



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Antoine CHAMBERT-LOIR & Amaury THUILLIER

**Mesures de Mahler et équidistribution logarithmique**

Tome 59, n° 3 (2009), p. 977-1014.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2009\\_\\_59\\_3\\_977\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2009__59_3_977_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2009, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

## MESURES DE MAHLER ET ÉQUIDISTRIBUTION LOGARITHMIQUE

par Antoine CHAMBERT-LOIR & Amaury THUILLIER

---

RÉSUMÉ. — Soit  $X$  un schéma projectif intègre défini sur un corps de nombres  $F$  ; soit  $L$  un fibré en droites ample sur  $X$  muni d'une métrique adélique semi-positive au sens de Zhang. Les résultats principaux de cet article sont :

- (1) Une formule qui calcule les hauteurs locales (relativement à  $L$ ) d'un diviseur de Cartier sur  $X$  comme des « mesures de Mahler » généralisées, c'est-à-dire les intégrales de fonctions de Green pour  $D$  contre des mesures associées à  $L$  ;
- (2) Un théorème d'équidistribution des points de « petite » hauteur valable pour des fonctions-test à singularités logarithmiques le long d'un diviseur  $D$ , pourvu que la hauteur de  $D$  soit « minimale ». Dans le contexte de la dynamique algébrique, « petite » signifie de hauteur tendant vers 0, et « minimale » signifie de hauteur nulle.

ABSTRACT. — Let  $X$  be a projective integral scheme over a number field  $F$ ; let  $L$  be a ample line bundle on  $X$  together with a semi-positive adelic metric in the sense of Zhang. The main results of this article are

- (1) A formula which allows to compute the local heights (relative to  $L$ ) of a Cartier divisor  $D$  on  $X$  as generalized “Mahler measures”, *i.e.*, integrals of Green functions for  $D$  against measures attached to  $L$ ;
- (2) A theorem of equidistribution of points of “small” height valid for functions with logarithmic singularities along a divisor  $D$ , provided the height of  $D$  is “minimal”. In the context of algebraic dynamics, “small” means of height converging to 0, and “minimal” means height 0.

### 1. Introduction

Soit  $F$  un corps de nombres, soit  $X$  un  $F$ -schéma projectif intègre, et soit  $L$  un fibré en droites ample sur  $X$ , muni d'une métrique adélique semi-positive au sens de [40]. Un tel fibré en droites métrisé étant donné, tout

---

*Mots-clés* : mesure de Mahler, équidistribution, géométrie d'Arakelov, points de petite hauteur, systèmes dynamiques, espaces analytiques de Berkovich.

*Classification math.* : 14G40, 14G22, 32U05.

sous-schéma fermé intègre  $Z$  de  $X$  possède un degré  $\deg_L(Z)$  et une hauteur  $h_{\bar{L}}(Z)$ , donnés par les formules

$$\deg_L(Z) = (c_1(L)^{\dim Z}|Z) \quad \text{et} \quad h_{\bar{L}}(Z) = (\widehat{c}_1(\bar{L})^{\dim Z+1}|Z).$$

La première formule fait intervenir la première classe de Chern  $c_1(L)$  de  $L$  et la théorie de l'intersection classique (voir par exemple [21]); la seconde relève de la théorie de l'intersection arithmétique [23] de Gillet–Soulé,  $\widehat{c}_1(\bar{L})$  étant la première classe de Chern arithmétique du fibré en droites métrisé  $\bar{L}$ . Ces hauteurs généralisent aux sous-variétés les hauteurs au sens de Weil. Pour tout point  $x$  de  $X(\overline{\mathbf{Q}})$ , notons en effet  $[x]$  le point fermé de  $X$  correspondant; la fonction sur  $X(\overline{\mathbf{Q}})$  définie par  $x \mapsto h_{\bar{L}}([x])/\deg_L([x])$  est une fonction hauteur pour le fibré en droites  $L$ , fonction que nous noterons encore  $h_{\bar{L}}$ . L'utilisation de la théorie de l'intersection arithmétique pour définir une notion de hauteur de sous-variétés en géométrie diophantienne est due à Faltings [18] et le formalisme a été développé dans l'article [11] de Bost, Gillet et Soulé. Nous utiliserons en fait l'extension de cette théorie introduite par Zhang [40] où les modèles entiers sont remplacés par une notion convenable de métriques à toutes les places, finies ou infinies.

Pour toute place  $v$  de  $F$ , nous noterons  $\mathbf{C}_v$  le complété d'une clôture algébrique du complété  $F_v$  de  $F$  en la place  $v$  et  $X_v$  l'espace analytique de  $X$  en  $v$ : si  $v$  est archimédienne, il s'agit de l'espace analytique complexe  $X(\mathbf{C}_v)$ ; si  $v$  est ultramétrique, il s'agit de l'espace analytique  $v$ -adique au sens de Berkovich [7] attaché au schéma projectif  $X_{\mathbf{C}_v}$ . Lorsque  $v$  est archimédienne, diverses formules de géométrie d'Arakelov, dont la définition par récurrence de la hauteur d'une sous-variété (cf. la formule en haut de la page 554 de [18] ou la formule (3.2.2) de [11]) font intervenir une mesure  $\mu_{\bar{L},v}$  sur  $X_v$  déduite de la métrique  $v$ -adique de  $L$ : si la métrique de  $\bar{L}$  est lisse, cette mesure est donnée par  $c_1(\bar{L})^{\dim X}/\deg_L(X)$ , où  $c_1(\bar{L})$  désigne la forme de courbure de  $\bar{L}$ . Dans le cas où  $v$  est ultramétrique, la construction de mesures analogues, notées  $c_1(\bar{L})_v^{\dim X}$  et  $\mu_{\bar{L},v}$ , est faite dans l'article [13] du premier auteur. (Modulo la résolution des singularités à laquelle elle est conditionnée, la théorie d'Arakelov non archimédienne de [8] permet en principe d'étudier le « courant » de courbure  $c_1(\bar{L})$  et ses puissances; le lien précis avec la théorie de [13] mériterait d'être explicité.)

Ces mesures donnent lieu à un théorème d'équidistribution des points de petite hauteur. Si  $\{x_1, \dots, x_d\}$  est l'orbite sous  $\text{Gal}(\overline{F}/F)$  d'un point  $x \in X(\overline{F})$ , on notera  $\mu_{x,v}$  la mesure de probabilité sur  $X_v$ , somme des masses de Dirac en les  $x_i$  divisée par  $d$ .

THÉORÈME 1.1. — Soit  $(x_n)$  une suite générique de points de  $X(\overline{F})$ , au sens où chaque sous-variété  $Z \subsetneq X \otimes_F \overline{F}$  ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite.

- a) On a  $\liminf_n h_{\overline{L}}(x_n) \geq \frac{h_{\overline{L}}(X)}{(\dim X + 1) \deg_L(X)}$  ;
- b) si de plus la suite  $(h_{\overline{L}}(x_n))$  converge vers  $\frac{h_{\overline{L}}(X)}{(\dim X + 1) \deg_L(X)}$ , alors, pour toute place  $v$  de  $F$ , la suite  $(\mu_{x_n, v})$  de mesures sur  $X_v$  converge vers la mesure  $\mu_{L, v}$ .

L'hypothèse que la suite  $(x_n)$  est générique signifie que la suite  $([x_n])$  des points fermés correspondants du schéma  $X$  converge vers le point générique de  $X$ . Elle est évidemment essentielle comme le montre l'exemple d'une suite dont une infinité de termes sont égaux à un point algébrique  $x$  tel que  $h_{\overline{L}}(x)$  ne vérifie pas cette inégalité.

L'inégalité du a) est due à Zhang [40] ; c'est une conséquence du théorème de Hilbert-Samuel arithmétique [22, 1, 40]. Lorsque  $X$  est une courbe, l'assertion b) est un théorème d'Autissier [2] lorsque  $v$  est archimédienne et du premier auteur [13] lorsque  $v$  est ultramétrique. (Voir aussi [32, 5, 19] pour des cas particuliers lorsque  $X$  est la droite projective, notamment dans le contexte des capacités ou des systèmes dynamiques.) La généralisation au cas des variétés de dimension arbitraire est due à Yuan [38], comme corollaire de sa théorie des fibrés en droites arithmétiquement gros. La principe de la démonstration a été introduit par Szpiro, Ullmo et Zhang dans [35] et consiste à appliquer l'inégalité du a) à des petites variations du fibré en droites métrisé  $\overline{L}$ .

Sous les hypothèses du théorème, la convergence des mesures signifie que pour toute place  $v$  de  $F$  et toute fonction continue  $\varphi$  sur  $X_v$ , la suite  $\int_{X_v} \varphi d\mu_{x_n, v}$  converge vers  $\int_{X_v} \varphi d\mu_{\overline{L}, v}$ . Dans cet article, nous voulons montrer un exemple où cette convergence a lieu pour des fonctions  $\varphi$  à pôles logarithmiques le long d'un diviseur.

Si  $D$  est un diviseur (de Cartier) effectif sur  $X$ ,  $v$  une place de  $F$ , nous dirons qu'une fonction  $\varphi : X_v \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$  est à singularités au plus logarithmiques le long de  $D_v$  si elle est continue hors de  $D_v$  et si, pour tout point  $x$  de  $X_v$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $X_v$ , une équation  $f_U$  de  $D_v$  sur  $U$  et un nombre réel  $c_U$  tel que l'on ait  $|\varphi| \leq c_U \log |f_U|^{-1}$  sur  $U$ .

THÉORÈME 1.2. — Soit  $X$  un  $F$ -schéma projectif intègre ; notons  $d$  sa dimension. Soit  $\overline{L}$  un fibré en droites ample muni d'une métrique adélique

semi-positive et considérons une suite générique  $(x_n)$  de points de  $X(\overline{F})$  telle que  $h_{\overline{L}}(x_n)$  converge vers  $\frac{h_{\overline{L}}(X)}{(d+1)\deg_L(X)}$ .

a) Pour tout diviseur effectif  $D$  non nul sur  $X$ , on a l'inégalité

$$\frac{h_{\overline{L}}(D)}{d\deg_L(D)} \geq \frac{h_{\overline{L}}(X)}{(d+1)\deg_L(X)}.$$

b) Soit  $D$  un diviseur effectif non nul pour lequel cette inégalité soit en fait une égalité. Pour toute place  $v$  de  $F$  et toute fonction  $\varphi$  sur  $X_v$  à singularités au plus logarithmiques le long de  $D$ , on a

$$\int_{X_v} \varphi d\mu_{x_n, v} \rightarrow \int_{X_v} \varphi d\mu_{\overline{L}, v}.$$

Observons que le membre de gauche est défini dès que  $x_n \notin D$ , donc pour tout entier  $n$  assez grand. L'intégrale au membre de droite existe aussi (cf. infra, corollaire 4.2).

Donnons quelques exemples, généralisations et commentaires.

1) Supposons que  $X = \mathbf{P}^1$  et soit  $f$  un endomorphisme de degré  $d \geq 2$  (on est en présence d'un « système dynamique algébrique »). On peut alors munir  $L = \mathcal{O}(1)$  d'une métrique adélique semi-positive, unique à un scalaire près, tel que  $f^*\overline{L}$  soit isométrique à  $\overline{L}^{\otimes d}$ . La hauteur correspondante est appelée *hauteur normalisée* (par  $f$ ). On a alors  $h_{\overline{L}}(X) = 0$ ; les points de hauteur nulle sont les points prépériodiques (i.e. ceux dont l'orbite est finie). Dans ce cas, notre théorème affirme a) la hauteur normalisée de tout diviseur effectif est positive ou nulle (un fait classique); b) *l'équidistribution d'une suite de points dont la hauteur tend vers 0 pour une fonction à singularités logarithmiques en des points prépériodiques.*

2) Le cas des courbes elliptiques est analogue à celui des systèmes dynamiques, la hauteur dynamique étant remplacée par la hauteur de Néron-Tate. Cette hauteur est positive ou nulle et les points de hauteur nulle sont exactement les points de torsion. Si  $X$  est une courbe elliptique, notre théorème affirme ainsi *l'équidistribution d'une suite de points distincts dont la hauteur de Néron-Tate tend vers 0 pour une fonction à singularités au plus logarithmiques en des points de torsion.*

3) Dans le cas d'un endomorphisme  $f: X \rightarrow X$  d'une variété de dimension supérieure munie d'un fibré en droites  $L$  tel que  $f^*L \simeq L^{\otimes d}$ , où  $d \geq 2$ , un résultat analogue vaut encore : la hauteur normalisée de tout diviseur est positive ou nulle, et l'on a équidistribution pour des fonctions à singularités au plus logarithmiques le long d'un diviseur de hauteur normalisée nulle. Cependant, au moins conjecturalement, ces diviseurs sont prépériodiques

et il n'en existe parfois pas. C'est par exemple le cas lorsque  $X$  est une variété abélienne simple et que  $f$  est l'endomorphisme de multiplication par 2, compte-tenu de la preuve de la conjecture de Bogomolov [37, 41]. Le cas des variétés toriques ( $f$  est alors l'endomorphisme déduit de l'élévation au carré sur le tore) fournit plus d'exemples puisque les diviseurs  $D$  auxquels le théorème s'applique sont les (adhérences des) sous-tores de codimension 1 et leurs translatés par des points de torsion.

4) Dans le contexte dynamique des endomorphismes de  $\mathbf{P}^1$ , signalons aussi un théorème différent, mais dans le même esprit, de L. Szpiro et T. Tucker [34] (voir aussi [17]). Ces auteurs prouvent l'équidistribution d'une suite  $(x_n)$  de points de  $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$  tels que  $h_{\overline{L}}(x_n) \rightarrow 0$  vis-à-vis des fonctions  $\log |\varphi|$ , où  $\varphi$  est une fraction rationnelle non nulle, pourvu que l'une des hypothèses supplémentaires suivantes soit satisfaite :

- les points  $x_n$  sont prépériodiques ;
- la suite  $(f^n(x_n))$  est constante.

Leur démonstration est de nature différente et repose sur le théorème de Roth. Il serait intéressant de généraliser leur théorème en dimension supérieure.

5) Pour toute sous-variété  $Y$  de  $X$ , posons

$$h'_{\overline{L}}(Y) = \frac{h_{\overline{L}}(Y)}{(1 + \dim Y) \deg_L(Y)}.$$

Notons que l'inégalité a) du théorème 1.2 s'écrit  $h'_{\overline{L}}(D) \geq h'_{\overline{L}}(X)$ .

À la suite de [3], il est possible d'étendre le théorème 1.2 aux suites de sous-variétés de  $X$  de dimension  $p$ . Nous démontrons ainsi le théorème suivant.

**THÉORÈME 1.3.** — *Supposons que pour toute sous-variété  $Z$  de dimension  $p - 1$ , on ait  $h'_{\overline{L}}(Z) \geq h'_{\overline{L}}(X)$ . Soit aussi  $D$  un diviseur de Cartier sur  $X$  tel que  $h'_{\overline{L}}(D) = h'_{\overline{L}}(X)$ . Alors, pour toute suite générique de sous-variétés  $(Y_n)$  de même dimension  $p$ , telle que  $h'_{\overline{L}}(Y_n)$  converge vers  $h'_{\overline{L}}(X)$ , et toute fonction  $\varphi$  sur  $X_v$  à singularités au plus logarithmiques le long de  $D$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\deg_L(Y_n)} \int_{X_v} \varphi c_1(\overline{L})^p \delta_{Y_n, v} = \int_{X_v} \varphi d\mu_{\overline{L}, v}.$$

Notons que l'hypothèse  $h'_{\overline{L}}(Z) \geq h'_{\overline{L}}(X)$  est satisfaite si  $p = 0$  (on retrouve alors le théorème 1.1) ou si  $\overline{L}$  est muni d'une métrique adélique semi-positive associée à un système dynamique. Cela dernier cas inclut notamment les variétés abéliennes munies de la hauteur de Néron–Tate (mais, comme on l'a dit plus haut, il n'y a alors pas d'exemples intéressants) et les variétés toriques munies de leur hauteur canonique.

