

LA DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA EN FUNCIÓN DEL DESARROLLO TECNOLÓGICO DE LA PEDAGOGÍA CONTEMPORÁNEA

Lic. Henry Fernández Rodríguez^{1*}; Dr. Michel Enrique Gamboa Graus²

¹Licenciado en Educación, especialidad Matemática-Computación. Profesor asistente de Geometría en el departamento de Matemática-Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Ciencias Pedagógicas "Pepito Tey", Las Tunas, Cuba.

²Licenciado en Educación, Especialidad Matemática-Computación. Doctor en Ciencias Pedagógicas. Profesor Titular. Coordinador de Investigaciones del Centro de Estudios Pedagógicos de la Universidad de Las Tunas, Cuba. E-mail: michelgg@ult.edu.cu

*Autor para la correspondencia. Email: henryfr@ucp.lt.rimed.cu

Recibido: 25-9-2016 / Aceptado: 1-10-2016

RESUMEN

Las escuelas contemporáneas se dotan de nuevas tecnologías, entre ellas las computadoras, por lo que constituye un reto su utilización en el proceso de enseñanza-aprendizaje. El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría es uno de los que presenta mayores dificultades en la Matemática Educativa actual. Estas están relacionadas fundamentalmente con la actualización didáctica necesaria para hacer corresponder dicho proceso con los adelantos tecnológicos existentes en campos como la informática y la comunicación. En el trabajo se ofrecen recomendaciones metodológicas a los profesores y se muestran algunas actividades diseñadas donde se utiliza un programa computarizado de aplicación como es el Geogebra, que facilita revelar sus cualidades y potencialidades y transformar el proceso didáctico de la Geometría. En estas se tienen en cuenta los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico, la formación por etapas de las acciones mentales y la didáctica para un aprendizaje desarrollador. Su implementación práctica, en el centro de referencia provincial, reveló cambios actitudinales de los estudiantes hacia la asignatura y mejoras significativas en su aprendizaje.

Palabras clave: Geometría; enseñanza; aprendizaje; actividades.

DIDACTICS OF GEOMETRY ACCORDING TO THE TECHNOLOGICAL DEVELOPMENT OF THE CONTEMPORARY PEDAGOGY

ABSTRACT

Contemporary schools are provided with new technologies, including computers, so it is challenging its use in the teaching-learning process. The process of teaching and learning of geometry is one of the major difficulties in the current Mathematics Education. These are mainly related to the necessary update of didactics to match the process with existing technological advances in fields such as Information and Communication. At work, methodological recommendations are offered to teachers and some activities designed where a computer

application program is used as the Geogebra, which facilitates reveal their qualities and potentials and transform the educational didactic process of geometry. Levels of development of geometrical thinking are taken into account, the stepwise formation of mental actions and teaching for a developer learning. Its practical implementation in the provincial center of reference, revealed attitudinal changes of students towards the subject and significant improvements in their learning.

Key words: Geometry; teaching; learning; activities.

1. INTRODUCCIÓN

En los momentos actuales, nuestro país está inmerso en la realización de profundas transformaciones con la finalidad de hacer corresponder el modelo de hombre que ella necesita con el sistema social que construimos, de manera tal que este pueda vivir en un mundo donde el inevitable proceso de globalización impone nuevos retos dados por el desarrollo de la ciencia, la técnica y las comunicaciones. Estas transformaciones en el sector educacional se reconocen en Cuba como la tercera gran revolución educacional y cultural.

La introducción de las computadoras personales y de programas de computación para la enseñanza hacen que surjan varias interrogantes, tanto por parte de los docentes que deben implementar su uso al desarrollar el currículum diseñado, como por los estudiantes que deben utilizar los mismos; esto se da en las diferentes asignaturas y áreas del conocimiento del que no escapa la enseñanza de la matemática y en particular de la geometría.

Luego es necesario que se modifique la concepción tanto de la enseñanza como del aprendizaje de la geometría. Esto implica un cambio en la manera de pensar de los profesores y desde luego de diseñar las estrategias, las tareas independientes y actividades extradocentes. Esto debe hacerse de manera que exista, en dependencia de las condiciones concretas de escuela, alumnos y propias de la comunidad, la coherencia necesaria para el éxito del proceso y que propicie un cambio en los modos de actuación de los estudiantes hacia el aprendizaje y los hábitos de estudio.

Este trabajo fue resultado del proyecto de Investigación “Didáctica de las Ciencias Exactas” y tiene como propósito contribuir al desarrollo de la creatividad de los profesores al mostrar algunas de las posibilidades de utilización de las tecnologías de la Informática en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría. Para ello se diseñaron actividades teniendo presente los principios de una didáctica desarrolladora y los niveles de pensamiento en esta área de la matemática, los cuales evidencian en la práctica el cambio de actitud de los estudiantes hacia la asignatura.

