Convegno Mate 2008 cop def 3.7.2008 15:57 Pagina 1

Atti del Convegno di didattica della matematica 2008

Conferenze di
- Giorgio Bolondi, Università di Bologna, Italia
- Vicenç Font, Università di Barcellona, Spagna
- Juan D. Godino, Università di Granada, Spagna; Mauro Rivas, Università di Los Andes, Venezuela; Walter F. Castro, Università di Antioquia, Colombia; Patricia Konic, Università di Rio Cuarto, Argentina
- Claire Margolinas, Università di Clermont-Ferrand, Francia
- Gerd Schubring, Università di Bielefeld, Germania
- Gérard Vergnaud, Università di Paris 8, Francia

ISBN 88-86486-61-8
Fr. 20.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

Atti del Convegno di didattica della matematica 2008

Quaderni
Alta Scuola Pedagogica

Centro
didattico cantonale

QASP

A cura di Gianfranco Arrigo

Atti del Convegno di didattica della matematica 2008

Quaderni
Alta Scuola Pedagogica

Centro
didattico cantonale

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 88-86486-61-8

A cura di Gianfranco Arrigo

Atti del Convegno di didattica della matematica 2008

Quaderni per l'insegnamento
Alta Scuola Pedagogica

Centro
didattico cantonale

Indice

Prefazione		7
1.	Giorgio Bolondi Immagini dei numeri	9
2.	Vicenç Font Rappresentazioni attivate nel calcolo della derivata di una funzione	13
3.	Juan D. Godino, Mauro Rivas, Walter F. Castro, Patricia Konic Sviluppo di competenze di analisi didattica nella formazione degli insegnanti di matematica	25
4.	Claire Margolinas Ricerca e sviluppo per l'insegnamento della matematica nella scuola elementare: il caso dell'enumerazione	41
5.	Gerd Schubring Discussioni epistemologiche sullo statuto dei numeri negativi e delle loro rappresentazioni nei manuali di matematica tedeschi e francesi tra il 1795 e il 1845	49
6.	Gérard Vergnaud A quali domande pratiche e teoriche risponde la teoria dei campi concettuali?	55
Presentazione dei conferenzieri		71
Presentazione della mostra didattica		73

3. Sviluppo di competenze di analisi didattica nella formazione degli insegnanti di matematica[1]

Juan D. Godino, Mauro Rivas, Walter F. Castro, Patricia Konic[2]

The mathematic teacher's main tasks are designing, implementing, and evaluating his work as a teacher with the goal to support the students' learning process. The complexity of this work is well known, if we consider the various aspects involved and the elements which influence teaching and learning mathematics. In this talk we will present some theoretical notions that may help mathematics teachers to think over their professional experience, considering that they open new research perspectives in mathematics education. These notions are based on the theoretical approach on mathematical and didactic knowledge that we indicate as "onto-semiotic"[3], in which are considered the epistemic dimensions (interpreted according to an anthropological approach), the cognitive (a semiotic approach), and the instructional dimensions (a socio-constructivist approach) of mathematics study.

1. Competenze dell'insegnante di matematica

L'uso del termine *competenza* è entrato con forza nel tema dell'educazione matematica, ma soprattutto nell'ambito dello sviluppo curricolare, della pratica di insegnamento e della valutazione, dove si parla frequentemente di «insegnare per competenze». In questo contesto, competenza si usa come il costrutto cognitivo-affettivo generale che include «conoscenze, attitudini e abilità necessarie per svolgere una data occupazione».

La nozione di competenza non cessa di essere problematica: equivale a formazione per il lavoro? Suppone formazione a-teorica? È una nuova moda psico-pedagogica? Come afferma Tejada (1999, p. 21), non è facile delimitare il concetto di competenza, come si evidenzia facendo una analisi della letteratura su questo campo. Le differenti oscillazioni avute nella sua concrezione dallo psicologico, al pedagogico, al lavorativo, al sociale etc., indicano che questo termine non è univoco.

Nel caso delle competenze matematiche, in diversi lavori Godino e i suoi collaboratori (Godino, 2002; Godino, Batanero, Font, 2007) hanno attribuito alla nozione di *conoscenza* il carattere olistico che l'approccio pedagogico/curricolare attribuisce alla nozione di competenza. Da un punto di vista pragmatico, conoscere/sapere implica l'uso competente degli oggetti che costituiscono la conoscenza, la capacità di relazionarsi fra loro, ossia, comprendere, e di applicarli alla soluzione di problemi. Un vasto studio dell'uso della nozione di competenza in matematica si sviluppa in D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla (2003).

Nel Rapporto Finale del Progetto Tuning (González, Wagenaar, 2003), le competenze e le destrezze vengono interpretate come «conoscere e comprendere» – co-

1. Convegno di didattica della Matematica (Locarno, Agosto 2008). http://www.ugr.es/local/jgodino.
2. J.D. Godino, Università di Granada (Spagna); M. Rivas, Università di Los Andes (Venezuela); W.F. Castro, Università di Antioquia (Colombia); P. Konic, Università di Río Cuarto (Argentina).
3. See http://www.ugr.es/local/jgodino.

noscenza teorica di un campo accademico –, «sapere come attuare» – l'applicazione pratica e operativa della conoscenza a determinate situazioni – e «sapere come essere» – i valori come parte integrante del modo di percepire gli altri e vivere in un contesto sociale –. Queste competenze si classificano in due grandi gruppi: generali e specifiche.

