INTEGRALLASH YORDAMIDA YECHILADIGAN BA'ZI FIZIK MASALALAR TAHLILI

Matchonov Quvonchbek Po'lat o'g'li
O'zbekiston milliy universiteti, Fizika fakulteti, Yadro fizikasi va yadro texnologiyalari (qo'llash sohalari bo'yicha) yo'nalishi 1-bosqich magistranti,kuvonchbekmatchonov@gmail.com
https://doi.org/ 10.5281/zenodo.6055706

MAQOLA TARIXI

Qabul qilindi: 15-dekabr 2021
Ma'qullandi: 15-yanvar 2022
Chop etildi: 5-fevral 2022

KALIT SO'ZLAR

Trayektoriya tenglamasi, egri chiziqli yoy, egri chiziqli integral, uchish uzoqligi, uchish vaqti, o'rtacha tezlik

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada biror balandlikdan gorizontal yo'nalishda otilgan jismning butun harakatlanish vaqti davomidagi o'rtacha tezlik modulini hisoblash metodikasi; harakati davomida massasi uzluksiz ravishda o'zgarib boruvchi jismlarning harakat qonunini keltirib chiqarish; integrallash usuli bilan yechiladigan ba'zi Elektrostatika masalalarini yechish metodikasi to'g'risida fikr yuritiladi.

Fizikadan masalalar yechishda egri chiziqli integrallardan foydalanish

Ma'lum balandlikdan biror boshlang'ich tezlik bilan gorizontal otilgan jismning yerning tortish maydonidagi harakatini ko'rib chiqamiz. Bunda havoning qarshiligini hisobga olmaymiz. U holda bu jism x o'qi bo'yicha tekis harakatlanadi. Chunki bu yo'nalishda jismga hech qanday kuch ta'sir etmaydi. Shu bilan birga jism vertikal yo'nalishda g tezlanish bilan tekis tezlanuvchan harakat qiladi. Jismning har ikkala (x va y) o'qlardagi harakat tenglamalarini tuzib olamiz:

$$x = \vartheta_0 t \quad (1)$$

$$y = h - \frac{gt^2}{2} \quad (2)$$

(1) va (2) tenglamalardan t ni yo'qotib, quyidagini hosil qilamiz:

$$y(x) = h - \frac{gx^2}{2\vartheta_0^{\,2}} \quad (3)$$

Bu tenglamadan ko'rinadiki, qaralayotgan jismning harakat trayektoriyasi paraboladan iboratdir.

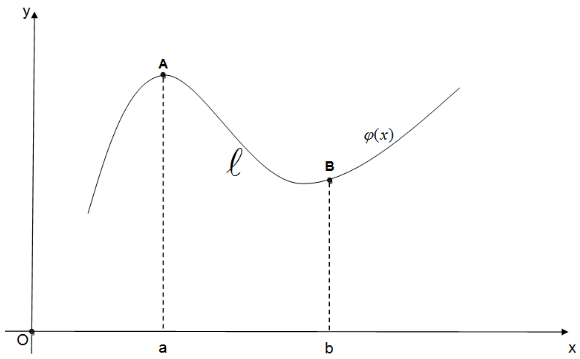
Bizga shu jismning butun harakati davomidagi o'rtacha tezligini aniqlash masalasi qo'yilgan bo'lsin. Ma'lumki, o'rtacha tezlik moduli jism bosib o'tgan butun yo'lning shu yo'lni bosib o'tish uchun ketgan butun vaqtga nisbati bilan aniqlanadi. Jismning butun harakatlanish vaqtini (2) tenglamaning chap tarafini 0 ga tenglashtirib, osongina aniqlash mumkin. Jism yerga urilgan momentda y=0.

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (4)$$

Keyingi masala, jismning butun harakati ya'ni otilish nuqtasidan to yerga urilgunicha bosib o'tgan yo'lini aniqlash masalasidir. Buning uchun (3) tenglama bilan aniqlanadigan parabolaning chegaralangan qismining uzunligini ya'ni egri chiziqli yoyning uzunligini aniqlash lozim.

