ELLIPTIK TENGLAMA UCHUN ND_1 MASALASI GRIN FUNKSIYASINING BAHOSI HAQIDA

Sayfullayeva Shahlo Shavkatovna

Buxoro davlat universiteti, Fizika-matematika fakulteti talabasi

Annotatsiya. Maqolada Laplas va Puasson hamda buzilish chizig'iga ega elliptik tipga tegishli tenglamalarga keladigan masalalar bo'yicha ma'lumotlar keltirilgan. Puasson tenglamasini umumlashtirilgan holi - ikkita buzilish chizig'iga ega ikkinchi tartibli elliptik tipga tegishli tenglama uchun $\boldsymbol{ND_1}$ masalasining Grin funksiyasi va uning xususiy hosilalari baholangan.

Kalit so'zlar: Puasson tenglamasi, Grin funksiyasi, bir jinsli bo'lmagan tenglama, egilish, potentsiallar nazariyasi, gipergeometrik funksiya, fundamental yechim.

PROBLEM ND_1 FOR ELLIPTIC EQUATION ON THE VALUE OF THE GREEN FUNCTION

Sayfullayeva Shahlo Shavkatovna

Bukhara State University,

Student of the Faculty of Physics and Mathematics

Annotation. The article provides information on issues related to the Laplace and Poisson equations, as well as elliptic type with curvature. A generalized case of the Poisson equation -for an equation belonging to a second-order elliptic type with two perturbation lines, the Green function of the $\boldsymbol{ND_1}$ problem and its partial derivatives are estimated.

Keywords: Poisson equation, Greens function, inhomogeneous equation, bending, potential theory, hypergeometric function, fundamental solution.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilali differentsial tenglamalarning amaliy ahamiyati keng bo'lib, bir qator mexanik, fizik, biologik, kimyoviy va iqtisodiy masalalarni matematik modellari elliptik tipga tegishli tenglamalar orqali ifodalanadi. Elliptik tipga tegishli ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning eng soddalari Laplas va Puasson tenglamalari hisoblanadi. Maqolada avvalo, shu va ikkita buzilish chizig'iga ega tenglamalar elliptik tipga tegishli tenglamalarga keluvchi masalalar haqida ma'lumotlar keltiramiz.

Laplas va Puasson tenglamasi mexanika, issiqlik o'tkazuvchanligi, elektrostatika, gidravlika kabi ko'plab fizik masalalarni matematik modelini tuzishda paydo bo'ladi. Laplas operatori kvant fizikasida, xususan, Shredinger tenglamasi uchun ham katta ahamiyatga ega. Bu tadbiqlarni kengroq bayon qilamiz [1, 77 bet]:

- izotrop jismda issiqlik manbalari va issiqlik yutuvchilar bo'lmaganda statsionar temperetura taqsimoti masalasi Laplas tenglamasiga olib keladi, bunda $U -$temperatura bo'lib, koordinatalar funksiyasi sifatida qaraladi;

- agar issiqlik manbalari jismda taqsimlangan bo'lsa va ularning quvvati vaqt o'tishi bilan o'zgarmasa, u holda temperatura Puasson tenglamasini qanoatlantiradi;

- siqilmaydigan suyuqlikning barqaror potentsial oqimi ham Laplas tenglamasiga olib keladi. Potentsial oqim uchun tezlik vektori $V = grand\, U$, bu yerda U tezlik potentsiali. Agar oqimda suyuqlik manbalari va cho'kmalari bo'lmasa, u holda $U -$ Laplas tenglamasini qanoatlantiradi; taqsimlangan manbalar va cho'kmalar mavjud bo'lganda, tezlik potentsiali Puasson tenglamasini qanoatlantiradi;

- elektrostatik maydonning potentsiali zaryad bo'lmagan maydonda Laplas tenglamasini va uzluksiz taqsimlangan zaryadlar maydonida Puasson tenglamasini qanoatlantiradi;