1. *Competenze generali (o trasversali).* Due grandi gruppi:
   a. *Strumentali* o strumenti per l'apprendimento e la formazione. Per esempio: analisi e sintesi, organizzazione e pianificazione, conoscenze generali indispensabili, conoscenze indispensabili della professione etc.
   b. *Sistematiche* o capacità che danno il punto di vista d'insieme e servono per gestire il totale della realizzazione. Per esempio: applicare le conoscenze alla pratica, abilità di investigazione, capacità di apprendere (apprendere ad apprendere), adattamento a nuove situazioni, organizzazione e gestione di progetti etc.
2. *Competenze specifiche.* Due grandi gruppi: quelle riferite alla formazione disciplinare che devono acquisire i laureati – competenze disciplinari e accademiche (sapere) – e quelle riferite alla formazione professionale che devono avere i futuri laureati – competenze professionali (saper fare).

Applicate al caso dell'insegnante di matematica, queste competenze generali e specifiche si possono realizzare in ciò che possiamo chiamare competenza per l'«analisi e sintesi didattica», cioè competenza per analizzare i processi di insegnamento e apprendimento della matematica e per sintetizzare il complesso delle conoscenze prodotte dalla Didattica della Matematica per la progettazione, l'implementazione e la valutazione della propria pratica docente.

L'insegnante di matematica di scuola primaria e secondaria deve avere un certo livello di competenza matematica, cioè conoscere ed essere capace di applicare le pratiche matematiche necessarie per risolvere problemi che usualmente si risolvono in primaria e secondaria. Ma dal punto di vista dell'insegnamento e dell'apprendimento, l'insegnante deve essere capace di analizzare l'attività matematica necessaria per risolvere i problemi, identificando gli oggetti e i significati posti in gioco, con il fine di arricchire la sua interpretazione e contribuire allo sviluppo delle sue competenze professionali.

Uno dei compiti chiave dell'insegnante di matematica è la scelta e l'adattamento di situazioni-problema che promuovano la contestualizzazione dei contenuti matematici, la loro applicazione e l'esercitazione. I problemi non possono essere eccessivamente rigorosi/unici, ma debbono permettere l'articolazione delle distinte competenze matematiche e, pertanto, avere un carattere globalizzante. Nel caso della formazione matematica e didattica degli insegnanti, è necessario selezionare problemi la cui soluzione ponga in gioco competenze di distinti blocchi di contenuto disciplinare (aritmetica, geometria, misura, statistica, algebra), di altre aree curricolari (conoscenza dell'ambiente e della società) e specialmente che promuovano l'articolazione tra le competenze di tipo matematico e didattico.

Non è però sufficiente disporre di «situazioni ricche», si richiede di procedere verso l'organizzazione di configurazioni e percorsi didattici (Godino, Contreras, Font, 2006) idonei dal punto di vista epistemico, cognitivo e istruzionale. Per questo occorre considerare i ruoli potenziali dell'insegnante, degli studenti, le risorse (in particolare la gestione del tempo didattico) e i modelli di interazione tra questi componenti dei sistemi didattici. L'organizzazione e la gestione dei percorsi didattici chiede, da parte dell'insegnante, lo sviluppo di competenze di analisi degli oggetti matematici e dei significati che vengono messi in gioco nella soluzione di problemi matematici, al fine di prevedere conflitti di significati e distinte possibilità di istituzionalizzazione delle conoscenze matematiche implicate.

2. Competenze di analisi didattica e loro sviluppo

Di seguito includiamo uno schema di classificazione delle competenze specifiche per la formazione didattica degli insegnati, considerando alcuni aspetti dell'approccio ontosemiotico della conoscenza e della istruzione matematica sviluppato da Godino, Batanero e Font (2007).

1. *Competenze riferite alla progettazione e implementazione di processi di studio matematico:*
   - Selezionare e rielaborare i *problemi matematici* idonei agli alunni dei distinti livelli, usando le risorse linguistiche e i mezzi appropriati in ciascuna circostanza.
   - *Definire, enunciare e giustificare* i *concetti i procedimenti e le proprietà* matematiche, considerando le nozioni precedenti necessarie e i processi implicati nella loro generazione.
   - Implementare *configurazioni didattiche* che permettano di identificare e risolvere i *conflitti semiotici* nella *interazione didattica* e di ottimizzare l'apprendimento matematico degli alunni.
   - Riconoscere il sistema di *norme sociali* e *disciplinari* che riducono e rendono possibile lo sviluppo dei processi di studio matematico e apportano spiegazioni plausibili dei fenomeni didattici.
2. *Competenze riferite alle conoscenze didattiche specifiche e valutazione della idoneità didattica:*
   - Conoscere i contributi della Didattica della Matematica all'insegnamento e apprendimento di blocchi di contenuti e *processi matematici* trattati nella scuola primaria (secondaria), e riferiti a: sviluppo storico (da una prospettiva epistemologica) dei contenuti da insegnare, degli orientamenti curricolari, delle tappe di apprendimento, dei tipi di errori e difficoltà, dei modelli di interazione didattica e dei loro effetti nell'apprendimento, dell'uso di mezzi tecnologici e materiali manipolativi, di proposte di insegnamento sperimentate positivamente, di strumenti di valutazione etc. Queste conoscenze permettono di ricostruire un *significato di riferimento* matematico e didattico per i processi di studio immaginato o implementato e, di conseguenza, emettere un giudizio valutativo su loro stesse che orienti l'incremento della *idoneità didattica* di tali processi (Godino, Bencomo, Font, Wilhelmi, 2007).
   - Valutare l'idoneità didattica dei processi di studio pianificati o imple-

mentati nelle loro distinte dimensioni (*epistemica, cognitiva, affettiva, interazionale, di mediazione ed ecologica*). Questa competenza suppone per l'insegnante lo sviluppo di una attitudine positiva verso l'insegnamento della matematica, di modo che valorizzi tanto il suo ruolo formativo, quanto la sua utilità nell'educazione dei cittadini e dei professionisti.

