ISSN 2181-2357

XALQARO NAZARIY VA AMALIY TADQIQOTLAR JURNALI

INTERNATIONAL JOURNAL OF THEORETICAL AND PRACTICAL RESEARCH

JURNAL FARG'ONA POLITEXNIKA INSTITUTI HAMKORLIGIDA NASHR ETILADI

VOLUME 2,
Ussue 1
2022

ISSN 2181-2357

«Al-Ferganus» MChJ Nashriyot markazi.
A. M. Abdullayev
2-tom, 1-son.
«Nazariy va amaliy tadqiqotlar xalqaro jurnali»
Ilmiy jurnal.
Yanvar 2022 y.
2021 yil noyabrdan beri nashr etilmoqda.
Oyiga bir marta nashr etiladi.
16+

Tahririyat manzili: 150107
Farg'ona shahri, Farg'ona ko'chasi, 86 - uy
Тел. +998971003888
https://alferganus.uz/en/site/index
E-mail: alferganus.ltd@gmail.com

Academic Resource Index ResearchBib
IF(Impact Factor) **8.7 / 2021**

Scientific Journal Impact Factor
TOGETHER WE REACH THE GOAL
SJIF 2021: 5,5

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti administratsiyasi huzuridagi axborot va ommaviy kommunikatsiyalar agentligida ro'yxatga olingan.
Ro'yxatga olish № 4446-5760-5988-7507-e628-4252-5710 2021 yil 23 mart.

Xalqaro nazariy va amaliy tadqiqotlar jurnali Crossref, OpenAIRE, Google Scholar bazalariga kiritilgan.

Impact-faktor 2021 Evaluation Pending

Jurnal jahon va mintaqaviy darajada fan va amaliyotning rivojlanish masalalariga bag'ishlangan.
Jurnal olimlar, o'qituvchilar, doktorantlar, talabalar uchun mo'ljallangan.

Nazariy va amaliy tadqiqotlar xalqaro jurnali.
2022. T. 2. №1. https://alferganus.uz

ISSN 2181-2357
9 772181 235007 >

ISSN 2181-2357

Publishing Center «Al-Ferganus» LLC.
A. M. Abdullaev
"International journal of theoretical and practical research"
Scientific Journal.
Published since November 2021.
Schedule: monthly. 16+

Volume 2, Issue 1

January, 2022.

Address of the editorial office:
150107
Fergana city, Fergana str., 86.
Phone +998971003888
https://alferganus.uz/en/site/index
E-mail:
alferganus.ltd@gmail.com

Academic Resource Index ResearchBib
IF(Impact Factor) **8.7** / **2021**

Scientific Journal Impact Factor
TOGETHER WE REACH THE GOAL
SJIF 2021: 5,5

Registered with the Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
Registration No. 4446-5760-5988-7507-e628-4252-5710 dated March 23, 2021.

The journal "International Journal of Theoretical and Practical Research" is included Crossref, OpenAIRE, Google Scholar.

Impact-factor 2021 Evaluation Pending

The Journal addresses issues of global and regional Science and Practice. For scientists, teachers, doctoral students, students.

(2022). International journal of theoretical and practical research, 1(3).
https://alferganus.uz

ISSN 2181-2357
9 772181 235007 >

ISSN 2181-2357

Издательский центр «Al-Ferganus» ООО.
А. М. Абдуллаев
Том 2, Номер 1.
«Международный журнал теоретических и практических исследований»
Научный журнал.
Январь 2022г.
Издается с ноября 2021г.
Выходит один раз в месяц.
16+

Адрес редакции: 150107
г. Фергана, ул. Ферганская, 86
Тел. +998971003888
https://alferganus.uz/en/site/index
E-mail: alferganus.ltd@gmail.com

Academic Resource Index
ResearchBib
IF(Impact Factor) **8.7 / 2021**

Scientific Journal Impact Factor
TOGETHER WE REACH THE GOAL
SJIF 2021: 5,5

Зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрации № 4446-5760-5988-7507-e628-4252-5710 от 23 марта 2021 года.

Журнал «Международный журнал теоретических и практических исследований» включен в Crossref, OpenAIRE, Google Scholar.

Импакт-факторы журнала: 2021 Evaluation Pending

В журнале рассматриваются вопросы развития мировой и региональной науки и практики. Для ученых, преподавателей, докторантов, студентов.

Международный журнал теоретических и практических исследований. 2022. Т. 2. №1.
https://alferganus.uz

ISSN 2181-2357
9 772181 235007 >

TABLE OF CONTENTS

Iqtisodiy fanlar / Economic Sciences/ Экономические науки

INTERNATIONAL JOURNAL OF THEORETICAL AND PRACTICAL RESEARCH
ISSN 2181-2357
T. 2. №1. 2022
SJIF 2021:5.5

Physical and mathematical sciences / Fizika-matematika fanlari / Физико - математические науки

International journal of theoretical and practical research
Scientific Journal
QR-Article
Year: 2022 Issue: 1 Volume: 2
Published: 31.01.2022
http://alferganus.uz

Citation:
Hasanov, A., Kozimova, O. (2022). Solutions to a system of hypergeometric type differential equations in partial derivatives of the third order and its integral representations. SJ *International journal of theoretical and practical research, 2 (1), 159-179.*

Хасанов, А., Козимова, О. (2022). Решения системы дифференциальных уравнений гипергеометрического типа в частных производных третьего порядка и его интегральные представления. *Nazariy va amaliy tadqiqotlar xalqaro jurnali, 2 (1), 159-179.*

Doi: https://dx.doi.org/

Хасанов Анвар
доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики имени В.И. Романовского, АН Республики Узбекистан

Козимова Одина
Наманганский государственный университет

UDC 517.588
Mathematics Subject Classification (2010): 33C20, 35A08, 35M70, 44A45

РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И ЕГО ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Аннотация: *В этой статье изучаются свойства функции Кампе де Ферией от двух аргументов третьего порядка* $F^{1;2;2}_{0;2;2}[x,y]$*. Доказаны интегральные представления и система дифференциальных уравнений в частных производных гипергеометрического типа. Указано, что полученная система гипергеометрического типа в начале координат имеет девять линейно независимые решения.*
Ключевые слова: *Гипергеометрические функции многих переменных, система уравнение гипергеометрического типа, интегральные представления линейно независимые решения***.**

Hasanov Anvar
Dr. Sci. (Math. & Phys.), Professor, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan

Kozimova Odina

Namangan State University

SOLUTIONS TO A SYSTEM OF HYPERGEOMETRIC TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES OF THE THIRD ORDER AND ITS INTEGRAL REPRESENTATIONS

Abstract: *This article studies the properties of the Campe de Feriet function of two arguments of the third order. Integral representations and a system of partial differential equations of hypergeometric type are proved. It is indicated that the resulting system of hypergeometric type has nine linearly independent solutions at the origin.*
Keywords: *Hypergeometric functions of several variables, system of hypergeometric equations, integral representations, linearly independent solutions.*

Введение

Гипергеометрическая функция - обобщение геометрической прогрессии, обладает множеством замечательных свойств, благодаря которым она привлекала внимание математиков в течении по крайней мере двух веков. Изучение этой функции привело Гаусса (Johann Carl Friedrich Gauss) к исследованию вопроса сходимости рядов, Римана (Georg Friedrich Bernhard Riemann) – к задаче об аналитическом продолжении и изучению дифференциальных уравнений с особыми точками.

Название "гипергеометрический" этому ряду дал Валлис (John Wallis) в 1655 году. Позже его изучали Эйлер (Leonard Euler) и Куммер (Ernst Eduard Kummer). Однако, до работ Гаусса это ряд нельзя было называть функцией в современном понимании этого слова. Гаусс доказал сходимость гипергеометрического ряда и следовательно, существование гипергеометрической функции.

Тем не менее, проблемы оставались и после работ Гаусса. Легко понять, что гипергеометрический ряд сходится лишь в единичном круге на комплексной плоскости, в то время как, гипергеометрическая функция может быть аналитически продолжена и за границу этого круга. Проблема - построить аналитическое продолжение гипергеометрической функции на всю комплексную плоскость. Такое аналитическое продолжение можно сделать, изучив свойства решений дифференциального уравнения для гипергеометрической функции.

Большой интерес к теории гипергеометрических функций связано в основном тем, что решение многих прикладных задач, включая задачи теплопроводности и газовой динамики, электромагнитные колебания, квантовой механики и теория потенциала можно получить с помощью гипергеометрических (высших и специальных или трансцендентных) функций [1, 5, 6, 7, 17, 18]. Такие функции часто называют специальными функциями математической физики.

Цель настоящей работы доказать некоторые свойства для наиболее общей гипергеометрической функции двух переменных $F^{1;2;2}_{0;2;2}[x,y]$ третьего порядка, то есть рассматривается функция из класса гипергеометрических функций Кампе де Фериет двух переменных (см. [1, 19]):

$$F^{p:q;k}_{l:m;n}\left[\begin{matrix}(a_p):(b_q);(c_k);\\(e_l):(f_m);(g_n);\end{matrix}x,y\right]=\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{p}(a_j)_{r+s}\prod\limits_{j=1}^{q}(b_j)_r\prod\limits_{j=1}^{k}(c_j)_s}{\prod\limits_{j=1}^{l}(\alpha_j)_{r+s}\prod\limits_{j=1}^{m}(\beta_j)_r\prod\limits_{j=1}^{n}(\gamma_j)_s\, r!s!}x^r y^s, \quad (1.1)$$

область сходимости ряда (1.1) определяется следующим образом:

если $p+q<l+m+1,\ p+k<l+n+1,$ то $|x|<\infty, |y|<\infty,$

если же $p+q=l+m+1,\ p+k=l+n+1,$ то

$$(1.2)$$

$|x|^{\frac{1}{p-l}}+|y|^{\frac{1}{p-l}}<1,$ при $p>l,$

и

$\max\{|x|,|y|\}<1,$ при $p\le l,$

где $\prod\limits_{j=1}^{p}(a_j)_{m+n}=(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}\cdots(a_p)_{m+n}$.

Отметим, что функции Римана и фундаментальные решения вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка выражаются с помощью гипергеометрических функций многих переменных (см. [2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 21]). Поэтому при исследовании краевых задач для этих уравнений в частных производных нам необходимо изучить решение системы гипергеометрических функций и найти явные линейно независимые решения (см. [10, 11, 12, 13]). Функция $F^{p:q;k}_{l:m;n}$ содержит большое количество функций типа Аппеля. Здесь мы выбираем функции $F^{1;2;2}_{0;2;2}[x,y]$ определяемый следующим двойным рядом (см. [1, 19]):

$$F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2;c_1,c_2;\\-;e_1,e_2;f_1,f_2;\end{matrix}x,y\right]=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(e_1)_m(e_2)_m(f_1)_n(f_2)_n\, m!n!}x^m y^n, \quad (1.3)$$

где $a,b_1,b_2,c_1,c_2,e_1,e_2,f_1,f_2\in\mathbb{C}$ постоянные числа, причем e_1,e_2,f_1,f_2 не являются отрицательными целыми числами а $(a)_r=a(a+1)(a+2)\cdots(a+r-1),$ $(a)_0=1,$ $(a)_r=\Gamma(a+r)/\Gamma(a)$ обозначение Похгаммера (Leo Pochgammer), $\Gamma(a)$ - гамма функция Эйлера.

