

NOCHIZIQLI TENGLAMALAR ILDIZLARINI TOPISH VA TENGLAMALAR SISTEMSINI MAPLE MATEMATIKA PAKETIDA ISHLASH USULLARI.

Bobomurodova Kamola

Termiz davlat universiteti Axborot texnologiyalari
fakulteti Amaliy matematika va informatika yo'nalishi talabasi

<https://doi.org/10.5281/zenodo.6558894>

Ilmiy maqolamning asosiy maqsadi, nochiziqli tenglamalarni matematik usullaridan foydalanib hisoblash. Nochiziqli tenglamalarni taqribiy yechishda: skanerlash usuli, kesmani teng ikkiga bo'lish usuli (dixotomiya usuli), iteratsiyalar va boshqa usullardan foydalanish. Maple matematika paketidan foydalanib nochiziqli tenglamalar sistemasini yechish bilan birgalikda grafigini ham chizamiz. Bugungi kunda matematika paketlarni o'quv jarayondagi o'rni va roli ancha samarali va sezilarlidir.

Nochiziqli tenglamalarni 2 sinfga bo'lishimiz mumkin - algebraik va transsendental.

Algebraik tenglamalar- faqat algebraik funksiyalarni (butun, ratsional, irratsional) o'z ichiga olgan tenglamalar deyiladi. Agar $f(x)$ funksiya ko'phad bo'lsa, u holda $f(x) = 0$ (1) tenglama n -darajali algebraik tenglama deb ataladi, ya'ni $f(x) = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ bunda $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ —berilgan $P(x)$ ko'phadning koeffitsiyentlari.

Darajasi to'rtidan yuqori bo'lgan algebraik tenglamalar uchun uning ildizlarini koeffitsiyentlari orqali ifodalovchi aniq formula mavjud emas. Algebraik tenglama ildizlari sonini ko'phadning darajasiga qarab, ularning xarakterini esa shu ko'phad koeffitsiyentlarining ishorasiga qarab aniqlash mumkin. Boshqa funksiyalarni (trigonometrik, eksponensial, logarifmik va boshqalar) o'z ichiga olgan tenglamalar **transsendent** tenglamalar deyiladi.

Algebraik va transendent tenglamalar ikki turga bo'linadi: **chiziqli** (bitta yechimli) va chiziqli bo'lmagan yoki **nochiziqli** (bir yoki bir nechta yechimli) tenglamalar. Chiziqli bo'lmagan tenglamalar esa: algebraik (yechimlari n ta) va transendent (yechimlari soni noma'lum) tenglamalarga bo'linadi (1-rasm).

Nochiziqli tenglamalarni yechish usullari ikki guruhga bo'linadi: - *aniq usullar* va *iterativ usullar*. **Aniq usullar** ildizlarni qandaydir chekli munosabat (formula) shaklida yozishga imkon bering. Maktab algebrasi kursidan bunday usullar trigonometrik, logarifmik, ko'rsatkichli, shuningdek, eng oddiy algebraik tenglamalarni yechish uchun ma'lum.



1-rasm Tenglamalar klassifikatsiyasi.

Ko'pgina tenglamalar va tenglamalar tizimlarining analitik yechimlari mavjud emas. Avvalo, bu ko'pchiligi transsendental tenglamalarga tegishli. Bundan tashqari, to'rtinchi darajadan yuqori bo'lgan ixtiyoriy algebraik tenglamani yechish mumkin bo'lgan formulani qurish mumkin emasligi isbotlangan. Bundan tashqari, ba'zi hollarda tenglama faqat taxminan ma'lum bo'lgan koeffitsientlarni o'z ichiga oladi va shuning uchun tenglamaning ildizlarini aniq aniqlash muammosining o'zi o'z ma'nosini yo'qotadi. Ularni hal qilish uchun biz foydalanamiz **iterativ usullar** ma'lum bir aniqlik darajasi bilan.

