Involta Ilmiy Jurnali Vol. 1 No.6 (2022)

“Involta” Ilmiy Jurnali

Vebsayt: https://involta.uz/

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Эшкуватов Юсуф

Магистр 2-курса, Джизакский государственный педагогический институт

Абдиева Малика

Студентка 3-курса, Джизакский филиал Национального университета Узбекистана

Аннотация: в статье рассмотрены спектральные методы моделирования решении линейных дифференциальных уравнений дробного порядка.

Ключевые слова: спектральный метод, моделирование решении, дифференциальное уравнение, дробный порядок.

SPECTRAL METHOD FOR SIMULATION OF SOLUTIONS TO LINEAR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Eshkuvatov Yusuf

Master 2 course, Jizzakh State Pedagogical Institute

Abdieva Malika

3rd year student, Jizzakh branch of the National University of Uzbekistan

Abstract: the article considers spectral methods for modeling the solution of linear differential equations of fractional order.

Keywords: spectral method, solution modeling, differential equation, fractional order.

KESIRLI TARTIBNING CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARINI YECHISHNING SPEKTRAL USULI

Eshkuvatov Yusuf

Magistr 2-kurs, Jizzax davlat pedagogika instituti

Abdiyeva Malika

3-kurs talabasi, O'zbekiston milliy universiteti Jizzax filiali

Annotatsiya: maqolada fraksiyonel tartibning chiziqli differensial tenglamalarini echish uchun spektral modellashtirish usullari ko'rib chiqiladi.

Kalit so'zlar: spektral usul, modellashtirish eritmasi, differensial tenglama, Kesirli tartib.

В работе предлагается спектральный метод моделирования решений линейных стохастических дифференциальных уравнений дробного порядка

$$ {}^{*}\mathcal{D}^{\mu}_{0+}x(t) = a(t)x(t) + b(t) + \big(c(t)x(t) + d(t)\big)v(t), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

Где $t \in [0, T]$, ${}^{*}\mathcal{D}^{\mu}_{0+}$ — оператор дробного дифференцирования Капуто;

a(t), b(t), c(t) и d(t) — заданные функции;

v(t) — стандартный гауссовский белый шум;

x_0 — случайная величина с конечным вторым моментом.

Под решением этого уравнения будем понимать случайный процесс x(t), удовлетворяющий интегральному соотношению (уравнению Ито–Вольтерра)

$$x(t)=x_0+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^t(t-\tau)^{\mu-1}\big(a(\tau)x(\tau)+b(\tau)\big)d\tau+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^t(t-\tau)^{\mu-1}\big(c(\tau)x(\tau)+d(\tau)\big)\circ dw(\tau),$$

в котором второй интеграл понимается в смысле Стратоновича, w(t) — стандартный винеровский процесс, $\Gamma(\mu)$ — гамма-функция. При $\mu = 1$ уравнение (1) — это линейное стохастическое дифференциальное уравнение, записанное в форме Ланжевена.

В одном из частных случаев, а именно при $a(t) = b(t) = c(t) = 0$ и $d(t) = 1$, его решением является процесс Римана–Лиувилля [3, 4]. Отметим, что он отличается от дробного броуновского движения, введенного в [5], однако также может применяться при описании реальных процессов.

Предлагаемый подход рассматривается как альтернатива численным методам моделирования решений заданного уравнения. Он позволяет отказаться от дискретизации по времени, получить непрерывную аппроксимацию случайного процесса x(t) на всем заданном промежутке времени для линейных стохастических дифференциальных уравнений с аддитивным и мультипликативным шумом и найти явный вид решения в форме ортогонального ряда со случайными коэффициентами. В основе метода лежит спектральная форма математического описания систем управления [6, 7], адаптированная для представления случайных процессов [8].

При практической реализации спектрального метода моделирования решений уравнений (1) или (2) используется алгоритмическое и программное обеспечение расчета систем автоматического управления в спектральной форме математического описания [9]. В качестве базисных систем для представления случайных процессов и линейных операторов (операторов дифференцирования, операторов дробного интегрирования и операторов умножения) при применении спектрального метода предлагается выбирать полиномы Лежандра, а также функции Уолша и Хаара, для которых сформированы все необходимые алгоритмы расчета спектральных характеристик линейных операторов и реализовано соответствующее программное обеспечение.