2. METODOLOGIA

2.1. Fundamentos teóricos

Desde el punto de vista psicológico, pedagógico y sociológico el trabajo se basa en la concepción de aprendizaje reflexivo dado por E. A. Velázquez, L. G. Ulloa y J. L. Hernández (2011), como "aquel en el que el sujeto se apropia de la experiencia histórico-social acumulada durante el desarrollo de la humanidad, (...) por la puesta en práctica de una intensa actividad reflexiva que le permite establecer sus propios procedimientos y estrategias de solución, apoyados en sus experiencias y vivencias, para encontrar las respuestas que correspondan, (...) aportando sus recursos, enriquecidos en la interacción con otros, transformándose él y la realidad en que actúa, todo lo cual favorece su desarrollo integral como personalidad".

En tal sentido, se considera con los siguientes atributos valorados de una forma integradora, sin hiperbolizar ni menospreciar uno u otro. Es un proceso de apropiación individual de la experiencia social, es regulado, se aprende en la actividad y como resultado de esta. En él se debe potenciar el tránsito progresivo de la dependencia a la independencia, complementando la reestructuración y la asociación. Es cooperativo, contextualizado, mediado por la existencia de los demás, a la vez que debe ser desarrollador.

También se toma como base los criterios de M. Escalona (2007), quien presenta la mediación didáctica en un plano de los recursos informáticos como "...el diseño de situaciones educativas donde el estudiante actúe, participe, construya, descubra y redescubra el conocimiento mediante su interacción con los recursos informáticos, de modo que se favorezca su aprendizaje y desarrolle un pensamiento crítico y creativo a través del trabajo tanto individual como en colectivo".

Así, se precisa organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje hacia la búsqueda activa del conocimiento por el alumno. Para ello se hace necesario concebir actividades desde posiciones reflexivas que estimulen el desarrollo del pensamiento y la independencia. Al mismo tiempo, se debe fomentar formas de actividad y de comunicación colectivas, estimulando la valoración y la interacción de lo individual con lo colectivo.

Existen tres características de las computadoras que poseen gran importancia desde el punto de vista didáctico, las cuales deben ser valoradas por el profesor para decidir su utilización como recurso en el desarrollo del currículum. Por una parte, estas proporcionan una forma cómoda de gestionar y representar la información, permitiendo que el alumno

dedique mayor atención al sentido de los datos y al análisis de los resultados. Otra de las posibilidades es de ejecutar con gran rapidez dibujos, cálculos, entre otras órdenes de muy distinto tipo, por lo que se pueden simular experiencias aleatorias, trazar gráficos, entre otras actividades. La tercera característica es la de interactuar con el estudiante, que puede intervenir en determinados momentos proponiendo datos o tareas nuevas en función de los resultados que se van obteniendo, convirtiéndose en un poderoso instrumento de exploración e indagación, todo lo cual hace que su uso sea altamente motivante.

El profesor debe valorar el tiempo que se necesita para el uso de asistentes matemáticos como el que se emplea en esta propuesta o de otros como el geómetra. Al mismo tiempo debe considerar en qué actividades utilizarlos de manera que se facilite la calidad del aprendizaje, lo que incluye el manejo por los estudiantes de dichos asistentes. Esto, debe hacerse desde con un análisis de las potencialidades y carencias que estos poseen para lograr los objetivos trazados, ya sea en la clase o de apoyo a ella.

En la propuesta que se presenta en este artículo también se toma en consideración, por una parte lo referido a la actividad, su estructura y su rol en el aprendizaje donde particularmente desempeña un importante papel la formación por etapas de las acciones mentales desarrolladas por Galperin y trabajadas en investigaciones como O. Joaquim (2014), J. B. Juárez y M. R. Bonilla (2014), y otros. Por otra parte, los aspectos referentes a la necesidad del aprendizaje cooperativo o colaborativo a partir del reconocimiento del componente social del aprendizaje, del aprender con otros y de otros que en la psicología social se conocen como Zona de Desarrollo Próximo (ZDP). Este supuesto permite valorar desde perspectivas educativas, el trabajo que desempeña un sujeto con otros a favor de un aprendizaje determinado, la importancia que se le asigna al compartir con otros abre nuevos caminos para generar estrategias de enseñanza-aprendizaje centradas en el crecimiento colectivo.

Se conoce, además, que uno de los objetivos de la matemática educativa está dirigido al desarrollo del pensamiento lógico en los estudiantes. En particular la geometría posee potencialidades inigualables para contribuir al cumplimiento del mismo, muy especialmente si se tienen presentes al diagnosticar y diseñar las estrategias los niveles de Van Hiele (1999) del desarrollo del pensamiento geométrico con sus fases. Sin embargo, también es necesario considerar el nivel de actualización que sobre estos niveles se encuentran en investigaciones de autores como Gamboa, R. y Vargas, G. (2013).

Como parte del proyecto de investigación, del que forman parte los autores, sobre el aprendizaje del adolescente del 7º grado de la educación secundaria básica que se

desarrolla en la provincia, se concibió la instrumentación de situaciones de aprendizaje. Estas tomaron en consideración de forma dialéctica los elementos que aportan estas teorías que se trataron, unidos a los de investigaciones desarrolladas por Escalona, M. (2007); Rojas, O. (2009), Portilla, Y. (2012), S. Ballester (2013), O. Coloma (2015), y otros que aportan elementos para elevar la calidad del aprendizaje al integrar las TIC a la enseñanza-aprendizaje. De esta manera se buscó elevar el grado de efectividad del aprendizaje aspirado por el modelo del egresado de este nivel educacional.