Интегральные представления

Гипергеометрические функции от двух переменных могут выражаться либо интегралами типа Эйлера, либо интегралами типа Лапласа или интегралами Меллина (H.J. Mellin). Такие интегральные представления могут быть найдены во многих случаях, но подынтегральная функция в большинстве из них содержит гипергеометрическую функцию или их произведения.

Естественно, список гипергеометрических функции от двух переменных слишком велико и здесь невозможно привести полный перечень интегральных представлений. Интегральные представления полезны для аналитического продолжения гипергеометрических функции от двух переменных, в теории их преобразования, а также для интегрирования гипергеометрических систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Если использовать разложение в ряд и применить либо интеграл Эйлера первого рода или интеграл второго рода функцию, то получаются интегральные представления для гипергеометрических функции Кампе де Ферием (Kampe de Feriet) от двух переменных.

Теорема 2.1. Если выполняются неравенства $\operatorname{Re} e_1 > \operatorname{Re} b_1 > 0$, $\operatorname{Re} f_1 > \operatorname{Re} c_1 > 0$, то имеет место интегральное представление

$$F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix} a; b_1, b_2; c_1, c_2; \\ -; e_1, e_2; f_1, f_2; \end{matrix} x, y\right] = \frac{\Gamma(e_1)\Gamma(f_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)\Gamma(e_1-b_1)\Gamma(f_1-c_1)}$$
$$\times\int_0^1\int_0^1 \xi^{b_1-1}\eta^{c_1-1}(1-\xi)^{e_1-b_1-1}(1-\eta)^{f_1-c_1-1} F_2(a; b_2, c_2; e_2, f_2; x\xi, y\eta)\,d\xi d\eta, \tag{2.1}$$

где

$$F_2(\alpha;\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m(\gamma_2)_n\, m!n!}x^m y^n,\ \{|x|+|y|<1\}, \tag{2.2}$$

Доказательство. Для доказательства справедливости интегрального представление (2.1), подынтегральную функцию $F_2(a; b_2, c_2; e_2, f_2; x\xi, y\eta)$ заменим по определению (2.2), тогда мы имеем

$$F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix} a; b_1, b_2; c_1, c_2; \\ -; e_1, e_2; f_1, f_2; \end{matrix} x, y\right] = \frac{\Gamma(e_1)\Gamma(f_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)\Gamma(e_1-b_1)\Gamma(f_1-c_1)}$$
$$\times\int_0^1\int_0^1 \xi^{b_1-1}\eta^{c_1-1}(1-\xi)^{e_1-b_1-1}(1-\eta)^{f_1-c_1-1}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b_2)_m(c_2)_n}{(e_2)_m(f_2)_n\, m!n!}(x\xi)^m(y\eta)^n\,d\xi d\eta.$$

Меняя порядок интеграла и суммы, мы находим

$$F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix} a; b_1, b_2; c_1, c_2; \\ -; e_1, e_2; f_1, f_2; \end{matrix} x, y\right] = \frac{\Gamma(e_1)\Gamma(f_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)\Gamma(e_1-b_1)\Gamma(f_1-c_1)}$$
$$\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b_2)_m(c_2)_n}{(e_2)_m(f_2)_n\, m!n!}x^m y^n\int_0^1 \xi^{b_1+m-1}(1-\xi)^{e_1-b_1-1}d\xi\int_0^1 \eta^{c_1+n-1}(1-\eta)^{f_1-c_1-1}d\eta.$$

В силу определения Бета функции Эйлера [6]

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt = B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\ a,b>0,$$

получаем

$$F_{0;2;2}^{1;2;2}\left[\begin{matrix} a;b_1,b_2;c_1,c_2; \\ -;e_1,e_2;f_1,f_2; \end{matrix} x,y\right] = \frac{\Gamma(e_1)\Gamma(f_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)\Gamma(e_1-b_1)\Gamma(f_1-c_1)}$$

$$\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b_2)_m(c_2)_n}{(e_2)_m(f_2)_n m!n!}x^m y^n \frac{\Gamma(b_1+m)\Gamma(e_1-b_1)}{\Gamma(e_1+m)}\frac{\Gamma(c_1+n)\Gamma(f_1-c_1)}{\Gamma(f_1+n)}.$$

Далее, учитывая определение обозначение Похгаммера, после некоторых упрощений, мы убеждаемся в справедливости интегрального представление (2.1).

Замечание. Не специалист в области специальных функцией, вряд ли обратит внимание на красоту, изящность и универсальность интегрального представление (2.1). В самом деле, если учесть частные значения гипергеометрической функции Аппеля $F_2(\alpha;\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y)$ при определенных значениях постоянных, которые были найдены в работе [22]

$$F_2\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2},1;-\frac{1}{2},2;x,y\right) = \frac{2}{y}\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}-(1-x-y)^{\frac{1}{2}}\right], \tag{2.3}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2},1;\frac{1}{2},2;x,y\right) = \frac{2}{y}\left[\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x-y}+\sqrt{x}\left(\arcsin\sqrt{x}-\arcsin\sqrt{\frac{x}{1-y}}\right)\right], \tag{2.4}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2},1;-\frac{1}{2},2;x,y\right) = \frac{2}{y}\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}-(1-y)(1-x-y)^{-\frac{1}{2}}\right], \tag{2.5}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2},1;\frac{3}{2},2;x,y\right) = \frac{1}{y}\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\arcsin\sqrt{x}-(1-y)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1-y}}\right]+\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x-y}\right\}, \tag{2.6}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2},1;\frac{5}{2},2;x,y\right) = \frac{3}{8xy}\left\{\begin{matrix}(1+2x)\sqrt{1-x}-(1+2x-y)\sqrt{1-x-y}- \\ -\frac{1}{\sqrt{x}}\left[(1-4x)\arcsin\sqrt{x}-(1-y)(1-4x-y)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1-y}}\right]\end{matrix}\right\}, \tag{2.7}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2},1;\frac{7}{2},2;x,y\right)$$

$$= \frac{5}{64x^2y}\left\{\begin{matrix}\frac{3}{\sqrt{x}}\left[(1-4x+8x^2)\arcsin\sqrt{x}-(1-y)\left[(1-y)^2-4x(1-y)+8x^2\right]\right] \\ -(3-10x-8x^2)\sqrt{1-x}+\left[3(1-y)^2-10x(1-y)-8x^2\right]\sqrt{1-x-y}\end{matrix}\right\}, \tag{2.8}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};1,1;-\frac{1}{2},2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{(1-y)^{\frac{3}{2}}}{1-x-y}\right], \tag{2.9}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};1,1;\frac{1}{2},2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[1-\sqrt{1-y}-\sqrt{x}\left(\tanh^{-1}\sqrt{x}-\tanh^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-y}}\right)\right], \tag{2.10}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};1,1;\frac{3}{2},2;x,y\right)=\frac{1}{y}\left\{1-\sqrt{1-y}-\frac{1}{\sqrt{x}}\left[(1-x)\tanh^{-1}\sqrt{x}-(1-x-y)\tanh^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-y}}\right]\right\}, \tag{2.11}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};1,1;2,2;x,y\right)=\frac{4}{3xy}\left[1-(1-x)^{\frac{3}{2}}-(1-y)^{\frac{3}{2}}+(1-x-y)^{\frac{3}{2}}\right], \tag{2.12}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};1,1;\frac{5}{2},2;x,y\right)=\frac{3}{4xy}\left\{\begin{array}{l}1+x-(1+x-y)\sqrt{1-y}\\ -\frac{1}{\sqrt{x}}\left[(1-x)^2\tanh^{-1}\sqrt{x}-(1-x-y)^2\tanh^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-y}}\right]\end{array}\right\}, \tag{2.13}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};1,1;3,2;x,y\right)=\frac{16}{15x^2y}\left[(1-x)^{\frac{5}{2}}-(1-x-y)^{\frac{5}{2}}-1+\frac{5}{2}x-(1-y)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{5}{2}x-y\right)\right], \tag{2.14}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};1,1;\frac{7}{2},2;x,y\right)=\frac{5}{24x^2y}\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{\sqrt{x}}\left[(1-x)^3\tanh^{-1}\sqrt{x}-(1-x-y)^3\tanh^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-y}}\right]\\ -3+8x+3x^2+\sqrt{1-y}\left[3(1-y)^2+8x(1-y)+3x^2\right]\end{array}\right\}, \tag{2.15}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};1,1;4,2;x,y\right)=\frac{4}{35x^3y}\left\{\begin{array}{l}8\left[1-(1-x)^{\frac{7}{2}}-(1-y)^{\frac{7}{2}}+(1+x-y)^{\frac{7}{2}}\right]\\ -28x\left[1-(1-y)^{\frac{5}{2}}\right]+35x^2\left[1-(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]\end{array}\right\}, \tag{2.16}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};1,1;4,2;x,y\right)=\frac{4}{35x^3y}\left\{\begin{array}{l}8\left[1-(1-x)^{\frac{7}{2}}-(1-y)^{\frac{7}{2}}+(1+x-y)^{\frac{7}{2}}\right]\\ -28x\left[1-(1-y)^{\frac{5}{2}}\right]+35x^2\left[1-(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]\end{array}\right\}, \tag{2.17}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2},1;-\frac{1}{2},2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[(1-x)^{-\frac{3}{2}}-(1-y)^2(1-x-y)^{-\frac{3}{2}}\right], \tag{2.18}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2},1;\frac{1}{2},2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[\frac{1-2x}{\sqrt{1-x}}-\frac{1-2x-y}{\sqrt{1-x-y}}\right], \tag{2.19}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2},1;\frac{5}{2},2;x,y\right)=\frac{3}{4xy}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\arcsin\sqrt{x}-(1-y)^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{1-y}}\right]\\ -(1-2x)\sqrt{1-x}+(1-2x-y)\sqrt{1-x-y}\end{array}\right\}, \tag{2.20}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2},1;\frac{7}{2},2;x,y\right)$$

$$=\frac{5}{16x^2y}\left\{\begin{array}{l}\left(3-4x+4x^2\right)\sqrt{1-x}-\left[3(1-y)^2-4x(1-y)+4x^2\right]\sqrt{1-x-y}\\ -\frac{3}{\sqrt{x}}\left[(1-2x)\arcsin\sqrt{x}-(1-y)^2(1-2x-y)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1-y}}\right]\end{array}\right\},$$