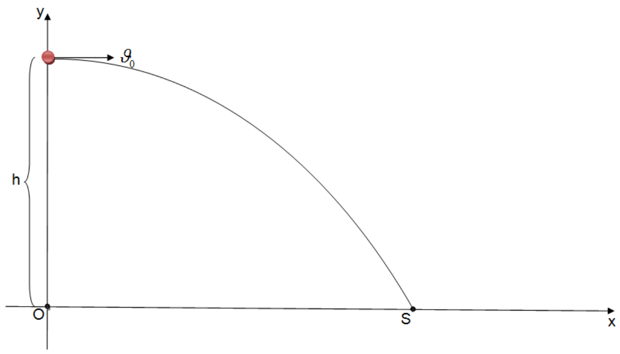
Matematik analiz kursidan ma'lumki, egri chiziqli yoyning uzunligi quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$A\breve{B} = \ell = \int_a^b \sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx$$



Xuddi shu yo'l bilan biz qarayotgan jismning bosib o'tgan masofasini ham aniqlash mumkin. Bunda yuqoridagi formulani quyidagicha yozib olamiz:

$$L = \int_0^S \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx \quad (5)$$



(3) tenglamaga asosan, y(x) dan birinchi tartibli hosila olsak,

$y'(x) = -\dfrac{gx}{\vartheta_0^{\,2}}$ (6) ga ega bo'lamiz.

(6) ni (5) ga qo'yib, $L = \displaystyle\int_0^S \sqrt{1+\frac{g^2x^2}{\vartheta_0^{\,4}}}\,dx$ (7)

tenglamani hosil qilamiz.

(7) tenglamaga quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$\frac{g^2}{\vartheta_0^{\,4}} = a \quad (8)$$

(8) ni (7) ga qo'ysak,

$L = \displaystyle\int_0^S \sqrt{1+ax^2}\,dx$ (9) kelib chiqadi.

(9) ko'rinishidagi integrallarni quyidagicha hisoblash mumkin:

Bunda, $tgw = \sqrt{a}x$ almashtirish bajaramiz.

Bunga asosan, $x = \dfrac{tgw}{\sqrt{a}}$ bo'ladi.

$$\int \sqrt{1+ax^2}\,dx = \int \sqrt{1+tg^2w}\,d\left(\frac{tgw}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \sqrt{1+tg^2w}\cdot\frac{1}{\cos^2 w}\,dw = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \sec^3 w\,dw = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\sec^2 w\sin w}{2}+\frac{1}{2}\int \sec w\,dw\right)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}(\sec^2 w\sin w + \ln|\sec w + tgw|) = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\sqrt{a}x\sqrt{ax^2+1} + \ln\left|\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+1}\right|\right) = \frac{x\sqrt{ax^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+1}\right|}{2\sqrt{a}}$$

$$\sec w = \sqrt{1+tg^2w} = \sqrt{1+ax^2}$$

$$\sin w = \sqrt{1-\cos^2 w} = \sqrt{1-\frac{1}{\sec^2 w}} = \frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{ax^2+1}}$$

Va nihoyat,

$$L = \left(\frac{x\sqrt{ax^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+1}\right|}{2\sqrt{a}}\right)\Bigg|_0^S$$

ekanligi kelib chiqdi. Demak,

$$L = \frac{S\sqrt{aS^2+1}}{2} + \frac{\ln\left|\sqrt{a}S+\sqrt{aS^2+1}\right|}{2\sqrt{a}} \quad (10)$$

(10) tenglamadagi S jismning uchish uzoqligidir. Ya'ni,

$$S = \vartheta_0 t = \vartheta_0\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (11) \qquad \bar{\vartheta} = \frac{L}{t} \quad (12)$$

(4), (8), (10), (11) va (12) tenglamalarga asosan o'rtacha tezlikning quyidagicha ifodasini hosil qilamiz:

$$\bar{\vartheta} = \frac{\sqrt{\vartheta_0^{\,2}+2gh}}{2} + \frac{\vartheta_0^{\,2}}{2\sqrt{2gh}}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{\vartheta_0^{\,2}+2gh}+\sqrt{2gh}}{\vartheta_0}\right|$$