2.2. Propuesta realizada

Para el logro del propósito del trabajo, se utilizó el geogebra como programa computarizado disponible. El mismo brinda un potencial extraordinario y posibilita transformar el proceso de enseñanza - aprendizaje de la geometría en favor de lograr resultados más efectivos. El programa se caracteriza por su versatilidad y fácil uso, además por interactuar de una forma dinámica con los objetos geométricos, lo cual propicia a los alumnos experiencias de las que antes no disponían. Además, este es un software matemático interactivo libre que permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y otras bondades muy útiles para el trabajo educativo. Esto genera actividades, ejercicios y problemas más desarrolladores, diferentes a los usuales con lápiz y papel.

La utilización de la computación en la exploración de los objetos geométricos, por parte de los alumnos, permite que estos formulen conjeturas para analizar la variación o no de propiedades y relaciones al modificarlas, obtener ideas para argumentar su validez, entre otras cuestiones. Esto además favorece la comunicación y sus descubrimientos y que sistematicen constantemente sus conocimientos, lo que hace que se desarrolle su pensamiento matemático ya que se acercan al quehacer propio de los matemáticos.

Este proceso requirió el planteamiento y desarrollo de una serie de acciones que posibilitaron concretar las ideas teóricas, las mismas se listan a continuación.

2.2.1. Acciones para crear las condiciones necesarias

La implementación de las actividades consistió en el proceso de ponerlas en funcionamiento en la práctica escolar, la aplicación de métodos, el diseño de acciones, la toma de decisiones y medidas para llevarlas a cabo exitosamente a través de varios momentos. Estos incluyeron la selección de los profesores, el diseño de acciones de preparación para crear las condiciones necesarias, entre otros como evaluación y

perfeccionamiento de las propuestas. Algunas de las acciones implementadas se tratan a continuación.

- Preparar, tanto en la teoría como en la práctica, a los profesores en los presupuestos antes expresados.

Esto se hizo a través de talleres y sesiones de debates sobre los diferentes aspectos de la preparación. Estos contaron con diferentes técnicas participativas, estudio previo de materiales, exposición de la interpretación de los mismos, entre otras características.

- Instalar los programas computarizados.

Se instalaron en los laboratorios de informática tanto el geogebra como el geómetra para ir generalizando las acciones a diversos asistentes matemáticos.

- Desarrollar sesiones de trabajo para revisar las cualidades y potencialidades de los dos programas.

Por presiones del tiempo fue imposible agotar esta, de manera que quedó como trabajo individual profundizar en este sentido. Sin embargo, es necesario tratar de hacerlo de manera presencial utilizando formas típicas de exposición, ejemplificación e ilustración para mostrar cualidades como la interactividad, flexibilidad, extensibilidad, y transposición didáctica que caracterizan la dinámica que adquiere el proceso en que participen estas tecnologías.

- Analizar la unidad que se quiera abordar.

Se trabajó en la Unidad de geometría del 7º grado. Se revisaron, entonces, los documentos que recogen orientaciones metodológicas al respecto, de manera que facilitara la obtención de ideas relacionadas con el empleo de las cualidades y potencialidades del programa computarizado.

- Valorar los resultados del diagnóstico integral aplicado por los profesores.

Aquí se tuvo en cuenta su evolución en lo que iba de curso y en particular de la unidad, así como de las experiencias de los profesores al impartir estos contenidos. Además, se consideraron las condiciones reales de utilización de los laboratorios de computación por los estudiantes y profesores.

- Diseñar las actividades por desarrollar.

Esto se hizo de manera que se tuvieran presentes los presupuestos teóricos de base.

- Realizar sesiones de trabajo con los alumnos en el laboratorio de computación.

Esto fue crucial para enseñarlos a interactuar con los programas, a la vez que se diagnosticaban los conocimientos de los alumnos sobre los principales conceptos de los entes y figuras que serían objeto de estudio. La intención es que todos sean capaces de llegar a estos niveles en que, además de su pensamiento, utilizan herramientas acordes al desarrollo tecnológico existente para la solución de los problemas.

- Implementar las actividades diseñadas.

El trabajo en colectivo para establecer cómo concebir el desarrollo de las actividades propició sugerir las siguientes orientaciones metodológicas:

2.2.2. Orientaciones metodológicas para ejecutar las actividades

Acorde con las actividades se sugiere la formación de equipos de tres o cuatro alumnos de manera que se puedan distribuir las tareas para los diferentes casos, según el diagnóstico, complejidad de las actividades y el tiempo disponible para su ejecución, así como realizar oponencias del trabajo de un equipo a otro. Lo que se busca es garantizar un proceso didáctico que promueva el ejercicio de la comunicación, la interacción y la crítica sobre las propias soluciones, como condición necesaria para un aprendizaje desarrollador.

La orientación constituye un momento importante para el éxito del aprendizaje, el profesor debe quedar bien seguro que los alumnos han comprendido qué deben hacer, por lo que el control de la asimilación de las orientaciones dadas es indispensable. Aquí es importante que se valore el dominio de los conceptos implícitos necesarios para enfrentar cada actividad, de no dominarse se recomienda la búsqueda de los mismos por diferentes vías.