(2.21)

$$F_2\left(\frac{1}{2};2,1;-\frac{1}{2},2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[(1-x)^{-2}-(1-y)^{\frac{5}{2}}(1-x-y)^{-2}\right], \tag{2.22}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};2,1;\frac{1}{2},2;x,y\right)=\frac{1}{y}\left[\frac{2-3x}{1-x}-\frac{2(1-y)-3x}{1-x-y}\sqrt{1-y}-3\sqrt{x}\left(\tanh^{-1}\sqrt{x}-\tanh^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-y}}\right)\right], \tag{2.23}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};2,1;1,2;x,y\right)=\frac{1}{y}\left[\frac{2-3x}{\sqrt{1-x}}-\frac{2(1-y)-3x}{\sqrt{1-x-y}}\right], \tag{2.24}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};2,1;\frac{3}{2},2;x,y\right)$$

$$=\frac{1}{2y}\left\{3\left(1-\sqrt{1-y}\right)+\frac{1}{\sqrt{x}}\left[(1-3x)\tanh^{-1}\sqrt{x}-(1-3x-y)\tanh^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-y}}\right]\right\}, \tag{2.25}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};2,1;\frac{5}{2},2;x,y\right)$$

$$=\frac{3}{8xy}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{x}}\left[(1-3x)(1-x)\tanh^{-1}\sqrt{x}-(1+3x-y)(1-x-y)\tanh^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-y}}\right]\\ -1+3x+(1-3x-y)\sqrt{1-y}\end{array}\right\}, \tag{2.26}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};2,1;3,2;x,y\right)=\frac{8}{15x^2y}\left\{2\left[1-(1-y)^{\frac{5}{5}}\right]-(2+3x)(1-x)^{\frac{3}{2}}+(2+3x-2y)(1-x-y)^{\frac{3}{2}}\right\}, \tag{2.27}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};2,1;\frac{7}{2},2;x,y\right)$$
$$=\frac{5}{16x^2y}\left\{\begin{array}{l}3-2x+3x^2-\sqrt{1-y}\left[3(1-y)^2-2x(1-y)+3x^2\right]\\ -\frac{3}{\sqrt{x}}\left[(1-x)^2(1+x)\tanh^{-1}\sqrt{x}-(1-x-y)^2(1+x-y)\tanh^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-y}}\right]\end{array}\right\},$$
(2.28)

$$F_2\left(\frac{1}{2};2,1;4,2;x,y\right)$$
$$=-\frac{16}{35x^3y}\left\{4\left[1-(1-y)^{\frac{7}{2}}\right]-7x\left[1-(1-y)^{\frac{5}{2}}\right]-(4+3x)(1-x)^{\frac{5}{2}}+(4+3x-4y)(1-x-y)^{\frac{5}{2}}\right\}, \quad (2.29)$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2},1;-\frac{1}{2},2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[(1-x)^{-\frac{5}{2}}-(1-y)^3(1-x-y)^{-\frac{5}{2}}\right], \quad (2.30)$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2},1;\frac{1}{2},2;x,y\right)=\frac{2}{3y}\left[\frac{3-12x+8x^2}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3(1-y)^2-12x(1-y)+8x^2}{(1-x-y)^{\frac{3}{2}}}\right], \quad (2.31)$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2},1;\frac{3}{2},2;x,y\right)=\frac{2}{3y}\left[\frac{3-4x}{\sqrt{1-x}}-\frac{3-4x-3y}{\sqrt{1-x-y}}\right], \quad (2.32)$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2},1;\frac{7}{2},2;x,y\right)$$
$$=\frac{5}{24x^2y}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{1-x-y}}\left[3(1-y)^3-x(1-y)^2-10x^2(1-y)+8x^3\right]\\ -\frac{1}{\sqrt{1-x}}\left[3-x-10x^2+8x^3\right]-\frac{3}{\sqrt{x}}\left[(1-y)^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1-y}}-\arcsin\sqrt{x}\right]\end{array}\right], \quad (2.33)$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};3,1;-\frac{1}{2},2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[(1-x)^{-3}-(1-y)^{\frac{7}{2}}(1-x-y)^{-3}\right], \quad (2.34)$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};3,1;\frac{1}{2},2;x,y\right)=\frac{1}{4y}\left\{\begin{array}{l}15\sqrt{x}\left(\tanh^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{1-y}}-\tanh^{-1}\sqrt{x}\right)\\ -\dfrac{\sqrt{1-y}}{(1-x-y)^2}\left[8(1-y)^2-25x(1-y)+15x^2\right]+\dfrac{8-25x+15x^2}{(1-x)^2}\end{array}\right\}, \tag{2.35}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};3,1;1,2;x,y\right)=\frac{1}{4y}\left[\frac{8-24x+15x^2}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}-\frac{8(1-y)^2-24x(1-y)+15x^2}{(1-x-y)^{\frac{3}{2}}}\right], \tag{2.36}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};3,1;\frac{3}{2},2;x,y\right)=-\frac{1}{8y}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left[13(1-y)-15x\right]\sqrt{1-y}}{1-x-y}-\dfrac{13-15x}{1-x}\\ +\dfrac{3}{\sqrt{x}}\left[(1-5x-y)\tanh^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{1-y}}-(1-5x)\tanh^{-1}\sqrt{x}\right]\end{array}\right\}, \tag{2.37}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};3,1;2,2;x,y\right)=\frac{1}{2y}\left[\frac{4-5x}{\sqrt{1-x}}-\frac{4-5x-4y}{\sqrt{1-x-y}}\right], \tag{2.38}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};3,1;\frac{5}{2},2;x,y\right)$$
$$=\frac{3}{32xy}\left\{\begin{array}{l}(1-15x-y)\sqrt{1-y}-1+15x\\ -\dfrac{\left[(1-y)^2+6x(1-y)-15x^2\right]\tanh^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{1-y}}-\left(1+6x-15x^2\right)\tanh^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\end{array}\right\}, \tag{2.37}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};3,1;\frac{7}{2},2;x,y\right)$$
$$=\frac{5}{64x^2y}\left\{\begin{array}{l}\left[3(1-y)^2+4x(1-y)-15x^2\right]-\left(3+4x-15x^2\right)\\ -\dfrac{3}{\sqrt{x}}\left\{\begin{array}{l}\left[(1-y)^2+2x(1-y)+5x^2\right](1-x-y)\tanh^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{1-y}}\\ -\left(1+2x+5x^2\right)(1-x)\tanh^{-1}\sqrt{x}\end{array}\right\}\end{array}\right\}, \tag{2.38}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};3,1;4,2;x,y\right)=\frac{4}{35x^3y}\left\{\begin{array}{l}8\left[1-(1-y)^{\frac{7}{2}}\right]-\left(8+12x+15x^2\right)(1-x)^{\frac{3}{2}}\\ +\left[8(1-y)^2+12x(1-y)+15x^2\right](1-x-y)^{\frac{3}{2}}\end{array}\right\}, \tag{2.39}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2},1;-\frac{1}{2},2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[(1-x)^{-\frac{7}{2}}-(1-y)^4(1-x-y)^{-\frac{7}{2}}\right], \tag{2.40}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2},1;\frac{1}{2},2;x,y\right)=\frac{2}{5y}\left[\frac{5-30x+40x^2-16x^3}{(1-x)^{\frac{5}{2}}}-\frac{5(1-y)^3-30x(1-y)^2+40x^2(1-y)-16x^2}{(1-x-y)^{\frac{5}{2}}}\right], \tag{2.41}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2},1;\frac{3}{2},2;x,y\right)=\frac{2}{15y}\left[\frac{15-40x+24x^2}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}-\frac{15(1-y)^2-40x(1-y)+24x^2}{(1-x-y)^{\frac{3}{2}}}\right], \tag{2.42}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2},1;\frac{5}{2},2;x,y\right)=\frac{2}{5y}\left[\frac{5-6x}{\sqrt{1-x}}-\frac{5-5y-6x}{\sqrt{1-x-y}}\right], \tag{2.43}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};4,1;-\frac{1}{2},2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[(1-x)^{-4}-(1-y)^{\frac{9}{2}}(1-x-y)^{-4}\right], \tag{2.45}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};4,1;\frac{1}{2},2;x,y\right)=\frac{1}{24y}\left\{\begin{array}{l}105\sqrt{x}\left(\tanh^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-y}}-\tanh^{-1}\sqrt{x}\right)\\ -\frac{\sqrt{1-y}}{(1-x-y)^3}\left[48(1-y)^3\,231x(1-y)^2+280x^2(1-y)-105x^3\right]\\ +\frac{48-231x+280x^2-105x^3}{(1-x)^3}\end{array}\right\}, \tag{2.46}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};4,1;1,2;x,y\right)=\frac{1}{8y}\left\{\frac{16-72x+90x^2-35x^3}{(1-x)^{\frac{5}{2}}}-\frac{16(1-y)^3-72x(1-y)^2+90x^2(1-y)-35x^3}{(1-x-y)^{\frac{5}{2}}}\right\}, \tag{2.47}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};4,1;\frac{3}{2},2;x,y\right)=-\frac{1}{48y}\left\{\begin{array}{l}\frac{\sqrt{1-y}\left[81(1-y)^2-190x(1-y)+105x^2\right]}{(1-x-y)^2}\\ -\frac{81-190x+105x^2}{(1-x)^2}+15\left[\frac{(1-y-7x)\tanh^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-y}}-(1-7x)\tanh^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right]\end{array}\right\}, \tag{2.48}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};4,1;2,2;x,y\right)=\frac{1}{12y}\left[\frac{24-60x-35x^2}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}-\frac{24(1-y)^2-60x(1-y)-35x^2}{(1-x-y)^{\frac{3}{2}}}\right] \tag{2.49}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};4,1;\frac{5}{2},2;x,y\right)$$
$$=\frac{1}{64xy}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{1-y}\left[3(1-y)^2+100x(1-y)+105x^2\right]}{1-x-y}-\dfrac{3+100x+105x^2}{1-x} \\ -\dfrac{3}{\sqrt{x}}\left[\left[(1-y)^2+10x(1-y)-35x^2\right]\tanh^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{1-y}}-\left(1+10x-35x^2\right)\tanh^{-1}\sqrt{x}\right]\end{array}\right\}, \tag{2.50}$$

$$F_2\left(\frac{1}{2};4,1;3,2;x,y\right)=\frac{1}{3y}\left[\frac{6-7x}{\sqrt{1-x}}-\frac{6(1-y)-7x}{\sqrt{1-x-y}}\right], \tag{2.51}$$

где

$$\tanh^{-1}z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}, \tag{2.52}$$

то мы получаем большое количества интегральных представлений для функции Кампе де Фериет $F_{0;2;2}^{1;2;2}$. В этом случае интегральных представлениях подынтегралом будет участвовать только элементарные функции.

Теорема 2.2. Если выполняются неравенства $\operatorname{Re}e_i>\operatorname{Re}b_i>0$, $\operatorname{Re}f_i>\operatorname{Re}c_i>0$, $(i=1,2)$, то имеет место интегральное представление

$$F_{0;2;2}^{1;2;2}\left[\begin{array}{l}a;b_1,b_2;c_1,c_2; \\ -;e_1,e_2;f_1,f_2;\end{array}x,y\right]$$
$$=\frac{\Gamma(e_1)\Gamma(e_2)\Gamma(f_1)\Gamma(f_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(e_1-b_1)\Gamma(e_2-b_2)\Gamma(f_1-c_1)\Gamma(f_2-c_2)} \tag{2.53}$$
$$\times\int_0^1\cdots\int_0^1 t_1^{b_1-1}t_2^{b_2-1}t_3^{c_1-1}t_4^{c_2-1}(1-t_1)^{e_1-b_1-1}(1-t_2)^{e_2-b_2-1}(1-t_3)^{f_1-c_1-1}(1-t_4)^{f_2-c_2-1}$$
$$\times(1-t_1t_2x-t_3t_4y)^{-a}\,dt_1dt_2dt_3dt_4.$$

Доказательство. Сделаем следующие преобразование

$$(1-t_1t_2x-t_3t_4y)^{-a}=(1-t_1t_2x)^{-a}\left(\frac{1-t_1t_2x-t_3t_4y}{1-t_1t_2x}\right)^{-a}=(1-t_1t_2x)^{-a}\left(1-\frac{t_3t_4y}{1-t_1t_2x}\right)^{-a}$$

$$=(1-t_1t_2x)^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}\left(\frac{t_3t_4y}{1-t_1t_2x}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}(1-t_1t_2x)^{-a-n}(t_3t_4y)^n \tag{2.54}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a+n)_m}{m!}(t_1t_2x)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}(t_3t_4y)^n=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}}{m!n!}(t_1t_2x)^m(t_3t_4y)^n.$$