Lo sviluppo delle competenze didattiche è una sfida complessa per i formatori degli insegnanti per la differenza di dimensioni e di componenti da considerare. Una di tali dimensioni si riferisce all'analisi delle proprie conoscenze matematiche, per le quali sarà necessario adottare una visione ampia che riconosca il ruolo centrale dell'attività di risolvere problemi nella generazione della conoscenza.

Nel nostro caso stiamo sperimentando l'applicazione di *cicli formativi* sull'insegnamento e l'apprendimento della matematica e della sua didattica per futuri insegnanti, i quali includono i seguenti tipi di situazioni-problema di studio matematico-didattico:

1. Risoluzione di problemi in linea con un modello didattico-storico-costruttivo-istruzionale.
2. Riflessione epistemico-cognitiva sugli oggetti e i significati[3] posti in gioco nella risoluzione dei problemi.
3. Analisi delle interazione nelle ore di matematica.
4. Riconoscimento del sistema di norme che condizionano e sopportano l'attività di studio matematico.
5. Valutazione dell'idoneità didattica del processo di studio matematico sperimentato.

In questi processi di studio si implementa un percorso didattico che contempla le seguenti fasi o momenti: 1) Presentazione delle consegne; 2) Esplorazione personale; 3) Lavoro cooperativo in équipe per elaborare una risposta condivisa: 4) Presentazione e discussione; 5) Istituzionalizzazione da parte del formatore che esplicita le conoscenze richieste; 6) Studio personale di documenti di lavoro selezionati, basato sulle teorie individuali e di gruppo.

Un ciclo formativo di questo tipo viene descritto in Godino, Batanero, Roa e Wilhelmi (2008) basato sullo studio di nozioni elementari di statistica a partire da un progetto di analisi di dati. Nel paragrafo che segue presentiamo un altro caso basato sulla risoluzione di un problema aritmetico-algebrico.

3. Analisi didattica di un problema aritmetico-algebrico

La situazione-problema che usiamo per illustrare il tipo di attività matematica e didattica che consideriamo utile nella formazione di insegnanti è stata propo-

3. Gli oggetti e i significati matematici sui quali si orienta la riflessione vengono descritti in Godino, Batanero e Font (2007), così come i supposti antropologici che servono di base all'«approccio ontosemiotico». Gli studenti sono avviati progressivamente nel riconoscimento di tali oggetti e processi, così come alla prospettiva pluralista e relativista del significato degli oggetti matematici.

sta a un campione di 84 studenti di magistero nel quadro di una disciplina diretta a completare la loro formazione matematica nella prospettiva dell'insegnamento. Gli oggetti specifici dell'attività sono stati:

- Creare una situazione introduttiva di riflessione sulle proprietà e sull'algoritmo della moltiplicazione di numeri naturali.
- Riflettere e discutere sulle caratteristiche del ragionamento deduttivo per provare una proposizione di fronte a una verifica empirica di casi.
- Favorire il ragionamento algebrico all'introduzione di nozioni che facilitano la generalizzazione di un problema aritmetico.
- Analizzare la *matematica in uso* posta in gioco nella soluzione del problema, cioè gli oggetti matematici presupposti o richiesti affinché il bambino si coinvolga nella risoluzione e nei nuovi oggetti e significati emergenti.

Gli studenti hanno lavorato in una prima fase in gruppi di 2 e 4 e dovevano scrivere con dettagli la risoluzione del problema. Trascorsi 30 minuti gli studenti hanno consegnato i fogli di risposte che sono state usate dall'insegnante per organizzare il lavoro in comune, per la discussione e istituzionalizzazione.

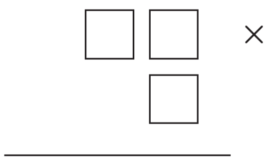
3.1. Una situazione introduttiva per la moltiplicazione

La situazione-problema che presentiamo di seguito pone in gioco conoscenze aritmetiche e algebriche nel momento in cui provoca la riflessione sul ruolo dell'argomentazione deduttiva, sulla sua efficacia relativa e la sua validità di fronte alle verifiche empiriche. Con questo esempio illustreremo un tipo di analisi epistemico-cognitiva[4] di attività matematiche che consideriamo potenzialmente utile per lo sviluppo di competenze strumentali e disciplinari-accademiche dell'insegnante di matematica.

Come situazione introduttiva al tema della moltiplicazione di numeri naturali e allo sviluppo del ragionamento algebrico elementare abbiamo proposto ad un gruppo di 84 studenti il seguente problema (Malaspina, 2007):

Pedro ha scritto alla lavagna i numeri 2, 5, 6, e 3.

a) Scegli tre di questi numeri, diversi fra loro, e scrivili nelle seguenti caselle in modo che il prodotto dei numeri sia **il maggiore possibile**



b) Juan dice che è capace di scegliere i tre numeri che danno il prodotto massimo senza fare **nessuna moltiplicazione.**

b1) È possibile?; b2) Quale potrebbe essere il procedimento di Juan?; b3) Come si può giustificare? *Discutere le risposte*.

c) Ora Pedro propone questa sfida:

Dati cinque numeri naturali qualsiasi di una cifra (***a, b, c, d, e***), se ne devono scegliere tre per formare il **moltiplicando** e gli altri due per formare il **moltiplicatore**. Descrivi e giustifica un procedimento per scegliere i numeri in modo che il prodotto sia il **minore possibile**.

