ISSN 2757-5543 GÜFFD 2. Cilt (2): 1-13 (2021) DOI: 10.5281/zenodo.5733935

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi
http://sci-fac-j.gazi.edu.tr/

GÜFFD
GAZİ ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ DERGİSİ

Grad-Div Kararlılaştırılmış BDF-2 Zaman Adımlı Leray-α Modelinin Sayısal Analizi

Pınar Doğru*, Aytekin Çıbık
Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

Öne Çıkanlar

- Tamamen ayrık grad-divli bir şemaya ayrık bir filtreleme işlemi uygulanmıştır.
- Oluşturulan Leray-α modelinin sayısal analizi yapılmıştır.
- Teorik yakınsama oranları için sayısal testler yapılmıştır.

Makale Bilgileri

Geliş: 06.10.2021
Kabul: 27.10.2021

Anahtar Kelimeler

Navier-Stokes denklemleri, Leray-α türbülans modeli, Sonlu elemanlar yöntemi, Doğrusal olmayan filtreleme

Özet

Bu çalışmada, sık kullanılan bir türbülans modeli olan Leray-α modeli için grad-div kararlılaştırması incelenmiştir. Oluşturulan şema, sıkıştırılamaz zamana bağlı NSD'nin doğrusallaştırılmış ikinci mertebeden geri doğru fark (BDF2) formülüne dayalıdır ve uzayda sonlu eleman ile ayrıklaştırılmış bir Navier-Stokes sistemi üzerinde uygulanmaktadır. Ayrıca oluşturulan şemaya, kütle korunumunu iyileştirdiği ve basıncın hız hatası üzerindeki etkisini azalttığı için γ parametreli bir grad-div stabilizasyon terimi dâhil edilmiştir. Çalışmada, BDF2 zaman ayrıklaştırması ile elde edilen tamamen ayrık yaklaşımın çözümünün kararlı ve yakınsak olduğu gösterilmiştir. Son olarak da teorik yakınsama oranlarını doğrulamak için önerilen algoritmanın etkinliğini gösteren sayısal testler sunulmuştur.

Numerical Analysis of a Leray-α Model with Grad-Div Stabilization and BDF-2 Time Stepping

Highlights

- A discrete filtering operation is applied to a fully discrete grad-div scheme.
- Numerical analysis of the proposed Leray-α model was carried out.
- Numerical tests were performed for theoretical convergence rates.

Article Info

Received: 06.10.2021
Accepted: 27.10.2021

Keywords

Navier-Stokes equations, Leray-α turbulence model, Finite element method, Nonlinear filtering

Abstract

In this study, we examine a Leray-α model, which is a well-known turbulence model with grad-div stabilization. The scheme we consider is based on a finite element discretized Navier-Stokes system in space, and linearized second order backward difference (BDF2) formula in time for incompressible time dependent NSE. In addition, a grad-div stabilization term with γ parameter is added in the scheme, as it improves mass conservation and reduces the effect of pressure on velocity error. In the study, it has been shown that the solution of the fully discrete scheme obtained by BDF2 time discretization is stable and convergent. Finally, numerical tests showing the effectiveness of the proposed algorithm are presented to verify the theoretical convergence rates.

Araştırma Makalesi

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Pınar Doğru, pinardogru9@gmail.com

1. GİRİŞ

Navier-Stokes denklemleri (NSD), su, yağ, hava vb. gibi viskoz akışkan maddelerin hareketini tanımlayan kısmi diferensiyel denklemlerdir (KDD). Denklem, kütlenin korunumu ve lineer momentumun korunumu olan sürekli ortam mekaniğinin genel yasalarını temsil eder [1]. Bu denklemler birçok alanda kullanışlı denklemlerdir. Bunlardan bazıları; hava akımları ve okyanus akıntıları, boru içindeki su akışı, galaksideki yıldız hareketleri, kanat etrafındaki hava akımlarının modellenmesi ve hesaplanması vb. olarak sayılabilir. Bu akışlar uygulamada çokça karşımıza çıktığı için oldukça önemlidir. Bahsedilen NSD'nin en genel hâli aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} &u_t - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f, \\ &\nabla\cdot u = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Burada u hızı, p basıncı, f dış kuvvetleri ve $\nu > 0$ viskoziteyi ifade eder. Akış düzeni temelde akışkandaki atalet kuvvetlerinin viskoz kuvvetlere oranına bağlıdır. Bu oran, akış türlerini ayırmamızda faydalı olan Reynolds sayısını verir. Reynolds sayısı ne kadar yüksekse akışın türbülanslı akış olma olasılığı da o kadar yüksektir. Yani, yüksek Reynolds sayısına sahip düzensiz bir biçimde hareket eden üç boyutlu dönel akışlar türbülanslı akışlardır. Bu akışların anlaşılması ve modellenmesi bilim insanları için önemli problemlerden birisi olmuştur.

NSD, çözümlerinin varlığı, tekliği ve kararlılığı açısından çok karmaşık denklemlerdir. Pratikte, analitik olarak çözmek çok zordur. NSD'nin analitik çözümleri olmadığı için sayısal çözümlere ihtiyaç duyulmuştur. Bu süreçte türbülanslı akışlardaki ölçek zenginliği, hesaplamanın önündeki en büyük engel olmuştur. Ölçek aralığı genişledikçe (Reynolds sayısına göre) hesaplama maliyeti artmıştır. Bu nedenle, bazı türbülans modellerinden yararlanılmıştır.