Подставляя (2.54) в (2.53) и меняя порядок интегралов и сумм, мы имеем

$$F_{0;2;2}^{1;2;2}\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2;c_1,c_2;\\ -;e_1,e_2;f_1,f_2;\end{matrix}x,y\right]$$

$$=\frac{\Gamma(e_1)\Gamma(e_2)\Gamma(f_1)\Gamma(f_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(e_1-b_1)\Gamma(e_2-b_2)\Gamma(f_1-c_1)\Gamma(f_2-c_2)} \tag{2.55}$$

$$\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}}{m!n!}x^my^n\int_0^1 t_1^{b_1+m-1}(1-t_1)^{e_1-b_1-1}dt_1\int_0^1 t_2^{b_2+m-1}(1-t_2)^{e_2-b_2-1}dt_2$$

$$\times\int_0^1 t_3^{c_1+n-1}(1-t_3)^{f_1-c_1-1}dt_3\int_0^1 t_4^{c_2+n-1}(1-t_4)^{f_2-c_2-1}dt_4.$$

Вычислим внутренние интегралы

$$\int_0^1 t_1^{b_1+m-1}(1-t_1)^{e_1-b_1-1}dt_1=B(b_1+m,e_1-b_1)=\frac{\Gamma(b_1)(b_1)_m\Gamma(e_1-b_1)}{\Gamma(e_1)(e_1)_m},$$

$$\int_0^1 t_2^{b_2+m-1}(1-t_2)^{e_2-b_2-1}dt_2=B(b_2+m,e_2-b_2)\frac{\Gamma(b_2)(b_2)_m\Gamma(e_2-b_2)}{\Gamma(e_2)(e_2)_m},$$

$$\times\int_0^1 t_3^{c_1+n-1}(1-t_3)^{f_1-c_1-1}dt_3=B(c_1+n,f_1-c_1)=\frac{\Gamma(c_1)(c_1)_n\Gamma(f_1-c_1)}{\Gamma(f_1)(f_1)_n}, \tag{2.56}$$

$$\int_0^1 t_4^{c_2+n-1}(1-t_4)^{f_2-c_2-1}dt_4=B(c_2+n,f_2-c_2)=\frac{\Gamma(c_2)(c_2)_n\Gamma(f_2-c_2)}{\Gamma(f_2)(f_2)_n}.$$

Подставляя (2.56) в (2.55), окончательно получаем доказательство теоремы 2.2.

1. Система частных производных гипергеометрического типа и их линейно независимые решения.

Теорема 3.1. Если выполняются условия $\operatorname{Re} e_i, \operatorname{Re} f_i \neq 0,-1,-2...,\ (i=1,2)$, то функция $u=F_{0;2;2}^{1;2;2}[x,y]$ удовлетворяет систему в частных производных третьего порядка гипергеометрического типа

$$\begin{cases} x^2(1-x)u_{xxx} - x^2yu_{xxy} + \left[e_1+e_2+1-(a+b_1+b_2+3)x\right]xu_{xx} \\ -(b_1+b_2+1)xyu_{xy} + \left[e_1e_2-(ab_1+ab_2+b_1b_2+a+b_1+b_2+1)x\right]u_x - b_1b_2yu_y - ab_1b_2u = 0, \\ y^2(1-y)u_{yyy} - xy^2u_{xyy} + \left[f_1+f_2+1-(a+c_1+c_2+3)y\right]yu_{yy} \\ -(c_1+c_2+1)xyu_{xy} + \left[f_1f_2-(ac_1+ac_2+c_1c_2+a+c_1+c_2+1)y\right]u_y - c_1c_2xu_x - ac_1c_2u = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Доказательство. Из определения гипергеометрической функции Кампе де Фериет (1.3) следует

$$\begin{aligned} \frac{A_{m+1,n}}{A_{m,n}} &= \frac{(a+m+n)(b_1+m)(b_2+m)}{(e_1+m)(e_2+m)(m+1)}, \\ \frac{A_{m,n+1}}{A_{m,n}} &= \frac{(a+m+n)(c_1+n)(c_2+n)}{(f_1+n)(f_2+n)(n+1)}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$A_{m,n} = \frac{(a)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(e_1)_m(e_2)_m(f_1)_n(f_2)_n\, m!n!}.$$

На основе общей теории о гипергеометрических функциях [], из соотношения (3.1) определяем

$$\begin{cases} \left(e_1+x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(e_2+x\frac{\partial}{\partial x}\right)u_x - \left(a+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(b_1+x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(b_2+x\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0, \\ \left(f_1+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(f_2+y\frac{\partial}{\partial y}\right)u_y - \left(a+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(c_1+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(c_2+y\frac{\partial}{\partial y}\right)u = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

После некоторых вычислений в (3.2), мы получаем систему (3.1).

Теорема 3.2. Система в частных производных третьего порядка гипергеометрического типа (3.2) в окрестности начале координаты иметь следующие линейно независимые решения

$$u_1(x,y) = F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix} a; b_1, b_2; c_1, c_2; \\ -; e_1, e_2; f_1, f_2; \end{matrix}\ x, y\right] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(e_1)_m(e_2)_m(f_1)_n(f_2)_n\, m!n!} x^m y^n, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} u_2(x,y) &= y^{1-f_1} F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix} 1-f_1+a; b_1, b_2; 1-f_1+c_1, 1-f_1+c_2; \\ -; e_1, e_2; \quad 2-f_1, f_2-f_1+1; \end{matrix}\ x, y\right] \\ &= y^{1-f_1} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(1-f_1+a)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_m(1-f_1+c_1)_n(1-f_1+c_2)_n}{(e_1)_m(e_2)_m(2-f_1)_n(f_2-f_1+1)_n\, m!n!} x^m y^n, \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$u_3(x,y)=y^{1-f_2}F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}a+1-f_2;b_1,b_2;c_1+1-f_2,c_2+1-f_2; \\ -;e_1,e_2; \qquad f_1,f_2;\end{matrix}x,y\right]$$
$$=y^{1-f_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a+1-f_2)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_m(c_1+1-f_2)_n(c_2+1-f_2)_n}{(e_1)_m(e_2)_m(1-f_2+f_1)_n(2-f_2)_n\,m!n!}x^my^n, \tag{3.5}$$

$$u_4(x,y)=x^{1-e_1}F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}a+1-e_1;b_1+1-e_1,b_2+1-e_1;c_1,c_2; \\ -;\quad 2-e_1,1-e_1+e_2;f_1,f_2;\end{matrix}x,y\right]$$
$$=x^{1-e_1}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a+1-e_1)_{m+n}(b_1+1-e_1)_m(b_2+1-e_1)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(2-e_1)_m(1-e_1+e_2)_m(f_1)_n(f_2)_n\,m!n!}x^my^n, \tag{3.6}$$

$$u_5(x,y)=x^{1-e_1}y^{1-f_1}F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}a+2-e_1-f_1;b_1+1-e_1,b_2+1-e_1;c_1+1-f_1,c_2+1-f_1; \\ -;\quad 2-e_1,e_2-e_1+2;\quad 2-f_1,f_2-f_1+2;\end{matrix}x,y\right]$$
$$=x^{1-e_1}y^{1-f_1}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a+2-e_1-f_1)_{m+n}(b_1+1-e_1)_m(b_2+1-e_1)_m(c_1+1-f_1)_n(c_2+1-f_1)_n}{(2-e_1)_m(e_2-e_1+2)_m(2-f_1)_n(f_2-f_1+2)_n\,m!n!}x^my^n, \tag{3.7}$$

$$u_6(x,y)=x^{1-e_1}y^{1-f_2}F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}a+2-e_1-f_2;b_1+1-e_1,b_2+1-e_1;c_1+1-f_2,c_2+1-f_2; \\ -;\quad 2-e_1,e_2-e_1+2;\quad f_1-f_2+1,2-f_2;\end{matrix}x,y\right]$$
$$=x^{1-e_1}y^{1-f_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a+2-e_1-f_2)_{m+n}(b_1+1-e_1)_m(b_2+1-e_1)_m(c_1+1-f_2)_n(c_2+1-f_2)_n}{(2-e_1)_m(e_2-e_1+2)_m(f_1-f_2+1)_n(2-f_2)_n\,m!n!}x^my^n, \tag{3.8}$$

$$u_7(x,y)=x^{1-e_2}F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}a+1-e_2;b_1+1-e_2,b_2+1-e_2;c_1,c_2; \\ -;\quad e_1+1-e_2,2-e_2;f_1,f_2;\end{matrix}x,y\right]$$
$$=x^{1-e_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a+1-e_2)_{m+n}(b_1+1-e_2)_m(b_2+1-e_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(e_1+1-e_2)_m(2-e_2)_m(f_1)_n(f_2)_n\,m!n!}x^my^n, \tag{3.9}$$

$$u_8(x,y)=F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}a+2-e_2-f_1;b_1+1-e_2,b_2+1-e_2;c_1+1-f_1,c_2+1-f_1; \\ -;\quad e_1-e_2+1,2-e_2;\quad 2-f_1,f_2-f_1+1;\end{matrix}x,y\right]$$
$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a+2-e_2-f_1)_{m+n}(b_1+1-e_2)_m(b_2+1-e_2)_m(c_1+1-f_1)_n(c_2+1-f_1)_n}{(e_1-e_2+1)_m(2-e_2)_m(2-f_1)_n(f_2-f_1+1)_n\,m!n!}x^my^n, \tag{3.10}$$

$$u_9(x,y)=F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}a+2-e_2-f_2;b_1+1-e_2,b_2+1-e_2;c_1+1-f_2,c_2+1-f_2; \\ -;\quad e_1-e_2+1,2-e_2;\quad f_1-f_2+1,2-f_2;\end{matrix}x,y\right]$$
$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a+2-e_2-f_2)_{m+n}(b_1+1-e_2)_m(b_2+1-e_2)_m(c_1+1-f_2)_n(c_2+1-f_2)_n}{(e_1-e_2+1)_m(2-e_2)_m(f_1-f_2+1)_n(2-f_2)_n\,m!n!}x^my^n. \tag{3.11}$$

