Yosh Tadqiqotchi Jurnali Vol. 1 No. 1 (2022)

"YOSH TADQIQOTCHI" ilmiy elektron jurnali

Vebsayt: http://2ndsun.uz/index.php/yt

LEBEG FAZOSI UCHUN IKKILIK PRINSIPI

Alijon Dodobayev[1], Rustamjon Mustafoyev[2]

Toshkent kimyo-texnologiya instituti Yangiyer filiali o'qtuvchisi[1]

Guliston davlat universiteti magistranti[2]

INFO:

Qabul qilindi: 10.02.2022
Ko'rib chiqildi: 10.02.2022
Chop etildi: 11.02.2022

Kalit so'zlar: Lebeg fazolari, o'lchovli funksiya, funksional, qo'shma fazo, o'z-o'ziga qo'shma fazo, izomorf, F.Riss, Shteyngaus, N.Danfort, D.Gilbert.

ANNOTATSIYA

Ushbu ishda o'lchovli funksiyalar va ketma-ketliklarning Lebeg fazolari – $L^p(T,\Sigma,\mu)$ fazolardagi va ketma-ketliklarning l^p fazolardagi funksionallarning umumiy ko'rinishi aniqlanadi.

Copyright © 2021. Creative Commons Attribution 4.0 International License tomonidan himoyalangan

Kirish

Lebeg fazolari – bu normalangan fazo bo'lib, u ushbu $\|x\| = \left[\int_T |x(t)|^p d\mu\right]^{1/p} < \infty$, $1 \le p < \infty$ shartni qanoatlantiruvchi $x \in S(T,\Sigma,\mu)$ o'lchovli funksiyalardan iborat [1]. O'lchovli funksiyalar L^p

$(1 < p < \infty)$ fazolar fanga birinchi marta F.Riss tomonidan (1910 y.), L^1 fazo esa Shteyngaus tomonidan kiritilgan [1]. “Lebeg fazosi” atamasi esa fanga keyinchalik N.Danfort va Shvarts ishlari orqali kirib keldi (1958 y.).

Ma’lumki, barcha o‘lchovli funksiyalar fazosi – $S(T,\Sigma,\mu)$, $T=N$, Σ – natural sonlar to‘plamining barcha qism to‘plamlari sistemasi va ixtiyoriy nuqtaning μ o‘lchovi birga teng, bo‘lgan holda barcha ketma-ketliklar sinfi $-s$ ga aylanadi [3]. Ushbu qaralayotgan holda $L^P(T,\Sigma,\mu)$ fazo l^P kabi belgilanadi. l^p fazolar fanga birinchi marta F.Riss tomonidan, l^2 fazo esa avvalroq D.Gilbert tomonidan kiritilgan [2]. Ishning maqsadi – o‘lchovli funksiyalar Lebeg fazosi – L^P fazolarining umumiy nazariyasini o‘rganishga bag‘ishlangan. Bunda maqsad funksional analizning odatiy masalalari: funksionallarning umumiy ko‘rinishi, chiziqli funksional xossalari va boshqalar Lebeg fazolarida o‘rganishdan iborat.

Adabiyotlar tahlili va metodologiyasi

Hozirgi vaqtda Lebeg fazolari matematikaning turli bo‘limlarida qo‘llanilmoqda [2]. Lebeg fazolari haqidagi batafsil va sistematik tartibli ma’lumot keltirilgan adabiyotlar L.V.Kantorovich va G.P.Akilovlarning “Funksionalno‘y analiz” [1], J.I.Abdullaev va boshqalarning “Funktsional analiz va integral tenglamalar” [2] va A.N.Kolmogorov va S.V.Fominlarning «Elemento‘ teorii funksiy i funksionalnogo analiza» kabilar hisoblanadi. Shuni ta’kidlab, o‘tish kerakki, A.N.Kolmogorov va S.V.Fominlarning «Elemento‘ teorii funksiy i funksionalnogo analiza» nomli adabiyot da L^1 va L^2 fazolarning barcha funksional xossalari o‘rganilgan.

