

---

# Metriche e Carte

**Amelia Carolina Sparavigna**

Department of Applied Science and Technology, Politecnico di Torino, Torino, Italy

Email: amelia.sparavigna@polito.it

Torino 20/01/2022

---

## Abstract

**Il testo parte dalla metrica legata all'ellissoide terrestre. Discute le deformazioni introdotte dalla rappresentazione dell'ellissoide sulle carte geografiche o topografiche. Verrà spiegato l'angolo di convergenza al meridiano ed il suo ruolo per trovare l'azimut dall'angolo di direzione. Il testo di riferimento è quello di Ambrogio Maria Manzino, Quaderni di topografia, geodesia, cartografia, trattamento delle misure, Torino, 2017.**

**Keywords:** Metrica, Angolo di convergenza al meridiano, Azimut.

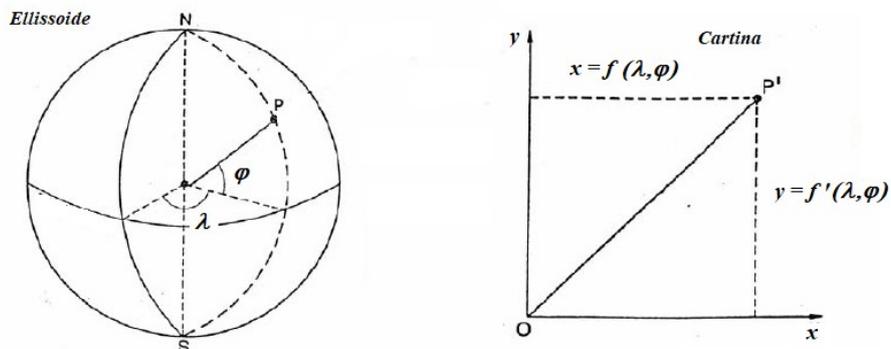
**Subject Areas:** Topografia, Cartografia

---

## Introduzione

La terra è rappresentata da un ellissoide. Dall'ellissoide si passa ad una proiezione piana. Mentre si può sviluppare un cilindro su un piano senza deformazioni, per l'ellissoide non è così.

Una carta è una rappresentazione bidimensionale di una parte dell'ellissoide.



**Definizioni**

Esistono dei moduli per quantificare le deformazioni. Si segue la discussione di [1].

Sia  $m = \frac{ds_c}{ds_e}$  il rapporto tra  $ds_c$  arco infinitesimo su rappresentazione cartografica e

$ds_e$  arco infinitesimo sulla superficie dell'ellissoide. Sia  $m_a = \frac{d\sigma_c}{d\sigma_e}$  il rapporto tra  $d\sigma_c$  area infinitesima su rappresentazione cartografica e  $d\sigma_e$  area infinitesima sulla superficie dell'ellissoide.

**Deformazioni**

Si prenda un meridiano sull'ellissoide e la trasformata del meridiano corrispondente sulla rappresentazione. Un elemento di linea sull'ellissoide forma un angolo  $\alpha$ , detto **azimut**, con il meridiano. L'elemento corrispondente nella rappresentazione forma un angolo  $\alpha'$  (**angolo di direzione**) con la linea trasformata del meridiano.

La deformazione angolare è pari a  $\delta = \alpha' - \alpha$ . L'angolo è detto **deformazione angolare**.

**Metriche**

per le metriche e la relazione con le curvature si veda [2].

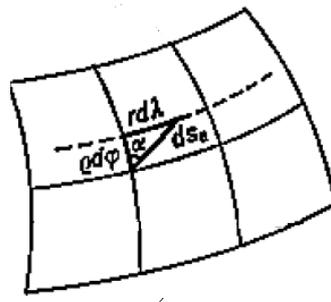
Si definisca una corrispondenza tra un punto sull'ellissoide ellissoide e la sua proiezione sul piano tramite le funzioni:

$$x = x(\varphi, \lambda) = f(\varphi, \lambda) \quad , \quad y = y(\varphi, \lambda) = f'(\varphi, \lambda) \quad .$$