Küçük ölçekleri temsil etmeden küçük ölçeklerin büyük ölçekler üzerindeki etkisini fiziksel değerlendirmelere dayalı olarak modelleme yöntemine Büyük Girdap Simülasyonu (BGS) denilmiştir. BGS'nin ana fikri, NSD'nin düşük geçişli filtrelemesiyle hesaplanması en pahalı olan en küçük uzunluk ölçeğini göz ardı ederek hesaplama maliyetini düşürmektir. Zaman ve mekânsal ortalama olarak görülebilen bu tür düşük geçişli bir filtreleme, küçük ölçekli bilgileri sayısal çözümden kaldırır. İyi bir BGS modeli iyi bir süzgeç yöntemine ve iyi bir alt ızgara modeline bağlıdır. Bu yöntem türbülanslı akışların yanlızca büyük ölçeklerini dikkate aldığı için akışın sınırlı bir alanda verilmesi durumunda önemli sorunlara yol açmaktadır. Bu sebepten dolayı, Leray-α modeli olarak adlandırılan, istenen matematiksel ve fiziksel özelliklere sahip NSD'nin düzgünleştirilmiş formu olarak bir türbülans modeli inşa edilmiştir [2]. Leray [2], NSE'nin doğrusal olmayan teriminde konveksiyon alanının düzenli bir hız alanı ile değiştirilmesiyle NSE'nin zayıf bir çözümünün varlığını ispatlamıştır. Yani $(u\cdot\nabla)u$ terimi yerine $(\bar{u}\cdot\nabla)u$ kullanılmıştır. Bu düzenlileştirme, filtre fonksiyonuna sahip bir konvolusyon (kıvrım) tarafından tanımlanmıştır. (1.1) deki sistemin düzenlenmesi ile oluşturulan denklem sistemi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} &u_t^\alpha - \nu\Delta u^\alpha + (\bar{u}^\alpha\cdot\nabla)u^\alpha + \nabla p^\alpha = f, \\ &\nabla\cdot u^\alpha = 0, \\ &\bar{u}^\alpha = \phi_\alpha * u^\alpha. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Burada ϕ_α, bir yumuşatma çekirdeğidir, öyle ki $\bar{u}^\alpha \to u^\alpha$ dır. Ayrıca $\alpha \to 0^+$ ise (1.2), (1.1)'e yakınsar. [3] deki Leray-α modeli, Leray (1934)'ın [2]'deki modeline daha hesaplanabilir bir alternatif olarak önerilmiş ve özel bir yumuşatma çekirdeği düşünülmüştür:

$$\bar{u}^\alpha - \alpha^2\Delta\bar{u}^\alpha = u^\alpha.$$

Buna göre (1.2)'deki α bağımlılığı düşürülerek aşağıdaki Leray-α modeli elde edilmiştir:

$$
\begin{aligned}
&u_t - \nu\Delta u + (\bar{u}\cdot\nabla)u + \nabla p = f, \\
&\nabla\cdot u = 0, \\
&(0,T]\times\Omega \ da, \quad u = \bar{u} - \alpha^2\Delta\bar{u}, \\
&\bar{u},\ (0,T]\times\Gamma \ da\ periyodiktir.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Burada $\alpha > 0$, bir uzunluk ölçeğidir (sabit). Ayrıca $\Omega = [0,2\pi L]^n, n = 2,3, \Gamma$ Lipschitz sınırı ile sınırlan bir bölgedir. Bu model, doğruluğu ve fiziksel uygunluğu korurken, daha hızlı ve daha ucuz algoritmalar geliştirmek için yol gösterici olmuştur. [4]'te türbülans modellerinin, koruma yasalarında ve çözümlerin fiziksel uygunluğunda, uygulamadaki verimlilikte ve bilgisayarlı çözümlerin doğruluğunda büyük farklılıklara yol açtığı gösterilmiştir. [5]'te gösterge fonksiyonunu kullanarak filtreleme yarıçapını yerel olarak seçen Leray düzenleştirme modelinin zamanda biçimsel, uzayda birinci dereceden sonlu eleman ayrıklaştırmasını incelemişlerdir. [6]'da Leray-α türbülans modelinin özellikleri incelenmiştir. [7]'de gösterge fonksiyonlarına dayalı doğrusal olmayan filtreleme kullanan ve sıkıştırılamaz, izotermal olmayan akışkan akışlarının bir Leray düzenleme modeli çalışılmıştır.

Bu çalışmada, ayrık bir filtre kullanılmış olan Leray-α modeli incelenmiştir. Oluşturulan şema, sıkıştırılamaz zamana bağlı NSD'nin doğrusallaştırılmış ikinci mertebeden geri doğru fark (BDF2) formülüne dayalı ve uzayda sonlu eleman ile ayrıklaştırılmış bir Navier-Stokes sistemi üzerinde uygulanmaktadır. Ayrıca oluşturulan şemaya, kütle korunumunu iyileştirdiği ve basıncın hız hatası üzerindeki etkisini azalttığı için γ parametreli bir grad-div stabilizasyon terimi dahil edilmiştir. Çalışmada, BDF2 zaman ayrıklaştırması ile elde edilen tamamen ayrık yaklaşımın çözümünün kararlı ve yakınsak olduğu gösterilmiştir. Böylelikle, [5]'te Crank-Nicholson algoritması kullanılarak dekonvolisyon tabanlı adaptif filtre ile yapılan çalışma, BDF-2 ve normal filtre ile grad-div stabilizasyon terimi eklenerek genişletilmiştir.