Natijalar

1. l^p fazodagi funksionalning umumiy ko‘rinishi. Avval xususiy hol bo‘lgan ketma-ketliklar fazosiga qisqacha to‘xtalib o‘tamiz. Ushbu tasdiqni isbot qilamiz.

Tasdiq. $1 \le p < \infty$ va $1/p + 1/q = 1$ bo‘lsin. l^p fazodagi f chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko‘rinishi

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k}, \quad x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p,$$

formula bilan aniqlanadi, bu erda $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} - l^q$ dagi ixtiyoriy element. Shuningdek,

$$\|f\| = \|y\|_{l^q}.$$

Isboti. Endi ℓ_p fazoni qaraymiz. Ma’lumki, bu fazo

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $x = \{x_n\}$ ketma-ketliklardan iborat va unda x elementning normasi

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Agar biz $q > 1$ sonni $1/p + 1/q = 1$ munosabatdan aniqlasak, u holda ℓ_p^* fazo ℓ_q fazoga izomorf bo‘ladi. Buni isbotlash uchun ℓ_q fazoning ixtiyoriy $f=\{f_n\}$ elementi yordamida ℓ_p fazoda

$$\tilde{f}(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\cdot x_n \quad (1)$$

chiziqli funksionalni aniqlaymiz. Dastlab, (1) tenglikning o‘ng tomonidagi qatorning absolyut yaqinlashuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. Ma’lumki, ixtiyoriy n natural son uchun

$$\sum_{i=1}^{n}|f_i\cdot x_i|\le\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\|x\|_p \quad (2)$$

o‘rinli. Birinchi tengsizlikni yozishda biz Gyolder tengsizligidan [4] foydalandik. Bu erdan (1) tenglikning o‘ng tomonidagi qatorning absolyut yaqinlashuvchiligi hamda $\tilde{f}$ funksional uchun quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$|\tilde{f}(x)|=\sum_{i=1}^{\infty}|f_i\cdot x_i|\le\|f\|_q\cdot\|x\|_p,\quad \|\tilde{f}\|\le\|f\|_q.$$

Demak, (1) tenglik bilan aniqlangan $\tilde{f}$ funksional chiziqli va uzluksiz. Agar $x_f\in\ell_p$ elementning hadlarini

$$x_i=\overline{f_i}\cdot|f_i|^{q-2},\quad i\in\{1,2,\ldots,\infty\}$$

(agar $f_i=0$ bo‘lsa, $x_i=0$ deb olinadi) ko‘rinishda tanlasak, 1.3.1-misolning b) bandidagidek quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$x_i\cdot f_i=|f_i|^q\ge 0,\;\; x_i\cdot f_i=|x_i|^p\ge 0,\quad i\in\{1,2,\ldots,\infty\}.$$

Biz $x_f\in\ell_p$ va $f=\{f_i\}\in\ell_q$ ekanligini hisobga olsak,

$$|\tilde{f}(x_f)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}x_i\cdot f_i\right|=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\cdot f_i=\left(\sum_{i=1}^{\infty}x_i\cdot f_i\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}x_i\cdot f_i\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|f\|_q\cdot\|x\|_p.$$

Demak,

$$\|\tilde{f}\|_q=\|f\|_q.$$

Ko‘rsatish mumkinki, ℓ_p fazodagi ixtiyoriy $\tilde{f}$ chiziqli uzluksiz funksional (1) ko‘rinishda tasvirlanadi.

Shunday qilib ℓ_p^* va ℓ_q, $p^{-1}+q^{-1}=1$ fazolarning izomorfligi isbotlandi. Xususan, $p=2$ da $\ell_2^*=\ell_2$ kelib chiqadi. Shuning uchun ℓ_2 fazo o‘z-o‘ziga qo‘shma fazo deyiladi. Xuddi shunday ko‘rsatish mumkinki, ixtiyoriy Gilbert fazosining qo‘shmasi ham o‘ziga izomorf bo‘ladi.