4. Il termine epistemico si usa qui per riferirsi alle conoscenze matematiche poste in gioco nella soluzione attesa del problema, invece cognitivo alle conoscenze effettivamente dimostrate dagli studenti.

3.2. Soluzioni attese

Una prima soluzione «ingenua» che possiamo incontrare, come viene riportato in Malaspina (2007), consiste nell'effettuare delle prove con le distinte terne di numeri che si possono formare, calcolare i prodotti e scoprire il maggiore. Se si provano sistematicamente le 24 alternative possibili, tale procedimento di verifica esaustiva di casi fornisce la soluzione del problema. Però si vede che è alquanto inefficace.

Per il paragrafo b) il procedimento di Juan sarà:

1. Scartare il numero 2 perché essendo il minore, la sua moltiplicazione per qualsiasi dei restanti darà un prodotto minore.
2. Scegliere come moltiplicatore il maggiore, 6, come decina del moltiplicando il 5 e come unità il 3. Non si può scambiare il 6 con il 5 perché 6×3 è maggiore di 5×3. La soluzione è, dunque, 53×6 = 318.

Per la generalizzazione che si chiede nel paragrafo c) il procedimento sarà il seguente:

1. Ordinare dal minore al maggiore i numeri dati; per esempio, supporre che l'ordine alfabetico delle lettere date corrisponda all'ordine dei numeri, cioè: $a < b < c < d < e$.
2. Scartare i due numeri maggiori, d ed e, dal momento che «*a minor fattore corrisponde minor prodotto*», e in questo caso si tratta di trovare il minor prodotto possibile.
3. Scegliere come moltiplicatore il minor numero, a, come decina del moltiplicatore b e come unità c. La soluzione è, dunque, $bc \times a$.

Il paragrafo a) del problema richiede di trovare il massimo di una funzione P di tre variabili, x, y, z, che prendono i loro valori in uno stesso dominio: l'insieme finito formato dai numeri {2, 5, 6, 3}. Le variabili corrispondono alle decine e alle unità del moltiplicando, e l'unità del moltiplicatore ($P = f(x, y, z)$; $P = xy \times z$).

Il procedimento empirico di soluzione richiede, per essere verificato, la verifica esaustiva delle 24 alternative combinatorie possibili e della scelta di quella che dà, come risultato, il maggior prodotto.

Il procedimento deduttivo si basa sulle proprietà del sistema di numerazione decimale e sull'uso della seguente proprietà della moltiplicazione di numeri naturali: «a maggior fattore corrisponde maggior prodotto». Il paragrafo b) del problema richiede di incoraggiare l'applicazione di questa tecnica deduttiva.

Il paragrafo c) mette in gioco competenze di ragionamento algebrico (uso di notazioni simboliche per esprimere le variabili, che facilitano la generalizzazione del dominio di definizioni delle variabili di intervallo [0, 9] di numeri naturali).

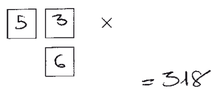
I paragrafi a) e b) possono esser proposti in 5° o 6° di scuola primaria. Il paragrafo c) può essere idoneo per la secondaria e i corsi di formazione degli insegnanti, che è l'uso qui descritto.

Nella seguente sezione effettuiamo un'analisi delle conoscenze esplicite e implicite che si mettono in gioco nella realizzazione di questa attività, usando alcune nozioni teoriche dell'«approccio ontosemiotico» della conoscenza e della istruzione matematica (Godino, Batanero, Font, 2007). La realizzazione di questo tipo di analisi è utile agli insegnanti di matematica, essendo possibile applicarla tanto alle soluzioni attese dal punto di vista dell'insegnante, quanto alle soluzioni date dagli studenti. L'analisi della «matematica in azione» che effettuiamo in questo lavoro dovrebbe essere una competenza strumentale e disciplinare dell'insegnante di matematica che gli permetta di riconoscere la complessità di oggetti e di processi matematici posti in gioco nelle attività matematiche, di prevedere potenziali conflitti, di adattarli alle capacità dei suoi studenti e agli obiettivi di apprendimento.

4. Configurazione di oggetti e significati

Nel EOS è stata introdotta la nozione di configurazione di oggetti e significati come risorsa per descrivere le pratiche matematiche poste in gioco nella risoluzione di una situazione-problema. Questa nozione permette di ampliare l'ottica di attenzione delle rappresentazioni all'insieme delle entità riferite alle stesse e ai ruoli che interpretano nell'attività matematica (Font, Godino, D'Amore, 2007). Di seguito identifichiamo i tipi di oggetti o entità primarie poste in gioco nella risoluzione del problema, raggruppate nelle seguenti categorie: elementi linguistici, concetti (intesi qui come entità che hanno una definizione), procedimenti, proprietà e argomenti; allo stesso modo distinguiamo le entità che si possono considerare come precedenti o controlli delle entità nuove o emergenti delle attività. In quanto ai processi matematici implicati iniziamo a identificare i processi di significato, cioè spiegando a che cosa si riferiscono gli oggetti o che ruolo svolgono. Allo stesso modo, formuliamo ipotesi sui conflitti semiotici potenziali nel momento in cui si confrontano i significati istituzionali attesi con i significati personali descritti in bibliografia o in esperienze precedenti.