Se deben concebir sesiones de trabajo donde se socialicen los procesos empleados para llegar a los resultados, así como los propios resultados. De tal forma es posible dar seguimiento individual y colectivo a los estudiantes en su aprendizaje. Además, esto contribuye a que se eduquen en ejercer la crítica y la autocrítica, el establecimiento de juicios de valor, se autoevalúen y coevalúen, además de entrenarse en el uso del vocabulario técnico de la asignatura. Es recomendable utilizar la opción "Histórico" lo que posibilitará describir el procedimiento seguido, que servirá también como controlador del mismo.

Las actividades deben ser combinadas con las consultas y estudios de los aspectos teóricos que aparecen en las enciclopedias del programa libertad y en soporte electrónico encarta, ecured, Wikipedia, con que se cuenta en las escuelas, además de los libros; donde tengan que elaborar resúmenes y fichas de contenido. Estos pueden anteceder o no la actividad asignada según sea el caso. Se sugiere que realicen tablas para sus anotaciones, las que

les facilitarán el análisis de la información.

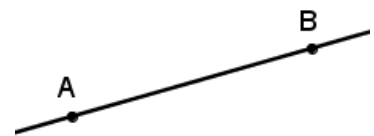
Es recomendable implicar al estudiante en la elaboración de sus propias macro construcciones, que le facilitarían su propio estudio individual y reforzaría la solidez del aprendizaje.

El planteamiento de las actividades debe de tener presente los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico (reconocimiento, análisis, clasificación, deducción formal y rigor) con sus fases (información, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración) y la formación por etapas de las acciones mentales (Elaboración de la BOA de tercer tipo, formación de la acción de forma material, formación de la acción como verbal externa y formación de la acción en el lenguaje interno).

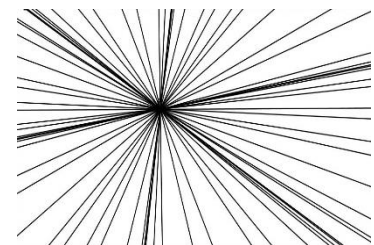
2.2.3. Ejemplos de actividades diseñadas

Para sistematizar algunos de los axiomas de incidencia.

- 1- a) Traza dos puntos diferentes. b) Construye una recta que pase por estos dos puntos. c) Construye otra recta distinta a la anterior que pase por estos dos puntos. ¿Es posible? ¿A qué conclusión llegas?



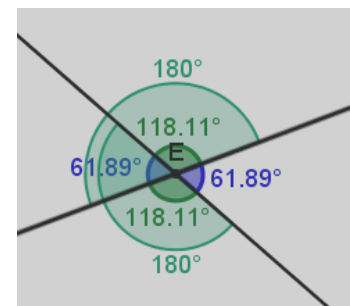
- 2- a) Traza un punto y denótalo. b) Traza una recta que pase por el punto anteriormente trazado. (NOTA: Recuerda que las rectas deben trazarse a partir de dos puntos diferentes). c) Traza varias rectas que pasen por dicho punto. d) ¿Cuántas rectas será posible trazar que pasen por un punto? Elabora una proposición que exprese la conclusión a la que arribas.



Puedes comprobar los casos anteriores a través del doblado de papel, siguiendo un procedimiento similar, lo único que tendrás es que doblar el papel tantas veces de manera que se cumpla, pase por el (o los) puntos seleccionados. Verás que resulta interesante.

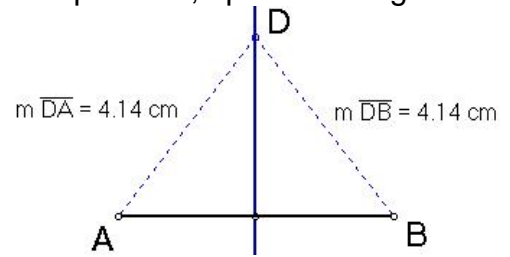
Para relaciones de ángulos entre rectas.

- 3- a) Traza dos rectas que se corten en un punto. Señaliza el punto de intersección. b) Identifica y marca los ángulos, clasifícalos en opuestos por el vértice y ángulos adyacentes. c) Mide las amplitudes de estos ángulos. Mueve por uno de los puntos las rectas. d) A partir de la observación y el análisis del comportamiento de las medidas de los pares de ángulos opuestos por el vértice y



adyacentes ¿a qué conclusión llegas? ¿Qué ocurre cuando uno de los ángulos mide 90° ? ¿Qué relación de posición tienen las rectas?

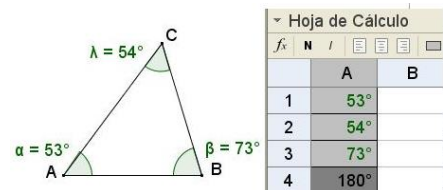
Los propios estudiantes, con adecuada dirección del profesor, pueden llegar al planteamiento de conjeturas sobre las propiedades de la mediatriz de un segmento. Esta actividad, conjuntamente con la número 9, se desarrolló en Geómetra para mostrar también sus potencialidades.