- Nyuton tortishish maydonining potentsiali tortishish masalalari bo'lmagan maydonda Laplas tenglamasini va taqsimlangan tortishish massalari mavjud maydonda Puasson tenglamasini qanoatlantiradi;

- prizmatik sterjenning elastik buralish masalasi buralish funksiyasi deb ataladigan funksiyaga nisbatan ikki o'lchovli Laplas tenglamasiga keltiriladi. Bu funksiya va uning hosilalari orqali kuchlanish va deformatsiyalar ifodalanadi. Prizmatik sterjenni egish masalasi ham ikki o'lchovli Laplas tenglamasi orqali ifodalanadi;

- statik membrana egilishlari masalasi ikki o'lchovli Puasson tenglamasiga keltiriladi, bunda $U-$ membrananing egilishi, $f(x,y)-$ funksiya esa tashqi yukning intensivligining membrana kuchlanishiga nisbati;

- buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tenglamalar esa filtratsiya nazariyasida bir jinsli bo'lmagan g'ovakli qatlamlar orqali massa o'tish jarayonlarini o'rganishda, zamonaviy kosmologiyada materiyaning holatlarini ko'rib chiqishda uchraydi.

Izoh: bu yerda

$$grand\ U = \frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k,$$

$i, j, k -$ koordinata ortlari.

Chapligin S.A. o'zining «Gaz oqimlari to'g'risida» (O gazovix struyax) asarida gazning tovush tezligidan yuqori tezlikka o'tish sharoitida harakati aralash tipdagi tenglama bilan ifodalanishini ko'rsatgan [2]:

$$K(y)U_{xx} + U_{yy} = 0 \ \ (K(0) = 0, K'(y) > 0).$$

Izoh: 1) bu tenglama hozirgi vaqtda Chapligin S.A. nomi bilan yuritiladi; 2) aralash turdagi tenglamalar haqida to'liq ma'lumot [3, 4] adabiyotlarda batafsil berilgan.

Chapligin S.A. tenglamasining xususiy holi - italiyalik olim Trikomi F. nomi bilan ataluvchi [3]

$$yU_{xx} + U_{yy} = 0$$

tenglama (bitta buzilish chizig'iga ega bo'lgan aralash tipdagi tenglama ham deb ataladi) hisoblanadi.

Trikomi tenglamasi bo'yicha olib borilayotgan izlanishlarning xususiyati shundaki, bu tenglamaga qo'yilgan chegaraviy masalani o'rganishda qo'llanilgan matematik usulni Chapligin S.A. va boshqa yanada murakkabroq bo'lgan tenglamalarga ham qo'llash mumkin.

Trikom tenglamasiga oid fundamental ilmiy izlanishlar asosan yigirmanchi asrning 20-30-yillarida boshlangan. Bu yillarda asosan Chapligin S.A. [2] va Trikomi F. [3] tomonidan fundamental natijalarga erishilgan.

Izoh: Laplas va Puasson tenglamalari matematik fizika tenglamalari ichida eng soddalaridan biri bo'lishiga qaramay, uning yechimini topishda qiyinchiliklarga duch kelinadi. Ayniqsa, funksiyalarning regulyar bo'lmasligi va turli maxsusliklar mavjudligi sababli sonli yechimini hisoblash qiyin bo'ladi. Buzilish chizig'iga ega tenglamalarning sonli yechimlari topish esa undan ham murakkab bo'ladi (internet ma'lumot: ttps://www.dissercat.com/content/chis-lennoe-reshenie-kraevykh-zadach-dlya-vyrozhdayushchikhsya-uravnenii-metodom -konechnykh-r).

[4-6] ilmiy maqolalarda ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan aralash tipdagi tenglamalar

$$yU_{xx} + xU_{yy} = 0,$$

$$signy|y|^m U_{xx} + signx|x|^m U_{yy} = 0, m = const > 0,$$

$$signy|y|^m \; U_{xx} + signx|x|^n \, U_{yy} = 0, m, n = const > 0$$

uchun fundamental ishlar olib borilgan.