Çalışmanın ilerleyiş planı şu şekildedir: 2. kısımda bazı matematiksel ön hazırlıklar verilmiş ve genel gösterimler ile birlikte filtreleme yöntemi tanıtılmıştır. 3. kısımda kullanılan sayısal şema verilerek kararlılık ve hata analizi teoremleri ispatlanmıştır. 4. kısımda verilen bir sayısal örnekler teorik sonuçların doğruluğu ve yöntemin etkinliği gösterilmiştir. 5. ve son kısımda çalışma sonuç kısmıyla özetlenerek tamamlanmıştır.

2. GÖSTERİMLER VE MATEMATİKSEL ÖN HAZIRLIKLAR

Bu bölümde, makale boyunca kullanılacak olan bazı matematiksel ön bilgiler sunuyoruz. $\Omega \subset R^d$ ($d = 2$ veya 3) bölgesini bir dışbükey çokgen veya çokyüzlü olarak kabul ediyoruz. $L^2(\Omega)$ normu ve iç çarpım normu $\|\cdot\|$ ve $(\cdot,\cdot)$ şeklinde, $H^k(\Omega)$ ve $L^\infty(\Omega)$ normları da $\|\cdot\|_k$ ve $\|\cdot\|_\infty$ şeklinde gösterilecektir. $H^k(\Omega)$ uzayındaki yarı norm ise $|\,.\,|_k$ ile betimlenmiştir. Ayrıca $(0,T)$ zaman aralığında tanımlı zaman bağımlı norm

$$\|v\|_{m,k} := \left(\int_0^T \|v(t,\cdot)\|_k^m \, dt\right)^{1/m}$$

şeklinde tanımlanır.
Analiz için kullanacağımız fonksiyon uzayları aşağıdaki gibidir:

$$X := \left(H_0^k(\Omega)\right)^d := \left\{ v \in \left(H^1(\Omega)\right)^d, v = 0,\ \partial\Omega \text{ üzerinde} \right\},$$

$$Q := L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega), \int_\Omega q = 0 \right\}.$$

Ayrıca, $V \subset X$ uzayını X'in diverjanssız alt kümesi olarak tanımlarız. X'in dual uzayı H^{-1} tarafından tanıtılır ve normu aşağıdaki gibidir:

$$\| f \|_{-1} := \sup_{v \in X} \frac{|(f, v)|}{\|\nabla v\|}.$$

Kararlılık ve yakınsama analizlerinde, çoğunlukla Poincaré-Friedrichs eşitsizliği kullanılacaktır. Sadece etki alanının boyutuna bağlı olan sabit bir $C_p := C_p(\Omega)$ vardır öyle ki:

$$\|v\| \le C_p \|\nabla v\|, \ \forall v \in X . \tag{2.1}$$

Sayısal yöntemin kararlılığını garantilemek amacıyla doğrusal olmayan terimler için $b^*: X \times X \times X \to \mathbb{R}$ skew-simetrik trilineer formu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [8]:

$$b^*(u, v, w) := \frac{1}{2}\big((u.\nabla)v, w\big) - \frac{1}{2}\big((u.\nabla)w, v\big). \tag{2.2}$$

$v, w \in X$ ve $u \in V$ için $b^*(u, v, w) = ((u.\nabla)v, w)$ ve $b^*(u, v, v) = 0$ $\forall u, v \in X$ dir. Aşağıdaki lemmada verilen sınırları burada ki doğrusal olmayan terimlerde kullanacağız.

Lemma 2.1. $u, v, w \in X$ ve $v, \nabla v \in L^\infty(\Omega)$ için trilineer terimler aşağıdaki gibi sınırlandırılabilir [8]:

$$b^*(u, v, w) \le \frac{1}{2}\left(\|u\|\|\nabla v\|_\infty \|w\| + \|u\|\|\nabla w\|\|v\|_\infty\right),$$

$$b^*(u, v, w) \le C(\Omega)\|\nabla u\|\|\nabla v\| \|\nabla w\|,$$

$$b^*(u, v, w) \le C(\Omega)\|u\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\| \|\nabla w\|.$$

τ_h, maksimum eleman çapı h olan düzenli bir ağ olsun. $X_h \subset X$ ve $Q_h \subset Q$ sonlu eleman uzayları olsun. X_h nin ayrık diverjanssız alt uzayı V_h şu şekilde tanımlanmıştır:

$$V_h = \{v_h \in X_h : \ \forall q_h \in Q_h \ \textit{için} \ (\nabla \cdot v_h, q_h) = 0\}. \tag{2.3}$$

V_h uzayının en önemli özelliklerinden biri, X_h ve V_h uzaylarının yaklaşım özelliklerinin V'deki sürekli vektör alanlarına karşı, eşdeğer olmasını sağlamaktır:

$$\inf_{v_h \in V_h} \|\nabla(u - v_h)\| \le C \inf_{v_h \in X_h} \|\nabla(u - v_h)\|, \qquad \forall u \in V. \tag{2.4}$$

Burada C, h ağ boyutundan bağımsızdır. $(0, T]$ zaman aralığında tanımlanan $v(t, x)$ fonksiyonları için aşağıdaki normları tanımlayalım

$$|||v|||_{\infty,k} := \max_{0 \le n \le N} \|v(t^n, \cdot)\|_k \quad \text{ve} \quad |||v|||_{m,k} := \left(\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|v(t^n, \cdot)\|_k^m\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{2.5}$$