Endi c_0 fazoni qaraymiz. $(c_0)^*=l^1$ ekanlini isbotlaymiz. Bu tenglikni izomorfizm aniqligida tushunish kerak.

Tasdiq. c_0 fazodagi f chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko‘rinishi

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta_k}, \quad x=\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}\in c_0, \quad (3)$$

formula bilan aniqlanadi, bu erda $y=\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}-l^1$ dagi ixtiyoriy element. Shuningdek,

$$\|f\|=\|y\|_{l^1}.$$

Isboti. Ma'lumki, c_0 fazoda (A) shart bajariladi, u holda (3) formula funksionalning umumiy ko‘rinishini beradi. $f\in(c_0)^*$ va $\tilde{x}=\{\tilde{\xi}_k\}_{k=1}^{\infty}$, bu erda

$$\tilde{\xi}_k=\begin{cases}\operatorname{sign}\eta_k, & k\le n\\ 0, & k>n\end{cases},$$

bo‘lsin. Ravshanki, $\tilde{x}\in c_0$ va $\|\tilde{x}\|\le 1$, u holda

$$f(\tilde{x})=\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|\le\|f\|.$$

$n\to\infty$ da limitga o‘tsak,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|\le\|f\|,$$

ya'ni $y\in l^1$ va $\|y\|_{l^1}\le\|f\|$ bo‘ladi.

Agar $y\in l^1$ bo‘lsa, u holda

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k\right|\le\max|\xi_k|\cdot\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|\le\|y\|_{l^1}\cdot\|x\|.$$

Bundan ko‘rinadiki, f –chiziqli funksional va $\|f\|\le\|y\|_{l^1}$. Demak, $\|f\|=\|y\|_{l^1}$.

Endi c fazoni qaraymiz. $(c)^*=l^1$ ekanlini isbotlaymiz. Bu tenglikni izomorfizm aniqligida tushunish kerak.

c fazo BIF emas. U holda c fazodagi uzluksiz funksionallarning umumiy ko‘rinishini topish uchun boshqa yo‘l tutish kerak bo‘ladi.

c fazosida quyidagi vektorlarni aniqlaymiz:

$$e_0=(1,1,\ldots,1,\ldots)$$

$$e_k=\left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k-1},1,0,\ldots\right),\ k\in N.$$

Natijada har bir $x=(\xi_n)\in c$ elementni

$$x=\xi_0e_0+\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n-\xi_0)e_n$$

ko‘rinishda yozish mumkin, bunda $\xi_0=\lim_{k\to\infty}\xi_k$.

Aytaylik, $f\in c^*$ bo‘lsin. U holda

$$f(x)=f(\xi_0e_0)+f_0(x-\xi_0e_0)=\eta_0\xi_0+\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(\xi_k-\xi_0)$$

bunda $\eta_0 = f(e_0)$ va $\eta_n = f(e_n),\ n \in N$.

Endi $f(x)$ sonini boshqa ko‘rinishda ham yozish mumkin ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun ε_n sonlarni $\varepsilon_n = sign\eta_n$ ko‘rinishda aniqlaymiz. Har bir $m \in N$ sonini tayinlab, $x^{(m)} = (\tilde{\xi}_n) \in c$ nuqtani quyidagicha saylab olamiz:

$$\tilde{\xi}_n = \begin{cases} \operatorname{sign}\eta_n,\ n \le m \\ 0,\ n > m \end{cases}.$$

U holda $\|x^{(m)}\| \le 1$. Natijada

$$\left|f(x^{(m)})\right| = \left|\sum_{n=1}^{m} \tilde{\xi}_n \eta_n\right| = \sum_{n=1}^{m} |\eta_n| \le \|f\|.$$

$m \in N$ ning ixtiyoriyligidan, $m \to \infty$ da limitga o‘tsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_k| \le \|f\| < +\infty,$$

kelib chiqadi, ya’ni $(\eta_n) \in l_1$. Demak, har bir $x = (\xi_n) \in c$ elementi uchun $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \xi_n$ qator absolyut yaqinlashuvchi va

$$f(x) = \xi_0 \eta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n. \qquad (4)$$