O'zgaruvchan massali jism harakat qonunini keltirib chiqarish

Ba'zi jismlarning massasi ularning harakati davomida uzluksiz ravishda o'zgarib boradi. Masalan, harakatlanayotgan tomchining massasi uning bug'lanishi hisobiga kamayib borishi yoki aksincha, uning sirtida bug'larning kondensatsiyalanishi hisobiga ortib borishi, suv sepayotgan mashina massasining kamaya borishi, ip oʻralayotgan gʻaltakning massasi ortib borishi bunday harakatga yaqqol misol boʻladi. Jism massasining oʻzgarishi uning harakatini oʻrganishda muayyan qiyinchiliklar tugʻdiradi. Oʻz massasining mbiror qismini maʼlum yoʻnalishda uloqtirganda, jism qarama-qarshi yoʻnalishda impuls oladi. Bu keng qoʻllaniladigan *reaktiv harakat* prinsipidir. Oʻzgaruvchan massali jism harakat qonunini raketaning harakati misolida koʻrib chiqamiz. Faraz qilaylik, bizga yer bilan bogʻlangan XOY koordinatalar sistemasi berilgan boʻlib, biror t vaqt momentida raketaning masasi m ga,tezligi υ ga teng boʻlsin. $t_1=t+dt$ vaqt momentida esa raketaning soplosidan yonilgʻi otilib chiqishi natijasida uning tezligi ortib, $\upsilon_1=\upsilon+d\upsilon$ ga teng boʻlib qoladi. Shuni alohida taʼkidlash joizki, vaqt oʻtishi bilan raketa massasining kamaya borishini hisobga olsak, birlik vaqt ichidagi massa kamayishini ifodalovchi μ kattalik quyidagicha boʻladi:

$\mu=-\dfrac{dm}{dt}$ μ kattalik musbatdir.

Masalan, $\mu=10\dfrac{kg}{s}$. Bu qiymat raketa massasi har sekundda 10 kg ga kamayishini bildiradi. dm massa oʻzgarishi esa manfiydir:

$$dm=m_2-m_1<0$$

Shuning uchun dt vaqt ichida raketa soplosidan otilib chiqqan gaz massasi $-dm$ deb olinadi. Sistemaning t va t_1 vaqt momentlaridagi impulslari mos ravishda quyidagilarga tengdir:

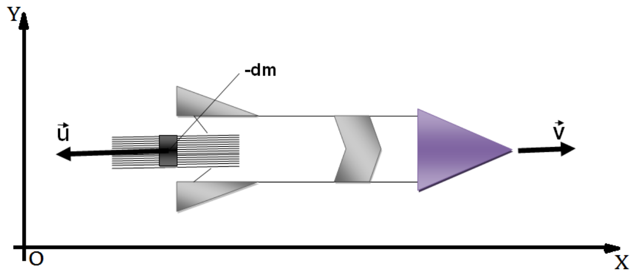
$$p_1=m\upsilon$$

$$p_2=(m-(-dm))(\upsilon+d\upsilon)-(-dm)V$$

Gazlarning raketaga nisbatan otilib chiqish tezligi u ga teng, V esa ularning yerga nisbatan tezligidir. $u>\upsilon$ ekanligini hisobga olsak, $V=u-\upsilon_1$ ni hosil qilamiz. U holda

$$p_2=(m+dm)(\upsilon+d\upsilon)+dm(u-(\upsilon+d\upsilon))=m\upsilon+md\upsilon+dmu$$

boʻlishi kelib chiqadi.



Sistema impulsining oʻzgarishi kuch impulsiga tengligidan,

$$dp=Fdt$$

Bunda F raketa dvigatelining tortish kuchi.

$$p_2-p_1=Fdt$$

$$md\upsilon+dmu=Fdt$$

Yuqoridagi ifodadan quyidagini hosil qilamiz:

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=F-u\frac{dm}{dt}$$

Bu tenglama oʻzgaruvchan massali jism harakati uchun Meshcherskiy tenglamasidir.