Спектральный метод использует приближенное решение в той же форме (5), что и традиционные методы взвешенных невязок. Как и в традиционном методе Галеркина [1], аппроксимирующие и весовые функции отличны от нуля во всей вычислительной области. В этом отношении спектральный метод является глобальным методом. Наиболее существенное отличие спектрального метода от традиционных подходов, связанных с применением метода взвешенных невязок, состоит в том, что указанный метод использует в качестве аппроксимирующих и весовых функций ортогональные функции, являющиеся собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля, определённой на $\Omega=(-1,1)$:

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{d\varphi_i}{dx}\right)+b(x)\varphi_i=\lambda_i w(x)\varphi_i,\ \ a>0,\ \ b\geq 0,$$

$$\varphi_i(-1)=\varphi_i(1)=0.$$

В общем случае решением задачи являются полиномы Якоби. Так как полиномы Якоби взаимно ортогональны на интервале $[-1,1]$, можно доказать, что

$$\forall u\in U:\lim_{N\to\infty}\left\|u-P_N{}^h u\right\|=0;$$

Здесь

$$P_N{}^h u=\sum_{i=0}^{N}c_i\varphi_i\ .$$

Более того, если $u \in H^m(\Omega)$, иными словами, если искомое решение u является m раз непрерывно дифференцируемым, то, согласно [6], ошибка аппроксимации, будет следующей:

$$\left\| u - P_N{}^h u \right\|_{L_2} \le C_1 N^{-m} \left\| u \right\|_{H^m} .$$

Таким образом, используя спектральное разложение, для достаточно гладких функций можно получить экспоненциальную скорость сходимости приближенного решения к точному. В этом и состоит основное преимущество спектрального метода: очень точные приближенные решения могут быть получены при небольшом числе слагаемых (5), причём ошибка аппроксимации будет уменьшаться экспоненциально с ростом N. Необходимо отметить также, что, поскольку спектральный метод является глобальным методом, то, определив коэффициенты приближенного разложения (5), можно получить значения искомой функции в любой точке области с заданным порядком точности.

Недостатком глобального спектрального метода является то, что многочлены Якоби являются ортогональными на отрезке $[-1,1]$ и, следовательно, утверждения об экспоненциальной скорости сходимости приближенного решения к точному имеют место только в случае, если область интегрирования представляет собой ($u \in \Re$) отрезок $\Omega = [\ 1- \ ,1]$. Для того, чтобы решить задачу с произвольной областью интегрирования, необходимо найти замену координат, переводящую исходную область интегрирования в единичный отрезок.

Спектральный метод обобщается на случай двух и более измерений путём использования в качестве базисных функций тензорного произведения соответствующих одномерных базисных функций.

В случае двух и более измерений задача о нахождении преобразования координат становится достаточно сложной, особенно если область интегрирования имеет сложную форму. Поэтому имеет смысл разбить исходную расчетную область на конечные элементы и искать локальные представления решения через специальные функции, определенные на этих элементах. Однако при дискретизации, полученной на основе локального спектрального метода, матрица системы становится плохо обусловленной, что приводит к медленной сходимости итерационных методов. Эта проблема, как и в случае обычных локальных аппроксимаций, решается с использованием методов на основе пространств Крылова и подбором предобуславливателей.

Литература:

1. Doan T. S., Huong P. T., Kloeden P. E., Tuan H. T. Asymptotic separation between solutions of Caputo fractional stochastic differential equations // Stochastic Analysis and Applications. — 2018. — V. 36, No. 4. — P. 654–664.

2. Ito I. On the existence and uniqueness of solutions of stochastic integral equations of the Volterra type // Kodai Mathematical Journal. — 1979. — V. 2, No. 2. — P. 158–170.

3. Jumarie G. Modeling fractional stochastic systems as non-random fractional dynamics driven by Brownian motions // Applied Mathematical Modelling. — 2008. — V. 32, No. 5. — P. 836–859.

4. Picard J. Representation formulae for the fractional Brownian motion // Seminaire de Probabilites. V. XLIII. — Springer-Verlag, 2011. — P. 3–70.

5. Mandelbrot B. B., Van Ness J. W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications // SIAM Review. — 1968. — V. 10, No. 4. — P. 422–437.

6. Солодовников В. В., Семенов В. В., Пешель М., Недо Д. Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. — М.: Машиностроение, 1979.

7. Рыбаков К. А., Рыбин В. В. Моделирование распределенных и дробно-распределенных процессов и систем управления спектральным методом. — М.: Изд-во МАИ, 201.

8. Рыбаков К. А. Моделирование и анализ выходных процессов линейных непрерывных стохастических систем на основе ортогональных разложений случайных функций // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2020. — № 3.

9. Рыбаков К. А., Рыбин В. В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета систем автоматического управления в спектральной форме математического описания // В кн.: Современная наука: теоретические, практические и инновационные аспекты развития. Т. 2. — Ростов-на-Дону: Изд-во Международного исследовательского центра «Научное сотрудничество», 2018. — С. 171–199.