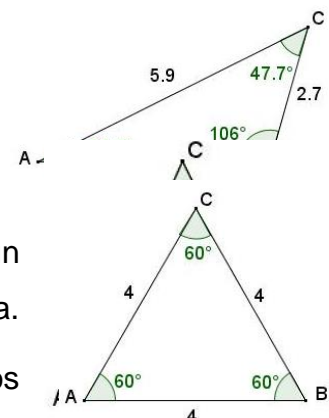
- 4- a) Trazar un segmento y denotar sus extremos. b) Traza la mediatriz de ese segmento. ¿Qué aspectos tuvieron en cuenta para trazarla? c) Seleccionar un punto de la mediatriz de manera arbitraria. d) Medir la distancia del punto sobre la mediatriz a los extremos del segmento, desplaza dicho punto sobre la mediatriz y ve anotando la variación de las distancias, ¿Qué ocurre? ¿A qué conclusión llegas?

Luego, cuando estudien los criterios de igualdad de triángulos podrán realizar una demostración de esta propiedad, apoyándose en estos criterios. Por el momento se puede realizar la búsqueda de todos los elementos iguales, tanto en el triángulo grande formado por los extremos del segmento y el punto seleccionado sobre la mediatriz, como en los dos pequeños que determina la mediatriz, reconocerlos, clasificarlos acorde con la amplitud de sus ángulos, la longitud de sus lados, de manera que se pueda ir sistematizando los conocimientos y preparando el camino para formas de pensamiento más formales. Un trabajo similar se puede realizar con la bisectriz de un ángulo.

La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es otra de las temáticas más ricas para realizar el planteamiento de suposiciones o conjeturas y llegar a la proposición a partir de la intuición con el apoyo de este tipo de software.



- 5- a) Construye un triángulo cualquiera y denótalo. b) Mide la amplitud de sus ángulos interiores y calcula su suma. c) Mueve dos de los vértices de manera que obtengas diferentes triángulos. d) Observa como varían las amplitudes de los ángulos interiores. ¿Qué sucede con la suma de dichas amplitudes? e) Valora a partir de los resultados anteriores si son posibles estos casos: tener dos ángulos obtusos, dos ángulos rectos, un ángulo obtuso y uno recto. En cada caso justificar la respuesta.



En el estudio de la relación entre los lados de un triángulo y los

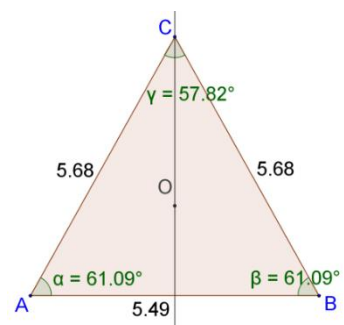
ángulos opuestos el geogebra, el geómetra y otros muchos más asistentes matemáticos brindan posibilidades muy interesantes para llegar a elaborar la proposición de que en todo triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente.

- 6- a) Traza un triángulo y denótalo. a) Mide sus lados y sus ángulos. b) Observa el lado de mayor longitud y compara la amplitud del ángulo que se le opone con el resto de las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo ¿qué sucede? b) Observa el lado de menor longitud y compara la amplitud del ángulo que se le opone con el resto de las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo ¿qué sucede? c) Mueva los vértices del triángulo y verifica si sigue cumpliéndose esa relación. ¿A qué conclusión llegas? d) Trata de lograr, moviendo dos vértices del triángulo la igualdad de dos lados. ¿Qué sucede con las amplitudes de los ángulos opuestos a esos lados? e) Repite la operación pero de manera que se igualen otro par de lados diferentes al caso anterior y observa qué sucede. ¿y si se igualan los tres lados qué sucede con los ángulos? g) ¿A qué conclusión llegas?

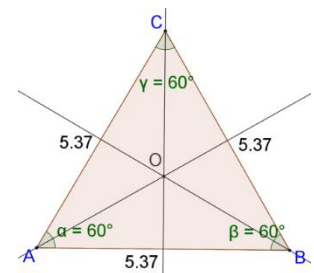
Para el estudio de las rectas notables y sus propiedades.

7- Mediatriz:

- a) Traza un triángulo definido por tres puntos y denótalos.
- b) Traza la mediatriz de uno de los lados del triángulo. ¿Qué aspectos tuvieron en cuenta? (Recordar las propiedades y mostrar variaciones del triángulo para confirmar su generalidad).
- c) Fíjate en la mediatriz trazada. ¿Pasa por el vértice opuesto al lado? (Como regularidad no lo hace)
- d) Mueve dicho vértice opuesto hasta lograr que el mismo se encuentre situado sobre la mediatriz. ¿Es posible? ¿Qué sucede con las longitudes de los lados que conforman el vértice? ¿Qué sucede con las amplitudes de los ángulos correspondientes a los otros vértices? ¿Qué tipo de triángulo sería? (Sí es posible, y tanto las longitudes como las amplitudes son iguales porque sería un triángulo isósceles)
- e) Transforma el triángulo de manera que varíe la longitud del lado al cual se ha construido la mediatriz y se mantenga la condición dada en el inciso d). ¿A qué conclusión puedes llegar?