$\varphi$ ,  $\lambda$  sono le coordinate geografiche del punto e  $x$ ,  $y$  le coordinate lineari della rappresentazione. Le funzioni inverse sono:

$$\varphi = \varphi(x, y) \quad , \quad \lambda = \lambda(x, y) \quad .$$

Si considerino, da un punto generico P, gli spostamenti infinitesimi lungo il parallelo e lungo il meridiano. L'elemento di parallelo è definito come  $ds_{e,\lambda} = r d\lambda$ . L'elemento di meridiano è dato da:  $ds_{e,\varphi} = \rho d\varphi$ . Si definisce  $(ds_e)^2 = r^2 \cdot d\lambda^2 + \rho^2 \cdot d\varphi^2$ , dove  $ds_e$  è l'ipotenusa del triangolo con cateti definiti dagli elementi di parallelo e meridiano e che forma un azimut  $\alpha$ .



Passiamo alla proiezione:  $(ds_c)^2 = dx^2 + dy^2$  .

Differenziamo:  $dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$  ,  $dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$

La metrica è:  $(ds_c)^2 = e \cdot d\varphi^2 + 2f \cdot d\varphi \cdot d\lambda + g \cdot d\lambda^2$  dove

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 , \quad g = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 , \quad f = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

### Deformazione lineare

Si noti che:  $\rho \cdot d\varphi = ds_e \cdot \cos \alpha$  ,  $r \cdot d\lambda = ds_e \sin \alpha$  . Sostituendo nella metrica:

$$(ds_c)^2 = e \cdot (ds_e)^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \rho^{-2} + 2f \cdot (ds_e)^2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha \cdot \rho^{-1} r^{-1} + g \cdot (ds_e)^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot r^{-2}$$

$$m^2 = \frac{ds_c^2}{ds_e^2} = \frac{e}{\rho^2} \cos^2 \alpha + \frac{2f}{r\rho} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{g}{r^2} \sin^2 \alpha$$

$$m^2 = \frac{ds_r^2}{ds_e^2} = e' \cos^2 \alpha + 2f' \sin \alpha \cos \alpha + g' \sin^2 \alpha$$

Si noti che:  $e' = \frac{e}{\rho^2}$  ,  $f' = \frac{f}{r\rho}$  ,  $g' = \frac{g}{r^2}$

Questo è il modulo di deformazione lineare.

### Deformazione areale

Dal triangolo, passiamo al quadrilatero tra due meridiani e due paralleli molto vicini, con area (base per altezza):

$$d\sigma_e = \rho d\varphi \cdot r d\lambda$$

Le proiezioni di meridiani e paralleli non sono ortogonali tra di loro. Si introduca l'angolo

$\omega$  tra gli elementi infinitesimi di tali proiezioni  $dm, dp$ . Dopo alcuni passaggi:

$$m_a = \frac{d\sigma_c}{d\sigma_e} = \frac{\sqrt{e \cdot f - g^2}}{\rho \cdot r}$$

Il modulo della deformazione areale è:  $m_a = \frac{1}{\rho \cdot r} \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)$

### Deformazione angolare

Prendiamo l'elemento  $ds_e$  sull'ellissoide e sia  $\alpha$  il suo azimut. Sia  $ds_c$  l'elemento corrispondente sulla carta ed  $\alpha'$  il suo angolo.

Si ricava:

$$\tan \alpha' = \sqrt{\frac{g}{e}} \cdot \frac{d\lambda}{d\phi} = \frac{\rho}{r} \cdot \sqrt{\frac{g}{e}} \cdot \tan \alpha$$

Il modulo di deformazione angolare è:

$$\tan \delta = \frac{\left( \frac{\rho}{r} \cdot \sqrt{\frac{g}{e}} - 1 \right) \cdot \tan \alpha}{1 + \frac{\rho}{r} \cdot \sqrt{\frac{g}{e}} \tan^2 \alpha}$$

In [1], si prosegue poi con le Trasformazioni Conformi, Pag. 119. Sono trasformazioni interessanti per via delle condizioni di Cauchy-Riemann.

**Trasformazione conforme di Gauss:** si veda Rif.1, Pag. 125

### Caratteristiche Geometriche Carta di Gauss

Rif. 1 Pag. 134, Si devano Eq. 5.30 e 5.31.