6) L'inégalité de l'assertion a) est à mettre en regard d'une inégalité due à Zhang [39] : posons  $m(\bar{L}) = \inf_{x \in X(\bar{\mathbf{Q}})} h_{\bar{L}}(x)$  et  $e(\bar{L}) = \sup_{U \subset X} \inf_{x \in U(\bar{\mathbf{Q}})} h_{\bar{L}}(x)$  (le « minimum essentiel » de  $h_{\bar{L}}$ ; dans cette formule,  $U$  désigne un ouvert non vide de  $X$ ). Alors, on a

$$e(\bar{L}) \geq \frac{h_{\bar{L}}(X)}{(d+1) \deg_{\bar{L}}(X)} \geq \frac{1}{d+1} (e(\bar{L}) + dm(\bar{L})).$$

L'égalité des deux premières quantités équivaut à l'existence d'une suite  $(x_n)$  comme dans le théorème. Lorsque  $X$  est une courbe, l'assertion a) affirme que ces trois quantités sont égales si les deux premières le sont.

7) L'assertion d'équidistribution ne vaut pas forcément lorsque l'inégalité de l'assertion a) est stricte, ainsi que le montre un contre-exemple élémentaire d'Autissier [4], dans lequel  $X = \mathbf{P}^1$  et  $\bar{L}$  est le fibré en droites  $\mathcal{O}(1)$  muni de la métrique adélique qui donne lieu à la hauteur de Weil.

Suivant une suggestion d'Autissier, nous montrons aussi au dernier paragraphe de ce texte comment les méthodes de cet article permettent de produire d'autres exemples où l'équidistribution n'a pas lieu.

La démonstration du théorème 1.2 reprend la technique qui conduit au théorème 1.1. Elle requiert aussi l'extension au cas de métriques *admissibles* de l'identité, classique en théorie de l'intersection arithmétique, qui compare la hauteur d'une sous-variété relativement à un fibré en droites hermitien à celle d'une section hyperplane; voir par exemple [11], (3.2.2). Nous démontrons ainsi le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.4.** — *Soit  $\bar{L}$  et  $\bar{M}$  des fibrés en droites admissibles sur  $X$ ; soit aussi  $s$  une section globale non nulle de  $\bar{M}$ , de diviseur  $D$ . Pour toute place  $v$  de  $F$ , la fonction  $\log \|s\|_v^{-1}$  est intégrable pour la mesure  $c_1(\bar{L})_v^{\dim X}$ . De plus,*

$$(\hat{c}_1(\bar{L})^{\dim X} \hat{c}_1(\bar{M})|X) = h_{\bar{L}}(D) + \sum_v \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} c_1(\bar{L})_v^{\dim X}.$$

Par définition, un fibré en droites métrisé est *admissible* s'il est le quotient de deux fibrés en droites munis de métriques adéliques semi-positives (Zhang dit *intégrable* dans [40]).

Lorsque  $X = \mathbf{P}^n$ , ce théorème permet de retrouver la formule bien connue, découlant immédiatement du théorème de Jensen, que Mahler et Lawton [25] ont posé comme *définition* de la hauteur d'une hypersurface. Supposons en effet que l'on ait  $X = \mathbf{P}^n$  et que  $D$  soit le diviseur des zéros d'un polynôme homogène de degré  $m$ ,  $F \in \mathbf{Z}[x_0, \dots, x_n]$ , dont les coefficients sont premiers entre eux. Soit  $\bar{L} = \mathcal{O}(1)$ , muni de la métrique de

Weil, posons  $\overline{M} = \overline{L}^{\otimes m}$  et soit  $s$  la section de  $M$  définie par  $F$ . Pour toute place  $v$  de  $\mathbf{Q}$  et tout point  $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}_v)$ , on a

$$\|s\|_v(x_0 : \dots : x_n) = \frac{|F(x_0, \dots, x_n)|_v}{\max(|x_0|_v, \dots, |x_n|_v)^m}.$$

Si  $v$  est une place ultramétrique, la mesure  $c_1(\overline{L})_v^n$  est la mesure de Dirac au « point de Gauss » de  $X_v$  ([13], exemple 3.2) et l’hypothèse que les coefficients de  $F$  soient des entiers premiers entre eux signifie que  $\|s\|_v$  vaut 1 en ce point. Lorsque  $v$  est la place archimédienne de  $\mathbf{Q}$ , c’est la mesure de probabilité d’intégration sur le polycercle ([27], corollaire 6.3.5) :

$$\int_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})} \varphi c_1(\overline{L})_\infty^n = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \varphi(1 : e^{i\theta_1} : \dots : e^{i\theta_n}) d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

La formule du théorème 1.4 devient alors

$$mh_{\overline{L}}(X) = h_{\overline{L}}(D) + \int_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})} \log \|s\|_v^{-1} c_1(\overline{L})_\infty^n.$$

En outre,  $h_{\overline{L}}(X) = 0$  (la métrique de  $\overline{L}$  est une métrique canonique pour le système dynamique sur  $\mathbf{P}^n$  donné par l’élévation au carré des coordonnées homogènes), d’où, finalement

$$\begin{aligned} h_{\overline{L}}(D) &= \int_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})} \log \|s\|_v^{-1} c_1(\overline{L})_\infty^n \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \log |F(1, e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})| d\theta_1 \dots d\theta_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la hauteur d’une hypersurface de  $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$  est égale à la mesure de Mahler du polynôme homogène qui la définit. Plus généralement, les *mesures de Mahler* du titre de cet article désignent les intégrales de fonctions de Green de diviseurs contre des mesures de probabilité.

Cette formule reliant hauteurs et nombres d’intersection arithmétique est banale lorsque les métriques de  $\overline{L}$  sont lisses, c’est-à-dire  $\mathcal{C}^\infty$  aux places archimédiennes et données par un modèle aux places ultramétriques : c’est en fait une des façons de définir la hauteur d’un cycle (cf. [11], (3.2.2)). Elle est presque tautologique lorsque  $\overline{M}$  est le fibré en droite trivial ; dans ce cas,  $\log \|s\|^{-1}$  est une fonction continue et la formule traduit la définition des mesures  $c_1(\overline{L})_v^{\dim X}$ .

En fait, la difficulté de ce théorème repose dans l’interaction entre le processus limite qui donne lieu aux mesures  $c_1(\overline{L})_v^d$  d’une part et les pôles des fonctions  $\log \|s\|_v^{-1}$  d’autre part. Lorsque les métriques sont lisses aux places ultramétriques, cette formule a d’abord été démontrée par Maillot ([27], théorème 5.5.6, formule 6) comme conséquence des propriétés de



continuité de l'opérateur de Monge-Ampère complexe, établies par Bedford et Taylor dans [6] (voir aussi [16]). Lorsque  $X$  est une courbe, elle a récemment fait l'objet de plusieurs travaux indépendants : Szpiro, Tucker, Pineiro, [31], puis Favre et Rivera-Letelier, [19], pour  $X = \mathbf{P}^1$ ; Thuillier, [36], prop. 4.2.9 dans le cas général.

Rappelons aussi que Philippon, voir par exemple [29, 30], a développé une théorie systématique des hauteurs de variétés projectives en termes de mesures de Mahler de leurs formes de Chow. Dans ce contexte, et dans le cas particulier de la hauteur normalisée par le morphisme d'élévation au carré des coordonnées homogènes de l'espace projectif, cette formule apparaît aussi dans l'article [14] de David et Philippon, prop. 2.1.

Nous démontrerons au paragraphe 4 une version locale du théorème 1.4, valable place par place, dont il se déduit par sommation sur l'ensemble des places du corps de nombres  $F$ . Nous aurons à faire usage d'un théorème d'approximation de fonctions de Green par des fonctions lisses, théorème qui fait l'objet du paragraphe 3. Le théorème d'équidistribution pour les fonctions à singularités logarithmiques est démontré au paragraphe 6. Nous avons regroupé dans les paragraphes 2 et 5 rappels, reformulations ou compléments de résultats antérieurs dont nous avons besoin : le premier concerne la définition des mesures sur les espaces analytiques ultramétriques, le second formule en termes de volumes arithmétiques le théorème de Yuan [38]. Nous concluons cet article par un énoncé de non-équidistribution que nous a suggéré Pascal Autissier.

Pour cela, et pour sa lecture attentive, nous voudrions le remercier ici. Nous sommes également reconnaissant envers Sébastien Boucksom de ses remarques sur un état antérieur de ce travail; nous le remercions en particulier d'avoir attiré notre attention sur une formulation erronée du lemme 6.3. Enfin, nous sommes redevables à Vincent Maillot d'avoir pointé quelques malheurs d'expression dans la première version de cet article.

## 2. Quelques rappels sur les fibrés en droites métrisés et les mesures qui leur sont attachées

Fixons une place  $v$  de  $F$ . Soit  $X$  un  $F_v$ -schéma projectif intègre. On note  $X_v$  l'espace analytique de  $X$  sur  $\mathbf{C}_v$ , au sens usuel si  $v$  est archimédienne, et au sens de Berkovich [7] si  $v$  est ultramétrique.

**Modèles**

Supposons que  $v$  soit une place ultramétrique de  $F$  et notons  $R$  l'anneau des entiers du corps local  $F_v$ . Par définition, un *modèle* de  $X$  sur  $R$  est un  $R$ -schéma  $\mathcal{X}$  projectif et plat dont la fibre générique est isomorphe à  $X$  ; on désigne alors par  $\mathcal{X}_s$  la fibre spéciale de  $\mathcal{X}$  et par  $\text{sp}_{\mathcal{X}} : X_v \rightarrow \mathcal{X}_s$  l'application de réduction.

LEMME 2.1. — *Soit  $R$  un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions  $K$ , et soit  $\mathcal{X}$  un  $R$ -schéma de présentation finie et plat, de fibre générique  $X = \mathcal{X} \otimes_R K$ .*

- (1) *L'application de réduction  $\text{sp}_{\mathcal{X}} : X_v \rightarrow \mathcal{X}_s$  est surjective.*
- (2) *Soit  $\mathcal{X}'$  la fermeture intégrale de  $\mathcal{X}$  dans sa fibre générique  $X$ . Le  $R$ -schéma  $\mathcal{X}'$  est plat, et il est de présentation finie si  $\mathcal{X}$  est un schéma réduit.*

*Supposons de plus que  $\mathcal{X}$  soit intégralement fermé dans sa fibre générique. Alors :*

- (3) *Le schéma  $\mathcal{X}$  est réduit au voisinage de sa fibre spéciale.*
- (4) *Pour tout point générique  $\xi$  de la fibre spéciale  $\mathcal{X}_s$ , l'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\xi}$  est un anneau de valuation discrète qui domine  $R$  ; la semi-norme prolongeant la valeur absolue de  $K$  et associée à cette valuation est l'unique antécédent du point  $\xi$  par l'application de réduction  $\text{sp}_{\mathcal{X}} : X_v \rightarrow \mathcal{X}_s$ .*

*Démonstration.* — (1) On note  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal de  $R$ . Soit  $U$  un ouvert affine de  $\mathcal{X}$  et soit  $\widehat{\mathcal{A}}$  la  $R$ -algèbre topologique complétée-séparée de  $\mathcal{A} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$  pour la topologie  $\mathfrak{m}$ -adique. L'anneau  $B = \widehat{\mathcal{A}} \otimes_R K$  est une algèbre strictement  $K$ -affinoïde. Désignons par  $\widetilde{K}$  le corps résiduel de  $R$  et par  $\widetilde{B}$  la  $\widetilde{K}$ -algèbre quotient de l'anneau  $B^\circ$  des éléments de  $B$  de norme spectrale inférieure à 1 par l'idéal  $B^{\circ\circ}$  formés de ceux dont la norme spectrale est strictement inférieure à 1. L'application de réduction  $r : \text{sp}_{\mathcal{X}}^{-1}(U_s) = \mathcal{M}(B) \rightarrow \text{Spec}(\widetilde{B})$  est alors surjective ([7], proposition 2.4.4).

L'anneau  $B^\circ$  est la fermeture intégrale de  $\widehat{\mathcal{A}}$  dans  $B$  ([10], 6.1.2 et 6.3.4). On dispose par conséquent d'un  $\widetilde{K}$ -morphisme *surjectif*

$$p : \text{Spec}(\widetilde{B}) \rightarrow \text{Spec}(\widehat{\mathcal{A}} \otimes_R \widetilde{K}) = U_s$$

tel que  $\text{sp}_U = p \circ r$  et la surjectivité de l'application  $\text{sp}_U : \text{sp}_{\mathcal{X}}^{-1}(U_s) \rightarrow U_s$  en découle immédiatement.

(2) Quel que soit l'ouvert affine  $U$  de  $\mathcal{X}$ , la  $R$ -algèbre plate  $\mathcal{A} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$  s'identifie à un sous-anneau de  $A = \mathcal{O}_X(U_K) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U) \otimes_R K$ . Par définition de la fermeture intégrale, l'image réciproque de  $U$  dans le  $\mathcal{X}$ -schéma  $\mathcal{X}'$  est le schéma affine dont l'algèbre  $\mathcal{A}'$  est la fermeture intégrale de  $\mathcal{A}$  dans  $A$ . Par construction,  $\mathcal{A}'$  est sans  $R$ -torsion, si bien que le  $R$ -schéma  $\mathcal{X}'$  est plat.

Le  $R$ -schéma  $\mathcal{X}$  est plat et excellent. Il est alors réduit si  $X$  l'est, et sa fermeture intégrale dans  $X$  est finie sur  $\mathcal{X}$ , donc de présentation finie car  $R$  est noethérien.

Supposons maintenant que le  $R$ -schéma  $\mathcal{X}$  soit intégralement fermé dans sa fibre générique.

(3) Soit  $U$  un ouvert affine de  $\mathcal{X}$  d'algèbre  $\mathcal{A}$ ; notons encore  $A = \mathcal{A} \otimes K$ . Soit  $a \in A$  un élément nilpotent; pour tout  $t \in K$ , l'élément  $ta$  de  $A$  est entier sur  $\mathcal{A}$  et appartient donc à  $\mathcal{A}$  puisque ce dernier anneau est intégralement fermé dans  $A$ . L'élément  $a$  de  $\mathcal{A}$  appartient donc à l'idéal  $\mathfrak{J} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n \mathcal{A}$ . D'après le théorème d'intersection de Krull, il existe  $b \in \mathfrak{m} \mathcal{A}$  tel que  $(1 + b)\mathfrak{J} = 0$ . Par suite, l'idéal  $\mathfrak{J}$  et, *a fortiori*, le nilradical de  $\mathcal{A}$  sont nuls sur l'ouvert de  $\text{Spec}(\mathcal{A})$  sur lequel  $1 + b$  est inversible. Comme  $b \in \mathfrak{m} \mathcal{A}$ , cet ouvert contient la fibre spéciale de  $\mathcal{X}$ .