(X_h, Q_h) sonlu eleman uzaylarının $(k, k-1)$ dereceli parçalı polinomlarının seçimi için aşağıdaki yaklaşım özelliklerini sağladığını varsayıyoruz [9,10]

$$\inf_{v\in X_h}\|u-v\|\le Ch^{k+1}|u|_{k+1}\quad,\qquad u\in H^{k+1}(\Omega),$$
$$\inf_{v\in X_h}\|\nabla(u-v)\|\le Ch^{k}|u|_{k+1}\ ,\qquad u\in H^{k+1}(\Omega)\ ,\tag{2.6}$$
$$\inf_{r\in Q_h}\|p-r\|\le Ch^{s+1}|p|_{s+1}\quad,\qquad p\in H^{s+1}(\Omega).$$

Lemma 2.2. $a, b \geq 0$ olsun. O zaman $\forall\varepsilon > 0$ için,

$$ab\le\frac{\varepsilon}{p}a^{p}+\frac{\varepsilon^{-q/p}}{q}b^{q}\ ,$$

dur. Burada $p, q \leq 1$ ile $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olur.

Ek olarak, zaman türevli terimi ele alırken kolaylık sağlamak amacıyla analizde aşağıdaki özdeşlik kullanılmıştır. Herhangi bir a, b ve c için,

$$(3a-4b+c,a)=\frac{a^2+(2a-b)^2}{2}-\frac{b^2+(2b-c)^2}{2}+\frac{(a-2b+c)^2}{2}\tag{2.7}$$

dir. Yakınsama analizinde ayrık bir Gronwall lemması kullanılacaktır.

Lemma 2.3. $\Delta t, H, a_n,\ b_n,\ c_n, d_n >\ 0$ ve $\forall n \geq 0$ olsun. Öyle ki $l \geq 0$ için,

$$a_l+\Delta t\sum_{n=0}^{l}b_n\le\Delta t\sum_{n=0}^{l-1}d_n a_n+\Delta t\sum_{n=0}^{l}c_n+H$$

dır ve $\Delta t > 0$ için,

$$a_l+\Delta t\sum_{n=0}^{l}b_n\le exp(\Delta t\sum_{n=0}^{l}\frac{d_n}{1-\Delta t d_n})\left(\Delta t\sum_{n=0}^{l}c_n+H\right)$$

olur [11].

2.1. Filtreleme

Leray-α modeli bir filtreleme işlemi içerdiğinden, bu bölümde makale boyunca kullanılan filtreleme işlemleri tanımlanmış ve bazı ön sonuçlar sunulmuştur.

Tanım 2.1.1. $\psi\ \in\ L^2\ (\Omega)$ ve $\alpha\ > 0$ için v üzerindeki filtreleme işlemi $\overline{\psi}$ 'dir. O zaman,

$$-\alpha^2\Delta\overline{\psi}+\overline{\psi}=\psi$$

denkleminin tek çözümü olan $\overline{\psi}$, sürekli diferensiyel filtre olarak adlandırılır. $F := (-\alpha^2\Delta + I)$ olarak tanımlanır ve buradan da $\psi\ =\ F\overline{\psi}$ elde edilir.

Ayrık bir filtre tanımlamak için aşağıdaki iki tanıma ihtiyaç vardır.

Tanım 2.1.2. L^2 projeksiyonu $\Pi_h\colon L^2\ \longrightarrow X_h$ olsun. O zaman,

$$(\Pi_h\psi-\psi,\xi)=0\qquad\forall\xi\in X_h$$

dir. Ayrık Laplacian operatörü $\Delta_h : X \longrightarrow X_h$ olsun. O zaman,

$$\left(\Delta_h \psi, \xi\right) = -\left(\nabla \psi, \nabla \xi\right) \qquad \forall \xi \in X_h$$

dir. Bu eşitliklere göre de $F_h = -\alpha^2 \Delta_h + \Pi_h$ eşitliğini elde edilir [12]. Buna göre bu filtrenin ayrık versiyonu aşağıdaki tanımda verilmiştir.

Tanım 2.1.3. $\psi \in L^2(\Omega)$ ve $\alpha > 0$ için v üzerindeki ayrık filtreleme işlemi $\overline{\psi_h}$'dir. O zaman,

$$\left(\psi , \xi\right) = \left(\overline{\psi}_h, \xi\right) + \alpha^2 \left(\nabla \overline{\psi}_h, \nabla \xi\right) \qquad \forall \xi \in X_h,$$

denkleminin X_h deki tek çözümü $\overline{\psi_h}$' dir. Buradan da $\psi = F_h \overline{\psi_h}$ elde edilir. Bu tanımlama rahatlıkla V_h uzayına da taşınabilir [12].

Aşağıdaki lemmalar bize ayrık filtre hakkında bazı tahminler verir.

Lemma 2.1.1. (Ayrık Diferensiyel Filtrenin Kararlılığı**):** $\psi \in X$ için,

$$\|\overline{\psi}\| \leq \|\psi\|, \quad ve \quad \|\nabla\overline{\psi}\| \leq \|\nabla\psi\|$$

dir.
İspat. Bu sık kullanılan bir Lemma olup ispat için [12]'ye bakılabilir.