### Convergenza delle Trasformate di Meridiani e Paralleli

Rif. 1 Pag. 136. Dice il testo che si valuta l'angolo  $\gamma$  che consente di ricavare dalla cartografia, la direzione del nord geografico a partire dalla direzione dell'asse  $y$  e viceversa.

Data l'equazione parametrica della trasformata del parallelo, si ottiene:

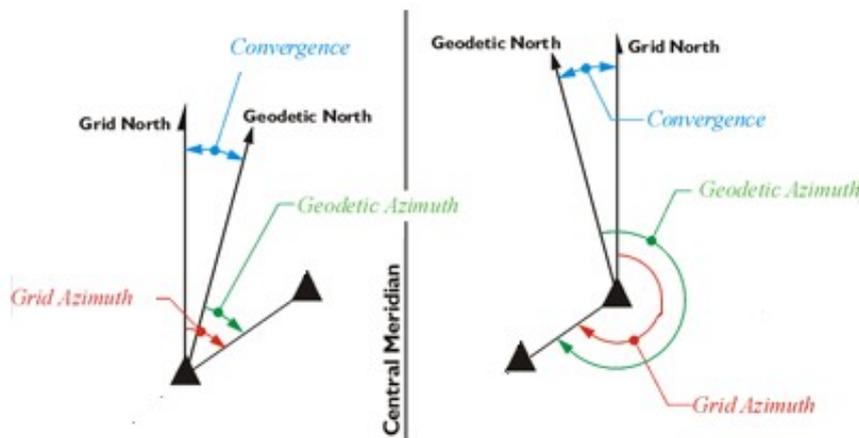
$$\gamma = \lambda \sin \varphi \cdot \left[ 1 + \frac{\lambda^2}{3} \cos^2 \varphi \cdot (1 + 3 e^2 \cos^2 \varphi) \right]$$

Nella formula,  $\lambda$  rappresenta la differenza di longitudine tra il meridiano passante per il luogo in esame e il meridiano centrale del fuso a cui detto luogo appartiene.

L'angolo  $\gamma$  è detto "convergenza del meridiano".

In qualunque punto P della superficie terrestre è possibile definire tre diverse direzioni "Nord": Nord magnetico, determinato con la bussola, Nord geografico, coincidente con il meridiano per il punto P, e Nord cartografico. Direzione dell'asse  $y$  del riferimento cartografico.

Il Nord cartografico è detto anche Nord reticolo. In Inglese si dicono Grid North e Geodetic North.



L'immagine illustra l'angolo di direzione (in Inglese Grid Azimuth) ed azimuth (Geodetic Azimuth). La proiezione dell'ellissoide su una carta introduce l'angolo di convergenza (Convergence). Immagine adattata da

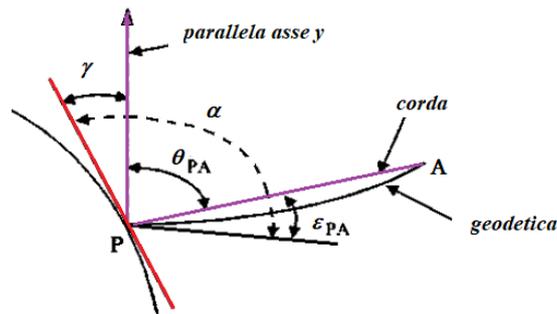
<https://www.e-education.psu.edu/geog862/node/1816>

In Inglese: Angolo di convergenza (Convergence), Nord geografico (Geodetic North), Nord cartografico o Nord reticolo (Grid North), Meridiano di riferimento (Central Meridian), Angolo di direzione (Grid azimuth), Azimut (Geodetic Azimuth).

Su una carta, l'angolo di convergenza è formato dalla direzione del nord cartografico (che è parallelo all'asse y, la trasformata del meridiano centrale del fuso) e dalla direzione del nord geografico (trasformata del meridiano locale). Pertanto, se siamo sul meridiano centrale del fuso, l'angolo di convergenza è nullo.

### Azimut

Nel punto P si definisce l'azimut  $\alpha$  di una geodetica PA sull'ellissoide, l'angolo compreso tra le tangenti al meridiano per P e alla geodetica stessa.



