ифода $n+1$ га тенг ва бундай қавслар сони n та. Демак, (3) ифода $(n+1)n$ га тенг экан. Ёки

$$S_1 = \frac{(n+1)n}{2}. \qquad (4)$$

2. Дастлабки n та натурал сонлар квадратлари йиғиндиси. Бизга дастлабки n та натурал сонлар квадратлари йиғиндисини топиш масаласи қўйилган бўлсин:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2.$$

Бу йиғиндини S_2 орқали белгилаймиз. У ҳолда:

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2.$$

Элементар алгебра курсидан маълум бўлган икки ҳад йиғинди кубининг ёйилмаси формуласини ёзамиз:

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1. \qquad (1)$$

Юқоридаги (1) ифодада x ўзгарувчига кетма-кет $1,\ 2,\ 3,\ ...,n-1,n$ қийматларни бериб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$2^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1^1 + 1,$$

$$3^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2^1 + 1,$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$n^3 = (n-1)^3 + 3\cdot(n-1)^2 + 3\cdot(n-1) + 1$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1.$$

Бу тенгликларни ҳадлаб қўшсак, ушбу

$$\underline{2^3 + 3^3 + ... + n^3} + (n+1)^3 = 1^3 + \underline{2^3 + 3^3 + ... + n^3} +$$

$$+ 3\cdot\left(1^2 + 2^2 + ... + n^2\right) + 3\cdot(1 + 2 + ... + n) + n$$

тенглик ҳосил бўлади. Остига чизилган ҳадларни ихчамлаштириб ва ушбу S_2, S_1 белгилашлар киритсак, у ҳолда

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n$$

формулага эга бўламиз. $S_1 = \frac{1}{2}n(n+1)$ алмаштиришни бажариб, баъзи соддалаштиришларда сўнг, ушбу

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

формулага эга бўламиз.

Масалан, $n = 10$ учун

$$S_2 = \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 385.$$

Демак,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 = 385.$$

Ҳосил бўлган (5) формуладан арифметик характердаги ушбу қизиқарли тасдиқни ҳосил қиламиз: ихтиёрий n натурал сонларда $n(n+1)(2n+1)$ ифода 6 га қолдиқсиз бўлинади.

3. Дастлабки n та натурал сонлар кублари йиғиндиси. Бизга дастлабки n та натурал сонлар кублари йиғиндисини топиш масаласи қўйилган бўлсин:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-2)^3+(n-1)^3+n^3.$$

Бу йиғиндини S_3 орқали белгилаймиз. У ҳолда:

$$S_3=1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-2)^3+(n-1)^3+n^3.$$

Элементар алгебра курсидан маълум бўлган ушбу формулани ёзамиз:

$$(x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1. \qquad (1)$$

Юқоридаги (1) ифодада x ўзгарувчига кетма-кет $1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ ,n-1,n$ қийматларни бериб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$2^4=1^4+4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1,$$

$$3^4=2^4+4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1,$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1.$$

Бу тенгликларни ҳадлаб қўшсак, ушбу

$$\underline{2^4+3^4+\ldots+n^4}+(n+1)^4=1^4+\underline{2^4+3^4+\ldots+n^4}+$$

$$+4\cdot\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)+6\cdot\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)+4\cdot(1+2+\ldots+n)+n$$

тенглик ҳосил бўлади. Остига чизилган ҳадларни ихчамлаштириб ва ушбу S_3, S_2, S_1 белгилашлар киритсак, у ҳолда

$$(n+1)^4=n+1+4S_3+6S_2+4S_1$$

формулага эга бўламиз. Қуйидаги

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

алмаштиришларни бажариб, баъзи соддалаштиришлардан сўнг, ушбу

$$S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

формулага эга бўламиз.

Агар $n(n+1)/2 = S_1$ эканини инобатга олсак,

$$S_3 = S_1^{\,2}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Демак, дастлабки n та натурал сонлар кубларининг йиғиндиси дастлабки n та натурал сонлар йиғиндисининг квадратига тенг экан.