Bu tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalar bo'yicha olib borilgan izlanishlarda qo'llanilgan matematik usullar ham universal bo'lib, ushbu usullarni bu tenglamalardan ham ko'ra murakkabroq tenglamalarni yechishda qo'llash mumkin.

[7] ilmiy izlanishda

$$y^m U_{xx} + x^m U_{yy} = f(x,y), \qquad m = const > 0 \tag{1}$$

tenglama uchun $\boldsymbol{ND_1}$ chegaraviy masalasining regulyar yechimi topilgan:

$$U(x,y) = -\iint_{\Omega} f(\xi,\eta) G_3(\xi,\eta;x,y) d\xi d\eta,$$

bunda $G_3(\xi,\eta;x,y) - \boldsymbol{ND_1}$ chegaraviy masalasi uchun Grin funksiyasi bo'lib, quyidagi ko'rinishga ega [6]:

$$G_3(\xi,\eta;x,y)=q_3(\xi,\eta;x,y)-(r_0^2)^{-2\beta}q_3(\xi,\eta;\ \bar{x},\bar{y}) \qquad (2)$$

$$q_3(\xi,\eta;x,y)=k_3\frac{y\eta}{r^2}F_2(1,\beta,1-\beta,2\beta,2-2\beta,\sigma_1,\sigma_2),$$

$$k_3=\left(\frac{2}{p}\right)^2\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2\beta)\Gamma(2-2\beta)},\sigma_1=\frac{r^2-r_1^2}{r^2},\sigma_2=\frac{r^2-r_2^2}{r^2},r^2$$
$$=(\xi^p-x^p)^2+(\eta^p-y^p)^2,$$

$$r_{1,2}^2=(\xi^p\mp x^p)^2+(\eta^p\pm y^p)^2,\ \ r_{3,4}^2=(\xi^p\pm x^p)^2+(\eta^p\pm y^p)^2,$$

$r_0^2=x^{2p}+y^{2p},\quad \bar{x}^p=\ x^p/r_0^2\ ,\quad \bar{y}^p=\frac{y^p}{r_0^2},\quad F_2(a,b;c;d;e;z)-$ Gaussning ikki o'zgaruvchili gipergeometrik funksiyasi [4, 69 bet].

Grin funksiyasi (2) murakkab bo'lib, uni va hosilalarini bahosi (1) tenglamaning kvazichiziqli holi uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarni o'rganishda muhim ahamiyat kasb etadi. Aytish joizki, nafaqat kvazichiziqli hol uchun, balki chiziqli tenglamalar uchun lokal va nolokal chegaraviy masalalarni o'rganishda ham keng qo'llaniladi. Masalan, yechimni sifatiy tahlil qilishda, berilgan funksiyalar orqali ifodalangan tenglamaning yechimida qatnashayotgan funksiyalarni (tenglamaning yechimi yozilganda berilgan funksiyalar Grin funksiyasi bilan birgalikda kasr tartibli integral va differentsial operatorlar ostida keladi) o'rganishda qo'llaniladi.

Quyidagi lemma o'rinli.

Lemma 1. Grin funksiyasi (2) va uning hosilalari uchun quyidagi baholar o'rinli:

$$|G_3(\xi,\eta;x,y)|\le C|lns|/\left(r_1^{2\beta}r_2^{2\beta}\right), \qquad (3)$$

$$|G_{3x}(\xi,\eta;x,y)|\le C/\left(r_1^{2\beta}r_4\right), \qquad (4)$$

$$\left|G_{3y}(\xi,\eta;x,y)\right|\le C/\left(r_2^{2\beta}r_4\right), \qquad (5)$$

bunda $C=$ const va berilgan funksiyaga bog'liq aniq son.

Izoh. $C-$ berilgan funksiya va parametrlarga bog'liq, lemmani isboti davomida uning qiymati aniq yozib ko'rsatiladi.

Isbot. Tengsizliklarni isbotlash uzoq hisoblashlarni bajarishni talab qiladi. Agar birorta bahoni, masalan (3) ni isbotlasak, qolganlari ham shu usuldan foydalanib ko’rsatiladi. Tengsizliklarni (3) baho misolida isbotlab ko’rsatamiz.