Sulla carta, note le coordinate Est e Nord dei punti P ed A, si calcola l'angolo di direzione come:

$$\theta_{PA} = \arctan \frac{E_A - E_P}{N_A - N_P}$$

Il valore dell'azimut corrispondente è :

$$\alpha = \gamma + \theta_{PA} - \epsilon_{PA}$$

Il contributo  $\epsilon_{PA}$  è l'angolo di riduzione alle corde.

Si consideri una posizione relativamente sfavorevole, ossia agli estremi del fuso, per lati di 15 km, ad una latitudine media di 45°, l'angolo di riduzione è di 0.5''. Nel campo topografico, quindi, è possibile non tener conto di queste correzioni [3].

## Software online

Per avere l'angolo di convergenza si può usare software online.

<https://www.borneo.name/coordinate/geografiche-utm-mgrs>

Si ringrazia vivamente l'Ingegnere Vito Borneo per il software che mette a disposizione per studio e ricerca.

### Esempio - Torino

Coordinate di Piazza Castello (come da Wikipedia)

**Conversione di coordinate Geografiche (Lat/Long) in UTM e MGRS.**

Inserire le coordinate (WGS84) in uno dei tre moduli: Geografiche, UTM, o MGRS.  
I valori vengono aggiornati automaticamente

Lat/Long:

UTM:

MGRS:

**Convergenza del meridiano: -000° 55' 49.8343"**

**Fattore di scala: 0.999731594**

Lat/long in:  grad/min/sec  gradi decimali;

UTM in:  m  mm;

MGRS  unità

**Convergenza al meridiano**  $\gamma = -000^{\circ} 55' 49.8343'' = 0.9305^{\circ}$

Si confronti con la discussione in [4].

Si possono scegliere anche i gradi decimali. Sempre per Piazza Castello, Torino, si ha:

**Conversione di coordinate Geografiche (Lat/Long) in UTM e MGRS.**

Inserire le coordinate (WGS84) in uno dei tre moduli: Geografiche, UTM, o MGRS.  
I valori vengono aggiornati automaticamente

Lat/Long: 45.07079574° N, 007.68580534° E

UTM: 32 N 396549 4991655

MGRS: 32T LQ 96549 91655

**Convergenza del meridiano: -000.93050568°**

**Fattore di scala: 0.999731593**

Lat/long in:  grad/min/sec  gradi decimali;

UTM in:  m  mm;

MGRS  unità

**Esempio – Vercelli****Conversione di coordinate Geografiche (Lat/Long) in UTM e MGRS.**

Inserire le coordinate (WGS84) in uno dei tre moduli: Geografiche, UTM, o MGRS.  
I valori vengono aggiornati automaticamente

Lat/Long: 45° 19' 00" N, 8° 25' 00" E

UTM: 32 N 454278 5018295

MGRS: 32T MR 54278 18294

**Convergenza del meridiano: -000° 24' 53.1343"**

**Fattore di scala: 0.999625702**

Lat/long in:  grad/min/sec  gradi decimali;

UTM in:  m  mm;

MGRS  unità

## Esempio - Pavia

### Conversione di coordinate Geografiche (Lat/Long) in UTM e MGRS.

Inserire le coordinate (WGS84) in uno dei tre moduli: Geografiche, UTM, o MGRS. I valori vengono aggiornati automaticamente