Demak, agar $f \in c^*$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $x = (\xi_n) \in c$ uchun (4) o‘rinli, bunda $\xi_0 = \lim_{k\to\infty} \xi_k$, $\eta_0 = const$ va $(\eta_n) \in l_1$. Yuqoridadek, $m \in N$ sonini tayinlab $x_m = (\xi_n) \in c$ nuqtani saylab olamiz:

$$\xi_n = \begin{cases} \varepsilon_n,\ n \le m \\ \varepsilon_0,\ n > m \end{cases} \quad (\varepsilon_n \text{ sonlari yuqorida aniqlandi}).$$

U holda $\|x\| \le 1$, $\xi_0 = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \varepsilon_0$ va

$$f(x_m) = |\eta_0| + \sum_{n=1}^{m} |\eta_n| + \varepsilon_0 \sum_{n=m+1}^{\infty} \eta_n.$$

Bundan

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)| \ge |f(x_m)|$$

va $m \to \infty$ da

$$|\eta_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| \le \|f\|.$$

Har bir $y = \{\eta_k\} \in l^1$ element (4) formula yordamida c fazodagi biror uzluksiz chiziqli f – funksionalni aniqlaydi va shu bilan birga

$$\|f\| = |\eta_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Demak, $c^* \cong l_1$. Bu tenglikni izomorfizm aniqligida tushunish kerak.

Endi ℓ_1 fazoning qo‘shmasini topamiz. ℓ_1 fazoning qo‘shmasi $\ell_\infty = m$ - chegaralangan ketma-ketliklar fazosiga izomorf bo‘lishini ko‘rsatamiz, ya’ni $\ell_1^* = m$ tasdiqni isbotini keltiramiz. Bu tenglikni izomorfizm aniqligida tushunish kerak.

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ bo‘lsa, u holda

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \xi_i \ , \ x = (x_i) \in l_1 \qquad (5)$$

formula l_1 fazoda chiziqli funksionalni aniqlaydi.

f ning uzluksizligi

$$|f(x)| \le \sup_k |\xi_k| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \|\xi\|_m \|x\|_{l_1},$$

ya’ni

$\|f\| \le \|\xi\|_m \qquad (6)$

tensizligidan kelib chiqadi.

Endi l_1 fazoda har bir uzluksiz chiziqli funksional (5) ko‘rinishda ekanligini isbotlaymiz.

l_1 fazosida quyidagi vektorlarni qaraylik:

$$e_n = \Big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots\Big), \ n \in N.$$

U holda $x = (x_n) \in l_1$ elementni

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$$

ko‘rinishda yozish mumkin va $x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ uchun

$$\left\|x^{(n)} - x\right\| = \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_i| \to 0.$$

$f \in l_1{}^*$ bo‘lsin. U holda

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \xi_i,$$

bunda $\xi_i = f(e_i), \quad i \in N$.

$$|\xi_i| = |f(e_i)| \le \|f\|$$

dan $(\xi_i) \in m$. Demak,

$$\|\xi\|_m = \sup_k |\xi_k| \le \|f\|. \qquad (7)$$

(6) va (7) dan $\|f\| = \|\xi\|$ kelib chiqadi, ya’ni $l_1{}^* \cong m$.

Endi m^* fazoning l_1 fazoga izomorf emasligini ko‘rsatamiz.

Ravshanki, c yaqinlashuvchi ketma-ketliklar fazosi m ning qism fazosidir. c qism fazoda

$f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad x = (x_n) \in c \quad (8)$

ifoda chegaralangan chiziqli funksionalni aniqlaydi.

$x_0=(1,1,\dots,1,\dots)\in c$ nuqtada $f(x_0)=1$ dan $\|f\|=1$ kelib chiqadi. Xan-Banax teoremasidan bu funksionalni normasini saqlagan holda m fazosiga davom ettirish mumkin.