Доказательство. Линейно независимые решения системы (3.1) ищем в виде

$$u(x,y)=x^{\tau}y^{\nu}w(x,y), \tag{3.12}$$

где τ, ν - не известные постоянные, которых нужно определить. Вычислим соответствующие производные

$$
\begin{aligned}
&u_x = \tau x^{\tau-1} y^{\nu} w + x^{\tau} y^{\nu} w_x,\\
&u_y = \nu x^{\tau} y^{\nu-1} w + x^{\tau} y^{\nu} w_y,\\
&u_{xy} = \tau\nu x^{\tau-1} y^{\nu-1} w + \tau x^{\tau-1} y^{\nu} w_y + \nu x^{\tau} y^{\nu-1} w_x + x^{\tau} y^{\nu} w_{xy},\\
&u_{xx} = \tau(\tau-1) x^{\tau-2} y^{\nu} w + 2\tau x^{\tau-1} y^{\nu} w_x + x^{\tau} y^{\nu} w_{xx},\\
&u_{yy} = \nu(\nu-1) x^{\tau} y^{\nu-2} w + 2\nu x^{\tau} y^{\nu-1} w_y + x^{\tau} y^{\nu} w_{yy},\\
&u_{xxy} = \tau\nu(\tau-1) x^{\tau-2} y^{\nu-1} w + \tau(\tau-1) x^{\tau-2} y^{\nu} w_y + 2\tau\nu x^{\tau-1} y^{\nu-1} w_x + 2\tau x^{\tau-1} y^{\nu} w_{xy}\\
&\qquad + \nu x^{\tau} y^{\nu-1} w_{xx} + x^{\tau} y^{\nu} w_{xxy},\\
&u_{xyy} = \tau\nu(\nu-1) x^{\tau-1} y^{\nu-2} w + \nu(\nu-1) x^{\tau} y^{\nu-2} w_x + 2\tau\nu x^{\tau-1} y^{\nu-1} w_y + 2\nu x^{\tau} y^{\nu-1} w_{xy}\\
&\qquad + \tau x^{\tau-1} y^{\nu} w_{yy} + x^{\tau} y^{\nu} w_{xyy},\\
&u_{xxx} = \tau(\tau-1)(\tau-2) x^{\tau-3} y^{\nu} w + 3\tau(\tau-1) x^{\tau-2} y^{\nu} w_x + 3\tau x^{\tau-1} y^{\nu} w_{xx} + x^{\tau} y^{\nu} w_{xxx},\\
&u_{yyy} = \nu(\nu-1)(\nu-2) x^{\tau} y^{\nu-3} w + 3\nu(\nu-1) x^{\tau} y^{\nu-2} w_y + 3\nu x^{\tau} y^{\nu-1} w_{yy} + x^{\tau} y^{\nu} w_{yyy}.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Подставляя равенства (3.13) в (3.1), мы имеем

$$
\left\{
\begin{aligned}
&x^2(1-x) w_{xxx} - x^2 y w_{xxy} + \left\{ \begin{aligned} &3\tau + e_1 + e_2 + 1 \\ &-\left[(a+\tau+\nu)+(b_1+\tau)+(b_2+\tau)+3\right]x \end{aligned} \right\} x w_{xx} \\
&-\left[(b_1+\tau)+(b_2+\tau)+1\right] xy w_{xy} \\
&+\left\{ \begin{aligned} &3\tau^2 + (2e_1 + 2e_2 - 1)\tau + e_1 e_2 \\ &-\left[\begin{aligned} &(a+\tau+\nu)(b_1+\tau)+(a+\tau+\nu)(b_2+\tau)+(b_1+\tau)(b_2+\tau) \\ &+(a+\tau+\nu)+(b_1+\tau)+(b_2+\tau)+1 \end{aligned} \right] x \end{aligned} \right\} w_x \\
&-(b_1+\tau)(b_2+\tau) y w_y \\
&-\left[-\tau(\tau+e_1-1)(\tau+e_2-1)x^{-1} + (a+\tau+\nu)(b_1+\tau)(b_2+\tau)\right] w = 0, \\
&y^2(1-y) w_{yyy} - xy^2 w_{xyy} - \left[(c_1+\nu)+(c_2+\nu)+1\right] xy w_{xy} \\
&+\left\{3\nu + f_1 + f_2 + 1 - \left[(a+\tau+\nu)+(c_1+\nu)+(c_2+\nu)+3\right]y\right\} y w_{yy} \\
&-(c_1+\nu)(c_2+\nu) x w_x \\
&+\left\{ \begin{aligned} &3\nu^2 + (2f_1 + 2f_2 - 1)\nu + f_1 f_2 \\ &-\left[\begin{aligned} &(a+\tau+\nu)(c_1+\nu)+(a+\tau+\nu)(c_2+\nu)+(c_1+\nu)(c_2+\nu) \\ &+(a+\tau+\nu)+(c_1+\nu)+(c_2+\nu)+1 \end{aligned} \right] y \end{aligned} \right\} w_y \\
&-\left[-\nu(\nu+f_1-1)(\nu+f_2-1)y^{-1} + (a+\tau+\nu)(c_1+\nu)(c_2+\nu)\right] w = 0.
\end{aligned}
\right.
\tag{3.14}
$$

Естественно, от системы уравнений (3.14) нужно потребовать, чтобы коэффициент перед переменными x^{-1} и y^{-1} должны быть равны нулю т.е.

$$\begin{cases} \tau(\tau+e_1-1)(\tau+e_2-1)=0, \\ \nu(\nu+f_1-1)(\nu+f_2-1)=0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Из системы (3.15), определяем неизвестные постоянные τ, ν

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & & 4 & 5 & 6 & & 7 & 8 & 9 \\ \tau: & 0 & 0 & 0 & \tau: & 1-e_1 & 1-e_1 & 1-e_1 & \tau: & 1-e_2 & 1-e_2 & 1-e_2 \\ \nu: & 0 & 1-f_1 & 1-f_2 & \nu: & 0 & 1-f_1 & 1-f_2 & \nu: & 0 & 1-f_1 & 1-f_2 \end{array} \tag{3.16}$$

Рассмотрим каждый случай отдельно.
Случае 1. Если $\tau=0, \nu=0$, то система (3.14) превращается с систему (3.1). Следовательно решение система (3.14) имеет вид (3.3)
Случае 2. Если $\tau=0, \nu=1-f_1$, то система (3.14) имеет вид

$$\begin{cases} x^2(1-x)w_{xxx}-x^2yw_{xxy}+\{e_1+e_2+1-[(a+1-f_1)+b_1+b_2+3]x\}xw_{xx} \\ -(b_1+b_2+1)xyw_{xy} \\ +\{e_1e_2-[(a+1-f_1)b_1+(a+1-f_1)b_2+b_1b_2+(a+1-f_1)+b_1+b_2+1]x\}w_x \\ -b_1b_2yw_y-(a+1-f_1)b_1b_2w=0, \\ y^2(1-y)w_{yyy}-xy^2w_{xyy}-[(c_1+1-f_1)+(c_2+1-f_1)+1]xyw_{xy} \\ +\{(2-f_1)+(f_2-f_1+1)+1-[(a+1-f_1)+(c_1+1-f_1)+(c_2+1-f_1)+3]y\}yw_{yy} \\ -(c_1+1-f_1)(c_2+1-f_1)xw_x \\ +\left\{\begin{array}{l}(2-f_1)(f_2-f_1+1) \\ -\left[\begin{array}{l}(a+1-f_1)(c_1+1-f_1)+(a+1-f_1)(c_2+1-f_1)+(c_1+1-f_1)(c_2+1-f_1)+ \\ +(a+1-f_1)+(c_1+1-f_1)+(c_2+1-f_1)+1\end{array}\right]y\end{array}\right\}w_y \\ -(a+1-f_1)(c_1+1-f_1)(c_2+1-f_1)w=0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Система уравнений (3.17) имеет решение (3.4).
Случае 3. Если $\tau=0, \nu=1-f_2$, то система (3.14) имеет вид

$$\left\{\begin{array}{l}
\quad x^2(1-x)w_{xxx}-x^2yw_{xxy}+\left\{e_1+e_2+1-\left[(a+1-f_2)+b_1+b_2+3\right]x\right\}xw_{xx}\\
\quad -(b_1+b_2+1)xyw_{xy}\\
\quad +\left\{e_1e_2-\left[(a+1-f_2)b_1+(a+1-f_2)b_2+b_1b_2+(a+1-f_2)+b_1+b_2+1\right]x\right\}w_x\\
\quad -b_1b_2yw_y-(a+1-f_2)b_1b_2w=0,\\
y^2(1-y)w_{yyy}-xy^2w_{xyy}-\left[(c_1+1-f_2)+(c_2+1-f_2)+1\right]xyw_{xy}\\
+\left\{(1-f_2+f_1)+(2-f_2)-\left[(a+1-f_2)+(c_1+1-f_2)+(c_2+1-f_2)+3\right]y\right\}yw_{yy}\\
-(c_1+1-f_2)(c_2+1-f_2)xw_x\\
+\left\{\begin{array}{l}(1-f_2+f_1)(2-f_2)\\ -\left[\begin{array}{l}(a+1-f_2)(c_1+1-f_2)+(a+1-f_2)(c_2+1-f_2)+(c_1+1-f_2)(c_2+1-f_2)+\\ +(a+1-f_2)+(c_1+1-f_2)+(c_2+1-f_2)+1\end{array}\right]y\end{array}\right\}w_y\\
-(a+1-f_2)(c_1+1-f_2)(c_2+1-f_2)w=0.
\end{array}\right. \tag{3.18}$$

Система уравнений (3.18) имеет решение (3.5).

Случае 4. Если $\tau=1-e_1,\ \nu=0$, то система (3.14) имеет вид

$$\left\{\begin{array}{l}
x^2(1-x)w_{xxx}-x^2yw_{xxy}+\left\{\begin{array}{l}(2-e_1)+(1-e_1+e_2)-\\ -\left[(a+1-e_1)+(b_1+1-e_1)+(b_2+1-e_1)+3\right]x\end{array}\right\}xw_{xx}\\
-\left[(b_1+1-e_1)+(b_2+1-e_1)+1\right]xyw_{xy}\\
+\left\{\begin{array}{l}(2-e_1)(1-e_1+e_2)\\ -\left[\begin{array}{l}(a+1-e_1)(b_1+1-e_1)+(a+1-e_1)(b_2+1-e_1)+(b_1+1-e_1)(b_2+1-e_1)+\\ +(a+1-e_1)+(b_1+1-e_1)+(b_2+1-e_1)+1\end{array}\right]x\end{array}\right\}w_x\\
-(b_1+1-e_1)(b_2+1-e_1)yw_y\\
-(a+1-e_1)(b_1+1-e_1)(b_2+1-e_1)w=0,\\
y^2(1-y)w_{yyy}-xy^2w_{xyy}-(c_1+c_2+1)xyw_{xy}\\
+\left\{f_1+f_2+1-\left[(a+1-e_1)+c_1+c_2+3\right]y\right\}yw_{yy}\\
-c_1c_2xw_x++\left\{f_1f_2-\left[(a+1-e_1)c_1+(a+1-e_1)c_2+c_1c_2+(a+1-e_1)+c_1+c_2+1\right]y\right\}w_y\\
-(a+1-e_1)c_1c_2w=0.
\end{array}\right. \tag{3.19}$$

Система уравнений (3.19) имеет решение (3.6).

Случае 5. Если $\tau=1-e_1,\ \nu=1-f_1$, то система (3.14) имеет вид

$$
\left\{\begin{array}{l}
x^2(1-x)w_{xxx}-x^2yw_{xxy}+\left\{\begin{array}{l}(2-e_1)+(e_2-e_1+2)-\\ -\left[(a+2-e_1-f_1)+(b_1+1-e_1)+(b_2+1-e_1)+3\right]x\end{array}\right\}xw_{xx}\\
-\left[(b_1+1-e_1)+(b_2+1-e_1)+1\right]xyw_{xy}\\
+\left\{\begin{array}{l}(2-e_1)(e_2-e_1+2)\\ -\left[\begin{array}{l}(a+2-e_1-f_1)(b_1+1-e_1)+(a+2-e_1-f_1)(b_2+1-e_1)+(b_1+1-e_1)(b_2+1-e_1)+\\ +(a+2-e_1-f_1)+(b_1+1-e_1)+(b_2+1-e_1)+1\end{array}\right]x\end{array}\right\}w_x\\
-(b_1+1-e_1)(b_2+1-e_1)yw_y-(a+2-e_1-f_1)(b_1+1-e_1)(b_2+1-e_1)w=0,\\
y^2(1-y)w_{yyy}-xy^2w_{xyy}-\left[(c_1+1-f_1)+(c_2+1-f_1)+1\right]xyw_{xy}\\
+\left\{(2-f_1)+(f_2-f_1+2)-\left[(a+2-e_1-f_1)+(c_1+1-f_1)+(c_2+1-f_1)+3\right]y\right\}yw_{yy}\\
-(c_1+1-f_1)(c_2+1-f_1)xw_x\\
+\left\{\begin{array}{l}(2-f_1)(f_2-f_1+2)\\ -\left[\begin{array}{l}(a+2-e_1-f_1)(c_1+1-f_1)+(a+2-e_1-f_1)(c_2+1-f_1)+(c_1+1-f_1)(c_2+1-f_1)+\\ +(a+2-e_1-f_1)+(c_1+1-f_1)+(c_2+1-f_1)+1\end{array}\right]y\end{array}\right\}w_y\\
-(a+2-e_1-f_1)(c_1+1-f_1)(c_2+1-f_1)w=0.
\end{array}\right. \tag{3.20}
$$

Система уравнений (3.20) имеет решение (3.7).