(4) Soit  $\xi$  un point générique de la fibre spéciale  $\mathcal{X}_s$  de  $\mathcal{X}$ . L'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\xi}$  est noethérien, réduit d'après l'assertion (3); c'est un sous-anneau de l'anneau  $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\xi} \otimes_R K$  qui est, lui aussi, noethérien et réduit. En vertu de la platitude de  $\mathcal{X}$ ,

$$\dim(\mathcal{O}_{\mathcal{X},\xi} \otimes_R K) = \dim(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_s,\xi}) \quad ;$$

cette dernière dimension est nulle, car  $\xi$  est un point générique de  $\mathcal{X}_s$ . Par suite, l'anneau  $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\xi} \otimes_R K$  est le produit des corps résiduels de ses idéaux premiers minimaux, c'est-à-dire le produit des corps résiduels des points génériques de  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathcal{X},\xi})$  (par platitude de  $\mathcal{X}$  sur  $R$ ). Autrement dit,  $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\xi} \otimes_R K$  est l'anneau total des fractions de  $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\xi}$ .

Par conséquent, le fait que  $\mathcal{X}$  soit intégralement fermé dans sa fibre générique entraîne que l'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\xi}$  est intégralement fermé dans son anneau total des fractions. Comme il est de dimension 1, c'est un anneau de valuation discrète.

Puisque l'anneau  $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\xi}$  domine  $R$ , il existe alors une unique valeur absolue sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\xi}$  associée à la valuation  $\text{ord}_{\xi}$  qui prolonge la valeur absolue de  $R$ . Cette valeur absolue définit un point  $x$  de  $X_v$  tel que  $\text{sp}_{\mathcal{X}}(x) = \xi$ .

Inversement, soit  $y$  un point de  $X_v$  tel que  $\text{sp}_{\mathcal{X}}(y) = \xi$ . Le point  $y$  appartient à  $\text{sp}_{\mathcal{X}}^{-1}(U)$  et définit donc une semi-norme multiplicative et bornée sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U) \otimes_R K$  telle que  $|f|(y) = 1$  pour tout  $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$  ne s'annulant

pas au point  $\xi$ . Cette semi-norme se prolonge donc à l'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\xi}$  et, désignant par  $u$  une uniformisante de cet anneau de valuation discrète, on a

$$|f|(y) = |u|(y)^{\text{ord}_\xi(f)}$$

pour tout  $f$ . Par conséquent,  $y$  est une valeur absolue sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\xi}$  associée à la valuation  $\text{ord}_\xi$  et prolongeant la valeur absolue de  $R$ , ce qui implique  $y = x$ . □

### Métriques

Nous aurons à considérer divers types de fibrés en droites métrisés sur  $X_v$ . Renvoyant à [40] ou [13] pour plus de précisions, les définitions sont les suivantes. Précisons d'abord qu'il ne sera question que de métriques continues.

Supposons  $v$  archimédienne. On dit qu'un fibré en droites métrisé  $\bar{L}$  sur  $X_v$  est *lisse* s'il existe, pour tout point de  $X_v$ , un voisinage ouvert  $U$ , une immersion fermée  $U \hookrightarrow Y$  dans un espace analytique lisse et un fibré en droites  $\bar{M}$  sur  $Y$  muni d'une métrique  $C^\infty$  tels que  $\bar{L}|_U = i^*\bar{M}$ . On dit que  $\bar{L}$  est *semi-positif* si sa métrique est limite uniforme de métriques lisses dont la forme de courbure est positive (i.e. localement induites par des métriques  $C^\infty$  dont la forme de courbure est positive).

Supposons que  $v$  soit une place ultramétrique. Considérons un modèle  $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$  de  $(X, L)$ , au sens où  $\mathcal{X}$  est un modèle de  $X$  sur  $R$  et où  $\mathcal{L}$  est un fibré en droites sur  $\mathcal{X}$  dont la restriction à  $X$  est identifiée à  $L$ . Ces données définissent une métrique sur  $L$ , dite *lisse* (ou *algébrique*), de la façon suivante : pour tout ouvert affine  $U$  de  $\mathcal{X}$  et toute trivialisations  $\varepsilon$  de  $\mathcal{L}$  sur  $U$ , on a  $\|\varepsilon\| = 1$  sur  $\text{sp}^{-1}(U_s)$ . Cette définition est valide car pour toute fonction  $f_U \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)^\times$ , la fonction  $|f_U|$  sur  $\text{sp}_{\mathcal{X}}^{-1}(U_s)$  est identiquement égale à 1. Nous dirons que  $\bar{L}$  est *semi-positif* si sa métrique est limite uniforme de métriques lisses données par des modèles  $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$  tels que  $(c_1(\mathcal{L})|_C) \geq 0$  pour toute courbe irréductible  $C$  de la fibre spéciale de  $\mathcal{X}$ .

On dit qu'un fibré en droites métrisé  $\bar{L}$  est *admissible* (Zhang dit *intégrable* dans [40]) s'il est quotient de deux fibrés en droites munis de métriques semi-positives.

Toute fonction continue  $\varphi$  sur  $X_v$  définit une métrique sur le fibré trivial  $\mathcal{O}_X$ , telle que  $\log \|1\|^{-1} = \varphi$ . On dira que  $\varphi$  est lisse, resp. admissible, si ce fibré métrisé  $\mathcal{O}_X(\varphi)$  est lisse, resp. admissible.

### Fonctions de Green

Soit  $D$  un diviseur de Cartier effectif sur  $X_v$  ; il lui correspond un fibré en droites  $\mathcal{O}(D)$  muni d'une section globale  $s_D$  de diviseur  $D$ . On appellera *fonction de Green continue*, resp. *lisse*, resp. *semi-positive*, resp. *admissible* pour  $X_v$  une fonction  $g_D$  sur  $X_v \setminus D$  telle que  $g_D = \log \|s_D\|^{-1}$ , où  $\|\cdot\|$  est une métrique continue, resp. lisse, resp. semi-positive, resp. admissible sur  $\mathcal{O}_X(D)$ . On étend par linéarité cette terminologie aux diviseurs qui ne sont pas nécessairement effectifs.

En particulier, à tout couple  $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ , constitué d'un modèle  $\mathcal{X}$  de  $X$  sur  $R$  et d'un diviseur  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{X}$ , est associée une fonction de Green lisse  $g_{\mathcal{D}}$  pour le diviseur  $\mathcal{D}|_X$  sur  $X_v$ , caractérisée de la façon suivante : quels que soient l'ouvert affine  $U$  de  $\mathcal{X}$  et la section  $f_U \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$  telle que  $\mathcal{D}|_U = \text{div}(f_U)$ , la restriction de  $g_{\mathcal{D}}$  au domaine affinoïde  $\text{sp}_X^{-1}(U)$  de  $X_v$  est la fonction  $\log |f_U|^{-1}$ .

Par définition, les *fonctions lisses* sur  $X_v$  sont précisément les fonctions de Green provenant de couples  $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$  tels que  $\mathcal{D}|_X = 0$ , i.e. tels que le support de  $\mathcal{D}$  soit contenu dans la fibre spéciale  $\mathcal{X}_s$  de  $\mathcal{X}$ .

Il est manifeste qu'un diviseur  $\mathcal{D}$  effectif donne lieu à une fonction de Green positive ; lorsque  $\mathcal{X}$  est *intégralement fermé* dans sa fibre générique  $X$ , l'assertion réciproque est vraie dès que  $\mathcal{D}|_X$  est effectif en vertu de la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2. — *Soit  $\mathcal{X}$  un  $R$ -schéma de présentation finie et plat, que l'on suppose intégralement fermé dans sa fibre générique  $X$ .*

*Un diviseur  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{X}$  est effectif si et seulement si le diviseur  $\mathcal{D}|_X$  est effectif et si la fonction de Green  $g_{\mathcal{D}}$  est positive.*

*Démonstration.* — Si  $\mathcal{D}$  est effectif, il en est de même pour  $\mathcal{D}|_X$  et la fonction de Green  $g_{\mathcal{D}}$  est positive. Supposons réciproquement que  $\mathcal{D}|_X$  soit effectif et que la fonction  $g_{\mathcal{D}}$  soit positive. Étant donné un ouvert affine  $U$  de  $\mathcal{X}$  tel que  $\mathcal{D}|_U$  soit principal, il découle de nos hypothèses que  $\mathcal{D}|_U$  est le diviseur d'un élément régulier  $f$  de  $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U) \otimes_R K$  tel que  $|f|(x) \leq 1$  pour toute semi-norme multiplicative bornée  $x$  sur  $\mathcal{O}_X(U)$ . Posant  $\mathcal{A} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$  et  $A = \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{A} \otimes_R K$ , le morphisme canonique  $\mathcal{A} \rightarrow A$  est injectif par platitude et l'anneau  $\mathcal{A}$  est intégralement fermé dans  $A$ . Nous devons montrer que  $f$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

Considérons la sous- $R$ -algèbre  $\mathcal{A}'$  de  $A[f^{-1}]$  engendrée par  $f^{-1}$  et  $\mathcal{A}$  ; c'est une  $R$ -algèbre de type fini et plate telle que  $\mathcal{A}' \otimes_R K = A[f^{-1}]$ .

Supposons par l'absurde que  $f$  n'appartient pas à  $\mathcal{A}'$ . Alors,  $f^{-1}$  est un élément non inversible de  $\mathcal{A}'$  et il existe donc un idéal maximal  $\mathfrak{m}'$  de

$\mathcal{A}'$  contenant  $f^{-1}$ . Comme  $f^{-1}$  est inversible dans  $\mathcal{A}' \otimes_R K$ ,  $\mathfrak{m}'$  contient nécessairement  $\mathfrak{m}\mathcal{A}'$ , où  $\mathfrak{m}$  désigne l'idéal maximal de  $R$ , et  $\mathfrak{m}'$  définit donc un point fermé de la fibre spéciale  $U_s$  de  $U$ .

L'application de réduction  $\text{sp}_{\mathcal{X}} : \text{sp}_{\mathcal{X}}^{-1}(U_s) \rightarrow U_s$  étant surjective (lemme 2.1), il existe une semi-norme multiplicative et bornée  $x$  sur  $\mathcal{O}_X(U)$  telle que  $\text{sp}_{\mathcal{X}}(x) = \mathfrak{m}'$  et l'appartenance de  $f^{-1}$  à  $\mathfrak{m}'$  implique alors l'inégalité stricte  $|f^{-1}|(x) < 1$ . Comme  $|f|(x) \leq 1$  par hypothèse, nous obtenons une contradiction et en concluons que  $f$  appartient à  $\mathcal{A}'$ .

Par conséquent,  $f$  est entier sur  $\mathcal{A}$ , donc appartient à  $\mathcal{A}$  puisque  $\mathcal{A}$  est intégralement fermé dans  $A$  et que  $f \in A$ . Il en résulte que le diviseur  $\mathcal{D}_U = \text{div}(f)$  est effectif. □

### Mesures et hauteurs

Soit  $\bar{L}_0, \dots, \bar{L}_d$  des fibrés en droites admissibles sur  $X$ . Pour tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i \leq d$ , soit  $s_i$  une section de  $\bar{L}_i$ ; supposons que les diviseurs de ces sections se coupent proprement. Pour toute sous-variété  $Z$  de  $X$ , de dimension  $e$ , et toute place  $v$  de  $F$ , on a défini dans [13] un nombre réel  $(\widehat{\text{div}}(s_0) \dots \widehat{\text{div}}(s_e)|Z)_v$ , par approximation à partir du cas de métriques lisses, où il coïncide alors avec la hauteur locale construite par Gubler dans [24]. En outre, ces nombres réels sont des hauteurs locales pour les hauteurs définies par Zhang dans [40] et associées à des fibrés en droites munis de métriques adéliques admissibles, au sens où l'on a

$$\sum_v (\widehat{\text{div}}(s_0) \dots \widehat{\text{div}}(s_e)|Z)_v = (\widehat{c}_1(\bar{L}_0) \dots \widehat{c}_1(\bar{L}_e)|Z),$$

$v$  parcourant l'ensemble des places de  $F$ .

La mesure  $c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_e)\delta_Z$  sur  $X_v$  définie dans [13] est supportée par  $Z_v$ . Si les métriques des fibrés  $\bar{L}_i$  sont lisses, données par des modèles  $\mathcal{L}_i$  sur un modèle entier  $\mathcal{X}$  intégralement fermé dans  $X$ , et que l'adhérence de Zariski  $\mathcal{Z}$  de  $Z$  dans  $\mathcal{X}$  est également intégralement fermée dans  $Z$ , on a

$$c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_e)\delta_Z = \sum_{\xi \in \mathcal{Z}_s^{(0)}} (c_1(\mathcal{L}_1) \dots c_1(\mathcal{L}_e)|[\bar{\xi}])\delta_{\text{sp}_Z^{-1}(\xi)}.$$

(D'après le lemme 2.1, un point générique  $\xi$  de  $\mathcal{Z}_s$  a un unique antécédent dans  $Z_v$  par l'application de réduction  $\text{sp}_Z : Z_v \rightarrow \mathcal{Z}_s$ , car  $\mathcal{Z}$  est intégralement fermé dans  $Z$ ;  $\delta_{\text{sp}_Z^{-1}(\xi)}$  désigne ainsi la mesure de Dirac en ce point de  $Z_v$ .) Lorsque  $L_0$  est le fibré en droites trivial,  $\log \|s_0\|^{-1}$  est une fonction

continue sur  $X_v$  et l'on a la formule

$$(\widehat{\operatorname{div}}(s_0) \dots \widehat{\operatorname{div}}(s_e)|Z)_v = \int_{X_v} \log \|s_0\|_v^{-1} c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_e) \delta_Z.$$

Par la définition même des hauteurs locales, on a, si  $\operatorname{div}(s_0) = D$ ,

$$\begin{aligned} & (\widehat{\operatorname{div}}(s_0) \dots \widehat{\operatorname{div}}(s_e)|Z)_v \\ &= (\widehat{\operatorname{div}}(s_1) \dots \widehat{\operatorname{div}}(s_e)|Z \cap D)_v + \int_{X_v} \log \|s_0\|_v^{-1} c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_e) \delta_Z, \end{aligned}$$

à condition que les métriques des fibrés  $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_e$  soient lisses. La définition des mesures  $c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_e) \delta_Z$  est étendue par passage à la limite et multilinéarité au cas de fibrés en droites admissibles arbitraires (cf. [13], §2.7).

Lorsque  $L_i$  est le fibré trivial, muni d'une métrique admissible telle que  $\log \|1\|^{-1} = \varphi_i$ , l'expression  $c_1(\overline{L}_i)$  est notée  $\operatorname{dd}^c \varphi_i$ . Lorsque  $L_i = \mathcal{O}_X(D_i)$  et que sa métrique est donnée par une fonction de Green admissible  $g_{D_i}$  pour  $D_i$ , on écrit  $c_1(D_i, g_{D_i})$  pour  $c_1(\overline{L}_i)$ . Lorsque  $v$  est une place archimédienne, ces notations sont compatibles avec les constructions de mesures en géométrie complexe dues à Bedford–Taylor, Demailly, etc. (voir notamment [6, 15] ainsi que [27]). On a alors  $c_1(D, g_D) = \operatorname{dd}^c g_D + \delta_D$  et il s'agit alors de produits de courants positifs fermés dérivant localement d'un potentiel continu.