Қаралган усулдан натурал сонларнинг тўртинчи, бешинчи ва ҳ.к. даражали йиғиндиларини топишда фойдаланиш мумкин. Бироқ, биз шу билан тўхтаб, умумий ҳолга, яъни, қуйидаги

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k, \quad k \in N$$

йиғиндиларни ҳисоблаш масаласига ўтамиз.

4. Натурал сонлар даражалари йиғиндисининг детерминант орқали ифодаси. Ушбу бандда натурал сонлар даражалари йиғиндисини топиш масаласининг умумий ҳолига, яъни қуйидаги

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k, \quad k \in N \qquad (1)$$

кўринишдаги йиғиндиларни ҳисоблаш масаласининг баёнига бағишланади.

(1) кўринишдаги йиғиндиларни ҳисоблаш учун Ньютон биноми формуласидан фойдаланамиз (G‘aymnazarov, Gaimnazarov, 2014):

$$(x+1)^{k+1} = x^{k+1} + C_{k+1}^1 x^k + C_{k+1}^2 x^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^{k-1} x^2 + C_{k+1}^k x + 1. \qquad (2)$$

Юқоридаги (2) ифодада x ўзгарувчига кетма-кет $1, 2, 3, \ldots, n$ қийматларни бериб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$2^{k+1} = 1^{k+1} + C_{k+1}^1 \cdot 1^k + C_{k+1}^2 \cdot 1^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^{k-1} \cdot 1^2 + C_{k+1}^k \cdot 1 + 1,$$

$$3^{k+1} = 2^{k+1} + C_{k+1}^1 \cdot 2^k + C_{k+1}^2 \cdot 2^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^{k-1} \cdot 2^2 + C_{k+1}^k \cdot 2 + 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + C_{k+1}^1 \cdot n^k + C_{k+1}^2 \cdot n^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^{k-1} \cdot n^2 + C_{k+1}^k \cdot n + 1.$$

Бу тенгликларни ҳадлаб қўшсак, ушбу

$$\underline{2^{k+1}+3^{k+1}+\ldots+n^{k+1}}+(n+1)^{k+1}=1^{k+1}+\underline{2^{k+1}+3^{k+1}+\ldots+n^{k+1}}+$$
$$+C_{k+1}^{1}\cdot\left(1^{k}+2^{k}+\ldots+n^{k}\right)+C_{k+1}^{2}\cdot\left(1^{k-1}+2^{k-1}+\ldots+n^{k-1}\right)+\ldots+$$
$$+C_{k+1}^{k-1}\cdot\left(1^{2}+2^{2}+\ldots+n^{2}\right)+C_{k+1}^{k}\cdot(1+2+\ldots+n)+n$$

тенглик ҳосил бўлади. Остига чизилган ҳадларни ихчамлаштириб ва ушбу

$$S_k,\ S_{k-1},\ S_{k-2},\ .\ .\ .\ .\ ,\ S_2,\ S_1,\ \ S_0=n$$

белгилашлар киритсак, у ҳолда

$$(n+1)^{k+1}=1+C_{k+1}^{1}S_k+C_{k+1}^{2}S_{k-1}+\ldots+C_{k+1}^{k-1}S_2+C_{k+1}^{k}S_1+S_0$$

ёки

$$C_{k+1}^{1}S_k+C_{k+1}^{2}S_{k-1}+\ldots+C_{k+1}^{k-1}S_2+C_{k+1}^{k}S_1+S_0=(n+1)^{k+1}-1 \qquad (3)$$

формулага эга бўламиз.

(3) формула рекурсия ёки рекуррент формула деб аталади. Бу формула ёрдамида биз, аввалдан $S_0,\ S_1,\ S_2,\ .\ .\ .\ ,\ S_{k-2},\ S_{k-1}$ йиғиндиларни билган ҳолда, S_k йиғиндини ҳисоблашимиз мумкин.