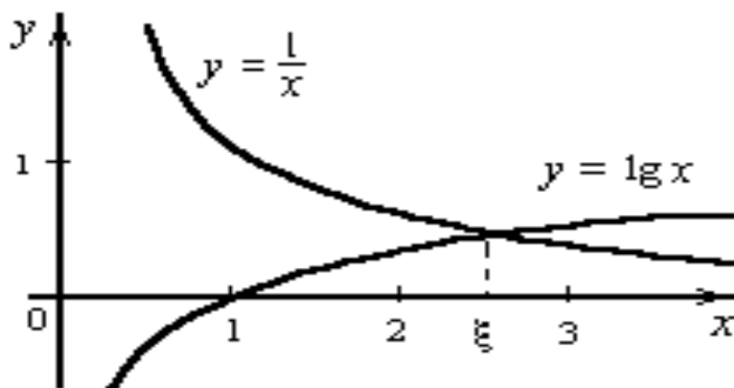
Tenglamaning ildizini topish masalasi $f(x) = 0$ iterativ usulda ikki bosqichdan iborat:

1) ildiz ajratish- ildiz yoki uni o'z ichiga olgan segmentning taxminiy qiymatini topish;

2)taxminiy ildizlarni takomillashtirish ularni ma'lum bir aniqlik darajasiga yetkazish.

Ildizlarni ajratish jarayoni funktsiya belgilarining o'rnatilishi bilan boshlanadi $f(x)$ chegarada $x = a$ va $x = b$ uning mavjudligi hududidagi nuqtalar. Shunga doir misol ko'rib o'tamiz.

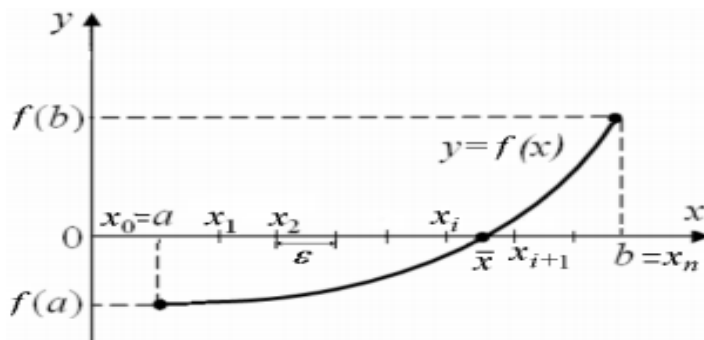
1-misol: Tenglamaning ildizlarin igrafik tarzda ifodalang. $x \cdot \lg x = 1$ (1) Bu tenglamani grafik ko'rinishda ifodalaymiz (2-rasm).



2-rasm

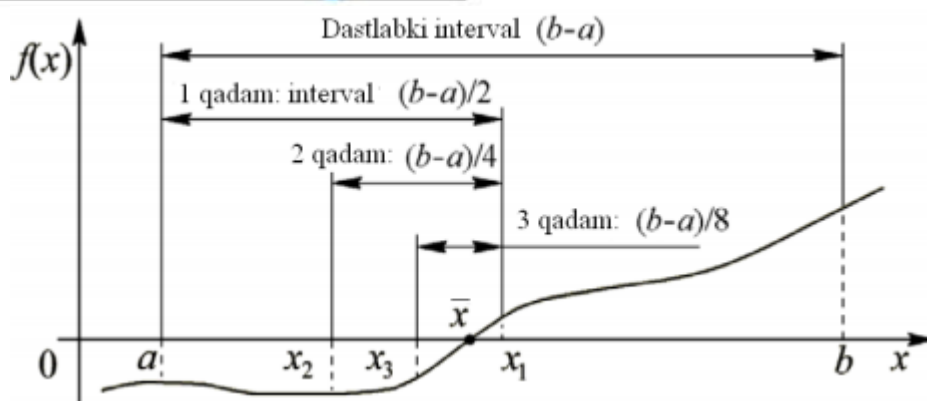
Masalaning qo'yilishi. Chekli $[a,b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz, ikki marta differensiyallanuvchan, ya'ni birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari shu kesmada mavjud va unda bu hosilalari o'z ishorasini saqlaydigan (birinchi hosilasi nolga aylanmaydigan) $f(x)$ funksiya uchun $f(x) = 0$ tenglama $[a,b]$ kesmada yagona yechimga ega bo'lsin va bu yechimni berilgan $\varepsilon > 0$ aniqlikda taqribiy hisob usullari yordamida topish talab qilinadi.