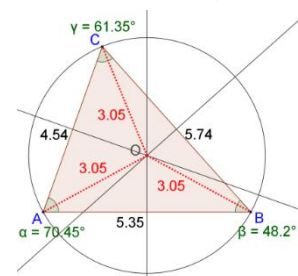


- f) Traza la mediatriz de otro lado. ¿Qué relación de posición tienen las dos mediatrices trazadas? (Se cortan o intersecan en un punto)
- g) Traza la mediatriz del tercer lado. ¿Qué sucede con las tres mediatrices? (Se cortan o intersecan en un único punto común)
- h) Transforma el triángulo en otro cualquiera, moviendo uno o dos de los vértices ¿Qué sucede con las tres mediatrices? (Se mantiene la relación de posición)
- i) Si las tres mediatrices tuvieran un punto común de intersección denótalo por O. Trata de lograr que las tres mediatrices pasen por los vértices opuestos. ¿Es posible? ¿Qué ocurre con las longitudes de los lados y las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo? Clasifica el triángulo. (Sí es posible, y tanto las longitudes como las amplitudes son iguales porque sería un triángulo equilátero, y por tanto acutángulo)

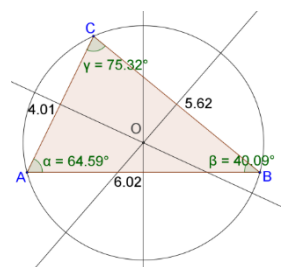


- j) Mueve los vértices del triángulo hasta lograr que los tres ángulos interiores sean diferentes. Traza los segmentos que tienen un extremo en el punto O y el otro en cada uno de los vértices del triángulo. Mide la longitud de estos segmentos. Compara estas longitudes y diga cómo son. ¿Qué puede decir del punto O y los vértices del triángulo? (Las longitudes son iguales y el punto O es equidistante de los vértices)

- k) Mueve los vértices del triángulo para ver qué pasa con la relación de los segmentos medidos en el inciso anterior. ¿Se mantiene o no? (Se mantiene)

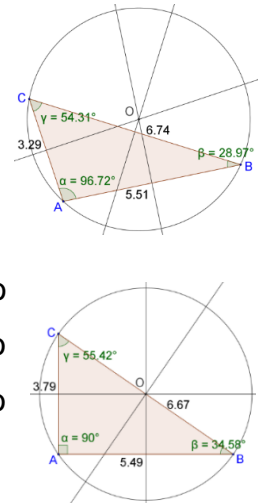


- l) Traza la circunferencia definida por el punto O como centro y cualquiera de los vértices del triángulo. ¿Qué sucede? ¿Cómo se llama esta circunferencia trazada con respecto al triángulo? (Como el punto O equidista de los tres vértices es el circuncentro del triángulo, es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del mismo, la que se llama circunferencia circunscrita)



- m) Mueve los vértices del triángulo. ¿Se mantiene la relación de posición entre estos y la circunferencia trazada? (Se mantiene)

n) Mueve los vértices del triángulo hasta que el punto O sea: interior al triángulo; exterior al mismo; esté sobre uno de sus lados. ¿Es posible? ¿Qué sucede en cada caso? ¿En el tercer caso qué amplitud tiene el ángulo opuesto a este lado? ¿Qué generalidad puedes verificar con respecto a la clasificación del triángulo teniendo en cuenta la amplitud de sus ángulos? (Sí es posible en cada caso y en el tercero se verifica el teorema de Thales. Como generalidad el triángulo es acutángulo, obtusángulo o rectángulo si el circuncentro es respectivamente un punto interior, exterior o está sobre uno de sus lados)



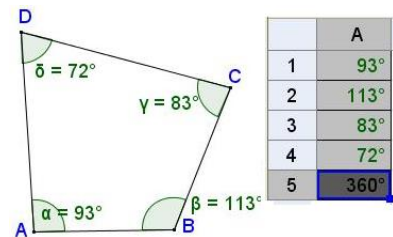
o) ¿Con todo el trabajo realizado hasta aquí a qué conclusiones llegan?

Otras interrogantes posibles serían: ¿Puede una mediatriz coincidir con alguno de los lados del triángulo? ¿Es siempre el circuncentro de un triángulo un punto interior de dicho triángulo? ¿Puede coincidir con alguno de sus vértices? ¿Puede estar situado en alguno de sus lados? Si el circuncentro está en un lado del triángulo ¿cómo se clasifica el triángulo atendiendo a la amplitud de sus ángulos? ¿y atendiendo a la longitud de sus lados?

De manera similar se pueden realizar para el resto de las rectas notables con la adecuación a las características de cada una.

Para realizar el planteamiento de suposiciones o conjeturas y llegar a la proposición a partir de la intuición, sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero convexo.

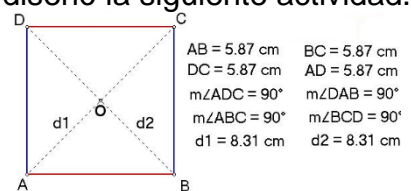
8- a) Traza un cuadrilátero convexo cualesquiera y denotarlo. b) Mide las amplitudes de sus ángulos. c) Determina la suma de las amplitudes de sus ángulos. d)



Transforma el cuadrilátero construido, moviendo dos o tres vértices, en los diferentes tipos de cuadriláteros que conoces. e) Anota cómo se comporta la suma de las amplitudes de los ángulos interiores. ¿A qué conclusiones llegas?