Юқоридаги (3) рекуррент формула бизга бевосита S_k йиғиндини детерминант орқали ифодалаш имконини беради. Бунинг учун (3) формулани k нинг

$$k,\ k-1,\ k-2,\ k-3,\ \ldots,\ 2,\ 1,\ 0$$

қийматлари учун ёзамиз ва ушбу тенгламаларга эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned}
C_{k+1}^{1}S_k+C_{k+1}^{2}S_{k-1}+C_{k+1}^{3}S_{k-2}+\ldots+C_{k+1}^{k}S_1+S_0&=(n+1)^{k+1}-1,\\
C_{k}^{1}S_{k-1}+C_{k}^{2}S_{k-2}+\ldots+C_{k}^{k-1}S_1+S_0&=(n+1)^{k}-1,\\
C_{k-1}^{1}S_{k-2}+\ldots+C_{k-1}^{k-2}S_1+S_0&=(n+1)^{k-1}-1,\\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
C_{2}^{1}S_1+S_0&=(n+1)^{2}-1,\\
S_0&=(n+1)-1.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

(4) система $k+1$ та

$$S_k,\ S_{k-1},\ S_{k-2},\ \ldots\ ,\ S_2,\ S_1,\ S_0$$

номаълумли $k+1$ та чизиқли тенгламалар системасини ифодалайди. Чизиқли тенгламалар системаси ечими учун Крамер қоидасидан фойдаланиб, қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:

$$S_k = \frac{\begin{vmatrix} (n+1)^{k+1}-1 & C_{k+1}^2 & C_{k+1}^3 & \ldots & C_{k+1}^k & 1 \\ (n+1)^k-1 & C_k^1 & C_k^2 & \ldots & C_k^{k-1} & 1 \\ (n+1)^{k-1}-1 & 0 & C_{k-1}^1 & \ldots & C_{k-1}^{k-2} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n+1)^2-1 & 0 & 0 & \ldots & C_2^1 & 1 \\ (n+1)-1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{k+1}^1 & C_{k+1}^2 & C_{k+1}^3 & \ldots & C_{k+1}^k & 1 \\ 0 & C_k^1 & C_k^2 & \ldots & C_k^{k-1} & 1 \\ 0 & 0 & C_{k-1}^1 & \ldots & C_{k-1}^{k-2} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & C_2^1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}} \qquad (5)$$

Маълумки,

1) агар каср суратидаги детерминантнинг биринчи устун элементларига охирги устун элементларини қўшсак, у ҳолда детерминант ўз қийматини сақлайди;

2) каср махражидаги детерминантнинг бош диагоналдан бир томонда турган барча элементлари нолга тенг, унда детерминант қиймати бош диагоналда турган элементлар кўпайтмасига тенг бўлади. Бош диагоналда турган элементлар, мос равишда

$$C_{k+1}^1 = k+1,\ C_k^1 = k,\ C_{k-1}^1 = k-1,\ \ldots,\ C_2^1 = 2,\ 1$$

га ва уларнинг кўпайтмаси эса

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k\cdot(k+1) = (k+1)!$$

га тенг.

Охирги алмаштиришлардан сўнг (5) формула ушбу кўринишга келади:

$$S_k = \frac{1}{(k+1)!}\cdot \begin{vmatrix} (n+1)^{k+1} & C_{k+1}^2 & C_{k+1}^3 & \ldots & C_{k+1}^k & 1 \\ (n+1)^k & C_k^1 & C_k^2 & \ldots & C_k^{k-1} & 1 \\ (n+1)^{k-1} & 0 & C_{k-1}^1 & \ldots & C_{k-1}^{k-2} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n+1)^2 & 0 & 0 & \ldots & C_2^1 & 1 \\ (n+1) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Бу эса S_k йиғиндининг детерминант орқали ифодаланишидир.