4.1. Elementi linguistici

OGGETTI	SIGNIFICATI
Precedenti	
«Scegli tre di questi numeri…».	Selezione di un campione di tre cifre tra cinque date, usare due di queste come moltiplicando e le altre come moltiplicatore.
Prodotto dei numeri.	Risultato dell'operazione del moltiplicare.
Maggiore possibile.	Maggiore insieme dei prodotti ottenuti formando tutte le alternative possibili dei tre numeri.
	Indica in modo iconico le variabili delle distinte cifre che devono formare il moltiplicando, il moltiplicatore, l'operazione (×) e il posto dove si deve scrivere il prodotto.
Simboli alfabetici (a, b, c, d, e).	Numeri naturali qualsiasi a una cifra.
Emergenti	
	Scelta di numeri che danno come prodotto il valore maggiore.
Scrittura sistematica di tutte le alternative possibili, o una espressione in lingua naturale basata sulla proprietà «maggior fattore implica maggior prodotto».	Argomentazione sul fatto che il prodotto dell'alternativa scelta è il maggiore.

Conflitti potenziali

– Si può sperare che gli alunni facciano una scrittura parziale dell'insieme delle alternative combinatorie senza apportare ragioni a proposito di quelle che non è necessario scrivere.
– L'espressione «numeri qualsiasi (a, b, c, d, e)» può essere interpretata nel senso di dare valori particolari (1, 2, 3, 4, 5), «ciò che uno chiede», e mostrare la soluzione per il detto caso.
– Spiegazione scritta parziale o scorretta dei procedimenti e delle giustificazioni, tanto nel caso b) quanto nel caso c).

4.2. Concetti/definizioni

OGGETTI	SIGNIFICATI
Precedenti	
Numeri.	Sequenza ricorsiva di simboli che si combinano secondo certe regole per formarne altri da 2 e 3 cifre; numerazione decimale; unità, decine e centinaia.
Moltiplicazione di numeri naturali; fattori, prodotto.	Operazione aritmetica, dati due numeri naturali (moltiplicando e moltiplicatore) la moltiplicazione di detti numeri consiste nell'ottenere un terzo (prodotto), ...
Uguaglianza.	Risultato di una operazione aritmetica.
Variabile.	Simbolo (letterale o iconico) che può prendere i diversi valori di un insieme di numeri.
Funzione; $P = f(x, y, z)$; definita in $A =\{2, 5, 6, 3\}$, e l'insieme $\{n \in \mathbf{N} \mid 0 \leq n \leq 9\}$.	Il prodotto dipende dai valori che si danno alle unità e alle decine dei fattori.
Ordine, maggiore, massimo di un insieme.	Ordinamento e estremo superiore dell'insieme formato dai prodotti di tutte le selezioni possibili.
Emergenti	
Alternativa combinatoria di terne di numeri.	Formano il moltiplicando e il moltiplicatore delle moltiplicazioni cercate.
Insieme di alternative.	Insieme di definizione della funzione P di cui si deve trovare il massimo.
Moltiplicando e moltiplicatore.	Interpretare un ruolo necessario (non è indifferente mettere il 6 nel moltiplicatore come unità o come decina del moltiplicando).
Procedimento. Giustificazione.	Usando questi concetti si prospettano due nuovi problemi: trovare un procedimento più efficace della costruzione di tutte le alternative e giustificare la validità del nuovo procedimento in modo deduttivo, non empirico.
Ragionamento.	Descrizione dettagliata del procedimento e delle sue giustificazioni.

Conflitti potenziali

– Gli alunni possono non avere familiarità con i concetti matematici di procedimento, giustificazione, ragionamento.
– Il concetto di funzione si usa in maniera tacita (non ostensiva); trattando una funzione di tre variabili P(x, y, z) gli alunni possono non identificare questa funzione nel caso in cui non abbiano familiarità con questo tipo di funzioni.

4.3. Proprietà

OGGETTI	SIGNIFICATI
Precedenti	
Regole del sistema di numerazione decimale (1 decina = 10 unità).	Si usa la scrittura posizionale dei numeri e l'algoritmo della moltiplicazione.
Tavole di moltiplicazione e addizione.	Si usano nell'algoritmo della moltiplicazione.
Proprietà associativa, commutativa e distributiva.	Giustificano l'algoritmo della moltiplicazione.
Emergenti	
P1: «Maggiore (minore) fattore, maggiore (minore) prodotto».	Giustifica il procedimento determina la soluzione migliore.
P2: Nelle condizioni date, l'alternativa dei numeri che si devono prendere è 3×6 dal momento che il suo prodotto 318 è il maggiore possibile.	Questo enunciato costituisce la soluzione del problema b2).
P3: Se $a<b<c<d<e$, $bc \times a$ dà il minor prodotto.	Questo enunciato costituisce la soluzione del problema c).

Conflitti potenziali

– Non trovare la proprietà P1, la P2, o la P3.