Al abordar algunas de las propiedades del paralelogramo se diseñó la siguiente actividad.

9- a) Construye un paralelogramo y denota sus vértices. b) Traza las diagonales del mismo y determina la longitud de estas y la amplitud del ángulo agudo que se forma entre ellas. c) A partir del movimiento de tres vértices transforma el paralelogramo dado en: Rectángulos de

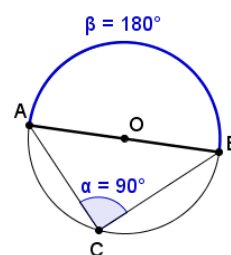
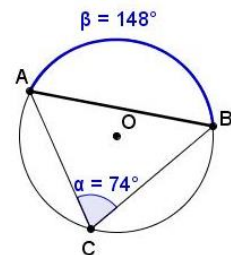


- * Los lados y ángulos opuestos son iguales.
- * Los ángulos consecutivos son suplementarios.
- * Las diagonales se intersectan en su punto medio
- * Las diagonales son iguales.
- * Sus cuatro ángulos son rectos.
- * Las diagonales son iguales

diferentes tamaños. Cuadrados de diferentes tamaños. En rombos de diferentes tamaños. d) Anota en cada caso, según la tabla sugerida, el valor de las longitudes de las diagonales y la amplitud del ángulo que ellas forman, realiza un análisis de las anotaciones realizadas. ¿Qué puedes decir en cada caso?

Estos recursos didácticos también son muy útiles en el trabajo con propiedades de los ángulos inscritos en una circunferencia. Para llegar a la igualdad de las amplitudes de ángulos inscritos sobre un mismo arco, así como elaborar el teorema de Thales sobre los triángulos que tienen un ángulo interior inscrito sobre el diámetro, se pueden utilizar actividades como la siguiente.

- 10-a) Construye una circunferencia de centro O y cualquier radio. b) Traza un arco y designa sus extremos por A y B respectivamente. c) Selecciona un tercer punto que pertenezca a la circunferencia, denótalo por C. d) Determina la amplitud del ángulo $\angle ACB$. e) Mueve el punto C sobre el arco capaz de AB, observa el comportamiento de la amplitud del ángulo $\angle ACB$ ¿Qué puedes suponer? ¿Cuál es tu conclusión? f) Construye la cuerda AB. ¿Qué sucede si la cuerda llega a ser la máxima (el diámetro)? ¿Qué parte de la circunferencia sería el arco AB? ¿Qué amplitud tiene? ¿Cómo podría enunciar esta proposición?



En cada caso se les debe solicitar a los estudiantes que realicen búsquedas en la bibliografía orientada de proposiciones o propiedades similares o iguales a las que ellos han elaborado. Al mismo tiempo, es imprescindible que estos compartan con los compañeros sus resultados y elaboren proposiciones. Con esto se potencia la etapa verbal, para que los estudiantes interactúen entre ellos y puedan transitar el camino del pensamiento que les permite su entendimiento de los conceptos geométricos a las palabras que deben ofrecer para explicar los rasgos y propiedades a sus compañeros o al profesor, como uno de los factores determinantes en el desarrollo individual de cada uno de ellos, de manera que les permita internalizar dichos conceptos y aplicarlos a lo largo de sus vidas.

Como consecuencia, la base del aprendizaje de los estudiantes no es la simple observación o escuchar la información sobre el tema. Las relaciones, enlaces y procedimientos entre los elementos que componen el contenido de los conceptos involucrados se convierten en una condición necesaria para la acción mental. Se propone estimular la gradual, paulatina y en ocasiones imperceptible conversión de acciones externas a acciones intelectuales internas,

y esto es creado en un proceso que ocurre poco a poco en la interacción entre los estudiantes y profesores, con múltiples situaciones de aprendizaje que contengan ejercicios, problemas y actividades. Lo que se busca es garantizar un proceso didáctico que promueva el ejercicio de la comunicación, la interacción y la crítica sobre las propias soluciones, como condición necesaria para un aprendizaje desarrollador.

2.3. Impacto de implementación de las actividades

La escuela escogida fue el centro de referencia provincial. Al utilizar las herramientas de la estadística matemática para la determinación del tamaño de la muestra objeto de estudio con un muestreo irrestricto aleatorio (MIA), se determinó un tamaño de muestra máximo para un nivel de significación del 95% y un error de muestreo de 0,15. Así, la cantidad de estudiantes seleccionados del 7º grado fue de 36.

Para la determinación de la cantidad de estudiantes por cada grupo para el estudio se utilizó el muestreo estratificado con distribución proporcional (**Tabla 1**) y para la selección el muestreo aleatorio simple. Así se garantizó que la muestra tuviera calidad y tamaño apropiados para hacer mínimos los errores de muestreo y fuera representativa para el estudio que se hizo.