Ikki o’zgaruvchili gipergeometrik funksiyaning xossasidan [4, 15 bet] foydalanamiz:

$$F_2(a,b,b',a,a;\sigma_1,\sigma_2)=(1-\sigma_1)^{b-1}(1-\sigma_2)^{b'-1}F\left(b,b',a;\frac{\sigma_1\sigma_2}{(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}\right)$$

ekanligidan

$$q_3(\xi,\eta;x,y)=\frac{\kappa_3}{16^{1-2\beta}}(1-s)^{1-2\beta}(r_1^2r_2^2)^{-\beta}F(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;1-s)$$

ga tenglikka ega bo`lamiz, bunda

$$1-s=\frac{16(xy\xi\eta)^{\mathrm{p}}}{r_1^2r_2^2}.$$

(2) ni inobatga olsak

$$|G_3(\xi,\eta;x,y)|\le|q_3(\xi,\eta;x,y)|+\left|(r_0^2)^{-2\beta}q_3(\xi,\eta;\ \bar{x},\bar{y})\right| \qquad (6)$$

tengsizlikni topamiz. Endi (6) dagi ifodalarning har birini alohida-alohida baholaymiz.

$F(a,b,c;z)$ funksiyani integral ko’rinishi [4, 13 bet] va shu funksiya uchun [4, 14 bet] bahoni e’tiborga olib

$$|q_3(\xi,\eta;x,y)|=\kappa_3(1-s)^{1-2\beta}(r_1^2r_2^2)^{-\beta}B^{-1}(1-\beta,1-\beta)\cdot$$

$$\left|\int_0^1 t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}(1-(1-s)t)^{\beta-1}dt\right|\le\bar{C}_1xy\xi\eta(r_1^2r_2^2)^{\beta-1}\cdot lns\le$$

$$\le C_1\,|lns|/\left(r_1^{2\beta}r_2^{2\beta}\right)$$

ekanligini topamiz, bunda

$$s=\frac{r_1^2r_2^2}{r_3^2r_4^2},\qquad C_1=16^{1-2\beta}\kappa_3B^{-1}(1-\beta,1-\beta).$$

(6) dagi ikkinchi hadni baholash uchun r_0^2 –ni ikki holini qaraymiz (maxsus nuqtalar $O(0{,}0),A(1{,}0),B(0{,}1)$ atroflarida): a) $0\le r_0^2\le\delta^2$ va b) $\delta^2<r_0^2\le1$, bunda $0<\delta\le1/8$. Chegaraning qolgan qismlarida Grin funksiyasida maxsusliklar

bo'lmaydi. Maxsusliklar, asosan yuqorida aytib o'tilganidek, shu uchta nuqta atrofida bo'ladi.

a) holni qaraylik. $r_0^2 \leq \delta^2$ bo'lsin. $1/r_0$ ni $(r_0^2)^{\beta} q_1(\xi, \eta; x, y)$ ifodadan qavsdan tashqari chiqarib, qisqartirib yuboramiz.

$$1 - s = 16(\xi \eta x y)^p / (r_{11}^2 r_{21}^2)$$

ekanligi va $F(a, b, c, z) -$ gipergeometrik funksiyani integral ko'rinishini [4, 13 bet] e'tiborga olib, (6) dan

$$\left|(r_0^2)^{-2\beta} q_2(\xi, \eta; \bar{x}, \bar{y})\right| \leq C_1 x y \xi \eta (r_{11}^2 r_{21}^2)^{\beta-1} B^{-1}(1-\beta, 1-\beta) \times$$

$$\int_0^1 t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}(1-(1-s)t)^{\beta-1}\, dt \leq C_1 |ln\bar{s}| / (r_{11}^2 r_{21}^2)^{\beta}$$

bo'lishini topamiz, bunda $s = (r_{11}^2 r_{21}^2)/(r_{31}^2 r_{41}^2)$,

$$r_{11}^2 = (1 - \xi^p x^p)^2 + \eta^{2p} r_0^2 + 2\eta^p y^p + \xi^{2p} y^{2p},$$