Faraz qilaylik, bu funksional l_1 fazo elementi orqali aniqlansin, ya'ni shunday $\xi=(\xi_n)\in l_1$ topilib,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\xi_n\ ,\ x=(x_n)\in m. \qquad (9)$$

$e_n=(0,\dots,0,1,0,\dots)$, $n\in N$ elementlarni qaraylik. (9) dan $f(e_n)=0$, $n\in N$ kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, (9) ga ko'ra

$$f(e_n)=\xi_n,\ n\in N.$$

Bundan $\xi_n=0$, $n\in N$. (9) dan esa

$$f(x)=0,\ \ \forall x\in m.$$

Demak, $f\equiv 0$. Bu esa $\|f\|=1$ ekanligiga zid. Hosil bo'lgan ziddiyatdan, m^* fazoning l_1 fazoga izomorf emasligini kelib chiqadi._

2. L^p fazodagi funksionallarning analitik ko'rinishi

X – (T,Σ,μ) dagi IF va μ o'lchov σ-chekli bo'lsin. Agar X da aniqlangan f chiziqli funksional uchun, $x_n,x\in X$, deyarli hamma erda $x_n(t)\to 0$ va deyarli hamma erda $|x_n(t)|\le|x(t)|$ bo'lishidan, $f(x_n)\to 0$ kelib chiqsa, f chiziqli funksional tartibli uzluksiz deb ataladi. X dagi barcha (o)-uzluksiz funksionallar to'plami vektor fazo bo'ladi, va uni $X_n^{\sim}$ orqali belgilaymiz.

X' orqali quyidagi shartni qanoatlantiruvchi barcha $x'\in S(T,\Sigma,\mu)$ elementlar to'plamini belgilaymiz:

$\operatorname{supp} x'\subset\operatorname{supp} X\ (\operatorname{mod}\mu)$ va ixtiyoriy $x\in X$ da $\int|xx'|d\mu<\infty$.

Ko'rsatish qiyin emaski, X' – IF bo'ladi. X' IFga X ga *dual bo'lgan IF* deb ataladi. Ushbu formula yordamida har bir $x'\in X'$ ga X dagi $f_{x'}$ chiziqli funksionalni qurish mumkin:

$$f_{x'}(x)=\int_T x(t)\overline{x'(t)}d\mu,\ \ (x\in X).$$

Yuqoridagi nazariyani $L^p(T,\Sigma,\mu)$, (μ o'lchov σ-chekli) fazolarga tatbiq qilamiz. ($1<p<\infty$ bo'lganda μ o'lchov σ-chekli bo'lishi, umuman olganda, shart emas).

Tasdiq. $1\le p<\infty$ va $1/p+1/q=1$ bo'lsin. $L^p(T,\Sigma,\mu)$ fazodagi f chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko'rinishi

$$f(x)=\int_T x(t)\overline{y(t)}d\mu,\ \ x\in L^p, \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanadi, bu erda y – $L^q(T,\Sigma,\mu)$ dagi ixtiyoriy element. Shuningdek,

$$\|f\|=\|y\|_{L^q}. \qquad (2)$$

Isboti. $L^p(T,\Sigma,\mu)$ fazoda (A) shart bajariladi. Unda, (1) formula chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko'rinishini beradi. (2) tenglikni isbotlaymiz.

Ma'lumki,

$$\| f\| = \|y\|_{L^q} = \begin{cases} \left[\int_T |y(t)|^q d\mu\right]^{1/q}, 1 < p < \infty \\ vrai\sup_{t\in T}|y(t)|, \quad p = 1 \end{cases}$$

1) Dastlab $1 < p < \infty$ bo‘lgan holni qaraymiz. Gyolderning integral tengsizligidan

$$|f(x)| = \left|\int_T x(t)\overline{y(t)}d\mu\right| \le \left[\int_T |y(t)|^q d\mu\right]^{1/q} \cdot \left[\int_T |x(t)|^p d\mu\right]^{1/p} = \|y\|_{L^q}\|x\|$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Demak, $\| f\| \le \|y\|_{L^q}$.