Skanerlash usuli. Berilgan $f(x) = 0$ tenglamaning $[a,b]$ kesmadagi ildizi ajratilgan bo'lsin. $[a,b]$ kesma berilgan yetarlicha kichik ε uzunlikdagi kesmalarga bo'linadi va hosil bo'lgan kesmalarning oxirlarida $y = f(x)$ funksiyaning qiymatlari hisoblanadi. Bu qiymatlarni tahlil qilish bilan qaysi oraliqda funksiya o'z ishorasini almashtirayotganligini (yoki qiymati aniq nolga teng ekanligini) aniqlash mumkin (3-rasm). (1) tenglamaning yechimi sifatida tanlangan kesmaning chegaralaridagi xoxlagan x_i – chap yoki x_{i+1} – o'ng uchi nuqtasini, yanada aniqroq bo'lishi uchun esa, kesmaning o'rtasidagi $\bar{x} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ nuqtani olish mumkin. Bu bilan biz talab qilingan ε aniqlikdagi yechimga erishgan bo'lamiz. Amaliyotda bu usul qo'llanilganda ko'pincha $[a,b]$ kesma 2ε yoki $\varepsilon/2$ uzunlikdagi kesmalarga bo'linishi ham mumkin, bu asosiy natijaga deyarlita'sirqilmaydi.



3-rasm Skanerlash usulining sxematik tasviri.

Kesmani teng ikkiga bo'lish usuli (dixotomiya usuli). Bu usul $f(x)$ funksiya haqida ma'lumotlar juda ham kam bo'lganda foydalanishga qulay. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning qaysidir bir nuqtasida nolga aylanishini aniqladik, bunda ildizdan chaproqda $f(x) < 0$ va o'ngroqda esa $f(x) > 0$. Bunday holda izlanayotgan ildizni topish murakkab bo'lmaydi. Kesmani teng ikkiga bo'lamiz va hosil bo'lgan x_i nuqtada funksiyaning ishoraini qaraymiz. Agar $f(x_i) > 0$ bo'lsa, yuqori chegarani $b = x_i$ deb, aksincha esa quyi chegarani $a = x_i$ deb siljitamiz va hokazo(4-rasm).



4-rasm. Kesmani ikkiga bo'lish usulining sxematik tasviri

Usulning qulayliklari:

1. $f(x)$ funksiya haqida ma'lumotlar kam bo'lganda ham undan foydalanish juda qulay.
2. bu usul algoritmi juda sekin, ammo barcha noqulayliklardan holi.

Usulning kamchiliklari:

1. ko'p hollarda funksiyaning holati juda murakkab bo'lib, bu chetki nuqtalarida funksiyaning ishorasi har xil bo'lgan $[a, b]$ kesmani oldindan aniqlashga qiyinchilik tug'diradi;
2. yaqinlashish juda sekin;
3. sodda bo'lmagan ildiz, masalan, ildiz funksiyaning ekstremum nuqtasi bilan mos kelganda, bu usulni qo'llab bo'lmaydi, chunki bunda ildiz atrofida funksiya o'z ishorasini almashtirmaydi.
4. agar tenglama $[a, b]$ kesmada bir nechta ildizga ega bo'lsa, u holda hisoblash jarayonida shu ildizlardan qaysi biri topilishi noma'lum.
5. uni tenglama karrali (juft karrali) va kompleks ildizlarga ega bo'lganda qo'llab bo'lmaydi;
6. uni tenglamalar sistemasiga qo'llab bo'lmaydi.

Usulning algoritmi:

1. $f(a)$ va $f(b)$ nihisoblang;
2. $c = (a + b)/2$ deb $f(c)$ ni hisoblang;
3. agar $\text{sign}(f(c)) = \text{sign}(f(a))$ bo'lsa $a = c$ deb, aks holda esa $b = c$ deb almashtirish oling (bunda sign ishora funksiyasi);
4. agar $b - a > \varepsilon$ bo'lsa, u holda qadam 2 ga o'ting, aks holda hisob jarayonini to'xtating (chunki biz talab qilingan ε – absolyut aniqlikka erishdik). Oxirgi kesma uchlaridan xoxlagan bittasi yoki ular yig'indisining yarmini berilgan $f(x)=0$ tenglamaning yechimi deb qabul qilishimiz mumkin.