Lemma 2.1.2. (Ayrık Diferensiyel Filtrenin Yakınsaklığı**):** $\psi \in X$ ve $\Delta\psi \in L^2(\Omega)$ için,

$$\alpha^2 \left\|\nabla\left(\psi - \overline{\psi}\right)\right\|^2 + \left\|\psi - \overline{\psi}\right\|^2 \leq C \inf_{\xi \in X_h} \left\{\alpha^2 \left\|\nabla\left(\psi - \xi\right)\right\|^2 + \left\|\psi - \xi\right\|^2\right\} + C\alpha^4 \left\|\Delta\psi\right\|^2$$

ve buradan da

$$\left\|\psi - \overline{\psi}\right\| \leq C\left(\alpha h^k + h^{k+1}\right)\left|\psi\right|_{k+1} + C\alpha^2 \left\|\Delta\psi\right\|$$

dir [6].
İspat. Lemma'nın ispatı [6]'da verilmiştir.

3. SAYISAL ŞEMANIN ANALİZİ

Bu bölümde ilk önce kullanılacak olan şema sonlu eleman uzayı boyutunda verilecek ve önerilen modelin ayrık yaklaşımının çözümünün kararlı olduğu gösterilecektir. Kararlılık özelliğinin bir sonucu olarak çözümlerin varlık ve tekliğinden bahsedilip çalışmanın temel teoremi olan yakınsaklık sonucu ortaya konulacaktır. Öncelikle yaklaşıma uygun asimptotik hata tahminlerini oluşturmak için (u, p) çözümün düzenli olduğunu varsaymamız gerekir:

$$u \in L^\infty\left(0,T; H^{k+1} \cap V \cap H^3(\Omega)\right), \quad u_{tt} \in L^2\left(0,T; H^1(\Omega)\right), \quad u_{ttt} \in L^2\left(0,T; L^2(\Omega)\right),$$
$$p \in L^\infty\left(0,T; H^k(\Omega)\right).$$

Kullanılacak olan algoritma aşağıda verilmiştir:

Algoritma 3.1.

Dış kuvvet f, başlangıç koşulları u_h^{-1}, u_h^0, filtre yarıçapı $\alpha \leq O(h)$ verilsin. Δt zaman adımı olsun. Öyleyse $n = 0,1,2,\cdots,N-1$ zamanlarında $u_h^{n+1} \in X_h$, $p_h^{n+1} \in Q_h$ çözümlerini verilen iki adıma göre bulunuz.

1. Adım: Verilen u_h^{n-1}, u_h^n ve bulunan $u_h^{n+1} \in X_h$, $p_h^{n+1} \in Q_h$ aşağıdaki denklemi sağlar. Öyle ki $v_h \in X_h$, $q_h \in Q_h$ için,

$$\left(\frac{3u_h^{n+1}-4u_h^n+u_h^{n-1}}{2\Delta t}, v_h\right)+\nu\left(\nabla u_h^{n+1}, \nabla v_h\right)+b^*\left(\overline{U_h^n}, u_h^{n+1}, v_h\right)$$
$$-\left(p_h^{n+1}, \nabla\cdot v_h\right)+\gamma\left(\nabla\cdot u_h^{n+1}, \nabla\cdot v_h\right)=\left(f^{n+1}, v_h\right), \tag{3.1}$$
$$\left(\nabla\cdot u_h^{n+1}, q_h\right)=0.$$

Burada $\overline{U_h^n} = \overline{2u_h^n - u_h^{n-1}}$, dir.

2. Adım: Verilen u_h^{n-1}, u_h^n ve bulunan $\overline{U_h^n}$ aşağıdaki denklemi sağlar. Öyle ki $\forall v_h \in V_h$ için,

$$\left(2u_h^n-u_h^{n-1}, v_h\right)=\left(\overline{U_h^n}, v_h\right)+\alpha^2\left(\nabla\left(\overline{U_h^n}\right), \nabla v_h\right). \tag{3.2}$$

Verilen modeldeki $\overline{U_h^n}$ terimi vasıtasıyla şema bir dışkestirim şeklinde lineerleştirilmiş olup kodlama yapılırken bunun dışında bir Newton ya da sabit nokta gibi bir yönteme ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu şekilde her bir zaman adımında sadece bir tane lineer denklem sistemi çözülecek olup hesap zamanı ve sistem karmaşası anlamında avantaj sağlanmıştır.

Aşağıda modelin 1. adımına ait kararlık analizi verilmiştir. 2. adımın kararlılığı da Lemma 2.1.1'den aşikârdır.

Teorem 3.1. (Kararlılık): $f \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ ve başlangıç şartları $u_h^0, u_h^{-1} \in V_h$ olsun. Filtreleme yarıçapı $\alpha \le O(h)$ ve bulunan çözüm $u_h^{n+1} \in X_h$, $p_h^{n+1} \in Q_h$ $(n = 0,1,2,\cdots,N-1)$ aşağıdaki denklemi sağlar. Öyle ki $v_h \in X_h$, $q_h \in Q_h, \forall \Delta t > 0$ için,

$$\left\|u_h^N\right\|^2+\left\|2u_h^N-u_h^{N-1}\right\|^2+2\Delta t\nu\sum_{n=0}^{N-1}\left\|\nabla u_h^{n+1}\right\|^2+4\Delta t\gamma\sum_{n=0}^{N-1}\left\|\nabla . u_h^{n+1}\right\|^2$$
$$\le\left\|u_h^0\right\|^2+\left\|2u_h^0-u_h^{-1}\right\|^2+C\Delta t\nu^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left\|f^{n+1}\right\|_{-1}^2$$

dir.

