

Воронежский государственный университет  
Московский государственный университет  
имени М. В. Ломоносова  
Математический институт имени В. А. Стеклова  
Российской академии наук

*Посвящается памяти  
Александра Дмитриевича Баева*

# СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Материалы  
Международной конференции  
Воронежская весенняя математическая школа  
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXXII

(3–9 мая 2021 г.)

Воронеж  
Издательский дом ВГУ  
2021

УДК 517.53(97; 98)

ББК 22.16

С56

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ:

Е. И. Моисеев (председатель), А. В. Боровских (зам. председателя), И. С. Ломов (зам. председателя), А. П. Хромов (зам. председателя), В. В. Власов, А. В. Глушко, М. Л. Гольдман, В. Г. Задорожный, В. Г. Звягин, М. И. Каменский, В. А. Костин, Г. А. Курина, В. И. Рязских, Е. М. Семенов, С. М. Ситник, А. П. Солдатов, А. И. Шашкин, А. С. Шамаев

ОРГКОМИТЕТ:

Е. И. Моисеев (председатель), Д. А. Ендовицкий (сопредседатель), В. А. Садовничий (сопредседатель), М. Ш. Бурлуцкая (зам. председателя), О. А. Козадеров (зам. председателя), И. С. Ломов (зам. председателя), А. П. Хромов (зам. председателя), И. В. Астахова, А. В. Боровских, Я. М. Ерусалимский, Д. В. Костин, М. С. Никольский, С. А. Шабров, А. С. Бондарев (ученый секретарь), И. В. Колесникова (технический секретарь)

**Современные методы теории краевых задач** : материалы  
С56 Международной конференции : Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения — XXXII» (3–9 мая 2021 г.) / Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова ; Математический институт имени В. А. Стеклова РАН. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. — 334 с.

ISBN 978–5–9273–3219–9

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXXII», которая посвящена памяти Александра Дмитриевича Баева.

Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, преподавания математики.

УДК 517.53(97; 98)

ББК 22.16

- © Воронежский государственный университет, 2021
- © Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 2021
- © Математический институт имени В. А. Стеклова РАН, 2021
- © Оформление. Издательский дом ВГУ, 2021

ISBN 978–5–9273–3219–9

# ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА АТОМА ВОДОРОДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ВБЛИЗИ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ<sup>1</sup>

А.В. Перескоков (Москва, НИУ ВШЭ, НИУ МЭИ)

*pereskokov62@mail.ru*

Рассмотрим нерелятивистский гамильтониан атома водорода в однородном электромагнитном поле

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \varepsilon \mathbb{M}_3 + \varepsilon e_1 x_1 + \varepsilon^2 \mathbb{W}, \quad (1)$$

где

$$\mathbb{H}_0 = -\Delta - |x|^{-1}, \quad \mathbb{M}_3 = ix_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathbb{W} = (x_1^2 + x_2^2)/4.$$

Здесь через  $x = (x_1, x_2, x_3)$  обозначены декартовы координаты в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа, магнитное поле направлено вдоль оси  $x_3$ , а электрическое поле вдоль оси  $x_1$ . Число  $e_1 > 0$  — напряженность электрического поля,  $\varepsilon > 0$  — малый параметр.

Задача об атоме водорода в электромагнитном поле представляет большой физический и математический интерес. Особенностью данной задачи является наличие в гамильтониане одновременно и электрического, и магнитного полей, которые ортогональны друг другу. Это приводит к образованию резонансных спектральных кластеров около собственных значений невозмущенного атома водорода [1].

Среди состояний, описываемые гамильтонианом (1), особый интерес представляют состояния системы, отвечающие границам спектральных кластеров. В работе [2] был предложен метод построения асимптотики спектра около границ кластеров, основанный на новом интегральном представлении для асимптотических собственных функций. С его помощью в статьях [3], [4] были найдены асимптотики серий собственных значений оператора (1) вблизи границ спектральных кластеров при малых значениях напряженности  $e_1$ . В данной работе рассмотрен случай, когда  $e_1$  принимает произвольные положительные значения и не является малым параметром. Тогда [5] вблизи верхних границ спектральных кластеров имеется серия соб-

---

<sup>1</sup> Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022).

© Перескоков А.В. , 2021

ственных значений оператора (1) со следующей асимптотикой

$$\mathcal{E}_k = -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon m \sqrt{9n^2 e_1^2 + 1} - \varepsilon^2 n^4 e_1^2 (4n^2 + 9n|m| - 6m^2) - \\ - 18\varepsilon^2 n^4 e_1^2 (n - |m|)(k + 1/2) + O(\varepsilon^2 n^4) + O(\varepsilon^3 n^{10}), \quad (2)$$

где  $\varepsilon \rightarrow +0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , числа  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  удовлетворяют условиям  $1 \ll n \ll \varepsilon^{-1/5}$ ,  $1 \ll |m| < n$ .

Формула (2) описывает расщепление спектра (т.е. эффект Зеемана — Штарка) для атома водорода в ортогональных электрическом и магнитном полях. Поскольку гамильтониан (1) содержит параметр  $e_1$ , то возникает однопараметрическое семейство уравнений Гойна, к которым сводится усредненная задача в неприводимом представлении алгебры  $\mathcal{F}_{quant}$  Карасева — Новиковой с квадратичными коммутационными соотношениями. Асимптотика решений уравнений Гойна строится с помощью комплексного метода ВКБ и метода согласования асимптотических разложений.

### Литература

1. Карасев М.В. Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана–Штарка в атоме водорода / М.В. Карасев, Е.М. Новикова // ТМФ. — 2005. — Т. 142, № 3. — С. 530–555.
2. Перескоков А.В. Асимптотика спектра и квантовых средних возмущенного резонансного осциллятора вблизи границ спектральных кластеров / А.В. Перескоков // Изв. РАН, сер. мат. — 2013. — Т. 77, № 1. — С. 165–210.
3. Мигаева А.С. Асимптотика спектра атома водорода в ортогональных электрическом и магнитном полях вблизи нижних границ спектральных кластеров / А.С. Мигаева, А.В. Перескоков // Мат. заметки. — 2020. — Т. 107, № 5. — С. 734–751.
4. Pereskokov A.V. On the asymptotics of the spectrum of the hydrogen atom in orthogonal electric and magnetic fields near the upper boundaries of spectral clusters / A.V. Pereskokov // Russ. J. Math. Phys. — 2019. — Т. 26, № 3. — PP. 391–400.
5. Migaeva A.S. Semiclassical asymptotics of the spectrum of the hydrogen atom in an electromagnetic field near the upper boundaries of spectral clusters / A.S. Migaeva, A.V. Pereskokov // J. Math. Sci. (N.Y.). — 2020. — Т. 251, № 6. — PP. 850–875.