$$r_{21}^2 = (1 - \eta^p y^p)^2 + \xi^{2p} r_0^2 + 2\xi^p x^p + \eta^{2p} x^{2p},$$

$$r_{31}^2 = (1 + \xi^p x^p)^2 + \eta^{2p} r_0^2 + 2\eta^p y^p + \xi^{2p} y^{2p},$$

$$r_{41}^2 = (1 - \xi^p x^p)^2 + \eta^{2p} r_0^2 - 2\eta^p y^p + \xi^{2p} y^{2p}.$$

$r_0^2 \leq \delta^2$ ekanligidan $(1-\delta)^2 \leq r_{11}^2$, $(1-\delta)^2 \leq r_{21}^2$, $1 \leq r_{31}^2$, $\delta \leq r_{41}^2$ bo'lishi ko'rinib turibdi. $r_0^2 \leq \delta^2$ bo'lgan hol uchun

$$\left|(r_0)^{-2\beta} q_3(\xi, \eta; \bar{x}, \bar{y})\right| \leq \frac{\delta^{2-4\beta} C_1}{(1-\delta)^{4-4\delta}}$$

bahoga ega bo'lamiz.

Endi $\delta^2 < r_0^2 \leq 1$ bo'lgan holini ko'rib chiqamiz.

$$r_{12,22}^2 = (\xi^p \pm \bar{x}^p)^2 + (\eta^p \pm \bar{y}^p)^2,$$

$$r_{32,42}^2 = (\xi^p \pm \bar{x}^p)^2 + (\eta^p \pm \bar{y}^p)^2,$$

$$\bar{x}\xi \leq (\mathrm{r}_{22}^2)^{1-2\beta}, \quad \bar{y}\eta \leq (\mathrm{r}_{12}^2)^{1-2\beta},$$

$$r_{12}^2 \leq r_{32}^2, \; r_i^2 \leq r_{i2}^2 \;\; i = \overline{1,4}$$

va $F(a, b, c, z) -$ gipergeometrik funksiyani integral ko'rinishi [8, 72 bet] ni inobatga olgan holda xuddi yuqoridagi kabi

$$\left|(r_0^2)^{-2\beta} q_3(\xi, \eta; \bar{x}, \bar{y})\right| \leq (\delta^2)^{-2\beta} C_1 |lns| / \left(r_1^{2\beta} r_2^{2\beta}\right)$$

bo'lishini topamiz. Bu baholardan

$$|G_3(\xi,\eta;x,y)| \leq C|lns|/\left(r_1^{2\beta} r_2^{2\beta}\right)$$

ekanligi kelib chiqadi, bunda

$$C = max(2C_1, \ \frac{\delta^{2-2\beta}}{(1-\delta)^{4-4\beta}} C_1, \ 8\,\delta^{-4\beta} C_1).$$

$G_3(\xi,\eta;x,y) -$ funksiyasining x va y o'zgaruvchilar bo'yicha hosilasini hisoblab, (4) va (5) baholar yuqoridagi yo'l orqali ham isbotlanadi.

Izoh: Agar bu olingan bahoni [9] maqolada Grin funktsiyasining bahosi bilan solishtirsak, muallif tomonidan olingan bahoning aniqroq ekanligi ko'zga tashlanadi. Chunki, elliptik tenglamalar uchun fundamental yechimlar logarifmik maxsuslikka ega bo'ladi. Mazkur maqolada Grin funktsiyasi aniqroq baholanganligini ko'rishimiz mumkin.

Elliptik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar amaliy ahamiyatga egaligi tufayli soha mutaxassislarining diqqat markazida turibdi. Masalan, elliptik tipdagi tenglamalar nazariyasi gaz dinamikasi, magnit gidrodinamikasi, cheksiz kichik sirt egilishlar nazariyasi, qobiqlar nazariyasi, yer osti suvlari sathini prognoz qilish va fan va texnikaning boshqa sohalarida ko'plab qo'llanilishi tufayli sezilarli rivojlanishga erishdi. Bundan tashqari, bu nazariya bir qancha qiyin va qiziqarli masalalarni ko'rib chiqishni o'z ichiga oladi. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarni o'rganish yo'nalishda bir qator ilmiy izlanishlar [10-33] olib borilgan.