İspat. (3.1) de $v_h = u_h^{n+1}$ alalım. (3.2), (2.3) ve (3.1)'den yararlanarak

$$\frac{1}{4\Delta t}\left[\left\|u_h^{n+1}\right\|^2-\left\|u_h^n\right\|^2+\left\|2u_h^{n+1}-u_h^n\right\|^2-\left\|2u_h^n-u_h^{n-1}\right\|^2+\left\|u_h^{n+1}-2u_h^n+u_h^{n-1}\right\|^2\right]+\nu\left\|\nabla u_h^{n+1}\right\|^2+\gamma\left\|\nabla . u_h^{n+1}\right\|^2$$
$$=\left(f^{n+1}, u_h^{n+1}\right)$$

elde edilir.

Dual normun tanımından ve Lemma 2.2'den bir sınırlama elde edip her tarafı $4\Delta t$ ile çarparsak,

$$\left\|u_h^{n+1}\right\|^2-\left\|u_h^n\right\|^2+\left\|2u_h^{n+1}-u_h^n\right\|^2-\left\|2u_h^n-u_h^{n-1}\right\|^2+\left\|u_h^{n+1}-2u_h^n+u_h^{n-1}\right\|^2+2\Delta t\nu\left\|\nabla u_h^{n+1}\right\|^2+4\Delta t\gamma\left\|\nabla . u_h^{n+1}\right\|^2$$
$$\le C\Delta t\nu^{-1}\left\|f^{n+1}\right\|_{-1}^2$$

olur. 5. terimi ihmal edip 0 dan $N-1$' e kadar toplam alırsak da Teorem 3.1'in ifadesindeki eşitsizliği elde ederiz.

Sonuç 3.1. Teorem 3.1'de verilen kararlılık özelliğinin iyi bilinen bir sonucu olarak Algoritma 3.1'in çözümlerinin varlığı ve tekliği garantilenmiştir [5,6,7].

Bundan sonraki teoremde de Algoritma 3.1'in hata (yakınsama) analizi verilmiştir.

Teorem 3.2. $(u_h^{n+1},\, p_h^{n+1}), [0,T]$ zaman aralığında $n = 0,\cdots,N-1$, Algoritma 3.1'in çözümü olsun ve düzenlilik varsayımları geçerli olsun. Denklemin hatası $e^{n+1} = u^{n+1} - u_h^{n+1}$ şeklinde tanımlansın. C; h ağ genişliğinden ve Δt'den bağımsız bir pozitif sabittir. Öyle ki (P_k, P_{k-1}) biçimindeki sonlu eleman seçimleriyle hata

$$\left\|e^N\right\|^2 + \left\|2e^N - e^{N-1}\right\|^2 + \sum_{n=1}^{N-1}\left\{\left\|e^{n+1} - 2e^n + e^{n-1}\right\|^2 + 2\Delta t\nu\,\left\|\nabla e^{n+1}\right\|^2 + \Delta t\gamma\left\|\nabla . e^{n+1}\right\|^2\right\}$$
$$\leq C\left(\Delta t^4 + \alpha^2 h^{2k} + \gamma h^{2k} + h^{2k} + \alpha^4\right)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada C; α, h ve Δt'den bağımsız bir sabittir.
İspat. (1.1)'in zayıf formülasyonundan (3.1) çıkarılarak elde edilen hata denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\left(\frac{3e^{n+1} - 4e^n + e^{n-1}}{2\Delta t}, v_h\right) + \nu\,(\nabla e^{n+1}, \nabla v_h) + b^*(u^{n+1}, u^{n+1}, v_h) - b^*\left(\overline{U_h^n}, u_h^{n+1}, v_h\right)$$
$$+ \gamma(\nabla . e^{n+1}, \nabla . v_h)$$
$$= \left(\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} - u_t, v_h\right) + \left(p^{n+1} - q^h, \nabla . v_h\right).$$

Hatayı $I_h(u^{n+1}) \in V_h$ interpolasyonu ile ayrıştırırsak,

$$e^{n+1} = u^{n+1} - u_h^{n+1} = \left(u^{n+1} - I_h\left(u^{n+1}\right)\right) - \left(u_h^{n+1} - I_h\left(u^{n+1}\right)\right) = \eta^{n+1} - \phi_h^{n+1}$$

eşitliğini elde ederiz. Hata denkleminde $v_h = \phi_h^{n+1}$ seçimi ve doğrusal olmayan terimlere $b^*\left(\overline{e^{n+1}}, u^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right)$ ve $b^*\left(\overline{U_h^{n+1}}, u^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right)$ terimlerinin eklenip çıkarılması ile de denklem,

$$\left(\frac{3\phi_h^{n+1} - 4\phi_h^n + \phi_h^{n-1}}{2\Delta t}, \phi_h^{n+1}\right) + \nu\left(\nabla\phi_h^{n+1}, \nabla\phi_h^{n+1}\right) + \gamma\left(\nabla . \phi_h^{n+1}, \nabla . \phi_h^{n+1}\right)$$
$$= \left(\frac{3\eta^{n+1} - 4\eta^n + \eta^{n-1}}{2\Delta t}, \phi_h^{n+1}\right) + \left(\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} - u_t, \phi_h^{n+1}\right) + \nu\,\left(\nabla\eta^{n+1}, \nabla\phi_h^{n+1}\right) + \gamma\left(\nabla . \eta^{n+1}, \nabla . \phi_h^{n+1}\right)$$
$$-\left(p^{n+1} - q^h, \nabla . \phi_h^{n+1}\right) + b^*\left(u^{n+1} - \overline{u^{n+1}}, u^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right) + b^*\left(\overline{\eta^{n+1}}, u^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right)$$
$$-b^*\left(\overline{\phi_h^{n+1}}, u^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right) + b^*\left(\overline{u_h^{n+1}}, u^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right) + b^*\left(\overline{U_h^n}, \eta^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right) - b^*\left(\overline{U_h^n}, u^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right)$$