Lat/Long: 45° 11' 00" N, 9° 09' 00" E

UTM: 32 N 511785 5003328

MGRS: 32T NR 11784 03327

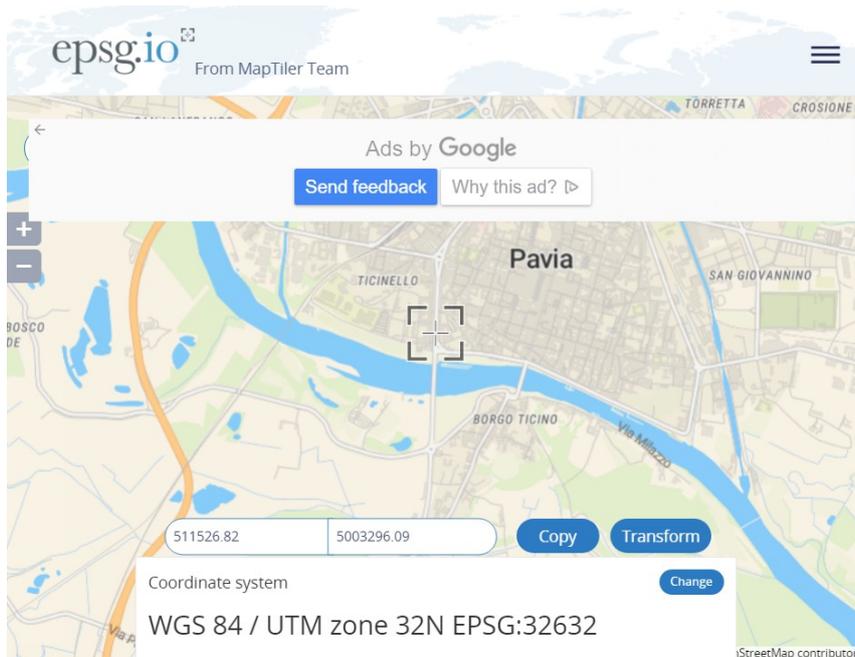
**Convergenza del meridiano: +000° 06' 23.0579"**

**Fattore di scala: 0.999601708**

Lat/long in:  grad/min/sec  gradi decimali;

UTM in:  m  mm;

MGRS  unità



## Coordinate UTM

Per conoscere le coordinate UTM relative ad un sito in Piemonte si può usare il Geoportale della Regione Piemonte, al link <http://www.geoportale.piemonte.it/geocatalogorp/?sezione=mappa> . Dopo aver selezionato il punto desiderato, si usa il tasto destro del mouse. Compare la finestra con quacode con le coordinate. Il sito Geoportale fornisce strumenti per misure.



Si ringrazia il sito Geoportale del Piemonte, per i preziosi strumenti che mette a disposizione ed ora utilizzati per studio e ricerca.



L'angolo fornito dal Geoportale è un angolo di direzione, non un azimut. Il Geoportale si basa infatti su mappe catastali. La figura mostrata sopra riporta un angolo di direzione, pari a  $117.4^\circ$  di Via Garibaldi, Torino. Usando questo dato e l'angolo di convergenza al meridiano prima ottenuto, e trascurando la riduzione alle corde, poiché si assume distanza molto piccola, l'azimut della via è pari a  $116.47^\circ$ . Si dovrebbero dare anche le incertezze, come in [3]. Si noti che il valore dell'angolo di convergenza varia da un estremo all'altro della via.

"Un tempo le attività umane erano territorialmente più limitate rispetto ad oggi e anche i sistemi di riferimento con origini locali, a volte con estensione di soli pochi km, erano sufficienti. La loro incoerenza esterna ha portato presto ad aumentarne le dimensioni per diminuire la numerosità, creando in Italia situazioni a "macchia di leopardo" in compresenza cioè di origini di piccole e grandi estensioni, pur sempre incoerenti tra loro e soprattutto incoerenti con i sistemi di riferimento globali nei quali si opera con rilievi GNSS, tecnica ormai usata anche per operazioni di rilievo catastale. Per coerenza con le carte tecniche e con i sistemi di posizionamento satellitare, è di notevole importanza riunificare ... La necessità di questa trasformazione è legata anche all'evoluzione che hanno avuto i sistemi di riferimento nazionali e internazionali, e in Italia dalla direttiva INSPIRE, recepita dal DPCM del 10 novembre 2011 che prevede l'adozione del nuovo sistema geodetico nazionale basato sulla Rete Dinamica Nazionale (RDN) e la rappresentazione cartografica di Gauss nella standardizzazione internazionale UTM" [5].

## References

- [1] Ambrogio Maria Manzino, Quaderni di topografia, geodesia, cartografia, trattamento delle misure, Vol. 1, Levroto & Bella, 2017.
- [2] Sparavigna, Amelia Carolina. (2021). Metrica e Curvature di Gauss e Riemann. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.4724602>
- [3] Topografia, Università di Pisa, Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio.
- [4] Sparavigna, Amelia Carolina. (2019). Angolo di direzione ed azimut del decumano massimo di Augusta Taurinorum. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.3510146>
- [5] Cina, A., & Manzino, A. M. (2018). Dai "piccoli sistemi" locali della cartografia catastale a quelli globali GNSS. Territorio Italia 2018, 1, 3; doi: 10.14609/Ti\_1\_18\_3i