$F=0$ boʻlganda,

$$-udm=md\upsilon$$

$$\int_{M_0}^{M}\frac{dm}{m}=-\int\frac{d\upsilon}{u}$$

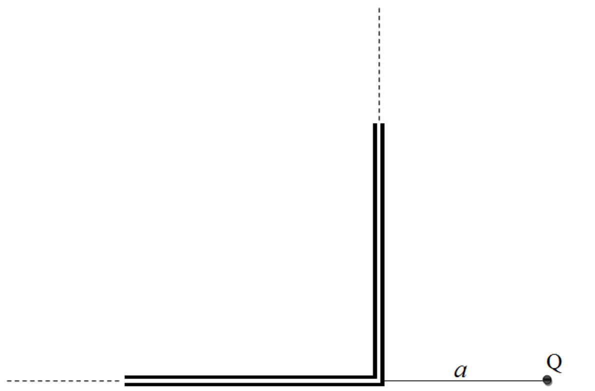
$$\ln\left(\frac{M}{M_0}\right)=-\frac{\upsilon}{u}$$

$$M = M_0 e^{-\frac{\upsilon}{u}}.$$

Yuqoridagi ifodadan koʻrinadiki, raketa tezligi ortishi bilan massasi kamayib boradi.

Elektrostatika masalalarini yechishda integraldan foydalanish

Elektrostatikada qoʻzgʻalmas zaryadlar orasidagi oʻzaro taʼsirlashuv, ular hosil qiluvchi elektr maydonlar kabi tushunchalar oʻrganiladi. Bunda baʼzi amaliy masalalar integrallash yoʻli bilan hal qilinadi. Naʼmuna sifatida quyidagi masalaning yechimini koʻrib chiqamiz. Bizga rasmda koʻrsatilganidek toʻgʻri burchak ostida bukilgan cheksiz uzun, τ chiziqli zichlik bilan zaryadlangan bir jinsli tayoqcha berilgan boʻlsin. Undan biror a masofada turgan Q nuqtaviy zaryadga taʼsir qiluvchi kuchni topish masalasini qarab chiqamiz.



Bu masalani yechish uchun quyidagicha yoʻl tutamiz:

Dastlab tayoqcha vertikal qismining Q zaryadga taʼsirini alohida topamiz.

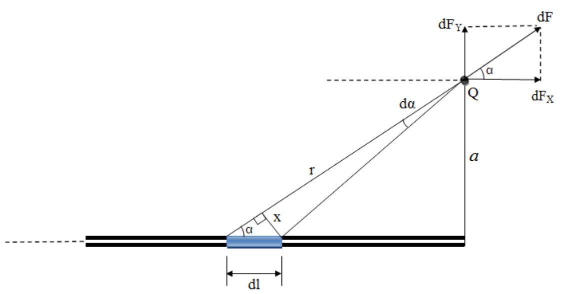
Soʻngra uning gorizontal qismining zaryadga taʼsir kuchini aniqlaymiz. Har bir qismning alohida taʼsir kuchlarini vektor koʻrinishda qoʻshib, Q nuqtaviy zaryadga taʼsir qilayotgan natijaviy kuchni topamiz.

Kulon qonuniga koʻra, ikki nuqtaviy zaryadning oʻzaro taʼsirlashuv kuchining moduli, ular zaryad miqdorlarining koʻpaytmasiga toʻgri, oralaridagi masofaning kvadratiga esa teskari proporsionaldir. Shuni eslatib oʻtish kerakki, “nuqtaviy zaryad” deganda, oʻlchamlari ular orasidagi masofaga qaraganda koʻp marta kichik boʻlgan zaryadlangan jismlar nazarda tutiladi. Masalan, qandaydir miqdorda zaryadlangan ikki sharchani ularning olchamlari bilan solishtirganda juda koʻp marta farq qiluvchi, yetarlicha uzoq masofaga joylashtiraylik. Bu taʼsirlashuv jarayonida zaryadlangan sharchalarni “nuqtaviy zaryad” deb qarashimiz mumkin boʻladi.

Vertikal qismning taʼsiri:

Bunda tayoqchaning ixtiyoriy qismidagi biror elementar dq zaryadga ega boʻlgan dl boʻlakcha va Q zaryadning taʼsiri quyidagicha boʻladi:

$$dF = k\frac{Qdq}{r^2}$$



Chizmadan koʻrinib turibdiki,

$$\sin\alpha = \frac{x}{dl}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{r}$$

$$d\alpha = \frac{x}{r}$$

Zaryadning chiziqli zichligi (*o‘tkazgichning birlik uzunligiga to‘gri keluvchi zaryad miqdori. Mazkur masalada, tayoqcha zaryadining zichligi uning butun uzunligi bo‘yicha o‘zgarmaydi deb qaraladi*)