olur. Sol tarafı (3.1)'e göre düzenlersek,

$$\frac{1}{4\Delta t}\left[\left\|\phi_h^{n+1}\right\|^2 + \left\|2\phi_h^{n+1} - \phi_h^n\right\|^2 - \left\|\phi_h^n\right\|^2 - \left\|2\phi_h^n - \phi_h^{n-1}\right\|^2 + \left\|\phi_h^{n+1} - 2\phi_h^n + \phi_h^{n-1}\right\|^2\right] + \nu\,\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|^2 + \gamma\left\|\nabla . \phi_h^{n+1}\right\|^2$$
$$= \left(\frac{3\eta^{n+1} - 4\eta^n + \eta^{n-1}}{2\Delta t}, \phi_h^{n+1}\right) + \left(\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} - u_t, \phi_h^{n+1}\right) + \nu\,\left(\nabla\eta^{n+1}, \nabla\phi_h^{n+1}\right) + \gamma\left(\nabla . \eta^{n+1}, \nabla . \phi_h^{n+1}\right)$$
$$-\left(p^{n+1} - q^h, \nabla . \phi_h^{n+1}\right) + b^*\left(u^{n+1} - \overline{u^{n+1}}, u^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right) + b^*\left(\overline{\eta^{n+1}}, u^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right)$$
$$-b^*\left(\overline{\phi_h^{n+1}}, u^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right) + b^*\left(\overline{u_h^{n+1}}, u^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right) + b^*\left(\overline{U_h^n}, \eta^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right) - b^*\left(\overline{U_h^n}, u^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right)$$

olur. Şimdi de denklemin sağ tarafındaki terimlerin mutlak değerleri teker teker sınırlandırılacaktır. İlk üç terim için Poincare ve Cauchy-Schwarz eşitsizlikleri ile beraber Young's eşitsizliği ve kalan terimli Taylor yaklaşımı uygulanırsa [7],

$$\left(\frac{3\eta^{n+1}-4\eta^{n}+\eta^{n-1}}{2\Delta t},\phi_h^{n+1}\right)\le \frac{3\nu}{40}\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|^2+\frac{C\nu^{-1}}{\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\left\|\eta_t\right\|^2 dt\,,$$

$$\left(\frac{3u^{n+1}-4u^{n}+u^{n-1}}{2\Delta t}-u_t,\phi_h^{n+1}\right)\le \frac{3\nu}{40}\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|^2+C\nu^{-1}\Delta t^3\left(\int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}}\left\|u_{ttt}\right\|^2 dt\right),$$

$$\nu\left(\nabla\eta^{n+1},\nabla\phi_h^{n+1}\right)\le\nu\left\|\nabla\eta^{n+1}\right\|\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|\le\frac{3\nu}{40}\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|^2+C\nu\left\|\nabla\eta^{n+1}\right\|^2,$$

olur. Grad-div'li terim için Cauchy-Schwarz ve Young's eşitsizliklerinden,

$$\gamma\left(\nabla.\eta^{n+1},\nabla.\phi_h^{n+1}\right)\le\frac{3\gamma}{4}\left\|\nabla.\phi_h^{n+1}\right\|^2+\frac{\gamma}{3}\left\|\nabla.\eta^{n+1}\right\|^2$$

ve basınç terimi için benzer şekilde,

$$\left(p^{n+1}-q^h,\nabla.\phi_h^{n+1}\right)\le\frac{3\nu}{40}\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|^2+C\nu^{-1}\left\|p^{n+1}-q^h\right\|^2$$

sınırlamaları elde edilmiştir. Şimdi de doğrusal olmayan trilineer terimleri sınırlandıralım. İlk trilineer terim için Lemma 2.1, Lemma 2.1.2, Cauchy-Schwarz ve Young's eşitsizliklerinden yararlanırsak,

$$\begin{aligned} b^*\left(u^{n+1}-\overline{u^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)&\le\frac{3\nu}{40}\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|^2+C\nu^{-1}\left\|u^{n+1}-\overline{u^{n+1}}\right\|^2\\ &\le\frac{3\nu}{40}\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|^2+C\nu^{-1}(\alpha^2h^{2k}+h^{2k+2}\left|\overline{u}\right|_{k+1}^2)+C\alpha^4\nu^{-1}\left\|\Delta u\right\|^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Kalan trilineer terimler için Lemma 2.1, Lemma 2.1.1, Cauchy-Schwarz ve Young's eşitsizliklerinden faydalanırsak,

$$b^*\left(\overline{\eta^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)\le\left\|\overline{\eta^{n+1}}\right\|^{1/2}\left\|\nabla\overline{\eta^{n+1}}\right\|^{1/2}\left\|\nabla u^{n+1}\right\|\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|\le\frac{3\nu}{40}\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|^2+C\nu^{-1}\left\|\eta^{n+1}\right\|\left\|\nabla\eta^{n+1}\right\|\left\|\nabla u^{n+1}\right\|^2,$$