Teskari tengsizlikni isbotlash uchun, ushbu funksiyani qaraymiz:

$\tilde{x}(t) = |y(t)|^{q-1}\operatorname{sign} y(t)$.

Unda $|\tilde{x}(t)|^p = |y(t)|^{p(q-1)} = |y(t)|^q$. Demak, $\tilde{x} \in L^p$ va

$$\|\tilde{x}\| = \left[\int_T |\tilde{x}(t)|^p d\mu\right]^{1/p} = \left[\int_T |y(t)|^q d\mu\right]^{\frac{1}{q}\cdot\frac{q}{p}} = \left[\|y\|_{L^q}\right]^{\frac{q}{p}}.$$

Bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$\| f\| \ge f\left(\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}\right) = \frac{1}{\|\tilde{x}\|}\int_T \tilde{x}(t)\overline{y(t)}d\mu = \frac{1}{\|\tilde{x}\|}\int_T \tilde{x}(t)\overline{y(t)}d\mu =$$

$$= \frac{1}{\|\tilde{x}\|}\int_T |y(t)|^q d\mu = \left[\|y\|_{L^q}\right]^{q\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \|y\|_{L^q}.$$

Demak, $\| f\| = \|y\|_{L^q}$.

2) Endi $p = 1$ bo‘lsin. Quyidagi belgilash bajaramiz:

$$\|y\|_{L^\infty} = vrai\sup_{t\in T}|y(t)| = Q.$$

Ravshanki, $\| f\| \le Q$ tengsizlik o‘rinli. Ikkinchi tomondan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ songa ko‘ra, A bilan quyidagi to‘plamni belgilaymiz:

$A = \{t \in T : y(t) > Q - \varepsilon\}$.

Ta’kidlash lozimki, $\mu(A) > 0$. Quyidagi funksiyani aniqlaymiz:

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} y(t), t \in A, \\ \quad 0 \quad , t \notin A. \end{cases}$$

Ravshanki, $\tilde{x} \in L^1$ va $\|\tilde{x}\| = \int_T |\tilde{x}(t)| d\mu = \mu(A)$. Unda

$$\| f\| \ge f\left(\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}\right) = \frac{1}{\mu(A)}\int_T \tilde{x}(t)\overline{y(t)}d\mu = \frac{1}{\mu(A)}\int_T |y(t)| d\mu \ge$$

$$\geq \frac{1}{\mu(A)} \int_T |y(t)| d\mu \geq \frac{1}{\mu(A)} [Q-\varepsilon] \mu(A) = Q - \varepsilon .$$

ε ning ixtiyoriyligidan $\| f \| \geq Q$ kelib chiqadi. Demak, $\| f \| = \| y \|_{L^\infty}$.

$L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ fazodagi f chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko‘rinishi haqidagi ushbu teoremani isbotsiz keltiramiz.

Tasdiq. $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ fazodagi f chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko‘rinishi

$$f(x) = \int_T x(t) d\varphi , \qquad (4)$$

formula bilan aniqlanadi, bu erda $\varphi -$ **ba**(Σ, μ) dagi ixtiyoriy element. Shuningdek, $\| f \| = \| \varphi \|$.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, $y \in L^q \to f \in (L^p)^*$, (1) formula bilan aniqlangan, $\varphi \in$ **ba** $\to f \in (L^\infty)^*$, (4) formula bilan aniqlangan, akslantirishlar mos ravishda, L^q ning $(L^p)^*$ ga va **ba** ning $(L^\infty)^*$ ga izometriyasi bo‘ladi. Demak, boshqacha qilib aytganda, L^q fazo L^p $(1 \leq p < \infty)$ fazoga qo‘shma va $(L^p)^* = L^q$ kabi yoziladi.

Misol. Berilgan $[a,b]$ kesmada $p\,(p \geq 1)$ - darajasi bilan Lebeg ma’nosida integrallanuvchi funksiyalar sinfini $L_p[a, b]$ bilan belgilaymiz. Ma’lumki, $L_p[a, b]$ to‘la normalangan fazo, ya’ni Banax fazosidir.