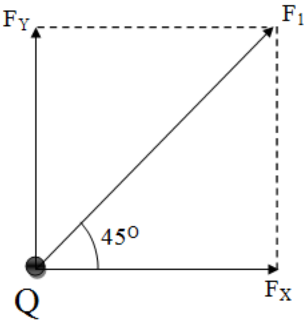
$\tau = \dfrac{dq}{dl}$ ni inobatga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$dF = k\frac{Q\tau}{a}d\alpha, \quad \begin{matrix} dF_x = dF\cos\alpha \\ dF_y = dF\sin\alpha \end{matrix}, \quad 0^\circ \le \alpha \le 90^\circ.$$

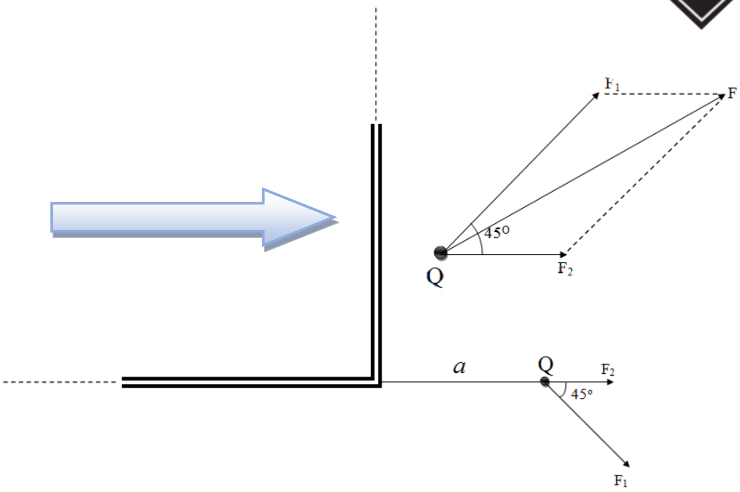
$$F_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dF_x = k\frac{Q\tau}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\, d\alpha = k\frac{Q\tau}{a},$$

$$F_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dF_y = k\frac{Q\tau}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\, d\alpha = k\frac{Q\tau}{a},$$

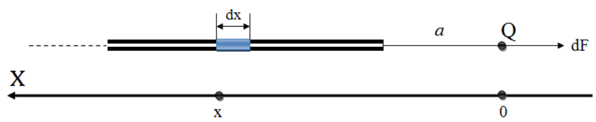
$$F_x = F_y.$$



$$F_1 = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}} = \sqrt{2}k\frac{Q\tau}{a}.$$



Gorizontal qismning ta’siri:



$$dF = k\frac{Qdq}{x^2}, \quad \tau = \frac{dq}{dx}, \quad a \le x \le a + l, \quad l >> a.$$

$$F_2 = \int_a^{a+l} dF = kQ\tau\int_a^{a+l}\frac{dx}{x^2} = kQ\tau\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right) = k\frac{Q\tau}{a}$$

Natijalovchi kuch:

$$F = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + 2F_1F_2\cos 45^\circ} = \sqrt{5}\frac{kQ\tau}{a}.$$

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. А.Саьдуллаев, Х.Мансуров, Г.Худойберганов,А.Ворисов,Р.Гуломов.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар туплами II, Тошкент, «Ўзбекистон»-1995.
2. С.П.Стрелков. Умумий физика курси, Механика. Тошкент, “Ўқитувчи”-1977
3. Д.В.Сивухин. Умумий физика курси, Механика. Тошкент, “Ўқитувчи”-1981
4. М.Раҳматуллаев. Умумий физика курси, Механика. Тошкент, “Ўқитувчи”-1995.
5. Д.Х.Усмонова. *Физикадан масалалар ечиш.* „ЎКИТУВЧИ”, Тошкент-1988.
6. M.H.O‘lmasova. *Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma, 2-kitob.* «O‘QITUVCHI», NASHRIYOT-MATBAA IJODIY UYI, Toshkent-2004.
7. Ў.К.Назаров. *Умумий физика курси, Электр ва Электромагнетизм, II жилд.* „ЎЗБЕКИСТОН”, Тошкент-2002.