Tabla 1: Distribución de la muestra seleccionada por cada uno de los grados

	Escuela	7º-1	7º-2	7º-3	7º-4	7º-5	7º-6	7º-7	7º	8º	9º
Población	751	30	29	30	29	31	33	30	212	274	265
Muestra	36	5	5	5	5	5	6	5	36	0	0
Frecuencia		0,17	0,17	0,17	0,17	0,16	0,18	0,17	0,17		

Desde el propio inicio de la etapa de familiarización, a los alumnos se le facilitó tiempo de máquina con los programas computarizados, para que fueran elaborando hojas de trabajo donde hicieran construcciones y mediciones de las diferentes figuras planas que conocían. Esto fue provocando en los estudiantes el despertar de un interés no usual hacia la geometría, en la medida en que iban descubriendo las potencialidades de los mismos.

Al comenzar la implementación de las actividades diseñadas se notó que los estudiantes se vieron en la necesidad de hacer un uso frecuente del vocabulario técnico de la asignatura para poder expresar los procedimientos utilizados. Tal escenario facilitó el desarrollo y la fluidez en su utilización, así como la concienciación del empleo de los conceptos implicados.

En este proceso se verificó que la utilización de los asistentes matemáticos como el

geogebra posibilita que el alumno despliegue su conocimiento al abordar los ejercicios, problemas y actividades que se presentan. Al mismo tiempo, este comparte sus conocimientos y necesidades con otros. Esto provocó en los estudiantes cambios de actitud ante la asignatura, sintiéndose descubridores del conocimiento.

Uno de los aspectos más apreciables fue la posibilidad de sistematizar los conocimientos geométricos anteriores. En la implementación de las situaciones de aprendizaje surgieron nuevas discusiones, o posibles interrogantes que podían haber sido incluidas en ellas. Lo que denotó la necesidad de someter bien a debate por parte de los profesores los ejercicios diseñados.

3. CONCLUSIONES

Los estudiantes de los distintos niveles educacionales en Cuba, junto a los demás involucrados en el proceso didáctico de la matemática, necesitan un salto cualitativo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría. Esto permite optimizar esta actividad con el desarrollo de un nuevo tramado de relaciones orientado a considerar la incorporación de las nuevas tecnologías de información y la comunicación en la implementación de situaciones dirigidas a la actualización didáctica que se necesita para desarrollar clases contemporáneas, en un proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática acorde con el desarrollo tecnológico actual.

Las actividades propuestas tienen como bases los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico, la formación por etapas de las acciones mentales y la didáctica para un aprendizaje desarrollador. Esto prepara al estudiante para enfrentar una forma de pensamiento de un nivel de desarrollo más formal; permite el manejo del vocabulario técnico de la asignatura, en tanto que tiene que compartir o socializar lo aprendido, lo cual también favorece lo desarrollador y posibilita la sistematización de los conocimientos, pues los alumnos siempre tendrán que partir de los elementos más elementales a los más complejos.

Es necesario que los profesores pongan en ejercicio todas sus capacidades, esfuerzos y voluntad para el cambio de una nueva forma de pensar y actuar, como parte de las transformaciones que se vienen desarrollando en la educación secundaria básica actual, y la disponibilidad de nuevos medios y recursos. La propuesta que se presenta en este artículo puede contribuir a ello, pues promueve clases en las que los estudiantes ofrecen y reciben ayudas entre ellos, en función de sus diferentes zonas de desarrollo próximo. Esto

se logra a partir de una planificación que contempla también la esfera inductora de la personalidad de los estudiantes que participan, en un proceso de colaboración que involucra sus particularidades.

4. REFERENCIAS

- Ballester, S. (2013). Aprendiendo a aprender Matemática con ayuda del Geogebra. CD-ROM XIV Evento Internacional MATECOMPU 2013, Matanzas Cuba.
- Coloma, O. (2015). Conferencia temática: Competencias tecnológicas para docentes ¿Cuáles, cuándo y cómo? En Memorias del Congreso Internacional de Pedagogía 2015. Palacio de las Convenciones. La Habana. Cuba.
- Escalona, M. (2007). El uso de recursos informáticos para favorecer la integración de contenidos en el área de ciencias exactas del preuniversitario. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Holguín Cuba.
- Gamboa, R. y Vargas, G. (2013). El Modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94.
- Joaquim, O. (2014). Alternativa didáctica para el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones lineales a partir de las acciones mentales de la teoría de Galperin. CD de Memorias de la Primera Jornada Científico-Metodológica "Impacto de la Maestría en Didáctica de la Educación Superior en la República de Angola". Las Tunas. Cuba.
- Juárez-Barrera, J. B. y Bonilla-Sánchez, M. R. (2014). Corrección neuropsicológica en las dificultades de la expresión y la comprensión del lenguaje. *Pensamiento Psicológico*, 72(2), 113-127.
- Portilla, Y. (2012). La ejercitación del aprendizaje mediante software educativo. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Universidad de Ciencias Pedagógicas "José de la luz y Caballero", Holguín.
- Rojas, O. (2009). Modelo didáctico para favorecer la enseñanza aprendizaje de la Geometría del espacio con un enfoque desarrollador. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Instituto Superior Pedagógico "José de la luz y Caballero", Holguín.
- Van Hiele, P. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310-316.
- Velázquez E. A., Ulloa L. G., Hernández J. L. (2011) Hacia un aprendizaje reflexivo. Por una Educación mejor y más eficiente. Alemania: Editorial Académica Española.