Endi $p > 1$ uchun $1/p + 1/q = 1$ munosabatni qanoatlantiruvchi q sonni olamiz.

Har bir $f \in L_p^*[a,b]$ funksional uchun yagona $y \in L_q[a,b]$ element mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $x \in L_p[a, b]$ larda

$$f(x) = \int_a^b x(t) y(t) dt \ (5)$$

tenglik bajariladi va aksincha, $y \in L_q[a,b]$ uchun (5) formula $L_p^*[a, b]$ ga tegishli biror funksionalni aniqlaydi. Bundan tashqari (5) formula $L_p^*[a, b]$ va $L_q[a,b]$ fazolar o‘rtasida izometrik moslik o‘rnatadi. Shuning uchun $L_p^*[a,b]$ va $L_q[a,b]$ fazolar o‘zaro izomorfdir, ya’ni $L_p^*[a;b] = L_q[a;b]$. Xususan, $p = 2$ da $L_2^*[a, b] = L_2[a, b]$. Shuning uchun $L_2[a, b]$ o‘z-o‘ziga qo‘shma fazo deyiladi.

$L^p(a,b)$ $(1 < p < \infty)$ fazodagi chiziqli funksionalning umumiy ko‘rinishi F.Riss tomonidan, $L^1(a,b)$ fazodagi chiziqli funksionalning umumiy ko‘rinishi Shteyngaus tomonidan ko‘rsatilgan.

Muhokama

Umumiy nazariyaning tatbiqlari uchun muayyan fazodagi chiziqli funksionallarning umumiy ko‘rinishini bilish muhim ahamiyatga ega. Qaralayotgan sinfdagi (xususan, berilgan fazodagi barcha uzluksiz funksionallar sinfini qaraganda) chiziqli funksionallarning umumiy ko‘rinishi deganda, tarkibida turli xil tipdagi parametrlar (son, funksiya va h.)ni o‘z ichiga olgan, parametrlarning muayyan qiymatida ushbu sinfdagi funksionalni beruvchi analitik ifodani tushuniladi. Shuningdek, ushbu funksional orqali qaralayotgan barcha funksionallarni hosil qilamiz. Ushbu ishda o‘lchovli funksiyalar Lebeg fazolaridagi chiziqli funksionallarning umumiy ko‘rinishi ko‘rsatildi.

Xulosa

Mazkur ishda Lebeg fazosi L^p va l^p dagi funksionallarning umumiy analitik ko‘rinishi topildi. Lebeg fazosi L^p va l^p fazosiga qo‘shma bo‘lgan fazolar topildi: ketma-ketliklarning ℓ_p, $p>1$ fazosiga qo‘shma bo‘lgan ℓ_p^* fazo ℓ_q, $1/p+1/q=1$ fazoga izomorfligi, ℓ_1 fazoning qo‘shmasi $\ell_\infty=m$ - chegaralangan ketma-ketliklar fazosiga izomorfligi, ℓ_2 fazosi o‘z-o‘ziga qo‘shmaligi, c fazoga qo‘shma bo‘lgan $(c)^*$ uchun $(c)^*=l^1$ ekanligi, o‘lchovli funksiyalarning L^p $(1\le p<\infty)$ fazosi L^q, $1/p+1/q=1$ fazoga qo‘shma, ya’ni $(L^p)^*=L^q$ ekanligi ko‘rsatildi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

1. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funksionalno‘y analiz*. Moskva, «Nauka» 1984.
2. Abdullayev J.I., G‘anixo‘jayev R.N., Shermatov M.H., Egamberdiyev O.I. “*Funksional analiz va integral tenglamalar*”, Toshkent, “EL PRESS”, 2013.
3. Ochan Yu.S. “*Sbornik zadach po matematicheskomu analizu*”. Moskva: Prosvehenie. 1981.
4. Trenogin V.A. *Funksionalno‘y analiz*. «Nauka». M. 1980.