Мисол. S_2 ни ҳисоблаймиз. $k=2$;

$$S_2=\frac{1}{3!}\cdot\begin{vmatrix}(n+1)^3 & C_3^2 & 1\\ (n+1)^2 & C_2^1 & 1\\ (n+1) & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{n+1}{3!}\cdot\begin{vmatrix}(n+1)^2 & 3 & 1\\ n+1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

Детерминантнинг биринчи сатридан иккинчи сатрини, иккинчи сатридан учунчи сатрини айирамиз:

$$S_2=\frac{n+1}{3!}\cdot\begin{vmatrix}n^2+n & 1 & 0\\ n & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{n+1}{3!}\cdot\begin{vmatrix}n(n+1) & 1\\ n & 2\end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{3!}\cdot\begin{vmatrix}n+1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{n(n+1)}{3!}\cdot(2n+2-1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}.$$

Демак,

$$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}.$$

5. Натурал сонлар даражалари йиғиндисини топишнинг ҳинд усули. Бу бўлимда

$$S_k=1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k,\quad k\in N$$

кўринишдаги йиғиндини ҳисоблашнинг ҳиндлар томонидан қайд қилинган ва француз математиги Люка (Lucas) томонидан такомиллаштирилган ихчам геометрик усулни баён қиламиз.

Қуйида, биз фақат квадрат жадвалдан фойдаланиб, юқори бўлмаган даражали йиғиндиларни келтирамиз.

***a*). Дастлабки n та тоқ сонлар йиғиндиси.** n та сатр ва n та устундан тузилган, бирлардан иборат бўлган квадрат жадвални оламиз (1-чизма). Бирларни чизмада кўрсатилган тартибда гуруҳлаб, йиғиб чиқамиз. Биринчи гуруҳ 1 ни, иккинчи гуруҳ 3 ни, яъни $2\cdot 2-1$ ни, учинчи гуруҳ 5 ни, яъни $2\cdot 3-1$ ни, тўртинчи гуруҳ 7 ни, яъни $2\cdot 4-1$ ни, ва ҳ.к., n чи гуруҳ $2n-1$ ни беради. Демак, жадвалдаги барча бирларнинг йиғиндиси

$$1+3+5+7+9+\ldots+(2n-1)\qquad(1)$$

га тенг экан. Иккинчидан, жадвалдаги ҳар бир сатрда n та бир ва ҳар бир устунда n та бир мавжуд, унда жадвалдаги барча бирларнинг йиғиндиси $n \cdot n = n^2$ тенг.

Шундай қилиб, ушбу тенгликка эга бўлдик:

$$1+3+5+7+9+\ldots+(2n-1)=n^2. \qquad (2)$$

Демак, биз "Дастлабки n та тоқ сонлар йиғиндиси n^2 га тенг экан", деган хулосани ҳосил қиламиз.

***b*). Дастлабки n та натурал сонлар квадратларининг йиғиндиси.** Худди юқоридаги каби n та сатр ва n та устундан тузилган, биринчи сатри бирлардан, иккинчи сатри иккилардан, учунчи сатри учлардан ва ҳ.к., иборат бўлган квадрат жадвални оламиз (2-чизма).

m чи гуруҳнинг устунидаги сонлар йиғиндиси ҳисоблаймиз. Бу йиғинди

$$m \cdot m = m^2$$

га тенг.

m чи гуруҳнинг сатридаги охирги сондан ташқари (бу сон m чи гуруҳнинг устунидаги сон сифатида олдинги йиғиндига олинган) барча сонларнинг йиғиндиси

$$1+2+3+\ldots+(m-1)$$

га тенг. У ҳолда m чи гуруҳдаги сонлар йиғиндиси

$$[1+2+3+\ldots+(m-1)]+m^2=\frac{m(m-1)}{2}+m^2=\frac{3}{2}m^2-\frac{1}{2}m$$

га тенг. Жадвалда жами n та гуруҳ мавжудлигидан, барча гуруҳдаги сонлар йиғиндиси қуйидагига тенг бўлади:

$$\frac{3}{2}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-\frac{1}{2}(1+2+3+\ldots+n)=\frac{3}{2}S_2-\frac{1}{2}S_1. \qquad (3)$$

Иккинчи томондан, жадвалнинг ҳар бир сатридаги сонлар йиғиндиси

$$1+2+3+\ldots+n$$

га, жами n сатр мавжудлигидан, жадвалнинг барча сонлар йиғиндиси эса

$$(1+2+3+\ldots+n)\cdot n = S_1 \cdot n \qquad (4)$$

га тенглиги келиб чиқади.