Случае 6. Если $\tau=1-e_1$, $\nu=1-f_2$, то система (3.14) имеет вид

$$
\left\{\begin{array}{l}
x^2(1-x)w_{xxx}-x^2yw_{xxy}+\left\{\begin{array}{l}(2-e_1)+(e_2-e_1+2)-\\ -\left[(a+2-e_1-f_2)+(b_1+1-e_1)+(b_2+1-e_1)+3\right]x\end{array}\right\}xw_{xx}\\
-\left[(b_1+1-e_1)+(b_2+1-e_1)+1\right]xyw_{xy}\\
+\left\{\begin{array}{l}(2-e_1)(e_2-e_1+2)\\ -\left[\begin{array}{l}(a+2-e_1-f_2)(b_1+1-e_1)+(a+2-e_1-f_2)(b_2+1-e_1)+(b_1+1-e_1)(b_2+1-e_1)\\ +(a+2-e_1-f_2)+(b_1+1-e_1)+(b_2+1-e_1)+1\end{array}\right]x\end{array}\right\}w_x\\
-(b_1+1-e_1)(b_2+1-e_1)yw_y-(a+2-e_1-f_2)(b_1+1-e_1)(b_2+1-e_1)w=0,\\
y^2(1-y)w_{yyy}-xy^2w_{xyy}-\left[(c_1+1-f_2)+(c_2+1-f_2)+1\right]xyw_{xy}\\
+\left\{(f_1-f_2+1)+(2-f_2)-\left[(a+2-e_1-f_2)+(c_1+1-f_2)+(c_2+1-f_2)+3\right]y\right\}yw_{yy}\\
-(c_1+1-f_2)(c_2+1-f_2)xw_x\\
+\left\{\begin{array}{l}(f_1-f_2+1)(2-f_2)\\ -\left[\begin{array}{l}(a+2-e_1-f_2)(c_1+1-f_2)+(a+2-e_1-f_2)(c_2+1-f_2)+(c_1+1-f_2)(c_2+1-f_2)\\ +(a+2-e_1-f_2)+(c_1+1-f_2)+(c_2+1-f_2)+1\end{array}\right]y\end{array}\right\}w_y\\
-(a+2-e_1-f_2)(c_1+1-f_2)(c_2+1-f_2)w=0.
\end{array}\right. \tag{3.21}
$$

Система уравнений (3.21) имеет решение (3.8).

INTERNATIONAL JOURNAL OF THEORETICAL AND PRACTICAL RESEARCH
ISSN 2181-2357
T. 2. №1. 2022
SJIF 2021:5.5

Случае 7. Если $\tau = 1 - e_2,\ \nu = 0$, то система (3.14) имеет вид

$$
\left\{
\begin{aligned}
& x^2(1-x)w_{xxx} - x^2 y w_{xxy} + \left\{ \begin{array}{l} (e_1+1-e_2)+(2-e_2) \\ -\left[(a+1-e_2)+(b_1+1-e_2)+(b_2+1-e_2)+3\right]x \end{array} \right\} x w_{xx} \\
& -\left[(b_1+1-e_2)+(b_2+1-e_2)+1\right] xyw_{xy} \\
& +\left\{ \begin{array}{l} (e_1+1-e_2)(2-e_2) \\ -\left[\begin{array}{l} (a+1-e_2)(b_1+1-e_2)+(a+1-e_2)(b_2+1-e_2)+(b_1+1-e_2)(b_2+1-e_2) \\ +(a+1-e_2)+(b_1+1-e_2)+(b_2+1-e_2)+1 \end{array} \right] x \end{array} \right\} w_x \\
& -(b_1+1-e_2)(b_2+1-e_2) y w_y \\
& -(a+1-e_2)(b_1+1-e_2)(b_2+1-e_2) w = 0, \\
& \quad y^2(1-y)w_{yyy} - xy^2 w_{xyy} - (c_1+c_2+1) xyw_{xy} \\
& \quad +\left\{ f_1+f_2+1-\left[(a+1-e_2)+c_1+c_2+3\right]y \right\} yw_{yy} - c_1c_2 x w_x \\
& \quad +\left\{ f_1 f_2 - \left[\begin{array}{l} (a+1-e_2)c_1+(a+1-e_2)c_2+c_1c_2 \\ +(a+1-e_2)+c_1+c_2+1 \end{array} \right] y \right\} w_y - (a+1-e_2)c_1c_2 w = 0.
\end{aligned}
\right.
\tag{3.22}
$$

Система уравнений (3.22) имеет решение (3.9).

Случае 8. Если $\tau = 1 - e_2,\ \nu = 1 - f_1$, то система (3.14) имеет вид

$$
\left\{
\begin{aligned}
& x^2(1-x)w_{xxx} - x^2 y w_{xxy} + \left\{ \begin{array}{l} (1+e_1-e_2)+(2-e_2) \\ -\left[(a+2-e_2-f_1)+(b_1+1-e_2)+(b_2+1-e_2)+3\right]x \end{array} \right\} x w_{xx} \\
& -\left[(b_1+1-e_2)+(b_2+1-e_2)+1\right] xyw_{xy} \\
& +\left\{ \begin{array}{l} (1+e_1-e_2)(2-e_2) \\ -\left[\begin{array}{l} (a+2-e_2-f_1)(b_1+1-e_2)+(a+2-e_2-f_1)(b_2+1-e_2)+(b_1+1-e_2)(b_2+1-e_2) \\ +(a+2-e_2-f_1)+(b_1+1-e_2)+(b_2+1-e_2)+1 \end{array} \right] x \end{array} \right\} w_x \\
& -(b_1+1-e_2)(b_2+1-e_2) y w_y - (a+2-e_2-f_1)(b_1+1-e_2)(b_2+1-e_2) w = 0, \\
& y^2(1-y)w_{yyy} - xy^2 w_{xyy} - \left[(c_1+1-f_1)+(c_2+1-f_1)+1\right] xyw_{xy} \\
& +\left\{(2-f_1)+(f_2-f_1+1)-\left[(a+2-e_2-f_1)+(c_1+1-f_1)+(c_2+1-f_1)+3\right]y\right\} yw_{yy} \\
& -(c_1+1-f_1)(c_2+1-f_1) x w_x \\
& +\left\{ \begin{array}{l} (2-f_1)(f_2-f_1+1) \\ -\left[\begin{array}{l} (a+2-e_2-f_1)(c_1+1-f_1)+(a+2-e_2-f_1)(c_2+1-f_1)+(c_1+1-f_1)(c_2+1-f_1) \\ +(a+2-e_2-f_1)+(c_1+1-f_1)+(c_2+1-f_1)+1 \end{array} \right] y \end{array} \right\} w_y \\
& -(a+2-e_2-f_1)(c_1+1-f_1)(c_2+1-f_1) w = 0.
\end{aligned}
\right.
\tag{3.23}
$$

Система уравнений (3.23) имеет решение (3.10).

Случае 9. Если $\tau = 1 - e_2$, $\nu = 1 - f_2$, то система (3.14) имеет вид

$$
\begin{cases}
x^2(1-x)w_{xxx} - x^2 y w_{xxy} + \left\{ \begin{array}{l} (2-e_2)+(e_1-e_2+1) \\ -\left[(a+2-e_2-f_2)+(b_1+1-e_2)+(b_2+1-e_2)+3\right]x \end{array} \right\} x w_{xx} \\
-\left[(b_1+1-e_2)+(b_2+1-e_2)+1\right] xyw_{xy} \\
+\left\{ \begin{array}{l} (2-e_2)(e_1-e_2+1) \\ -\left[\begin{array}{l} (a+2-e_2-f_2)(b_1+1-e_2)+(a+2-e_2-f_2)(b_2+1-e_2)+(b_1+1-e_2)(b_2+1-e_2) \\ +(a+2-e_2-f_2)+(b_1+1-e_2)+(b_2+1-e_2)+1 \end{array} \right] x \end{array} \right\} w_x \\
-(b_1+1-e_2)(b_2+1-e_2)yw_y \\
-(a+2-e_2-f_2)(b_1+1-e_2)(b_2+1-e_2)w = 0, \\
y^2(1-y)w_{yyy} - xy^2 w_{xyy} - \left[(c_1+1-f_2)+(c_2+1-f_2)+1\right]xyw_{xy} \\
+\left\{(f_1-f_2+1)+(2-f_2)-\left[(a+2-e_2-f_2)+(c_1+1-f_2)+(c_2+1-f_2)+3\right]y\right\} yw_{yy} \\
-(c_1+1-f_2)(c_2+1-f_2)xw_x \\
+\left\{ \begin{array}{l} (f_1-f_2+1)+(2-f_2) \\ -\left[\begin{array}{l} (a+2-e_2-f_2)(c_1+1-f_2)+(a+2-e_2-f_2)(c_2+1-f_2)+(c_1+1-f_2)(c_2+1-f_2) \\ +(a+2-e_2-f_2)+(c_1+1-f_2)+(c_2+1-f_2)+1 \end{array} \right] y \end{array} \right\} w_y \\
-(a+2-e_2-f_2)(c_1+1-f_2)(c_2+1-f_2)w = 0.
\end{cases}
$$

(3.24)

Система уравнений (3.24) имеет решение (3.11).

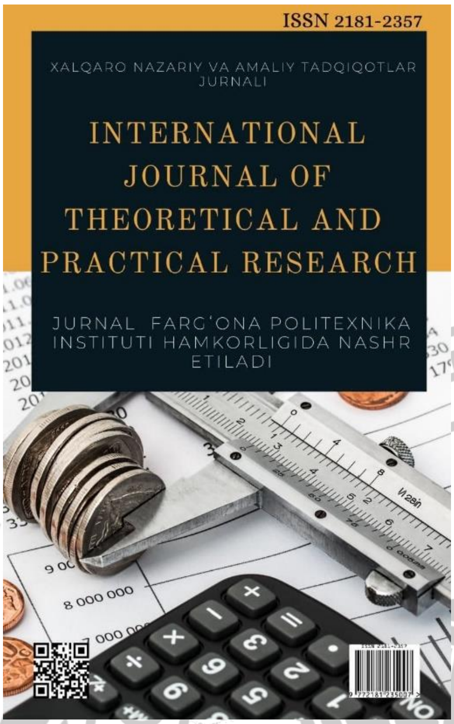
Список использованной литературы:

1. P. Appell and Kamper de Ferriets, Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite, Gauthier - Villars, Paris, 1926.
2. J. Barros-Neto and I.M. Gelfand, Fundamental solutions for the Tricomi operator,Duke Math. J. 98(3) (1999), 465-483.
3. J. Barros-Neto and I.M. Gelfand, Fundamental solutions for the Tricomi operator II, Duke Math. J. 111(3) (2002), 561-584.
4. J. Barros-Neto and I.M. Gelfand, Fundamental solutions for the Tricomi operator III, Duke Math. J. 128(1) (2005), 119-140.
5. L. Bers, Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics, Wiley, New York, 1958.
6. A. Erde'lyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, Higher Transcendental Functions, Vol. 1, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto and London, 1953.
7. F.I. Frankl, Selected Works in Gas Dynamics, Nauka, Moscow, 1973.
8. A.J. Fryant, Growth and complete sequences of generalized bi-axially symmetric potentials, J. Differential Equations 31(2) (1979), 155-164.