Iteratsion usul. Iteratsion usullarda yechimning dastlabki x_0 – ixtiyoriy yaqinlashishi olinadi va u ketma-ket aniqlashtirib boriladi. Natijada yechimning $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ ketma-ketligi hosil qilinadi. Tenglamani

yechishning iteratsion usuliga ko'ra uning ildiziga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \bar{x}| = 0$ tenglikning bajarilishidan chiqariladi.

Agar bunda x_{n+1} ni hisoblash uchun undan oldin hisoblangan bitta x_n yaqinlashishdan foydalanilsa, ya'ni $x_{n+1} = \varphi_n(x_n)$, u holda bu usul *bir nuqtali (bir qadamli) yoki oddiy iteratsiya usuli*, aks holda esa, ya'ni oldin hisoblangan bir nechta yaqinlashishdan $x_{n+1} = \varphi_n(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots)$ kabi foydalanilsa, u holda bu usul *ko'p nuqtali(ko'p qadamli) iteratsiya usuli* deb ataladi. Agar bunda φ_n funksiya n dan bog'liq bo'lmasa, *jarayon statsionar*, aks holda esa *nostatsionar* deb ataladi. Masalan, oddiy iteratsiya usuli statsionar va bir qadamli usul bo'lib, birinchi tartibli iteratsion jarayonni ifodalaydi, Nyuton usuli esa statsionar va bir qadamli bo'lib, ikkinchi tartibli iteratsion jarayonni ifodalaydi.

Agarda bunda $\{x_n\}$ ketma-ketlik $n \rightarrow \infty$ bo'lganda aniq \bar{x} yechimga bir tomonlama (chapdan yoki o'ngdan yaqinlashsa – bir tomonlama usul) yoki ikki tomonlama (har ikkala tarafidan yaqinlashsa – ikki tomonlama usul) intilsa, *iteratsiya jarayoni yaqinlashadi* deyiladi.

Faraz qilaylik, ε - ildizni topish talab qilinayotgan *absolyut aniqlik* bo'lsin. *Hisoblash jarayonining tugallash kriteriyasi*: hisoblash jarayoni ikki tomonlama yaqinlashishida $|x_{n+1} - \bar{x}| < \varepsilon$ shart yoki bir tomonlama yaqinlashishida $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$ va $|x_{n+1} - \bar{x}| < \varepsilon$ shartlar bajarilgunga qadar davom ettiriladi. Shuni ta'kidlaymizki, bir tomonlama usullar qo'llanilayotganda ko'proq nisbiy aniqlikdan foydalaniladi.

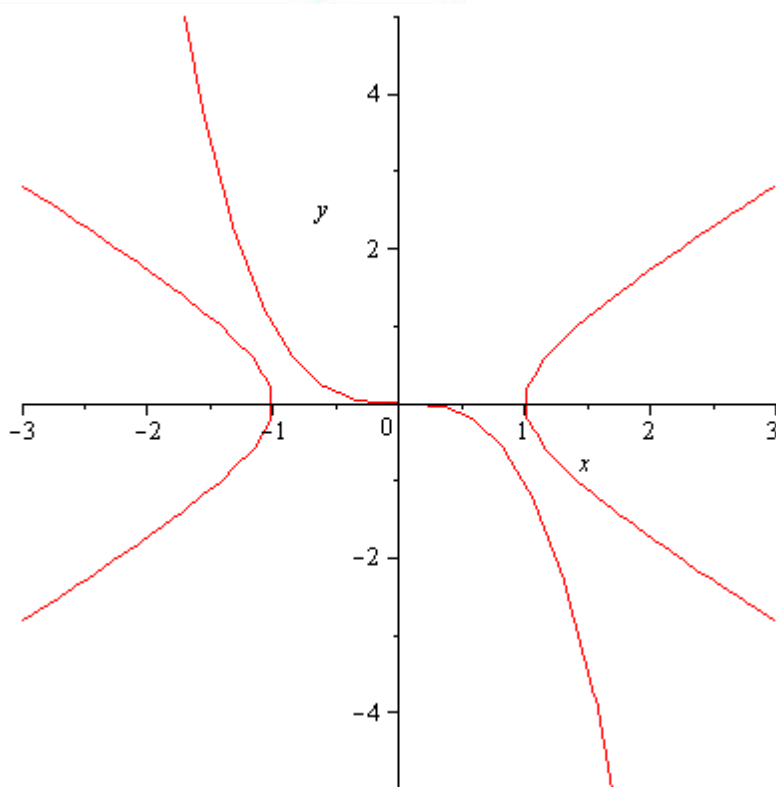
1-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ f_2(x, y) = x^3 + y = 0 \end{cases}$$

nochiziqli tenglamalar sistemaning yechimini $e = 0,001$ aniqlik bilan Nyuton usulida taqribiy hisoblang.