4.4. Procedimenti

OGGETTI	SIGNIFICATI
Precedenti	
Algoritmo per moltiplicare un numero di due cifre per un altro di una cifra.	Si usa per ottenere i prodotti richiesti.
Formazione sistematica delle combinazioni possibili di tre numeri (combinazioni di 4 elementi a due a due, per permutazioni di due, ossia 24).	Si usa per formare tutti i prodotti possibili e per poter trovare il massimo.
Emergenti	
b2) Scartare il 2; cercare come moltiplicatore il maggiore, 6; cercare come moltiplicando il 53.	Dà la soluzione ottimale del problema (53×6 = 318)
c) Ordinare, $a<b<c<d<e$, scartare e, …	Dà la soluzione chiesta nel caso c)

Conflitti potenziali:

– Non essere capace di formare tutte le alternative combinatorie
– Non trovare il procedimento per il caso b2)
– Non trovare il procedimento per il caso c).

4.5. Argomenti

OGGETTI	SIGNIFICATI
Precedenti	
Verifica empirica esaustiva delle 24 possibili combinazioni dei fattori, o una loro parte.	Fornisce una soluzione inefficace del problema della parte a).
Emergenti	
A1: Considerando che «a maggior fattore corrisponde minor prodotto» si scarta il 2, prendendo come moltiplicatore il 6 e prendendo come decina del moltiplicando il 5.	Giustificazione deduttiva della proposizione che afferma la soluzione ottimale del problema nel caso b3).
A2: Se $a<b<c<d<e$ si inizia con lo scartare *e* perché essendo il maggiore darà il maggior prodotto, ...	Giustificazione deduttiva della proposizione che stabilisce la soluzione ottima del problema nel caso c).

Conflitti potenziali

– Non formulare correttamente gli argomenti A1 e A2

5. Analisi delle risposte degli studenti

Il problema analizzato nei paragrafi precedenti è stato usato come una situazione introduttiva in uno dei temi di matematica per maestri in un corso di formazione iniziale di insegnanti. In una prima fase gli studenti hanno risolto il problema in gruppi di 2 e 4 consegnando, alla fine, un foglio con la soluzione al professore che, di seguito, ha organizzato il dibattito corrispondente prendendo alcune delle soluzioni date dai gruppi come punto di partenza. Questa tecnica didattica permette di accedere ai significati iniziali degli studenti sui singoli oggetti posti in gioco nella risoluzione e di partire da questi per promuovere i nuovi apprendimenti.

Di seguito riassumiamo le risposte date dall'insieme dei distinti gruppi.

A proposito del paragrafo a) del problema, troviamo che dei 24 gruppi, il 20,8% fa solo una moltiplicazione, dimostrando, dunque, che si può ottenere la selezione di numeri che dà il prodotto massimo, tenendo conto delle proprietà del sistema di numerazione e delle proprietà della moltiplicazione dei numeri naturali. Però 9 gruppi (37.5%) fanno più di 4 tentativi (alcuni di loro fino a 9), e 10 (41,6%) fanno 2 o 3 moltiplicazioni, senza dare nessuna giustificazione del fatto che non è necessario realizzare le restanti possibili.

Nella tavola 1 riassumiamo i tipi di risposte, con le frequenze e le percentuali di ogni tipo, nei paragrafi b) e c). Occorre sottolineare che il 33,2% non giustifica, o lo fa non correttamente, il procedimento per trovare il prodotto massimo senza realizzare nessuna moltiplicazione, e il 41,6% non riesce a fare la generalizzazione dell'enunciato.

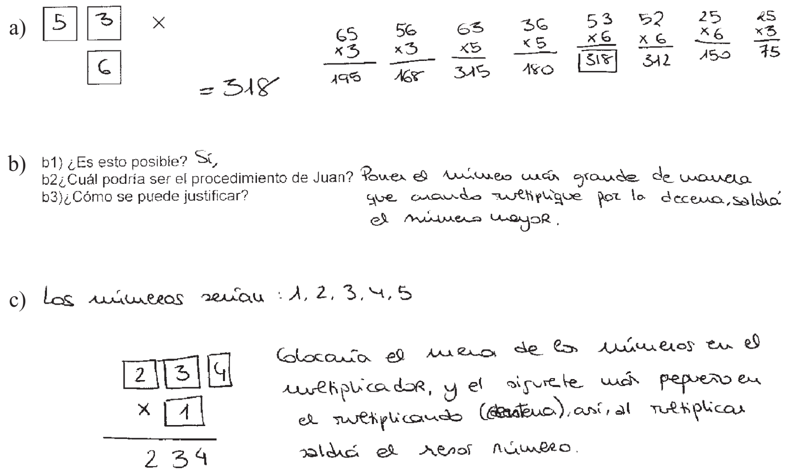
Tavola 1 Tipi di risposte, frequenza e percentuale

Paragrafo b)	Frequenza	%
Giustifica bene	12	50,0
Giustifica moderatamente bene	4	16,6
Non giustifica/non correttamente	8	33,2
TOTALE	24 gruppi	

Paragrafo c)	Frequenza	%
Generalizza bene	4	16,6
Generalizza moderatamente bene	10	41,6
Non generalizza	10	41,6
TOTALE	24 gruppi	

La tavola 2 include le risposte date da uno dei gruppi che non è riuscito a risolvere bene il problema né ad elaborare argomenti pertinenti. Abbiamo visto che ha effettuato otto moltiplicazioni prima di concludere che la soluzione è 53×6=318, senza scartare il 2 come possibile cifra del moltiplicando, tanto nelle unità come nelle decine. Questi studenti non argomentano perché non continuano facendo le restanti verifiche. Nel paragrafo b) descrivono, in modo incompleto, il procedimento (mettere il numero più grande …). Nel paragrafo c) l'espressione «Dati cinque numeri naturali qualsiasi», nonostante si suggerisca loro l'uso delle lettere per esprimere tali numeri, optano per ragionare con un caso concreto, usando i numeri 1, 2, 3, 4, 5 e anche in questo caso in modo incompleto.