(3) ва (4) ифодаларни тенглаштириб,

$$3\cdot S_2=(2n+1)\cdot S_1$$

муносабатни ҳосил қиламиз. $S_1=\frac{n(n+1)}{2}$ эканлигидан,

$$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

***c*). Дастлабки *n* та натурал сонлар кубларининг йиғиндиси.** Бу йиғиндини ҳосил қилиш учун аввалги бандда келтирилган жадвалдаги сонларни квадратга оширамиз. Натижада 3-чизмада тасвирланган квадрат жадвални ҳосил қиламиз.

Жадвалдаги сонларни чизмадагидек қилиб гуруҳлаймиз. Унда m чи гуруҳнинг устунидаги сонлар йиғиндиси

$$m^2\cdot m=m^3$$

га тенг. Шу m чи гуруҳнинг сатрида турган дастлабки, $(m-1)$ та соннинг йиғиндиси қуйидагига тенг:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(m-1)^2.$$

Демак, m чи гуруҳдаги барча сонлар йиғиндиси

$$m^3+\left[1^2+2^2+3^2+\ldots+(m-1)^2\right]=m^3+\frac{(m-1)m(2m-1)}{6}=\frac{4}{3}m^3-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{6}m.$$

га тенг.

Жадвалдаги барча сонларнинг йиғиндиси топиш учун, юқоридаги ифодада m га $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$ қийматларни бериб, ҳосил бўлган ифодаларни йиғиб чиқамиз. Натижада қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$\frac{4}{3}\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right)-\frac{1}{2}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)+\frac{1}{6}(1+2+3+\ldots+n)=$$

$$=\frac{4}{3}S_3-\frac{1}{2}S_2+\frac{1}{6}S_1. \qquad (5)$$

Жадвалда жами n сатр мавжудлигидан ва ҳар бир сатрдаги сонлар йиғиндиси

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2$$

га тенглигидан, жадвалдаги барча сонлар йиғиндиси

$$\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right)n=S_2\cdot n \qquad (6)$$

га тенглиги келиб чиқади.

(5) ва (6) ифодаларни тенглаштириб,

$$\frac{4}{3}S_3=\left(n+\frac{1}{2}\right)S_2-\frac{1}{6}S_1$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бу ифодада S_1 ва S_2 ларни, уларнинг қийматлари билан алмаштириб, маълум соддалаштиришлардан сўнг ушбу

$$S_3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad (7)$$

ёки

$$S_3=S_1{}^2$$

тенгликка эга бўламиз.

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

1 – чизма.

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

2 – чизма.

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2

3 – чизма.

Хулоса

Ушбу иш натурал сонлар даражалари йиғиндисини топиш масаласининг умумий ҳолига, яъни қуйидаги

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k, \quad k \in N$$

кўринишдаги йиғиндиларни ҳисоблаш масаласининг баёнига бағишланган.

Ишда бундай йиғиндиларни ҳисоблашга қулай бўлган формула кўрсатилди. Шунингдек, бундай йиғиндиларни ҳисоблашнинг ихчам геометрик усули батафсил баён қилинди.

Адабиётлар руйхати

1. Azlarov T., Mansurov H. Matematik analiz asoslari. Toshkent, 2005. 378 б.

2. Саъдуллаев А., Мансуров Ҳ., Худойберганов Г., Ворисов А., Ғуломов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, 1 том, Тошкент. 1993. 318 б.

3. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. Москва, 2006. 400 с.

4. Ягудаев Б.Я. Сонли функциялар.Тошкент, 1978. 100 б.

5. G‘aymnazarov G., Gaimnazarov O.G., Kombinatorika va uning tatbiqlari, Toshkent, 2014. 86 б.