Kelgusida olingan nazariy natijalarning amaliy tadbiqlarini yanada rivojlantirishga e'tibor qaratilsa maqsadga muvofiq bo'lar edi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Бабич В.М. и др. Линейные уравнения математической физики, Москва, «Наука», 1964, 367 с.
2. Чаплыгин С.А. О газовых струях. – Полное собрание сочинений. Ленинград, Издательство АН СССР, 1933, том 2, 290 с.
3. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 294 с.

4. Салахитдинов М.С., Исломов Б.И. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Ташкент, «Мумтозсуз», 2009, 263 с.
5. Зайнуллабидов М.М. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярным линиями выраждения // Дифференциальные уравнения, 1969. –Т.5. - №1. –С.91-99.
6. Менгзияев Б. некоторые краевые задачи для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения // Дисс. канд. физ.-мат. наук (Библиотека Математического института АН Республики Узбекистан). Ташкент, 1978.
7. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida // Models and methods for increasing the efficiency of innovative research, Germany, 10 (2022), p. 184-186.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Москва, Наука, 1973, т. 1, 294 с.
9. Бозорова Д.Ш. Раупова М.Х. О функции Грина вырождающегося уравнения эллиптического типа // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), с.14-22.
10. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.
11. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1-11.
12. Rasulov Kh.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy // Irish Interdisciplinary Journal of Science & Research (IIJSR), 6:2 (2022), p. 8-14.
13. Rasulov Kh. Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type // Modern problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2021, november, 2021, Fergana, Uzbekistan, p. 149.
14. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.
15. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // «Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения» Международная научная конференция Сборник тезисов Башкортостан РФ (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66.
16. Rasulov X.R. (2020). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // Uzbek Mathematical Journal, №3, p.117-125.

17. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.
18. Rasulov X.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
19. Rasulov H. Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // Центр научных публикаций (buxdu. uz) 5:5 (2021).
20. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа // Ученый XXI века. 53:6-1 (2019), с.16-18.
21. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.
22. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.
23. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
24. Расулов Х.Р. Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения // Бухара, «Дурдона», 2020 г., 96 с.
25. Шукурова М.Ф., Раупова М.Х. Каср тартибли интегралларни ҳисоблашга доир методик тавсиялар // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), 65-76 б.
26. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
27. Жамолов Б.Ж., Раупова М.Х. О функции Римана вырождающегося уравнения гиперболического типа // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), с.23-30.
28. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida // «Zamonaviy ta'lim tizimini rivojlantirish va unga qaratilgan kreativ g'oyalar, takliflar va yechimlar», 35-sonli Respublika ilmiy-amaliy on-line konferensiyasi, 2022, 192-195 b.
29. Rasulov Kh.R., Sobirov S.Zh. A problem of the Gellerstedt type for one mixed-type equation with two lines of degeneration // Scientific progress 2:1 (2021) p. 42-48.

30. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), с. 6-9.
31. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче со смещением для линейного уравнения гиперболического типа // Академик Тошмухаммад Ниёзович Кори-Ниёзийнинг хаёти ва ижоди, чет эл олимлари иштирокида илмий-амалий конференция тезислари тўплами, Тошкент, 2017, 84-85 б.
32. Расулов Х.Р. Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун нолокал масала ҳақида // Аниқ фанларни касбга йуналтириб ўқитиш муаммолари ва ечимлари, Республика илмий-амалий конференция материаллари тўплами, 2018, Навоий, 17-18 б.
33. Расулов Х.Р. Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида // Аниқ фанларни касбга йуналтириб ўқитиш муаммолари ва ечимлари, Республика илмий-амалий конференция материаллари тўплами, 2018, Навоий, 14-15 б.