La commutativité de l'accouplement de hauteurs locales ([24], prop. 9.3) entraîne que la mesure  $c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_e) \delta_Z$  est symétrique en les  $\overline{L}_i$ . Elle entraîne aussi la formule suivante, variante de la formule de Stokes :

PROPOSITION 2.3. — *Soit  $\varphi_0, \varphi_1$  des fonctions admissibles sur  $X_v$ , soit  $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_e$  des fibrés en droites admissibles sur  $X$ , munis de sections  $s_i$  dont les diviseurs se coupent proprement. Alors*

$$\int_{X_v} \varphi_0 \operatorname{dd}^c \varphi_1 c_1(\overline{L}_2) \dots c_1(\overline{L}_e) \delta_Z = \int_{X_v} \varphi_1 \operatorname{dd}^c \varphi_0 c_1(\overline{L}_2) \dots c_1(\overline{L}_e) \delta_Z.$$

Soit  $\overline{L}$  un fibré en droites sur  $X$  muni d'une métrique semi-positive. Lorsque le fibré en droites  $L$  sous-jacent à  $\overline{L}$  est ample, voire lorsqu'il est gros, on a  $\operatorname{deg}_L(X) > 0$ . Nous poserons alors  $\mu_{\overline{L},v} = c_1(\overline{L})_v^d / \operatorname{deg}_L(X)$ ; c'est une mesure de probabilité sur  $X_v$ .

### 3. Approximation de fonctions de Green par des fonctions lisses

**THÉOREME 3.1.** — Soit  $F$  un corps de nombres et soit  $v$  une place de  $F$ . Soit  $X$  un schéma projectif intègre sur  $F_v$  ; soit  $D$  un diviseur effectif sur  $X$  et soit  $g$  une fonction de Green pour  $D$ , lisse et semi-positive. Il existe une suite  $(g_n)$  de fonctions lisses sur  $X_v$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) la suite  $(g_n)$  converge simplement vers  $g$  et  $g_n \leq g$  pour tout  $n$  ;
- (2) pour tout  $n$ ,  $g - g_n$  est une fonction de Green pour  $D$ , semi-positive.

La démonstration consiste à vérifier que l'on peut poser  $g_n = \min(g, n)$  dans le cas ultramétrique, et une régularisation de cette fonction dans le cas archimédien.

*Démonstration dans le cas archimédien.* — Pour  $\varepsilon > 0$ , soit  $\rho_\varepsilon$  la fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  définie par  $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + \varepsilon^2})$ . Elle est  $\mathcal{C}^\infty$  et sa dérivée, donnée pour  $x \neq 0$  par

$$\rho'_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}} = \frac{1}{2} \left( 1 + \text{signe}(x) \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{x^2} \right)^{-1/2} \right),$$

est strictement croissante et comprise entre 0 et 1. En particulier,  $\rho_\varepsilon$  est strictement croissante et strictement convexe. En outre, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , on a l'inégalité

$$|\rho_1(x) - \max(x, 0)| = \frac{1}{2} \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right) - \frac{1}{2} (x + |x|) \leq \frac{1}{\max(1, |x|)}.$$

Comme  $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon \rho_1(x/\varepsilon)$ , cela entraîne la majoration

$$|\rho_\varepsilon(x) - \max(x, 0)| \leq \frac{\varepsilon}{\max(1, |x/\varepsilon|)} \leq \varepsilon.$$

Par suite, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\rho_\varepsilon$  converge uniformément, en décroissant, sur  $\mathbf{R}$  vers la fonction  $x \mapsto \max(x, 0)$ .

Pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $x \in \mathbf{R}$ , posons

$$\varphi_{n,\varepsilon}(x) = x - \rho_\varepsilon(x - n).$$

Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\varphi_{n,\varepsilon}(x)$  tend uniformément en  $n$  et  $x$  vers

$$x - \max(x - n, 0) = x + \min(n - x, 0) = \min(n, x).$$

En outre, la fonction  $\varphi_{n,\varepsilon}$  est strictement croissante et strictement concave. On peut alors choisir une suite  $(\varepsilon_n)$  de nombres réels qui tende vers 0 en décroissant de sorte que la suite de fonctions  $(\varphi_{n,\varepsilon_n})$  soit une suite croissante de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  qui converge vers la fonction  $x \mapsto x$ , uniformément sur chaque intervalle majoré.



Pour  $n \in \mathbf{N}$ , posons  $g_n = \varphi_{n,\varepsilon_n} \circ g$ ; c'est une fonction lisse sur  $X_v$  et  $g_n(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . De plus, lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $g_n(x)$  tend vers  $g(x)$ . Pour  $x \in X_v$ , on a

$$g(x) - g_n(x) = g(x) - \varphi_{n,\varepsilon_n}(g(x)) = \rho_{\varepsilon_n}(g(x) - n).$$

C'est une fonction de Green lisse, positive, pour  $D$ . Comme la fonction  $\rho_{\varepsilon_n}$  est convexe et strictement croissante,  $g - g_n$  est semi-positive. Cela termine la démonstration lorsque  $v$  est une place archimédienne de  $F$ .  $\square$

*Démonstration du théorème dans le cas d'une place ultramétrique.* — Nous considérons maintenant une place non archimédienne  $v$  de  $F$ . Soit  $R$  l'anneau des entiers du corps local  $F_v$  et soit  $\pi$  une uniformisante de  $R$ . Pour tout entier naturel  $n$ , posons  $g_n = \min(g, n \log |\pi|^{-1})$ ; il s'agit d'une fonction continue et bornée sur  $X_v$ , et nous allons vérifier que  $g - g_n$  est une fonction de Green semi-positive et lisse pour  $D$ . La suite croissante  $(g_n)$  converge simplement vers  $g$ .

Soit  $\mathcal{X}$  un modèle entier de  $X$  intégralement fermé dans sa fibre générique et soit  $\mathcal{D}$  un diviseur de Cartier sur  $\mathcal{X}$  qui prolonge  $D$  et qui définit la fonction de Green lisse  $g$ . Comme  $g$  est minorée, il existe un entier  $n_0$  tel que  $g + n_0 \log |\pi|^{-1}$  soit positive. C'est une fonction de Green pour  $D$ , associée au diviseur  $\mathcal{D} + n_0[\mathcal{X}_s]$ ; comme  $\mathcal{X}$  est intégralement fermé dans  $X$ , ce diviseur est effectif. Quitte à remplacer  $g$  par  $g + n_0 \log |\pi|^{-1}$  et  $n$  par  $n_0 + n$ , nous pouvons donc supposer que  $\mathcal{D}$  est effectif; c'est ce que nous faisons.

Notons  $\mathcal{I}$  le faisceau cohérent d'idéaux défini par

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{X}}(D) + \pi^n \mathcal{O}_{\mathcal{X}},$$

dont le support est contenu dans la fibre spéciale de  $\mathcal{X}_s$ . Soit  $p: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$  l'éclatement de  $\mathcal{I}$  et soit  $\mathcal{E}$  le diviseur exceptionnel, défini par le faisceau d'idéaux  $p^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$ . Le diviseur

$$\mathcal{D}' = p^*\mathcal{D} - \mathcal{E}$$

prolonge  $D$  sur le modèle  $\mathcal{X}'$  de  $X$  et définit donc une fonction de Green  $g'$  pour  $D$  sur  $X_v$ .

Étant donné un ouvert affine  $V$  de  $\mathcal{X}$  tel que  $\mathcal{D}|_V = \text{div}(f_V)$ , pour  $f_V \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V)$ , le  $V$ -schéma  $\mathcal{X}'|_V = p^{-1}(V)$  s'identifie naturellement au sous schéma fermé du  $V$ -schéma projectif défini par l'équation  $f_V T_0 - \pi^n T_1 = 0$  dans  $\mathbf{P}_V^1 = \text{Proj}(\mathcal{O}_V[T_0, T_1])$ ;  $\mathcal{D}'$  est alors défini par l'annulation de  $T_1$ ,  $\mathcal{E}$  par celle de  $\pi^n$ . Il en découle que  $\mathcal{X}'$  est recouvert par des ouverts affines  $U$  tels que  $p^*\mathcal{D}|_U = \text{div}(f'_U)$ , pour  $f'_U \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}'}(U)$ , et satisfaisant à l'une des deux conditions suivantes :

- ou bien  $f'_U \in \pi^n \mathcal{O}_{\mathcal{X}'}(U)$ , auquel cas  $\mathcal{E}|_U = \text{div}(\pi^n)$  ;
- ou bien  $\pi^n \in f'_U \mathcal{O}_{\mathcal{X}'}(U)$ , auquel cas  $\mathcal{E}|_U = \text{div}(f'_U) = p^* \mathcal{D}|_U$ .

Un tel recouvrement ouvert  $(U)$  de  $\mathcal{X}$  induit un recouvrement de l'espace analytique  $X_v$  par les domaines affinoïdes  $\text{sp}^{-1}(U \cap \mathcal{X}_s)$  sur lesquels ou bien  $g = \log |f'_U|^{-1} \geq n \log |\pi|^{-1}$ , ou bien  $g = \log |f'_U|^{-1} \leq n \log |\pi|^{-1}$ . Par conséquent,  $g'$  coïncide avec  $g - g_n = \max(g - n \log |\pi|^{-1}, 0)$  sur  $X_v$  et cette dernière est donc bien une fonction de Green lisse pour  $D$ . Il reste à vérifier que le diviseur  $\mathcal{D}'$  est nef sur la fibre spéciale de  $\mathcal{X}'$ .

La description locale qui précède fournit immédiatement l'effectivité du diviseur  $\mathcal{D}'$ . En outre, désignant par  $\Omega$  le plus grand ouvert de  $\mathcal{X}'$  sur lequel  $\pi^n$  engendre  $p^{-1}\mathcal{I}$ , il est clair que le support de  $\mathcal{D}'$  est contenu dans  $\Omega$  et que  $\mathcal{E}|_\Omega = \text{div}(\pi^n)$ .

Considérons alors un sous-schéma fermé intègre  $C$ , de dimension un et contenu dans la fibre spéciale  $\mathcal{X}'_s$  de  $\mathcal{X}'$ . Si  $C$  est génériquement disjoint du support de  $\mathcal{D}'$ , on peut définir la restriction  $\mathcal{D}'|_C$  de  $\mathcal{D}'$  à  $C$  ; c'est un diviseur effectif sur  $C$  et le nombre d'intersection

$$(c_1(\mathcal{D}')|C) = \text{deg}(\mathcal{D}'|_C)$$

est donc positif. Si, au contraire,  $C$  est contenu dans le support de  $\mathcal{D}'$ ,  $\Omega$  est alors un voisinage de  $C$  sur lequel les diviseurs  $\mathcal{D}'$  et  $p^*\mathcal{D}$  sont équivalents et, en vertu de la formule de projection, le nombre d'intersection

$$(c_1(\mathcal{D}')|C) = (c_1(p^*\mathcal{D})|C) = (c_1(\mathcal{D})|p_*C)$$

est positif puisque, par hypothèse, le diviseur  $\mathcal{D}$  est nef sur  $\mathcal{X}_s$ . Nous venons de vérifier que le diviseur  $\mathcal{D}'$  est nef sur la fibre spéciale de  $\mathcal{X}'$  et ceci achève la démonstration du théorème. □

**COROLLAIRE 3.2.** — *Reprenons les notations du théorème et considérons des fibrés en droites admissibles  $\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{d-1}$  sur  $X$ . La suite*

$$(\text{dd}^c g_n c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_{d-1}))$$

*de mesures sur  $X_v$  est relativement compacte dans l'espace des mesures bornées sur  $X_v$ , pour la topologie étroite. En particulier, pour montrer qu'elle converge vers une mesure  $\mu$ , il suffit de montrer que pour toute fonction lisse  $\varphi$ ,*

$$\int_{X_v} \varphi \text{dd}^c g_n c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_{d-1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(\varphi).$$

*Démonstration.* — On peut supposer que les fibrés  $\bar{L}_i$  sont semi-positifs. Pour tout  $n$ , l'égalité

$$\begin{aligned} & \text{dd}^c g_n c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_{d-1}) \\ &= c_1(D, g) c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_{d-1}) - \text{dd}^c(g - g_n) c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_{d-1}) \end{aligned}$$

exprime le premier membre comme différence de deux mesures positives dont la masse totale est égale à

$$(c_1(L_1) \dots c_1(L_{d-1})|D).$$

La première assertion découle donc de la compacité faible de l'ensemble des mesures de probabilité sur l'espace compact  $X_v$ . La seconde assertion du corollaire est alors conséquence de ce que l'ensemble des fonctions lisses sur  $X_v$  est dense dans l'ensemble des fonctions continues (cf. [24], th. 7.12).  $\square$

#### 4. Intégration de fonctions de Green

Nous allons en fait démontrer une version locale du théorème 1.4.

**THÉORÈME 4.1.** — *Fixons une place  $v$  de  $F$ . Soit  $D$  un diviseur de Cartier sur  $X$  et soit  $g_D$  une fonction de Green admissible pour  $D$ ; on désigne par  $\bar{L}_0$  le fibré en droites  $\mathcal{O}_X(D)$  muni de la métrique admissible pour laquelle la norme de la section canonique  $s_0$  (de diviseur  $D$ ) vérifie  $\log \|s_0\|_v^{-1} = g_D$ . Soit, pour  $1 \leq i \leq d$ , un fibré en droites admissible  $\bar{L}_i$  sur  $X_v$  muni d'une section globale  $s_i$ . On suppose que les diviseurs de  $s_0, \dots, s_d$  se coupent proprement.*

*Alors, la fonction  $g_D$  est intégrable pour la mesure (signée)  $c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_d)$  et l'on a*

$$\begin{aligned} & \int_{X_v} g_D c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_d) \\ &= (\widehat{\text{div}}(s_0) \dots \widehat{\text{div}}(s_d)|X)_v - (\widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_d)|D)_v. \end{aligned}$$

Faisant varier  $v$  parmi les places de  $F$  et additionnant les formules obtenues, on en déduit aisément le théorème 1.4, au moins lorsque  $\bar{L}$  est très ample (de sorte qu'il possède des sections qui se coupent proprement sur  $D$ ); le cas général s'ensuit par multilinéarité.

Avant de passer à la démonstration du théorème 4.1, donnons-en un corollaire, dont la version aux places archimédiennes est bien connue.

**COROLLAIRE 4.2.** — *Si  $Z$  est un fermé irréductible de  $X$ , de dimension  $e$ , et  $v$  est une place de  $F$ , la mesure  $c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_e)\delta_Z$  sur  $X_v$  ne charge pas les sous-ensembles algébriques stricts de  $Z$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de traiter le cas  $Z = X$ . Tout sous-ensemble algébrique strict de  $X$  est contenu dans le support d'un diviseur de Cartier effectif  $D$ ; soit  $g_D$  une fonction de Green admissible pour  $D$ . La fonction  $g_D$  est intégrable contre la mesure  $c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_d)$  et vaut  $+\infty$  sur  $D$ . Nécessairement,  $D$  est de mesure nulle pour  $c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_d)$ , et  $Z$  aussi. □

Démontrons maintenant le théorème 4.1. (Pour alléger les notations, nous omettrons le plus souvent les indices  $v$ .)

Lorsque  $v$  est une place archimédienne, l'intégrabilité et l'égalité du théorème 4.1 sont de nature locale; elles découlent alors des propriétés de continuité de l'opérateur de Monge-Ampère complexe, voir par exemple le théorème 2.2 de [15]. La démonstration que nous allons donner ici – qui ne nécessite pas de distinguer les places archimédiennes des places ultramétriques – est essentiellement formelle une fois que le théorème d'approximation est acquis.