9. Junesang Choi, Anvar Hasanov and Mamasali Turaev, Linear independent solutions for the hypergeometric Exton function , Honam Mathematical J. 33 (2011), No. 2, pp. 223-229.
10. A. Hasanov, Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation, Complex Variables and Elliptic Equations 52(8) (2007), 673-683.
11. A. Hasanov, Some solutions of generalized Rassias's equation, Intern. J. Appl. Math. Stat. 8(M07) (2007), 20-30.
12. A. Hasanov, The solution of the Cauchy problem for generalized Euler-Poisson-Darboux equation. Intern. J. Appl. Math. Stat. 8 (M07) (2007), 30-44.
13. A. Hasanov, Fundamental solutions for degenerated elliptic equation with two perpendicular lines of degeneration. Intern. J. Appl. Math. Stat. 13(8) (2008), 41-49.
14. A. Hasanov and E.T. Karimov, Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients. Appl. Math. Letters 22 (2009), 1828-1832.
15. Hasanov, J.M. Rassias , and M. Turaev, Fundamental solution for the gen- eralized Elliptic Gellerstedt Equation, Book: "Functional Equations, Difference Inequalities and ULAM Stability Notions Nova Science Publishers Inc. NY, USA, 6 (2010), 73-83.
Anvar Hasanov, Rakhila B. Seilkhanova and Roza D. Seilova, Linearly independent solutions of the system of hyper-geometric Exton function, Contemporary Analysis and Applied Mathematics Vol.3, No.2, 289-292, 2015
16. G. Lohofer, Theory of an electro-magnetically deviated metal sphere. 1: Absorbed power, SIAM J. Appl. Math. 49 (1989), 567-581.
17. A.W. Niukkanen, Generalized hyper-geometric series arising in physical and quan-tum chemical applications, J. Phys. A: Math. Gen. 16 (1983) 1813-1825.
18. H. M. Srivastava and P. W. Karlsson, Multiple Gaussian hyper-geometric Series, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), Wiley, New York, Chichester, Brisbane, and Toronto, 1985.
19. R.J. Weinacht, Fundamental solutions for a class of singular equations, Contrib. Differential Equations 3 (1964), 43-55.
20. A. Weinstein, Discontinuous integrals and generalized potential theory, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1946), 342-354.
Jonathan Murley and Nasser Saad, Tables of the Appell Hypergeometric Functions F2. https://arxiv.org/pdf/0809.5203.pdf

E'lon / Reklama / Advertisement

ЭЪЛОН



INTERNATIONAL STANDARD SERIAL NUMBER INTERNATIONAL CENTRE
NATIAONAL LIBRARY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER ALISHER NAVOI

CERTIFICATE

of registration at the National Centre

ISSN

and assignment of the International Standard Serail Number

Title proper: International journal of theoretical and practical research
Abbreviated key-title: International journal of theoretical and practical research (Online)
Parallel title: Xalqaro nazariy va amaliy tadqiqotlar jurnali
Original alphabet of title: Basic roman
Subject UDC: 327
Subject: International relations. World, global politics. International affairs. Foreign policy
Corporate contributor: Farg'ona Politexnika instituti
Publisher: Farg'ona: "Al-Ferganus" MCHJ
LINK: alferganus.uz/en/site/index
Dates of publication: 2021-9999
Frequency: Monthly
Type of resource: Periodical
Language: Multiple languages
Country: Uzbekistan
Medium: Online
Indexed by: ROAD
Type of record: Confirmed
Last modification date: 22/12/2021
ISSN Center responsible of the record: ISSN National Centre for Uzbekistan
Record creation date: 22/12/2021
Original ISSN Centre: ISSN National Centre for Uzbekistan

ISSN: 2181-2357

The owner of the number is warned that the ISSN number must be used in strict accordance with the regulatory documents, not to transfer it to other persons and organizations. Changes in the information declared during registration, including any changes in the title, change ofthe publisher, contact information, etc., must be reported to the ISSN National Center.

Teshabaeva Umida Alimdjanovna
Director

22. 12. 2021
Date

National library of Uzbekistan named after Alisher Navoi – Information and mass communications Agency under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan
contact: (+998 71) 232-83-94, web: natlib.uz

Ҳурматли ҳамкасабалар “Al-Ferganus” нашриёти ва “Xalqaro nazariy va amaliy tadqiqotlar jurnali” электрон журнали Ўзбекистон таълим хизматлари бозорида ўзининг фаолиятини бошлаганлигини маълум қиламиз.

Ажойиб имкониятдан сиз биринчилар қаторида фойдаланиб илмий нашрларингизни чоп этишингиз мумкин.

“Al-Ferganus” нашриётимиз томонидан Сиз тақдим этган дарслик, ўқув қўлланма, монография ва илмий рисолаларга ISBN, Doi ҳалқаро рақамли иденфикаторларни бириктириш, уларнинг электрон замонавий андозадаги муқовалар ва ишланмаларнинг электрон макетини яратиш, нашриётда эълон қилинган ишларни электрон ахборот нашрларида жойлаштириш хизматлари кўрсатилади.

Бизнинг нашриётимизнинг бошқа нашриётлардан фарқи шундаки, тезкор ва сифатли хизмат кўрсатамиз ҳамда энг асосийси биз Сизнинг ишларингизни Алишер Навоий номидаги Ўзбекистон Миллий кутубхонаси ва Россия Миллий кутубхонаси фондларига бепул жойлашга шунингдек, Россия илмий иқтибослик индекси (РИНЦ ва E - library) платформасига, CrossRef базаларига шартнома асосида жойлаштиришга кўмаклашамиз.

“Xalqaro nazariy va amaliy tadqiqotlar jurnali” ISSN 2181-2357 электрон журнали ҳам ўз фаолиятини бошламоқда. Бизнинг журналда Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг қуйидаги ихтисосликлари физика-математика, кимё, биология, геология-минералогия, техника, қишлоқ хўжалиги, тарих, иқтисодиёт, фалсафа, филология, география, юридик, педагогика, тиббиёт санъатшунослик, архитектура, психология, социология фанлари бўйича миллий ва хорижий муаллифларнинг фанлардан эришган ютуқлари ва истиқболлари борасидаги илмий мақолалари, илмий тадқиқотлар олиб бораётган олимларнинг илмий изланишлари натижалари эълон қилинади. Электрон журнал ҳар ойда бир марта эълон қилинади.

Журналларда эълон қилинадиган ҳар бир мақолага шартнома асосида DOI (Crossref) рақами берилади.

Шунингдек, таҳририят томонидан:

- мақолаларни сифатли таржима қилиш;
- мақолаларни таҳрирлаш ва журналлар талабига мослаш;
- мақолаларга ишлов бериш;
- мақолаларни плагиатга текшириш;
- хориждаги нуфузли (Scopus, Web of sciences ва юқори импакт факторли) журналларда мақолларни сифатли ва ишончли чоп этишга кўмаклашиш хизматларини ҳам кўрсатади.

Имкониятни бой бериб қўйманг!
Қуйидаги манзилларга мурожаат қилинг:
Электрон почта манзили: Alferganus.ltd@gmail.com
Телеграмм манзилимиз : @Alferganus_ltd
Телефонлар: (97) 100-38-88
(91) 109-05-38
(97) 337-86-00


Scientific Journal Impact Factor

CERTIFICATE OF INDEXING (SJIF 2021)

This certificate is awarded to

Nazariy va amaliy tadqiqotlar xalqaro jurnali
(ISSN: 2181-2357)

The Journal has been positively evaluated in the SJIF Journals Master List evaluation process
SJIF 2021 = 5.5

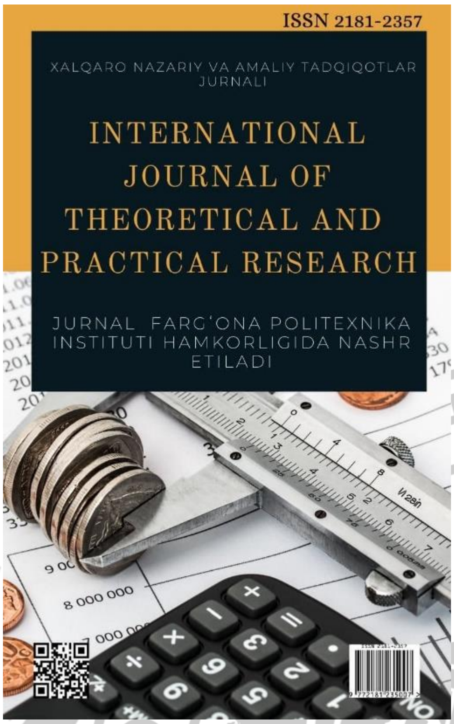
SJIF (A division of InnoSpace)

SJIFactor Project Manager
International Advisory Services
INNOSPACE INTERNATIONAL

SJIFactor Project

ISSN 2181-2357
T. 2. №1. 2022
SJIF 2021:5.5

ВНИМАНИЕ ОБЪЯВЛЕНИЕ!



ISSN INTERNATIONAL STANDARD SERIAL NUMBER INTERNATIONAL CENTRE

NATIONAL LIBRARY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER ALISHER NAVOI

CERTIFICATE

of registration at the National Centre

ISSN

and assignment of the International Standard Serail Number

Title proper: International journal of theoretical and practical research
Abbreviated key-title: International journal of theoretical and practical research (Online)
Parallel title: Xalqaro nazariy va amaliy tadqiqotlar jurnali
Original alphabet of title: Basic roman
Subject UDC: 327
Subject: International relations. World, global politics. International affairs. Foreign policy
Corporate contributor: Farg'ona Politexnika instituti
Publisher: Farg'ona: "Al-Ferganus" MCHJ
LINK: alferganus.uz/en/site/index
Dates of publication: 2021-9999
Frequency: Monthly
Type of resource: Periodical
Language: Multiple languages
Country: Uzbekistan
Medium: Online
Indexed by: ROAD
Type of record: Confirmed
Last modification date: 22/12/2021
ISSN Center responsible of the record: ISSN National Centre for Uzbekistan
Record creation date: 22/12/2021
Original ISSN Centre: ISSN National Centre for Uzbekistan

ISSN: 2181-2357

The owner of the number is warned that the ISSN number must be used in strict accordance with the regulatory documents, not to transfer it to other persons and organizations. Changes in the information declared during registration, including any changes in the title, change ofthe publisher, contact information, etc., must be reported to the ISSN National Center.

Teshabaeva Umida Alimdjanovna
Director

22.12.2021
Date

Уважаемые коллеги! Сообщаем вам, что издательский дом «AL-FARGANUS» и “**Xalqaro nazariy va amaliy tadqiqotlar jurnali”-** “Международный журнал теоретических и прикладных исследований” начали свою деятельность на рынке образовательных услуг Узбекистана.