Yechish. Ushbu misolda berilgan tenglamalar sistemasi bitta musbat haqiqiy yechimga ega ekanligini quyidagi Maple dasturi **plots** paketining **implication** funksiyasidan foydalanib $f_1(x, y)$ va $f_2(x, y)$ funksiyalarning chizilgan grafiklaridan ko'rish mumkin.

1-rasm. 1-misolda berilgan nochiziqli tenglamalar sistemasi ildizining boshlang'ich yaqinlashishni grafik usul bilan Maple dasturi yordamida aniqlash



> plots[implicitplot]({x ^ 2-y ^2 -1=0,x^3 + y = 0},x = -3..3,y = -5..5);

Bu usulga ko'ra dastlabki yaqinlashishni $x_0 = 1,3$; $y_0 = 1,8$ deb tanlab olamiz. U holda

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial(f_1(x,y))}{\partial x} & \frac{\partial(f_1(x,y))}{\partial y} \\ \frac{\partial(f_2(x,y))}{\partial x} & \frac{\partial(f_2(x,y))}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (1)$$

(1) formulaga ko'ra

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ 3x_0 & 1 \end{vmatrix} \text{ yoki}$$

$$\Delta(1,3; 1,8) = \begin{vmatrix} -2,6 & 3,6 \\ 3,9 & 1 \end{vmatrix} = 16,64$$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{\Delta(x_0, y_0)} \begin{vmatrix} -f_1(x_0, y_0) & \frac{\partial(f_1(x, y))}{\partial y} \\ -f_2(x_0, y_0) & \frac{\partial(f_2(x, y))}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$y_1 = y_0 - \frac{1}{\Delta(x_0, y_0)} \begin{vmatrix} \frac{\partial(f_1(x, y))}{\partial x} & -f_1(x_0, y_0) \\ \frac{\partial(f_2(x, y))}{\partial x} & -f_2(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

(2) formulaga ko'ra

$$x_1 = 1,3 - \frac{1}{16,64} \begin{vmatrix} -1,55 & 3,6 \\ -3,49 & 1 \end{vmatrix} = 1,3 + 0,6618 = 1,9618$$

$$y_1 = 1,8 - \frac{1}{16,64} \begin{vmatrix} -2,6 & -1,55 \\ 3,9 & 3,49 \end{vmatrix} = 1,8 + 0,1820 = 1,6180$$

Hisoblashlarni shu singari davom ettirib, x_n, y_n ya'ni hisoblashlarni talab qilingan aniqlikkacha davom ettiramiz.

Endi bu masalani Maple tizimida sonli yechishni qaraymiz. Avvalo Yakob matritsasini **linalg** paketining **jacobian** funksiyasi yordamida hisoblaymiz, keyin esa uning teskarisini **linalg** paketining **inverse** funksiyasidan foydalanib hisoblaymiz. **evalm** funksiyasi ifodaning son qiymatini beradi. **evalm** funksiyasi esa matritsa va vektorlar ustida amal bajarib, son natija beradi. Boshlang'ich vektorni **xx** va **eps** aniqlik darajasi deb, Nyuton usuli bo'yicha taqribiy hisoblashlarni bajaramiz:

> with(linalg):

F:=(x,y)->[x^2-y^2-1,x^3+y];

FP:=jacobian(F(x,y),[x,y]); FPINV:=inverse(FP);

xx:=[1.2,1.7]; eps:=0.0001; Err:=1000; v:=xx; v1:=[1e10,1e10];

j:=0;

for i while Err>eps do

v1:=eval(v);

M:=eval(eval(FPINV),[x=v[1],y=v[2]]):

v:=evalm(v-M&*F(v[1],v[2]));

Err:=max(abs(v1[1]-v[1]),abs(v1[2]-v[2]));

j:=j+1;

end do;