Tavola 2 Risposte di un gruppo che non è riuscito a generalizzare


a) 5 3 × 6 = 318

65 × 3 = 195; 56 × 3 = 168; 63 × 5 = 315; 36 × 5 = 180; 53 × 6 = 318; 52 × 6 = 312; 25 × 6 = 150; 25 × 3 = 75

b) b1) ¿Es esto posible? Sí,
b2¿Cuál podría ser el procedimiento de Juan? Poner el número más grande de manera que cuando multiplique por la decena, saldrá el número mayor.
b3)¿Cómo se puede justificar?

c) Los números serían: 1, 2, 3, 4, 5

2 3 4 × 1 = 2 3 4

Colocaría el menor de los números en el multiplicador, y el siguiente más pequeño en el multiplicando (centena), así, al multiplicar saldrá el menor número.

Nella tavola 3 riassumiamo i tipi di oggetti, significati e conflitti che incontriamo nelle risposte del gruppo considerato, come esempio illustrativo della caratterizzazione delle configurazioni cognitive, usando le strumentazioni teoriche descritte nel paragrafo 4.

Tavola 3 Configurazione cognitiva di un gruppo che non è riuscito a generalizzare

Tipi di oggetti	**Significati/Conflitti**
LINGUAGGI	
– Esempi di selezioni possibili dei numeri usati come moltiplicando e moltiplicatore. – Scrittura della moltiplicazione con i fattori messi in colonna. – Descrizione di procedimenti e giustificazioni incomplete.	– Attribuiscono il significato corretto ai termini e alle espressioni usate nell'enunciato, includendo il formato della moltiplicazione in colonna che riproducono fedelmente. – Rigidezza nel modo di scrivere le moltiplicazioni, seguendo il formato dell'enunciato. – Forma incompleta e insufficiente nell'esprimere procedimenti e argomenti.
CONCETTI	
– Decine, centinaia – Moltiplicazione, prodotto massimo	– Uso corretto.
– Procedimento – Insieme di scelte possibili	– Non riconoscono l'insieme completo di configurazioni possibili
– «Numero qualsiasi»	– Il numero qualsiasi è interpretato come caso «particolare specifico».
PROCEDIMENTI	
– Moltiplicazione per una cifra	– Uso corretto.
– Verifica dei casi in a) e b)	– Non verificano tutti i casi possibili.
– Danno valori particolari alle variabili in c)	– Non riescono a descrivere il procedimento generale per ottenere il prodotto minimo nelle condizioni date (supporre un ordine nelle variabili a, b, ... etc.).
PROPRIETÀ	
– Regole del sistema di numerazione decimale e dell'algoritmo della moltiplicazione.	– Uso corretto.
– Non riconoscono la proprietà «a maggior fattore, minor prodotto» in a)	– Non riconoscono l'uso del numero 2.
ARGOMENTI	
– Verifiche parziali dei casi (a)	– Non riescono a fare la verifica esaustiva dei casi.
– Uso di un caso particolare come «elemento generico»	– Non argomentano deduttivamente.

6. Riflessione epistemica-cognitiva degli insegnanti in formazione

Nella prima fase del ciclo formativo che applichiamo agli insegnanti in formazione, proponiamo loro la risoluzione di un problema matematico, opportunamente selezionato affinché si sviluppino le loro competenze in temi matematici relazionati alla professione docente. Il percorso didattico dello studio matematico che implementiamo contempla fasi o momenti di esplorazione personale del problema, lavoro collaborativo in gruppo, formulazione e validazione delle situazioni proposte. Questi momenti di tipo socio-costruttivista sono integrati con momenti di istituzionalizzazione, esercitazione e studio personale di fonti documentali selezionate, che apportano una componente istruzionale al modello didattico.

Però la formazione dell'insegnante non deve limitarsi a sviluppare competenze matematiche acquisite mediante un modello didattico determinato, che possono tentare di imitare con i propri alunni. È necessario che sviluppino, anche, competenze di riflessione e analisi sulla propria attività matematica e sulle conoscenze mobilitate, affinché possano selezionare o adattare problemi matematici idonei e ricostruire le configurazioni di oggetti e significati posti in gioco.

Con questo fine abbiamo illustrato un tipo di situazioni di analisi epistemico-cognitive basate sulla proposta della seguente consegna, dopo la realizzazione di un'attività matematica come quella descritta nel paragrafo 2:

Quali conoscenze matematiche si mettono in gioco nella risoluzione del problema? Completare la tavola allegata indicando gli oggetti matematici e i significati posti in gioco.

Oggetti:[5]	Significati:
Situazioni-problemi	
Elementi linguistici	
Concetti-definizioni	
Proprietà	
Procedimenti	
Argomenti	
Conflitti:	

Con questa consegna si richiede che gli studenti riconoscano, oltre ai concetti, anche i procedimenti, il ruolo dei singoli linguaggi usati e i significati attribuiti ai termini e alle espressioni, i modelli di giustificazione di proprietà e di procedimenti, i processi di argomentazione e di generalizzazione. Si tratta di creare il punto di partenza affinché l'insegnante in formazione realizzi un tipo di analisi come quello incluso nel paragrafo 4. L'obiettivo è che l'insegnante sia cosciente della trama di obiettivi e significati che si pongono in gioco nei processi di studio matematico che dovranno progettare, implementare e valutare.