*Réduction au cas où les  $\bar{L}_i$  sont semi-positifs.* — Par multilinéarité, il est loisible de supposer que les fibrés en droites métrisés  $\bar{L}_i$  sont semi-positifs. La mesure  $c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_d)$  est alors positive. Fixons aussi, pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ , une métrique lisse semi-positive sur  $L_i$ , correspondant à un fibré en droites métrisé  $\bar{M}_i$ . Soit  $t_i$  la section de  $M_i$  correspondant à  $s_i$  et soit  $\varphi_i$  la fonction admissible  $\log \|t_i\|^{-1} - \log \|s_i\|^{-1}$ , de sorte que  $\bar{L}_i = \bar{M}_i \otimes \mathcal{O}(\varphi_i)$ .

*Réduction au cas où  $D$  est ample et  $g_D$  lisse, semi-positive.* — Par linéarité, il suffit de traiter le cas où  $D$  est un diviseur ample sur  $X$ . Soit alors  $g_D^0$  une fonction de Green lisse, semi-positive pour  $D$ , de sorte que  $\varphi = g_D - g_D^0$  est une fonction admissible sur  $X_v$ . Si le théorème est vrai pour  $g_D^0$ , alors  $g_D = \varphi + g_D^0$  est intégrable contre  $c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_d)$  et

$$\begin{aligned} & \int_{X_v} g_D c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_d) \\ &= \int_{X_v} g_D^0 c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_d) + \int_{X_v} \varphi c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_d) \\ &= (\widehat{\text{div}}(s_0)^0 \widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_d)|X) - (\widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_d)|D) \\ & \qquad \qquad \qquad + \int_{X_v} \varphi c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_d), \end{aligned}$$

où  $\widehat{\text{div}}(s_0)^0$  correspond à la section canonique  $s_0$  du fibré en droites  $\mathcal{O}_X(D)$  muni de la métrique lisse donnée par  $g_D^0$ . Par définition de la mesure  $c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_d)$ , on a

$$\begin{aligned} & (\widehat{\text{div}}(s_0)^0 \widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_d)|X) \\ &= (\widehat{\text{div}}(s_0) \widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_d)|X) - \int_{X_v} \varphi_k c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_d), \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} & \int_{X_v} g_D c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_d) \\ &= (\widehat{\text{div}}(s_0) \widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_d)|X) - (\widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_d)|D), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

On suppose donc dans la suite que  $D$  est ample et que  $g_D$  est une fonction de Green lisse, semi-positive pour  $D$ .

Montrons par récurrence sur  $k \in \{0, \dots, d\}$  que l'énoncé vaut lorsque  $\overline{L}_i$  est muni d'une métrique lisse pour  $i > k$ .

L'assertion est vraie pour  $k = 0$  (on est dans le cas lisse). Supposons-la vraie pour  $k - 1$  et démontrons-la pour  $k$ . Il suffit de démontrer l'égalité lorsque  $\overline{L}_i = \overline{M}_i$  pour  $i > k$ . Comme  $\overline{L}_k = \overline{M}_k \otimes \mathcal{O}(\varphi_k)$ , on a l'égalité de mesures sur  $X_v$  :

$$\begin{aligned} & c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_k) c_1(\overline{M}_{k+1}) \dots c_1(\overline{M}_d) \\ &= c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_{k-1}) c_1(\overline{M}_k) \dots c_1(\overline{M}_d) \\ & \quad + \text{dd}^c \varphi_k c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_{k-1}) c_1(\overline{M}_{k+1}) \dots c_1(\overline{M}_d) \end{aligned}$$

et les égalités de hauteurs locales :

$$\begin{aligned} & (\widehat{\text{div}}(s_0) \widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_k) \widehat{\text{div}}(t_{k+1}) \dots \widehat{\text{div}}(t_d)|X) \\ &= (\widehat{\text{div}}(s_0) \widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_{k-1}) \widehat{\text{div}}(t_k) \dots \widehat{\text{div}}(t_d)|X) \\ & \quad + \int_{X_v} \varphi_k c_1(D, g_D) c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_{k-1}) c_1(\overline{M}_{k+1}) \dots c_1(\overline{M}_d) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & (\widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_k) \widehat{\text{div}}(t_{k+1}) \dots \widehat{\text{div}}(t_d)|D) \\ &= (\widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_{k-1}) \widehat{\text{div}}(t_k) \dots \widehat{\text{div}}(t_d)|X) \\ & \quad + \int_{X_v} \varphi_k c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_{k-1}) c_1(\overline{M}_{k+1}) \dots c_1(\overline{M}_d) \delta_D. \end{aligned}$$

Comme  $\overline{M}_k, \dots, \overline{M}_d$  sont lisses, il résulte de l'hypothèse de récurrence que l'on a

$$\begin{aligned} & \int_{X_v} g_D c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_{k-1}) c_1(\overline{M}_k) \dots c_1(\overline{M}_d) \\ &= (\widehat{\text{div}}(s_0) \widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_{k-1}) \widehat{\text{div}}(t_k) \dots \widehat{\text{div}}(t_d) | X) \\ & \quad - (\widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_{k-1}) \widehat{\text{div}}(t_k) \dots \widehat{\text{div}}(t_d) | D). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} & \int_{X_v} g_D c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_k) c_1(\overline{M}_{k+1}) \dots c_1(\overline{M}_d) \\ &= \int_{X_v} g_D c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_{k-1}) c_1(\overline{M}_k) c_1(\overline{M}_{k+1}) \dots c_1(\overline{M}_d) \\ & \quad + \int_{X_v} g_D \text{dd}^c \varphi_k c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_{k-1}) c_1(\overline{M}_{k+1}) \dots c_1(\overline{M}_d) \\ &= (\widehat{\text{div}}(s_0) \widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_{k-1}) \widehat{\text{div}}(t_k) \dots \widehat{\text{div}}(t_d) | X) \\ & \quad - (\widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_{k-1}) \widehat{\text{div}}(t_k) \dots \widehat{\text{div}}(t_d) | D) \\ & \quad + \int_{X_v} g_D \text{dd}^c \varphi_k c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_{k-1}) c_1(\overline{M}_{k+1}) \dots c_1(\overline{M}_d) \\ &= (\widehat{\text{div}}(s_0) \widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_{k-1}) \widehat{\text{div}}(t_k) \dots \widehat{\text{div}}(t_d) | X) \\ & \quad + \int_{X_v} \varphi_k c_1(D, g_D) c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_{k-1}) c_1(\overline{M}_{k+1}) \dots c_1(\overline{M}_d) \\ & \quad - (\widehat{\text{div}}(s_1) \dots \widehat{\text{div}}(s_{k-1}) \widehat{\text{div}}(t_k) \dots \widehat{\text{div}}(t_d) | D) \\ & \quad - \int_{X_v} \varphi_k c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_{k-1}) c_1(\overline{M}_{k+1}) \dots c_1(\overline{M}_d) \delta_D \\ & \quad + \int_{X_v} g_D \text{dd}^c \varphi_k c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_{k-1}) c_1(\overline{M}_{k+1}) \dots c_1(\overline{M}_d). \end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer l'égalité

$$\begin{aligned} & \int_{X_v} \varphi_k c_1(D, g_D) c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_{k-1}) c_1(\overline{M}_{k+1}) \dots c_1(\overline{M}_d) \\ &= \int_{X_v} \varphi_k c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_{k-1}) c_1(\overline{M}_{k+1}) \dots c_1(\overline{M}_d) \delta_D \\ & \quad - \int_{X_v} g_D \text{dd}^c \varphi_k c_1(\overline{L}_1) \dots c_1(\overline{L}_{k-1}) c_1(\overline{M}_{k+1}) \dots c_1(\overline{M}_d). \end{aligned}$$

*Application du théorème d'approximation.* — Soit  $(g_n)$  une suite de fonctions lisses sur  $X_v$  telle que  $g_n \leq g_D$ ,  $g_n$  converge simplement vers  $g_D$  et

telle que  $h_n = g_D - g_n$  soit une fonction de Green semi-positive pour  $D$ . Une telle suite existe d'après le théorème 3.1.

Alors,

$$\begin{aligned} & \int_{X_v} g_D \operatorname{dd}^c \varphi_k c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_{k-1}) c_1(\bar{M}_{k+1}) \dots c_1(\bar{M}_d) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_v} g_n \operatorname{dd}^c \varphi_k c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_{k-1}) c_1(\bar{M}_{k+1}) \dots c_1(\bar{M}_d) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_v} \varphi_k \operatorname{dd}^c g_n c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_{k-1}) c_1(\bar{M}_{k+1}) \dots c_1(\bar{M}_d) \end{aligned}$$

d'après la prop. 2.3. La fonction  $\varphi_k$  est continue, car admissible ; il suffit donc de montrer la convergence de la suite de mesures

$$\left( \operatorname{dd}^c g_n c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_{k-1}) c_1(\bar{M}_{k+1}) \dots c_1(\bar{M}_d) \right)_n$$

vers la mesure

$$\begin{aligned} & c_1(D, g_D) c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_{k-1}) c_1(\bar{M}_{k+1}) \dots c_1(\bar{M}_d) \\ & \quad - c_1(\bar{L}_1) \dots c_1(\bar{L}_{k-1}) c_1(\bar{M}_{k+1}) \dots c_1(\bar{M}_d) \delta_D, \end{aligned}$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ . D'après le corollaire 3.2 du théorème d'approximation, il suffit de montrer la convergence après intégration contre une fonction lisse, ce qui revient à montrer l'égalité voulue sous l'hypothèse supplémentaire que  $\varphi_k$  est une fonction lisse, laquelle vaut par l'hypothèse de récurrence.

Cela termine la démonstration du théorème 4.1.

Le théorème 1.4 en est une conséquence évidente si  $L$  possède des sections globales  $s_1, \dots, s_d$  telles que  $D$  et les diviseurs des  $s_i$  se coupent proprement : il suffit alors de sommer les égalités fournies par le théorème 4.1 à chaque place du corps  $F$ . Le cas général en résulte alors par multilinéarité.

### 5. Volumes en géométrie d'Arakelov

Ce paragraphe est consacré à la reformulation de résultats de Zhang [40] et Yuan [38].

Soit  $X$  un schéma projectif purement de dimension  $d$  sur un corps de nombres  $F$  et soit  $\bar{L}$  un fibré en droites muni d'une métrique adélique admissible. Le volume de  $L$  est défini par la formule

$$\operatorname{vol}(L) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\dim_F H^0(X, L^{\otimes k})}{k^d/d!}$$

et mesure la croissance du nombre de sections globales des puissances tensorielles de  $L$ . Si  $L$  est ample, le théorème de Hilbert-Samuel implique que

$\text{vol}(L) = \text{deg}_L(X)$  ; plus généralement, cette égalité vaut si  $L$  est numériquement effectif. On dit que  $L$  est gros si son volume est strictement positif. On déduit facilement d'un théorème de Fujita [20] d'existence de « décompositions de Zariski approchées » que la limite supérieure est en fait une limite ([26], 10.3.11).

Pour toute place  $v$  de  $F$ , munissons l'espace vectoriel  $H^0(X, L)$  des sections globales de  $X$  de la norme  $v$ -adique  $\|s\|_v = \sup_{x \in X(\overline{F}_v)} \|s(x)\|_v$ , pour  $s \in H^0(X, L)$ . Soit  $\mathbf{A}_F$  l'anneau des adèles de  $F$  et soit  $\mu$  une mesure de Haar sur le groupe abélien localement compact  $H^0(X, L) \otimes \mathbf{A}_F$ . On pose alors (voir [40, 9]) :

$$\chi_{\text{sup}}(\overline{L}) = -\log \frac{\mu(H^0(X, L) \otimes \mathbf{A}_F / H^0(X, L))}{\mu(\prod_v B_v)},$$

où  $B_v$  désigne la boule unité de  $H^0(X, L) \otimes F_v$  pour la norme  $v$ -adique introduite. C'est un analogue en géométrie d'Arakelov de la dimension de l'espace des sections globales de  $L$ . Poussant l'analogie, on définit le *volume arithmétique* de  $\overline{L}$  par l'expression

$$\widehat{\text{vol}}(\overline{L}) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\chi_{\text{sup}}(\overline{L}^{\otimes k})}{k^{d+1} / (d+1)!}.$$

D'après un théorème de Rumely, Lau et Varley [33], c'est en fait une limite, lorsque  $L$  est ample. (Pour une meilleure analogie, le volume arithmétique devrait être défini en termes de sections globales de normes au plus 1 à toutes les places, comme dans [28], mais la quantité introduite ici est plus maniable.) Si  $\overline{L}$  est fibré en droites ample muni d'une métrique adélique semi-positive, la variante de [40] du théorème de Hilbert-Samuel arithmétique (déduite dans *loc. cit.* de la version de [22, 1]) affirme que l'on a  $\widehat{\text{vol}}(\overline{L}) = h_{\overline{L}}(X)$ .

Soit  $v$  une place de  $F$ , soit  $\varphi$  une fonction continue sur  $X_v$  et soit  $\overline{M} = \overline{L}(\varphi)$ . Si  $s$  est une section globale de  $L$ , on a  $\|s\|_v^{\overline{M}}(x) = \|s\|_v^{\overline{L}}(x)e^{-\varphi(x)}$  ; par suite,

$$\chi_{\text{sup}}(\overline{L}) + \dim H^0(X, L) \inf \varphi \leq \chi_{\text{sup}}(\overline{M}) \leq \chi_{\text{sup}}(\overline{L}) + \dim H^0(X, L) \sup \varphi$$

et,

$$\widehat{\text{vol}}(\overline{L}) + (d+1) \text{vol}(L) \inf \varphi \leq \widehat{\text{vol}}(\overline{M}) \leq \widehat{\text{vol}}(\overline{L}) + (d+1) \text{vol}(L) \sup \varphi.$$

En particulier, le volume arithmétique dépend continûment de la métrique adélique sur  $\overline{L}$ . (Le résultat analogue pour la définition alternative du volume arithmétique en termes de sections globales est le théorème principal de [28].)



Nous dirons qu'un fibré en droites ample  $L$  sur  $X$ , muni d'une métrique adélique semi-positive est *arithmétiquement numériquement effectif*, resp. *arithmétiquement ample*, si l'on a  $h_{\bar{L}}(Y) \geq 0$  pour toute sous-variété  $Y$  de  $X$ , resp. si l'inégalité stricte est satisfaite. (D'après Zhang [40], il suffirait d'imposer cette condition pour les sous-variétés de dimension 0.)

Si  $\bar{L}$  est semi-positif (resp. arithmétiquement numériquement effectif), alors  $\bar{L}(c)$  est arithmétiquement ample pour tout nombre réel  $c$  assez grand (resp. pour tout nombre réel  $c > 0$ ). Si  $\bar{L}$  est arithmétiquement ample, pour tout entier  $n$  assez grand,  $H^0(X, L^{\otimes n})$  possède une base formée de sections globales dont les normes sup. à toutes les places sont majorées par 1. Inversement, lorsque  $\bar{L}$  est semi-positif, cette condition entraîne que toute sous-variété de  $X$  est de hauteur positive (voir par exemple [40]).