Hisob natijasi quyidagicha:

$$F := (x, y) \rightarrow [x^2 - y^2 - 1, x^3 + y]$$

$$FP := \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 3x^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$FPINV := \begin{bmatrix} \frac{1}{2x(1+3yx)} & \frac{y}{x(1+3yx)} \\ -\frac{3}{2} \frac{x}{1+3yx} & \frac{1}{1+3yx} \end{bmatrix}$$

$$xx := [1.3, 1.8]$$

$$eps := 0.0001$$

$$Err := 1000$$

```

v := [1.3, 1.8]
vI := [1. 1010, 1. 1010]
vI := [1.3, 1.8]
M :=  $\begin{bmatrix} 0.04795703050 & 0.1726453098 \\ -0.2431421446 & 0.1246882793 \end{bmatrix}$ 
v := [ 0.7322271245 0.681608479]
Err := 1.11839152
j := 1
vI := [ 0.7322271245 0.681608479]
M :=  $\begin{bmatrix} 0.2734371602 & 0.3727541738 \\ -0.4398153832 & 0.4004362112 \end{bmatrix}$ 
v := [ 0.5856839978 -0.1568782010]
Err := 0.838486680
j := 2
vI := [ 0.5856839978 -0.1568782010]
M :=  $\begin{bmatrix} 1.178566461 & -0.3697827723 \\ -1.212835916 & 1.380535033 \end{bmatrix}$ 
v := [ 1.405257485 -1.044309109]
Err := 0.887430908
j := 3
vI := [ 1.405257485 -1.044309109]
M :=  $\begin{bmatrix} -0.1045699939 & 0.2184067943 \\ 0.6194983468 & -0.2938955333 \end{bmatrix}$ 
v := [ 1.015143582 -0.4638995963]
Err := 0.580409512
j := 4
vI := [ 1.015143582 -0.4638995963]
M :=  $\begin{bmatrix} -1.193246305 & 1.107092958 \\ 3.688979990 & -2.422632657 \end{bmatrix}$ 
v := [ 0.1501927373 1.627916130]
Err := 2.09181572

```

Xulosa qiladigan bo'lsak, biz yuqorida nochiziqli tenglamalarni yechish usullarini ko'rib o'tdik. Nochiziqli tenglamalarni yechishda eng sodda usullardan biri bu skanirlash usuli hisoblanadi. Bu usulni qo'llashda ko'pincha ϵ yoki $\frac{\epsilon}{2}$ uzunlikdagi kesmalarga bo'lishi ham mumkin, bunda asosiy natijaga deyarli tasir qilmaydi. Nochiziqli tenglamalarni yechishda dixotomiya usulidan

ham foydalanishimiz mumkin. Bu usulning qulayliklari bilan birga kamchiliklari ham mavjud. Iteratsion usul esa ko'proq nisbiy aniqlikda foydalaniladi. Hozirgi kunda kompyuterda ya'ni matematik paketlarda cheksiz hisoblarini topishga ehtiyoj tobora o'sib, rivojlanib bormoqda. Bu usul yuqori darajadagi aniqlik bilan birga vaqtni tejashda ham o'z samarasini bermoqda.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

1. A. Abdirashidov, I. A. Babayarov. Hisoblash usullari: mexaniklar uchun amaliy mashg'ulotlar («5140300 – Mexanika», «5130100 – Matematika», «5130200 – Amaliy matematika va informatika» bakalavr ta'lim yo'nalishlari talabalari uchun). – 1-qism. – Samarqand: SamDU nashri, 2018. – 160 bet.
2. Abduhamidov A., Xudoynazarov S. «Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari», T.1995
3. S. S. Irisqulov, K. D. Ismanova, M. Olimov, A. Imomov. Sonli usullar va algoritmlar. – N.: "Namangan" nashriyoti, 2013, 244 b.
4. Nochiziqli tenglamalar sistemasini yechishning sonli usullari bo'yicha uslubiy ko'rsatmalar. – Samarqand: SamDU nashri, 2014. – 60 bet.
5. p. f. n. dot. Olimov B. A, Masharipov M. P, Nuriddinova D Matematik paket "Maple" dasturida matematik masalalarni yechish (Umum ta'lim maktablari misolida) / Metodik (uslubiy) qo'llanma