Это прекрасная возможность одним из первых опубликовать свои научные публикации. Наше издательство «AL-FARGANUS» предоставляет услуги по прикреплению международных цифровых идентификаторов ISBN, Doi к учебникам, учебным пособиям, монографиям и научным брошюрам, созданию электронных макетов их обложек и дизайнов в современной электронной форме, размещению опубликованных работ в электронные публикации.

Отличие нашего издательства от других издательств в том, что мы предоставляем быстрые и качественные услуги, а главное, бесплатно размещаем ваши работы в Национальной библиотеке Узбекистана им. Алишера Навои и оказываем помощь в размещении вашей работы в Российской национальной библиотеке, а также на платформе Российского индекса научного цитирования (РИНЦ, e-library) облегчить размещение.

Совместно с Ферганским политехническим институтом запущен проект электронного научного журнала «**Xalqaro nazariy va amaliy tadqiqotlar jurnali** - International Journal of Theoretical and Practical Research. Международный журнал теоретических и прикладных исследований».

Миссия научного электронного журнала направлена на развитие национальной и зарубежной науки, обеспечение общедоступности теоретических позиций и практических результатов прикладных исследований. В журнале представлены следующие специальности Высшей аттестационной комиссии Республики Узбекистан по физике и математике, химии, биологии, геологии и минералогии, технике, сельскому хозяйству, истории, экономике, философии, филологии, географии, праву, педагогике, медицине, архитектуре, психология, социология. Журнал публикует научные статьи отечественных и зарубежных авторов о достижениях и перспективах науки, результатах научных исследований ученых, проводящих исследования. Электронный журнал издается один раз в месяц.

Каждой статье, опубликованной в журнале, на контрактной основе присваивается номер DOI (Crossref).

Также издательство оказывает услуги по:

• качественный перевод статей;

• редактирование статей и адаптация к требованиям журнала;

• обработка статей;

• проверка научных работ (статей, учебных пособи, монографий, диссертаций и др.) на плагиат статей;

• оказывает информационное обеспечение публикаций статей в престижных зарубежных журналах (Scopus, Web of Sciences и журналах с высоким импакт-фактором).

Не упускайте возможность!

Пожалуйста, свяжитесь с нами:

Электронный адрес: Alferganus.ltd@gmail.com

Наш адрес в телеграмм: @Alferganus_ltd

Телефоны: **(97) 100-38-88**

(91) 109-05-38

(97) 337-86-00

Scientific Journal Impact Factor

CERTIFICATE OF INDEXING (SJIF 2021)

This certificate is awarded to

Nazariy va amaliy tadqiqotlar xalqaro jurnali
(ISSN: 2181-2357)

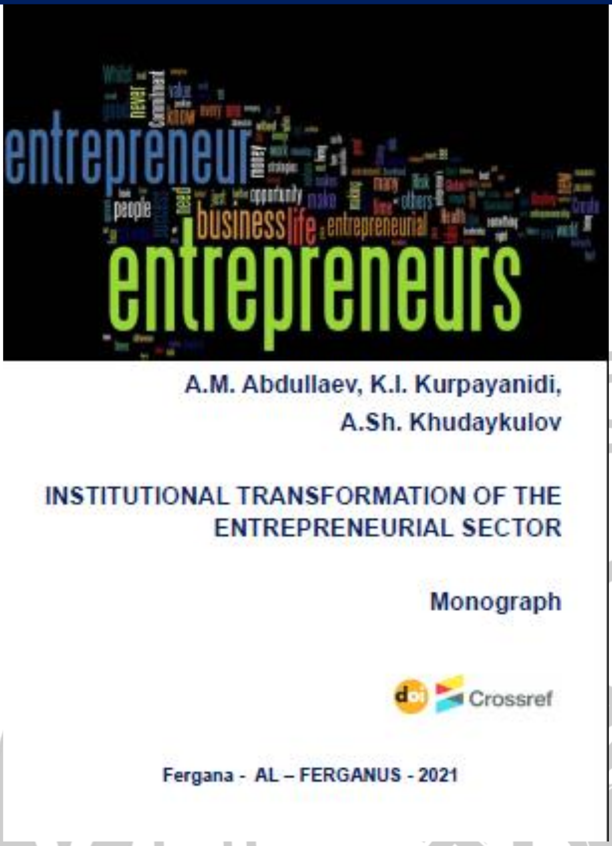
The Journal has been positively evaluated in the SJIF Journals Master List evaluation process
SJIF 2021 = 5.5

SJIF (A division of InnoSpace)

SJIFactor Project Manager
International Advisory Services
INNOSPACE INTERNATIONAL

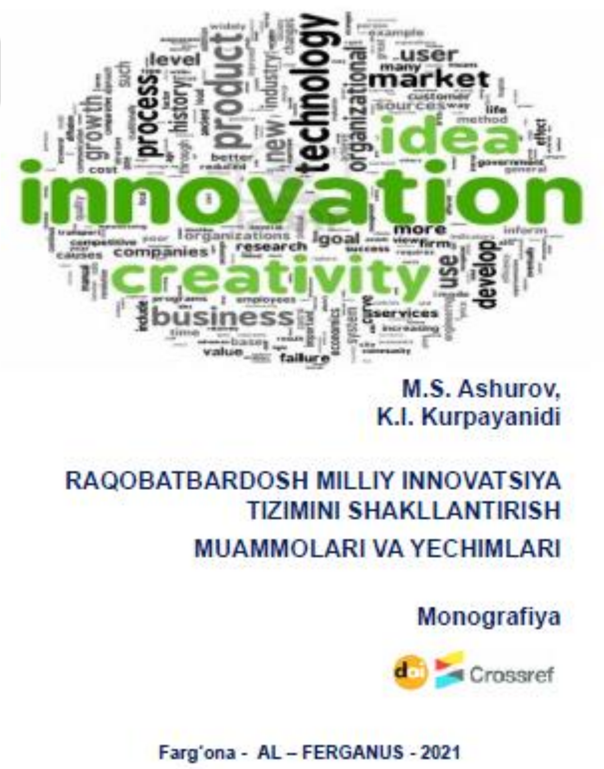
SJIFactor Project

Our publications **Bizning nashrlarimiz** **Наши издания**



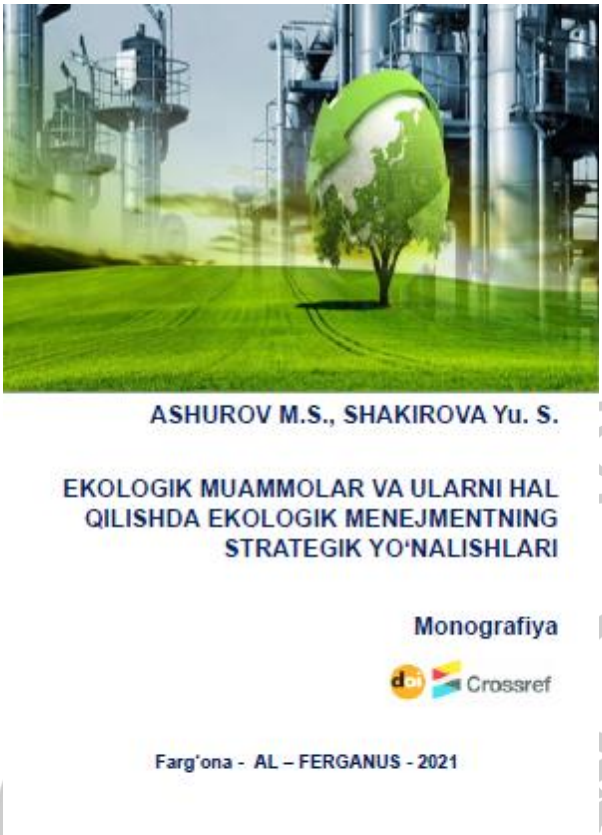
Abdullaev A.M., Kurpayanidi K. I., Khudaykulov A. S. Institutional transformation of the business sector. Monograph. Fergana "AL-FERGANUS", 2021. - 180 p.

DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.5457089



Ashurov, M.S., Kurpayanidi, K.I. Problems and solutions for the formation of a competitive national innovation system. Monograph. Edited by Doctor of Economics, Professor Ikramov M.A., Fergana: Al-Ferganus, 2021.- 102 p.

DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.5676027



Ashurov M.S., Shakirova Yu.S. Environmental problems and strategic directions of environmental management in their solution. Monograph. Edited by Doctor of Economics, Professor Ikramov M.A., Fergana: Al-Ferganus, 2021.-160 p.

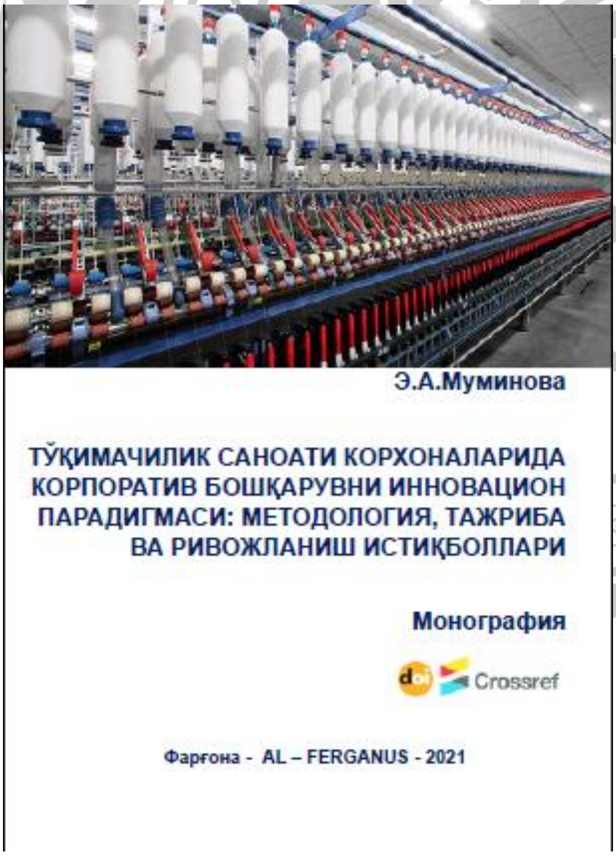
DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.5722678

Жўраева, Н.Қ. Уй-жой коммунал соҳаси фаолиятини бошқариш механизмларини такомиллаштириш. Монография. - Фарғона: Al-Ferganus, 2021.-140 б.

DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.5335878

Mirzaev, A.T. Methodological aspects of tourism and recreational activity management in Uzbekistan: changes and prospects: Monograph /Mirzaev A.T.; ed G. Sh. Khankeldiyeva - Fergana: Al-Ferganus, 2021.-174 p.

DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.5722700



Muminova, E.A. Innovative paradigm of corporate governance at textile enterprises: methodology, experience and development prospects: monograph /Muminova E.A.; ed. G. Sh. Khankeldiyeva - Fergana: Al-Ferganus, 2021.-160 p.

DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.5676091

Набиева, Н.М. Хизмат кўрсатиш корхоналарини ривожлантиришнинг маркетинг стратегиясини ишлаб чиқиш. Монография. - Фарғона: Al-Ferganus, 2021.- 162 б.

DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.5230368

Nazarmatov, O.S. Improving the methodology of management of innovative processes in the enterprises of the textile industry. Monograph. - Fergana: Al-Ferganus, 2021.- 200 p.

DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.5675967

Ubaydullayev M.M. G‘o‘zada defoliatsiya o‘tkazishning maqbul me’yor va muddatlari**.** Monografiya. /q.x.f.d., professor F.J. Tesнayev muharrirligi ostida. Farg‘ona: Al-Ferganus, 2021. – 160 b.

DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.5722721