Le volume de  $\bar{L}$  contrôle la hauteur des sous-variétés de  $X$  au sens suivant :

LEMME 5.1. — *Supposons que  $L$  soit gros. Le minimum essentiel  $e(\bar{L})$  des hauteurs des points de  $X(\bar{F})$  relativement à  $\bar{L}$  vérifie l'inégalité*

$$e(\bar{L}) = \sup_{\substack{\emptyset \neq U \subset X \\ U \text{ ouvert}}} \inf_{x \in U(\bar{F})} h_{\bar{L}}(x) \geq \frac{\widehat{\text{vol}}(\bar{L})}{(d+1) \text{vol}(L)}.$$

*Démonstration.* — Soit  $\varepsilon$  un nombre réel compris entre 0 et 1 et soit  $n$  un entier tel que

$$(1 - \varepsilon) \text{vol}(L) \frac{k^d}{d!} \leq \dim H^0(X, L^{\otimes k}) \leq (1 + \varepsilon) \text{vol}(L) \frac{k^d}{d!}$$

pour tout entier  $k \geq n$  (en particulier,  $H^0(X, L^{\otimes k}) \neq 0$ ). Par définition de  $\widehat{\text{vol}}(\bar{L})$ , il existe alors un entier  $k \geq n$  tel que

$$\chi_{\text{sup}}(\bar{L}^{\otimes k}) \geq (\widehat{\text{vol}}(\bar{L}) - \varepsilon) \frac{k^{d+1}}{(d+1)!}.$$

Notons  $D = \dim_F H^0(X, L^{\otimes k})$ . D'après le théorème de Minkowski, ou plutôt sa variante adélique due à Bombieri–Vaaler [9], il existe une section non nulle  $\sigma \in H^0(X, L^{\otimes k})$  tel que  $\|\sigma\|_v \leq 1$  pour toute place  $v$  ultramétrique et  $\|\sigma\|_v \leq c$  pour toute place  $v$  archimédienne, dès que le nombre réel  $c$  vérifie l'inégalité  $c^D \exp(\chi_{\text{sup}}(\bar{L}^{\otimes k})) > 2^D$ . Pour de tels  $c$  et  $\sigma$ , et pour tout  $x \in X(\bar{F})$  tel que  $\sigma(x) \neq 0$ , on a

$$h_{\bar{L}}(x) = -\frac{1}{[F(x) : \mathbf{Q}]k} \sum_{v \in M_F} \sum_{\iota: F(x) \hookrightarrow \bar{F}_v} \log \|\sigma\|_v(\iota(x)) \geq -\frac{1}{k} \log c,$$

d'où  $e(\bar{L}) \geq -\frac{1}{k} \log c$ . Il en résulte que

$$e(\bar{L}) \geq -\frac{1}{k} \log 2 + \frac{1}{Dk} \chi_{\text{sup}}(\bar{L}^{\otimes k}) \geq -\frac{1}{k} \log 2 + \frac{(\widehat{\text{vol}}(\bar{L}) - \varepsilon)k^d}{(d+1)!D}.$$

Compte-tenu de l'encadrement pour  $D$ , on a donc

$$e(\bar{L}) \geq -\frac{1}{k} \log 2 + \min \left( \frac{\widehat{\text{vol}}(\bar{L}) - \varepsilon}{(d+1) \text{vol}(L)(1 - \varepsilon)}, \frac{\widehat{\text{vol}}(\bar{L}) - \varepsilon}{(d+1) \text{vol}(L)(1 + \varepsilon)} \right).$$

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,  $k$  tend vers l'infini et on obtient l'inégalité

$$e(\bar{L}) \geq \frac{\widehat{\text{vol}}(\bar{L})}{(d+1) \text{vol}(L)},$$

ce qu'il fallait démontrer. □

La fin de ce paragraphe explique le comportement du volume et du volume arithmétique lorsqu'on ajoute à un fibré muni d'une métrique adélique semi-positive un petit multiple d'un fibré en droites admissible.

Nous aurons à utiliser le résultat suivant, dû à Yuan [38, th. 1.2].

LEMME 5.2 (Yuan). — *Soit  $\bar{L}$  et  $\bar{M}$  des fibrés en droites amples sur  $X$  munis de métriques adéliques numériquement arithmétiquement effectifs. Alors,*

$$\widehat{\text{vol}}(\bar{L} \otimes \bar{M}^{-1}) \geq (\widehat{c}_1(\bar{L})^{d+1}|X) - (d+1)(\widehat{c}_1(\bar{L})^d \widehat{c}_1(\bar{M})|X).$$

*Démonstration.* — Sous l'hypothèse supplémentaire que  $\bar{L}$  et  $\bar{M}$  sont munis de métriques arithmétiquement amples, cette inégalité est le théorème principal de [38]. Comme l'hypothèse sur  $\bar{L}$  et  $\bar{M}$  entraîne que leurs métriques adéliques sont limites de métriques arithmétiquement amples, la continuité du volume arithmétique implique que l'inégalité est vérifiée dans le cas général. □

PROPOSITION 5.3. — *Supposons que  $L$  soit ample et que sa métrique soit semi-positive. Pour tout fibré en droites métrisé admissible  $\bar{M}$ , on a, lorsque  $t \rightarrow +\infty$ ,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^d} \text{vol}(L^{\otimes t} \otimes M) &= (c_1(L)^d|X) + \frac{1}{t} d(c_1(L)^{d-1} c_1(M)|X) + O(1/t^2) \\ \frac{1}{t^{d+1}} \widehat{\text{vol}}(\bar{L}^{\otimes t} \otimes \bar{M}) &\geq (\widehat{c}_1(\bar{L})^{d+1}|X) + \frac{1}{t} (d+1)(\widehat{c}_1(\bar{L})^d \widehat{c}_1(\bar{M})|X) + O(1/t^2). \end{aligned}$$

*Démonstration.* — La première égalité résulte du théorème de Hilbert-Samuel, car  $L^{\otimes t} \otimes M$  est ample pour  $t$  assez grand.

Choisissons des fibrés en droites amples  $M_1$  et  $M_2$  sur  $X$  munis de métriques semi-positives telles que  $\bar{M} \simeq \bar{M}_1 \otimes (\bar{M}_2)^{-1}$ . Quitte à les remplacer

par  $\overline{M}_1(c)$  et  $\overline{M}_2(c)$ , où  $c$  est un nombre réel assez grand, on suppose qu'ils sont arithmétiquement amples.

Fixons un nombre réel  $c$  tel que  $\overline{L}(c)$  soit arithmétiquement numériquement effectif. Les deux fibrés en droites métrisés  $\overline{L}(c)^t \otimes \overline{M}_1$  et  $\overline{M}_2$  vérifient l'hypothèse du lemme 5.2. Par suite,

$$\begin{aligned} & \widehat{\text{vol}}(\overline{L}(c)^{\otimes t} \otimes \overline{M}) \\ &= \widehat{\text{vol}}((\overline{L}(c)^{\otimes t} \otimes \overline{M}_1) \otimes (\overline{M}_2)^{-1}) \\ &\geq (\widehat{c}_1(\overline{L}(c)^{\otimes t} \otimes \overline{M}_1)^{d+1}|X) - (d+1)(\widehat{c}_1(\overline{L}(c)^{\otimes t} \otimes \overline{M}_1)^d \widehat{c}_1(\overline{M}_2)|X) \\ &\geq t^{d+1}(\widehat{c}_1(\overline{L}(c))^{d+1}|X) + (d+1)t^d(\widehat{c}_1(\overline{L}(c))^d \widehat{c}_1(\overline{M})|X) + O(t^{d-1}) \\ &\geq t^{d+1}(\widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1}|X) + (d+1)t^d(\widehat{c}_1(\overline{L})^d \widehat{c}_1(\overline{M})|X) \\ &\quad + c(d+1)t^{d+1} \text{deg}_L(X) + cd(d+1)t^d(c_1(L)^{d-1}c_1(M)|X) \\ &\quad + O(t^{d-1}). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\widehat{\text{vol}}(\overline{L}(c)^{\otimes t} \otimes \overline{M}) = \widehat{\text{vol}}(\overline{L}^{\otimes t} \otimes \overline{M}) + (d+1)tc \text{vol}(L^{\otimes t} \otimes M).$$

Compte-tenu de la première égalité, on a donc

$$\begin{aligned} & \widehat{\text{vol}}(\overline{L}^{\otimes t} \otimes \overline{M}) - t^{d+1}(\widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1}|X) - (d+1)t^d(\widehat{c}_1(\overline{L})^d \widehat{c}_1(\overline{M})|X) \\ &\quad \geq c(d+1)t^{d+1} \text{deg}_L(X) + cd(d+1)t^d(c_1(L)^{d-1}c_1(M)|X) \\ &\quad \quad - c(d+1)t \text{vol}(L^{\otimes t} \otimes M) + O(t^{d-1}) \\ &\quad \geq O(t^{d-1}), \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de la proposition. □

### 6. Démonstration du théorème d'équidistribution logarithmique

Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème 1.2. Fixons en particulier une suite  $(x_n)$  de points de  $X(\overline{F})$ , générique, telle que  $h_{\overline{L}}(x_n)$  tende vers  $h_{\overline{L}}(X)/(d+1) \text{deg}_L(X)$ .

LEMME 6.1. — *Soit  $\overline{M}$  un fibré en droites muni d'une métrique admissible sur  $X$ . Alors, lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $h_{\overline{M}}(x_n)$  tend vers*

$$\frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^d \widehat{c}_1(\overline{M})|X)}{\text{deg}_L(X)} - \frac{dh_{\overline{L}}(X)(c_1(L)^{d-1}c_1(M)|X)}{(d+1) \text{deg}_L(X)^2}.$$

*Démonstration.* — Suivant la voie inaugurée par [35], la démonstration repose sur l'existence de sections globales de normes sup. contrôlées pour les fibrés en droites métrisés.

Pour tout nombre entier assez grand  $t$ , le fibré en droites  $L^{\otimes t} \otimes M$  est gros. D'après le lemme 5.1,

$$\liminf_n (th_{\overline{L}}(x_n) + h_{\overline{M}}(x_n)) \geq \frac{\widehat{\text{vol}}(\overline{L}^{\otimes t} \otimes \overline{M})}{(d+1) \text{vol}(L^{\otimes t} \otimes M)}.$$

Comme  $h_{\overline{L}}(x_n)$  converge vers  $h_{\overline{L}}(X)/(d+1) \text{deg}_L(X)$ , le membre de gauche est égal à

$$t \frac{h_{\overline{L}}(X)}{(d+1) \text{deg}_L(X)} + \liminf h_{\overline{M}}(x_n).$$

D'après la proposition 5.3, le membre de droite vérifie le développement asymptotique suivant lorsque  $t \rightarrow \infty$  et  $\varepsilon = 1/t$  :

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\text{vol}}(\overline{L}^{\otimes t} \otimes \overline{M})}{\text{vol}(L^{\otimes t} \otimes M)} &\geq t \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1}|X) + \varepsilon(d+1)(\widehat{c}_1(\overline{L})^d \widehat{c}_1(\overline{M})|X) + O(\varepsilon^2)}{(c_1(L)^d|X) + \varepsilon d(c_1(L)^{d-1}c_1(M)|X) + O(\varepsilon^2)} \\ &\geq t \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1}|X)}{(c_1(L)^d|X)} \left( 1 - \varepsilon d \frac{(c_1(L)^{d-1}c_1(M)|X)}{(c_1(L)^d|X)} + O(\varepsilon^2) \right) \\ &\quad + (d+1) \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^d \widehat{c}_1(\overline{M})|X)}{(c_1(L)^d|X)} + O(\varepsilon) \\ &= t \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1}|X)}{(c_1(L)^d|X)} + (d+1) \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^d \widehat{c}_1(\overline{M})|X)}{(c_1(L)^d|X)} \\ &\quad - d \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1}|X)(c_1(L)^{d-1}c_1(M)|X)}{(c_1(L)^d|X)^2} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , on obtient donc

$$\liminf_n h_{\overline{M}}(x_n) \geq \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^d \widehat{c}_1(\overline{M})|X)}{\text{deg}_L(X)} - \frac{dh_{\overline{L}}(X)(c_1(L)^{d-1}c_1(M)|X)}{(d+1) \text{deg}_L(X)^2}.$$

Lorsqu'on change le fibré en droites métrisé  $\overline{M}$  en son inverse, le membre de gauche est remplacé par  $-\limsup_n h_{\overline{M}}(x_n)$  et le membre de droite est changé en son opposé, d'où le lemme.  $\square$

Soit  $\overline{M}$  un fibré en droites muni d'une métrique admissible sur  $X$  ; soit  $s$  une section globale non nulle de  $\overline{M}$  et soit  $D$  son diviseur. Alors, pour toute place  $v$  de  $F$ , la fonction  $\log \|s\|_v$  est à singularités au plus logarithmiques le long de  $D$ .

LEMME 6.2. — Pour toute place  $v$  de  $F$ ,

$$\liminf_n \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{x_n, v} \geq \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\overline{L}, v}.$$

En outre,

$$\liminf_n h_{\overline{M}}(x_n) \geq \sum_v \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\overline{L},v}.$$

*Démonstration.* — Fixons une place  $v$  de  $F$ . Pour tout nombre réel  $B$ , la fonction  $\min(B, \log \|s\|_v^{-1})$  est continue sur  $X_v$ . Le théorème d'équidistribution 1.1 implique donc que, lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\int_{X_v} \min(B, \log \|s\|_v^{-1}) d\mu_{x_n,v} \rightarrow \int_{X_v} \min(B, \log \|s\|_v^{-1}) d\mu_{\overline{L},v}.$$

Pour tout entier  $n$ ,

$$\int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{x_n,v} \geq \int_{X_v} \min(B, \log \|s\|_v^{-1}) d\mu_{x_n,v},$$

si bien que

$$\begin{aligned} \liminf_n \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{x_n,v} &\geq \liminf_n \int_{X_v} \min(B, \log \|s\|_v^{-1}) d\mu_{x_n,v} \\ &= \int_{X_v} \min(B, \log \|s\|_v^{-1}) d\mu_{\overline{L},v}. \end{aligned}$$

Il reste à faire tendre  $B$  tend vers  $+\infty$  pour obtenir la première assertion de l'énoncé.

Montrons maintenant la seconde. Par définition, pour tout entier  $n$  tel que  $x_n \notin D$ ,

$$h_{\overline{M}}(x_n) = \sum_v \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{x_n,v}.$$

La suite  $(x_n)$  étant générique, on a donc

$$\begin{aligned} \liminf_n h_{\overline{M}}(x_n) &\geq \sum_v \liminf_n \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{x_n,v} \\ &\geq \sum_v \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\overline{L},v}. \end{aligned}$$

Cela termine la démonstration du lemme. □

*Démonstration du théorème 1.2.* — Soit  $M$  le fibré en droites  $\mathcal{O}(D)$ ; munissons-le d'une métrique adélique admissible. Pour toute place  $v$ , posons

$$\varepsilon_v = \liminf_n \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{x_n,v} - \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\overline{L},v}.$$

En vertu du lemme 6.2, on a  $\varepsilon_v \geq 0$ ; en outre,

$$\liminf_n h_{\overline{M}}(x_n) \geq \sum_v \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\overline{L},v} + \sum_v \varepsilon_v.$$

Appliquons le lemme 6.1 et le théorème 1.4, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\deg_L(X)} h_{\overline{L}}(D) &= \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^d \widehat{c}_1(\overline{M})|X)}{(c_1(L)^d|X)} - \sum_v \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} \mu_{\overline{L},v} \\ &= \left( \lim_n h_{\overline{M}}(x_n) - \sum_v \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} \mu_{\overline{L},v} \right) \\ &\quad + \frac{h_{\overline{L}}(X)}{(d+1) \deg_L(X)} \frac{d \deg_L(D)}{\deg_L(X)} \\ &\geq \sum_v \varepsilon_v + \frac{h_{\overline{L}}(X)}{(d+1) \deg_L(X)} \frac{d \deg_L(D)}{\deg_L(X)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{h_{\overline{L}}(D)}{d \deg_L(D)} - \frac{h_{\overline{L}}(X)}{(d+1) \deg_L(X)} \geq \frac{\deg_L(X)}{d \deg_L(D)} \sum_v \varepsilon_v.$$

Comme  $\varepsilon_v \geq 0$  pour tout  $v$ , cela démontre la première assertion du théorème.