Per affrontare queste questioni di analisi epistemico-cognitive implementiamo, di nuovo, un percorso didattico che contempla i seguenti momenti:

- Esplorazione personale.
- Lavoro collaborativo nel senso di partecipazione a un gruppo per discutere le proposte ed elaborare una risposta condivisa.
- Partecipazione e discussione nel gruppo-classe.
- Giustificazione effettuata dal formatore.

Stiamo sperimentando questa situazione-problema di «analisi epistemico-cognitiva» con diversi gruppi di studenti e diversi problemi matematici elementari. Come prime conclusioni di queste esperienze possiamo dire che l'attività è una sfida per i nuovi insegnanti, dal momento che l'identificazione e la discriminazione dei tipi di obiettivi e significati risulta conflittuale, giacché usualmente suppone un certo livello di attività metacognitiva alla quale non sono abituati.

5. Nella versione consegnata agli studenti si include un esempio di ogni tipo di entità matematica per orientare la realizzazione delle attività.

7. Riflessioni finali

L'analisi che abbiamo esposto nei paragrafi precedenti, usando alcune nozioni teoriche dell'«approccio ontosemiotico», è stata realizzata dai ricercatori come elemento di riferimento e riflessione sui tipi di obiettivi e significati matematici posti in gioco dagli studenti. Abbiamo potuto determinare le carenze di questo campione di studenti rispetto alle conoscenze matematiche poste in gioco, in particolare le difficoltà che hanno per usare le notazioni simboliche come ricorso per la generalizzazione; abbiamo anche constatato l'ancoraggio di questi studenti ai ragionamenti di tipo empirico.

Anche se questo tipo di analisi si rivela utile per il formatore di insegnanti, pensiamo che sia possibile e auspicabile abilitare i futuri insegnanti a realizzare analisi simili delle proprie esperienze di insegnamento e apprendimento. Nel nostro progetto di ricerca in corso su «Valutazione e sviluppo delle competenze di analisi didattica dell'insegnante di matematica» la risoluzione di problemi occupa un posto centrale per lo sviluppo delle competenze matematiche. Però l'attività di risoluzione si integra con la riflessione epistemico-cognitiva provocata dai quesiti: *Che matematica si mette in gioco nella risoluzione del problema? Che matematica ha messo in gioco l'alunno?*; queste domande sono basate sull'uso della strumentazione teorica dell'«approccio ontosemiotico», realizzate in questo caso nello strumento citato.

Il tipo di analisi della «matematica in azione» che realizziamo in questo lavoro dovrebbe essere una competenza strumentale dell'insegnante di matematica che gli permette di riconoscere la complessità di oggetti e significati matematici posti in gioco nelle attività matematiche, di prevedere eventuali conflitti, di adattarli alle capacità dei suoi allievi e agli obiettivi di apprendimento. Si tratta di progettare e implementare situazioni didattiche per la formazione degli insegnanti il cui obiettivo centrale sia la meta-analisi (Jaworski, 2005) di una componente chiave dell'insegnamento: l'attività matematica intesa tanto dal punto di vista istituzionale (o socio-epistemico) quanto dal punto di vista personale (o cognitivo).

Come abbiamo indicato nel paragrafo 2, il ciclo formativo che stiamo sperimentando con i futuri insegnanti include, oltre alle situazioni di studio matematico di problemi scelti e alla riflessione epistemico-cognitiva corrispondente, altri tre tipi di analisi e di riflessione: analisi delle interazioni in aula, riconoscimento delle norme che condizionano e sostengono l'attività di studio matematico e la valutazione dell'attività didattica generale di esperienze di insegnamento e apprendimento. Per ragioni di spazio non includiamo in questo lavoro queste analisi applicate al caso della risoluzione del problema aritmetico-algebrico sviluppato nei paragrafi precedenti. Rinviamo il lettore ai riferimenti citati dove si descrivono le analisi indicate; in particolare in Godino, Font e Wilhelmi (in corso di stampa) si presentano le principali strumentazioni teoriche dell'«approccio ontosemiotico» mediante l'analisi di una esperienza di insegnamento dell'analisi elementare dei dati.

Ringraziamento

Lavoro realizzato nell'ambito del progetto di ricerca, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER.

Bibliografia

D'Amore, B., Godino, J. D., Arrigo, G. e Fandiño, M. I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

Font, J. D., Godino, J. D., D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 3-9.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. Batanero, C., Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2): 127-135. [Versione in spagnolo, ampliata e aggiornata disponibile in Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino]

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R., Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.*

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. (in corso di stampa). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *PUBLICACIONES.* Revista de la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII (2), 221-252.

González, J., Wagenaar, R. (2003). *Tuning educational structures in Europe. Final Report. Phase one*. Bilbao: Universidad de Deusto. http://europa.eu.int/comm/education/policies/educ/tuning/tuning_es.html

Jaworski, B. (2005). Tools and tasks for learning and meta-learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 359-361.

Malaspina, U. (2007). El rincón de los problemas. *UNIÓN*, 11, 197-204.

Tejada, J. (1999). Acerca de las competencias profesionales (I). *Herramientas*, 56, 20-30.

Traduzione di Ines Marazzani