Supposons que l'on ait l'égalité

$$\frac{h_{\overline{L}}(D)}{d \deg_L(D)} = \frac{h_{\overline{L}}(X)}{(d+1) \deg_L(X)}.$$

Alors, pour toute place  $v$ , on a  $\varepsilon_v = 0$ , autrement dit

$$\liminf_n \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} \mu_{x_n,v} = \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} \mu_{\overline{L},v}.$$

Comme toute sous-suite de la suite  $(x_n)$  est encore générique, on a donc

$$\lim_n \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} \mu_{x_n,v} = \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} \mu_{\overline{L},v}.$$

L'équidistribution pour une fonction à singularités au plus logarithmiques le long de  $D$  en découle en vertu du lemme suivant. □

LEMME 6.3. — Soit  $X$  un espace topologique compact, soit  $(\mu_n)$  une suite de mesures de probabilité sur  $X$  qui converge vers une mesure  $\mu$ . Soit  $\varphi$  une fonction mesurable positive sur  $X$ ,  $\mu$ -intégrable et telle que  $\mu_n(\varphi) \rightarrow \mu(\varphi)$ . Soit  $f$  une fonction mesurable sur  $X$  telle que  $|f| \leq \varphi$ ; si  $f$  et  $\varphi$  sont continues  $\mu$ -presque partout, alors  $\mu_n(f) \rightarrow \mu(f)$ .

Démonstration. — La fonction  $f$  est  $\mu$ -intégrable et on peut supposer qu'elle est positive. Par définition même de la topologie vague sur l'espace des mesures, la suite  $(\mu_n(g))$  converge vers  $\mu(g)$  pour toute fonction réelle continue  $g$  sur  $X$ ; plus généralement, ce résultat vaut pour toute fonction mesurable  $g$ , bornée et continue  $\mu$ -presque partout ([12], Chap. IV, 5,

prop. 22). Ceci s'applique en particulier, pour tout nombre réel positif  $B$ , aux fonctions  $f_B = \min(f, B)$  et  $\varphi_B = \min(\varphi, B)$ .

Soit  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif. La fonction  $\varphi$  étant  $\mu$ -intégrable, il existe un nombre réel positif  $B$  tel que  $\mu(\varphi - \varphi_B) \leq \varepsilon$ . Comme  $\lim_n \mu_n(\varphi) = \mu(\varphi)$  et  $\lim_n \mu_n(\varphi_B) = \mu(\varphi_B)$ , la suite  $(\mu_n(\varphi - \varphi_B))$  converge vers  $\mu(\varphi - \varphi_B)$  et il existe donc un entier  $n_0$  tel que

$$\mu_n(\varphi - \varphi_B) \leq 2\varepsilon$$

pour tout  $n \geq n_0$ . Soit enfin  $n_1$  un entier naturel tel que

$$|\mu(f_B) - \mu_n(f_B)| \leq \varepsilon$$

pour tout  $n \geq n_1$ .

En utilisant l'encadrement

$$0 \leq f - f_B = \max(f, B) - B \leq \max(\varphi, B) - B = \varphi - \varphi_B,$$

on déduit de ce qui précède la majoration

$$|\mu(f) - \mu_n(f)| \leq \mu(\varphi - \varphi_B) + |\mu(f_B) - \mu_n(f_B)| + \mu_n(\varphi - \varphi_B) \leq 4\varepsilon$$

pour tout entier  $n \geq \max(n_0, n_1)$  et la suite  $(\mu_n(f))$  converge bien vers  $\mu(f)$ . □

### 7. Équidistribution logarithmique de sous-variétés

Nous démontrons ici le théorème 1.3. Rappelons que l'on pose, pour toute sous-variété  $Y$  de  $X$ ,

$$h'_L(Y) = \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^{1+\dim Y}|Y)}{(1 + \dim(Y))(c_1(L)^{\dim Y}|Y)}.$$

Si  $p$  est un entier, notons  $\mu_p(\overline{L})$  la borne inférieure des  $h'_L(Y)$ , lorsque  $Y$  parcourt l'ensemble des sous-variétés de dimension  $p$  de  $X$ . Si  $L$  est ample, alors  $\mu_p(\overline{L})$  est un nombre réel ([11], remarque (iii) p. 954). Notons aussi  $\lambda_p(\overline{L})$  la quantité suivante :

$$\lambda_p(\overline{L}) = \sup_{\substack{\emptyset \neq U \subset X \\ U \text{ ouvert}}} \inf_{\substack{Y \cap U \neq \emptyset \\ \dim Y = p}} h'_L(Y) \quad ;$$

en particulier,  $e(\overline{L}) = \lambda_0(\overline{L})$ .

LEMME 7.1. — *Supposons que  $\overline{L}$  soit un fibré en droites ample muni d'une métrique adélique semi-positive. Soit  $p$  un entier naturel et soit  $(Y_n)$  une suite générique de sous-variétés de  $X$  de dimension  $p$  telle que  $h'_L(Y_n)$  tende vers  $h'_L(X)$ . Soit aussi  $\overline{M}$  un fibré en droites admissible  $\overline{M}$  sur  $X$ .*

Supposons que l'on ait  $\mu_{p-1}(\bar{L}) \geq h'_L(X)$ . Alors, lorsque  $n$  tend vers l'infini,

$$\frac{(\widehat{c}_1(\bar{L})^p \widehat{c}_1(\bar{M})|Y_n)}{(c_1(L)^p|Y_n)} - p \frac{(c_1(L)^{p-1} c_1(M)|Y_n)}{(c_1(L)^p|Y_n)} h'_L(X)$$

converge vers

$$\frac{(\widehat{c}_1(\bar{L})^d \widehat{c}_1(\bar{M})|X)}{(c_1(L)^d|X)} - dh'_L(X) \frac{(c_1(L)^{d-1} c_1(M)|X)}{(c_1(L)^d|X)}.$$

*Démonstration.* — Cela se démontre de manière similaire au lemme 6.1. Toutefois, pour simplifier les calculs, faisons l'hypothèse supplémentaire que  $h'_L(X) = 0$  quitte à multiplier la métrique de  $\bar{L}$  par une constante aux places archimédiennes. On vérifie facilement que l'énoncé obtenu sous cette hypothèse est équivalent au résultat que nous voulons démontrer.

Lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $L^{\otimes t} \otimes M$  est gros et la proposition 5.3 entraîne la minoration

$$\frac{\widehat{\text{vol}}(\bar{L}^{\otimes t} \otimes \bar{M})}{(d+1) \text{vol}(L^{\otimes t} \otimes M)} \geq \frac{(\widehat{c}_1(\bar{L})^d \widehat{c}_1(\bar{M})|X)}{(c_1(L)^d|X)} + O(1/t).$$

Posons  $\bar{L}_t = \bar{L}^{\otimes t} \otimes \bar{M}$ ; soit  $\varepsilon$  un nombre réel compris entre 0 et 1, soit  $k$  un entier positif tel que

$$(1 - \varepsilon) \text{vol}(L_t) \frac{k^d}{d!} \leq \dim H^0(X, L_t^{\otimes k}) \leq (1 + \varepsilon) \text{vol}(L_t) \frac{k^d}{d!}$$

et

$$\chi_{\text{sup}}(\bar{L}_t^{\otimes k}) \geq (\widehat{\text{vol}}(\bar{L}_t) - \varepsilon) \frac{k^{d+1}}{(d+1)!}.$$

Posons  $D = h^0(X, L_t^{\otimes k})$  et soit  $c$  le nombre réel tel que  $c^D \exp(\chi_{\text{sup}}(\bar{L}_t^{\otimes k})) = 2^D$ . Soit alors  $s$  une section non nulle de  $\bar{L}_t^{\otimes k}$  qui, comme dans la démonstration du lemme 5.1, vérifie les inégalités  $\|s\|_v \leq 1$  pour  $v$  ultramétrique et  $\|s\|_v \leq c$  pour  $v$  archimédienne. Comme la suite  $(Y_n)$  est générique,  $Y_n \not\subset \text{div}(s)$  pour  $n$  assez grand, c'est-à-dire  $s|_{Y_n} \neq 0$ . Alors,

$$\begin{aligned} & (\widehat{c}_1(\bar{L})^p \widehat{c}_1(\bar{M})|Y_n) \\ &= (\widehat{c}_1(\bar{L})^p \widehat{c}_1(\bar{L}^{\otimes t} \otimes \bar{M})|Y_n) - (\widehat{c}_1(\bar{L})^{p+1}|Y_n) \\ &= \frac{1}{k} (\widehat{c}_1(\bar{L})^p | \text{div}(s|_{Y_n})) + \sum_v \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1/k} c_1(\bar{L})^p \delta_{Y_n} - (\widehat{c}_1(\bar{L})^{p+1}|Y_n) \\ &\geq \frac{1}{k} (\widehat{c}_1(\bar{L})^p | \text{div}(s|_{Y_n})) - (c_1(L)^p|Y_n) \frac{1}{k} \log c - (p+1)(c_1(L)^p|Y_n) h'_L(Y_n). \end{aligned}$$

Puisque  $\text{div}(s|_{Y_n})$  est un cycle effectif de dimension  $p-1$ , on a

$$(\widehat{c}_1(\bar{L})^p | \text{div}(s|_{Y_n})) \geq p(c_1(L)^{p-1} | \text{div}(s_{Y_n})) h'_L(X) \geq 0.$$



Par suite, lorsque  $n$  tend vers l’infini,

$$\begin{aligned} \liminf \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^p \widehat{c}_1(\overline{M})|Y_n)}{(c_1(L)^p|Y_n)} &\geq -\frac{1}{k} \log c - (p+1)h'_L(X) \geq -\frac{1}{k} \log c \\ &\geq \frac{1}{Dk} \chi_{\text{sup}}(\overline{L}_t^{\otimes k}) - \frac{1}{k} \log 2 \\ &\geq \min \left( \frac{\widehat{\text{vol}}(\overline{L}_t) - \varepsilon}{(d+1) \text{vol}(L_t)(1-\varepsilon)}, \frac{\widehat{\text{vol}}(\overline{L}_t) - \varepsilon}{(d+1) \text{vol}(L_t)(1+\varepsilon)} \right). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\liminf \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^p \widehat{c}_1(\overline{M})|Y_n)}{(c_1(L)^p|Y_n)} \geq \frac{\widehat{\text{vol}}(\overline{L}_t)}{(d+1) \text{vol}(L_t)} \geq \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^d \widehat{c}_1(\overline{M})|X)}{(c_1(L)^d|X)} + O(1/t).$$

Faisons maintenant tendre  $t$  vers l’infini ; on en déduit

$$\liminf \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^p \widehat{c}_1(\overline{M})|Y_n)}{(c_1(L)^p|Y_n)} \geq \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^d \widehat{c}_1(\overline{M})|X)}{(c_1(L)^d|X)}.$$

L’inégalité dans l’autre sens en découle alors en remplaçant  $\overline{M}$  par son inverse. □

*Remarque 7.2.* — Supposons que  $\overline{M}$  soit le fibré en droite trivial muni de la métrique triviale à toute place, sauf en une place  $v$  de  $F$  ; posons  $\varphi_v = -\log \|1\|_v$ . Sous les hypothèses du lemme 7.1, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{X_v} \varphi_v \frac{c_1(L)_v^p \delta_{Y_n}}{(c_1(L)^p|Y_n)} = \int_{X_v} \varphi_v d\mu_{\overline{L},v}.$$

Comme les fonctions admissibles sont denses dans les fonctions continues, on retrouve ainsi le théorème d’équidistribution des sous-variétés qu’ont démontré Autissier [3] et Yuan [38].

Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème 1.3. Pour alléger les notations, on notera pour tout entier  $n$  et toute place  $v$  de  $F$ .

$$d\mu_{Y_n,v} = \frac{1}{(c_1(L)^p|Y_n)} c_1(\overline{L})_v^p ;$$

c’est une mesure sur  $X_v$  supportée par  $Y_n$ . D’après la remarque précédente, pour toute place  $v$  de  $F$ ,  $d\mu_{Y_n,v} \rightarrow d\mu_{\overline{L},v}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Il s’agit de démontrer que la convergence a encore lieu lorsque ces mesures sont multipliées par certaines fonctions à singularités au plus logarithmiques.

Supposons de plus que  $h'_L(X) = 0$  ; on laisse au lecteur le soin de vérifier que cela ne restreint pas la généralité.

Soit  $\overline{M}$  un fibré en droites muni d'une métrique admissible sur  $X$ , soit  $s$  une section globale non nulle de  $\overline{M}$  et soit  $D$  son diviseur. Pour toute place  $v$  de  $F$ , la fonction  $\log \|s\|_v$  est à singularités au plus logarithmiques le long de  $D$ .

LEMME 7.3. — Pour toute place  $v$  de  $F$ ,

$$\liminf_n \frac{1}{(c_1(L)^p|Y_n)} \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} c_1(\overline{L})_v^p \delta_{Y_n} \geq \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\overline{L},v}.$$

De plus,

$$\liminf \frac{(c_1(\overline{L})^p c_1(\overline{M})|Y_n)}{(c_1(L)^p|Y_n)} \geq \sum_v \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\overline{L},v}.$$

Démonstration. — Il s'agit d'une simple adaptation du lemme 6.2. La première inégalité se démontre en appliquant la remarque précédente à la fonction  $\min(B, \log \|s\|_v)$  sur  $X_v$  et en faisant tendre  $B$  vers  $+\infty$ . Pour la seconde, on rappelle (théorème 1.4) que

$$(\widehat{c}_1(\overline{L})^p \widehat{c}_1(\overline{M})|Y_n) = \sum_v \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} c_1(\overline{L})_v^p \delta_{Y_n} + (\widehat{c}_1(\overline{L})^p | \operatorname{div}(s|_{Y_n})).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \liminf \frac{(c_1(\overline{L})^p c_1(\overline{M})|Y_n)}{(c_1(L)^p|Y_n)} &\geq \sum_v \liminf_n \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} c_1(\overline{L})_v^p \delta_{Y_n} \\ &\geq \sum_v \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\overline{L},v}. \end{aligned} \quad \square$$

Pour toute place  $v$  de  $F$ , posons

$$\varepsilon_v = \liminf_n \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{Y_n,v} - \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\overline{L},v}.$$

On vient de démontrer que  $\varepsilon_v \geq 0$ ; en outre,

$$\liminf \frac{(c_1(\overline{L})^p c_1(\overline{M})|Y_n)}{(c_1(L)^p|Y_n)} \geq \sum_v \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\overline{L},v} + \sum_v \varepsilon_v.$$

Appliquons maintenant le lemme 7.1; on a ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{(c_1(L)^d|X)} h_{\overline{L}}(D) &= \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^d \widehat{c}_1(\overline{M})|X)}{(c_1(L)^d|X)} - \sum_v \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\overline{L},v} \\ &= \lim_n \frac{(\widehat{c}_1(\overline{L})^p \widehat{c}_1(\overline{M})|X)}{(c_1(L)^d|X)} - \sum_v \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\overline{L},v} \\ &\geq \sum_v \varepsilon_v. \end{aligned}$$

Puisqu'on a supposé  $h_{\bar{L}}(D) = 0$ , il vient  $\varepsilon_v = 0$  pour tout  $v$ . Autrement dit,

$$\liminf_n \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{Y_n, v} = \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\bar{L}, v}.$$

Le résultat analogue pour la limite, plutôt qu'une limite inférieure, s'en déduit en considérant une sous-suite de la suite  $(Y_n)$ . Le théorème 1.3 pour une fonction à singularités au plus logarithmiques le long de  $D$  générale en découle via le lemme 6.3.

Observons enfin que, comme dans le cas des points, les hypothèses du théorème 1.3 impliquent que  $h_{\bar{L}}^t(D) \geq h_{\bar{L}}^t(X)$  pour tout diviseur effectif  $D$ .

### 8. Non-équidistribution logarithmique de certaines suites de points

L'énoncé suivant nous a été suggéré par P. Autissier.

PROPOSITION 8.1. — *Soit  $X$  un schéma projectif et intègre de dimension  $d$ . Soit  $\bar{L}$  un fibré en droites sur  $X$  muni d'une métrique adélique semi-positive.*

*Soit  $\bar{M}$  un fibré en droites sur  $X$  muni d'une métrique admissible; soit  $s$  une section globale non nulle de  $M$  et soit  $D$  son diviseur.*

*Soit  $(x_n)$  une suite générique de points fermés de  $X$  telle que  $h_{\bar{L}}(x_n)$  converge vers  $h_{\bar{L}}(X)/(d + 1) \deg_L(X)$ .*

*Fixons un ensemble fini  $S$  de places de  $F$  contenant toutes les places archimédiennes et supposons en outre qu'il existe un  $\mathcal{O}_F$ -schéma projectif et plat  $\mathcal{X}$ , de fibre générique  $X$ , ainsi qu'un fibré en droites  $\mathcal{L}$  et un diviseur de Cartier horizontal et effectif  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{X}$  tels que :*

- $\mathcal{L}|_X \simeq L$  et, en toute place  $v \notin S$ , la métrique de  $\bar{L}$  est lisse, définie par ce modèle  $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ ;
- $\mathcal{D}|_X = D$  et la métrique de  $\bar{M}$  est définie par  $\mathcal{D}$  en toute place  $v \notin S$ ;
- les points  $x_n$  se prolongent en des points  $S$ -entiers de  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{D}$ .

*Dans ces conditions, la suite  $(\sum_{v \in S} \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{x_n, v})$  converge vers*

$$\sum_{v \in S} \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\bar{L}, v} + \frac{d \deg_L(D)}{\deg_L(X)} \left( \frac{h_{\bar{L}}(D)}{d \deg_L(D)} - \frac{h_{\bar{L}}(X)}{(d + 1) \deg_L(X)} \right).$$

Lorsque l'hypothèse du théorème 1.2 sur la hauteur du diviseur  $D$  n'est pas vérifiée, cela montre que pour au moins une place  $v \in S$ , il n'y a pas équidistribution pour la fonction  $\log \|s\|_v^{-1}$ .

*Démonstration.* — Soit  $v$  une place de  $F$  n'appartenant pas à  $S$ . Le diviseur  $\mathcal{D}$  est effectif et définit la fonction de Green  $\log \|s\|_v^{-1}$  pour  $D$ ; en particulier,  $\log \|s\|_v^{-1} \geq 0$  et pour un point  $x \in X(\mathbf{C}_v)$ , le cas d'égalité  $\log \|s(x)\|_v^{-1} = 0$  équivaut à ce que le point  $x$  se prolonge en un point de  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{D}$  au-dessus de  $v$ . Par hypothèse,  $x_n$  s'étend en un point  $S$ -entier de  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{D}$ ; on a donc  $\int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{x_n, v} = 0$  pour toute place  $v$  de  $F$  telle que  $v \notin S$ .

Comme la métrique de  $\bar{L}$  à la place  $v$  est lisse et provient du prolongement  $\mathcal{L}$  de  $L$  sur  $\mathcal{X}$ , la mesure  $d\mu_{\bar{L}, v}$  est une combinaison linéaire de masses de Dirac aux points de  $X_v$  qui se réduisent sur les points génériques de la fibre spéciale  $\mathcal{X}_v$  de  $\mathcal{X}$  en  $v$ . En un tel point  $\xi$ , correspondant à une composante irréductible  $C$ ,  $\log \|s(\xi)\|^{-1}$  est la multiplicité de la composante  $C$  dans  $\mathcal{D}$  (multipliée par  $\log |\pi|^{-1}$ , où  $\pi$  est une uniformisante de  $F$  en  $v$ ), donc est nul. En particulier,  $\int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\bar{L}, v} = 0$ . Pour tout  $n$ , on a donc l'égalité

$$h_{\bar{M}}(x_n) = \sum_{v \in S} \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{x_n, v}.$$

De plus, d'après le lemme 6.1, la suite  $(h_{\bar{M}}(x_n))$  converge vers

$$\frac{(\widehat{c}_1(\bar{L})^d \widehat{c}_1(\bar{M})|X)}{\deg_L(X)} - \frac{dh_{\bar{L}}(X)(c_1(L)^{d-1} c_1(M)|X)}{(d+1) \deg_L(X)^2}.$$

Compte tenu du théorème 1.4 et de la nullité des intégrales  $\int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\bar{L}, v}$  si  $v \notin S$ , on a

$$\frac{(\widehat{c}_1(\bar{L})^d \widehat{c}_1(\bar{M})|X)}{\deg_L(X)} = \frac{h_{\bar{L}}(D)}{\deg_L(X)} + \sum_{v \in S} \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\bar{L}, v}.$$

Par suite,  $h_{\bar{M}}(x_n)$  tend vers

$$\sum_{v \in S} \int_{X_v} \log \|s\|_v^{-1} d\mu_{\bar{L}, v} + d \frac{\deg_L(D)}{\deg_L(X)} \left( \frac{h_{\bar{L}}(D)}{d \deg_L(D)} - \frac{h_{\bar{L}}(X)}{(d+1) \deg_L(X)} \right),$$

ce qui démontre la proposition. □

On peut ici retrouver l'exemple de l'article [4]. Prenant pour  $X$  la droite projective  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^1 = \text{Proj}(\mathbf{Q}[T_0, T_1])$ , Autissier considère en effet la suite des points fermés  $x_n$  définis par les polynômes irréductibles

$$P_n = (T^n - 1)(T - 2) + 3 \in \mathbf{Z}[T]$$

( $T = T_0^{-1}T_1$  est la coordonnée affine de  $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^1$ ). Soit  $\bar{L}$  le fibré tautologique  $\mathcal{O}(1)$  muni de la métrique de Weil; la suite  $(x_n)$  est générique et la suite des hauteurs  $(h_{\bar{L}}(x_n))$  converge vers  $0 = h_{\bar{L}}(X)$ . Cependant, notant  $f_1$  la

fonction  $\log \max(1, |T - 2|_\infty) = \log \|T - 2\|_\infty^{-1}$  sur  $X_\infty$ , Autissier montre que  $\int_{X_\infty} f_1 d\mu_{x_n, \infty}$  converge vers  $\log 2$  et non vers  $\int_{X_\infty} f_1 c_1(\bar{L})_\infty = 0$ .

Posons  $\mathcal{X} = \text{Proj}(\mathbf{Z}[T_0, T_1])$  et soit  $\mathcal{D}$  le lieu des zéros de  $T - 2$ . Prenons pour ensemble  $S$  de places de  $\mathbf{Q}$  la partie  $\{\infty, 3\}$ . On voit sur l'expression du polynôme  $P_n$  que  $x_n$  se prolonge en un point  $S$ -entier de  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{D}$ . D'après la proposition précédente, la suite

$$\int_{X_\infty} \log \|T - 2\|_\infty^{-1} d\mu_{x_n, \infty} + \int_{X_3} \log \|T - 2\|_3^{-1} d\mu_{x_n, 3}$$

converge donc vers  $h_{\bar{L}}(2) = \log 2$ . En considérant le polygone de Newton 3-adique de  $P_n(T - 2)$ , on démontre que pour tout entier  $n$ ,

$$\int_{X_3} \log \|T - 2\|_3^{-1} d\mu_{x_n, 3} = \frac{\log 3}{n + 1}.$$

Par conséquent,  $\int_{X_\infty} \log \|T - 2\|_\infty^{-1} d\mu_{x_n, \infty}$  converge vers  $\log 2$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. ABBES & T. BOUCHE, « Théorème de Hilbert–Samuel « arithmétique » », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **45** (1995), n° 2, p. 375-401.
- [2] P. AUTISSIER, « Points entiers sur les surfaces arithmétiques », *J. reine angew. Math.* **531** (2001), p. 201-235.
- [3] ———, « Équidistribution des sous-variétés de petite hauteur », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **18** (2006), p. 1-12, [arXiv:math.NT/0404355](https://arxiv.org/abs/math/0404355).
- [4] ———, « Sur une question d'équirépartition de nombres algébriques », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **342** (2006), n° 9, p. 639-641.
- [5] M. BAKER & R. RUMELY, « Equidistribution of small points, rational dynamics, and potential theory », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **56** (2006), n° 3, p. 625-688, [arXiv:math.NT/0407426](https://arxiv.org/abs/math/0407426).
- [6] E. BEDFORD & B. TAYLOR, « A new capacity for plurisubharmonic functions », *Acta Math.* **149** (1982), p. 1-40.
- [7] V. G. BERKOVICH, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990, x+169 pages.
- [8] S. BLOCH, H. GILLET & C. SOULÉ, « Non-archimedean Arakelov theory », *J. Algebraic Geometry* **4** (1995), p. 427-485.
- [9] E. BOMBIERI & J. VAALER, « On Siegel's lemma », *Invent. Math.* **73** (1983), p. 11-32.
- [10] S. BOSCH, U. GÜNTZER & R. REMMERT, *Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984, xii+436 pages.
- [11] J.-B. BOST, H. GILLET & C. SOULÉ, « Heights of projective varieties and positive Green forms », *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), p. 903-1027.
- [12] N. BOURBAKI, *Intégration, chapitres 1 à 4*, Springer-Verlag, 2007, réimpression de l'édition Hermann de 1965.

- [13] A. CHAMBERT-LOIR, « Mesures et équidistribution sur des espaces de Berkovich », *J. reine angew. Math.* **595** (2006), p. 215-235, [arXiv:math.NT/0304023](#).
- [14] S. DAVID & P. PHILIPPON, « Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **28** (1999), n° 3, p. 489-543.
- [15] J.-P. DEMAILLY, « Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines », *Mém. Soc. Math. France* (1985), n° 19, p. 124.
- [16] ———, « Monge-Ampère operators, Lelong numbers and Intersection theory », in *Complex analysis and geometry*, Univ. Ser. Math., Plenum, New York, 1993, p. 115-193.
- [17] G. EVEREST & T. WARD, *Heights of polynomials and entropy in algebraic dynamics*, Springer-Verlag London Ltd., London, 1999, xii+211 pages.
- [18] G. FALTINGS, « Diophantine approximation on abelian varieties », *Ann. of Math.* **133** (1991), n° 3, p. 549-576.
- [19] C. FAVRE & J. RIVERA-LETELIER, « Equidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective », *Math. Ann.* **335** (2006), n° 2, p. 311-361, [arXiv:math.NT/0407471](#).
- [20] T. FUJITA, « Approximating Zariski decomposition of big line bundles », *Kodai Math. J.* **17** (1994), n° 1, p. 1-3.
- [21] W. FULTON, *Intersection theory*, second éd., Springer-Verlag, Berlin, 1998, xiv+470 pages.
- [22] H. GILLET & C. SOULÉ, « Amplitude arithmétique », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **307** (1988), p. 887-890.
- [23] ———, « Arithmetic intersection theory », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **72** (1990), p. 94-174.
- [24] W. GUBLER, « Local heights of subvarieties over non-archimedean fields », *J. reine angew. Math.* **498** (1998), p. 61-113.
- [25] W. M. LAWTON, « A generalization of a theorem of Kronecker », *J. Sci. Fac. Chiang Mai Univ.* **4** (1977), p. 15-23.
- [26] R. LAZARSFELD, *Positivity in algebraic geometry*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol. 48-49, Springer-Verlag, 2004.
- [27] V. MAILLOT, « Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables », *Mém. Soc. Math. France* (2000), n° 80, p. 129.
- [28] A. MORIWAKI, « Continuity of volumes on arithmetic varieties », posted on May 13, 2008, PII S 1056-3911(08)00500-6 (à paraître) ; [arXiv:math.NT/0612269](#), 2008.
- [29] P. PHILIPPON, « Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs », *Bull. Soc. Math. France* **114** (1986), n° 3, p. 355-383.
- [30] P. PHILIPPON, « Sur des hauteurs alternatives, I », *Math. Ann.* **289** (1991), p. 255-283.
- [31] J. PINEIRO, L. SZPIRO & T. J. TUCKER, « Mahler measure for dynamical systems on  $\mathbb{P}^1$  and intersection theory on a singular arithmetic surface », in *Geometric methods in algebra and number theory*, Progr. Math., vol. 235, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2005, p. 219-250.
- [32] R. RUMELY, « On Bilu's Equidistribution theorem », in *Spectral problems in geometry and arithmetic* (Iowa City, IA, 1997), *Contemp. Math.*, vol. 237, 1999, p. 159-166.
- [33] R. RUMELY, C. F. LAU & R. VARLEY, « Existence of the sectional capacity », *Mem. Amer. Math. Soc.* **145** (2000), n° 690, p. 130.

- [34] L. SZPIRO & T. TUCKER, « Equidistribution and generalized Mahler measures », 2005, preprint.
- [35] L. SZPIRO, E. ULLMO & S.-W. ZHANG, « Équidistribution des petits points », *Invent. Math.* **127** (1997), p. 337-348.
- [36] A. THUILLIER, « Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie non archimédienne. Applications à la théorie d'Arakelov », Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 2005.
- [37] E. ULLMO, « Positivité et discrétion des points algébriques des courbes », *Ann. of Math.* **147** (1998), n° 1, p. 167-179.
- [38] X. YUAN, « Big line bundles on arithmetic varieties », *Invent. Math.* **173** (2008), p. 603-649, [arXiv:math.NT/0612424](https://arxiv.org/abs/math.NT/0612424).
- [39] S.-W. ZHANG, « Positive line bundles on arithmetic varieties », *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995), p. 187-221.
- [40] ———, « Small points and adelic metrics », *J. Algebraic Geometry* **4** (1995), p. 281-300.
- [41] ———, « Equidistribution of small points on abelian varieties », *Ann. of Math.* **147** (1998), n° 1, p. 159-165.

Manuscrit reçu le 2 juillet 2007,  
accepté le 28 février 2008.

Antoine CHAMBERT-LOIR  
Université de Rennes 1  
Institut universitaire de France  
IRMAR (UMR 6625 du CNRS)  
Campus de Beaulieu  
35042 Rennes cedex (France)  
[antoine.chambert-loir@univ-rennes1.fr](mailto:antoine.chambert-loir@univ-rennes1.fr)

Amaury THUILLIER  
Université de Lyon 1  
Institut Camille Jordan - CNRS - UMR 5208  
43 bd. du 11 novembre 1918  
69622 Villeurbanne cedex (France)  
[thuillier@math.univ-lyon1.fr](mailto:thuillier@math.univ-lyon1.fr)