$$b^*\left(\overline{\phi_h^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)\le\frac{3\nu}{40}\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|^2+C\nu^{-3}\left\|\phi_h^{n+1}\right\|^2\left\|\nabla u^{n+1}\right\|^4,$$

$$b^*\left(\overline{u_h^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)\le\left\|\overline{u_h^{n+1}}\right\|^{1/2}\left\|\overline{\nabla u_h^{n+1}}\right\|^{1/2}\left\|\nabla u^{n+1}\right\|\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|\le\frac{3\nu}{40}\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|^2+C\nu^{-1}\left\|u_h^{n+1}\right\|\left\|\nabla u_h^{n+1}\right\|\left\|\nabla u^{n+1}\right\|^2,$$

$$b^*\left(\overline{U_h^{n}},\eta^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)\le\frac{3\nu}{40}\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|^2+C\nu^{-1}\left\|U_h^{n}\right\|\left\|\nabla U_h^{n}\right\|\left\|\nabla\eta^{n+1}\right\|^2,$$

$$b^*\left(\overline{U_h^{n}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)\le\frac{3\nu}{40}\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|^2+C\nu^{-1}\left\|U_h^{n}\right\|\left\|\nabla U_h^{n}\right\|\left\|\nabla u^{n+1}\right\|^2$$

olur. Sağ taraftaki tüm sınırlamaları toplarsak,

$$\frac{1}{4\Delta t}\left[\left\|\phi_h^{n+1}\right\|^2-\left\|2\phi_h^{n+1}-\phi_h^{n}\right\|^2-\left\|\phi_h^{n}\right\|^2+\left\|2\phi_h^{n}-\phi_h^{n-1}\right\|^2+\left\|\phi_h^{n+1}-2\phi_h^{n}+\phi_h^{n-1}\right\|^2\right]+\frac{\nu}{4}\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|^2+\frac{\gamma}{4}\left\|\nabla.\phi_h^{n+1}\right\|^2$$
$$\leq\frac{C\nu^{-1}}{\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\left\|\eta_t\right\|^2dt+C\nu^{-1}\Delta t^3\left(\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\left\|u_{ttt}\right\|^2dt\right)+C\nu\left\|\nabla\eta^{n+1}\right\|^2+\frac{\gamma}{3}\left\|\nabla\eta^{n+1}\right\|^2+C\nu^{-1}\left\|p^{n+1}-q^h\right\|^2$$
$$+C\nu^{-1}(\alpha^2h^{2k}+h^{2k+2}\left|\overline{u}\right|_{k+1}^2)+C\alpha^4\nu^{-1}\left\|\Delta u\right\|^2+C\nu^{-1}\left\|\eta^{n+1}\right\|\left\|\nabla\eta^{n+1}\right\|\left\|\nabla u^{n+1}\right\|^2$$
$$+C\nu^{-3}\left\|\phi_h^{n+1}\right\|^2\left\|\nabla u^{n+1}\right\|^4+C\nu^{-1}\left\|u_h^{n+1}\right\|\left\|\nabla u_h^{n+1}\right\|\left\|\nabla u^{n+1}\right\|^2$$
$$+C\nu^{-1}\left\|U_h^{n}\right\|\left\|\nabla U_h^{n}\right\|\left\|\nabla\eta^{n+1}\right\|^2+C\nu^{-1}\left\|U_h^{n}\right\|\left\|\nabla U_h^{n}\right\|\left\|\nabla u^{n+1}\right\|^2$$

elde ederiz. Denklemin her iki tarafını $4\Delta t$ ile çarpıp ve 0 dan $\mathrm{N}-1$ e kadar toplam alırsak,

$$\left\|\phi_h^N\right\|^2+\left\|2\phi_h^N-\phi_h^{N-1}\right\|^2+\sum_{n=0}^{N-1}\{\left\|\phi_h^{n+1}-2\phi_h^n+\phi_h^{n-1}\right\|^2+\Delta t\nu\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|^2+\Delta t\gamma\left\|\nabla.\phi_h^{n+1}\right\|^2\}$$
$$\leq\left\|\phi_h^0\right\|^2+\left\|2\phi_h^0-\phi_h^{-1}\right\|^2+\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}C\nu^{-3}\left\|\phi_h^{n+1}\right\|^2\left\|\nabla u^{n+1}\right\|^4$$
$$+\sum_{n=0}^{N-1}C\left\{\nu^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\|\eta_t\|^2dt+\nu^{-1}\Delta t^4\left(\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\|u_{ttt}\|^2dt\right)\right.$$
$$+\Delta t\nu\|\nabla\eta^{n+1}\|^2+\Delta t\gamma\|\nabla\eta^{n+1}\|^2+\Delta t\nu^{-1}\left\|p^{n+1}-q^h\right\|^2+C\Delta t\nu^{-1}(\alpha^2h^{2k}+h^{2k+2}\left|\overline{u}\right|_{k+1}^2)$$
$$+C\Delta t\alpha^4\nu^{-1}\|\Delta u\|^2+\Delta t\nu^{-1}\|\eta^{n+1}\|\|\nabla\eta^{n+1}\|\left\|\nabla u^{n+1}\right\|^2+\Delta t\nu^{-1}\left\|u_h^{n+1}\right\|\left\|\nabla u_h^{n+1}\right\|\|\nabla u^{n+1}\|^2$$
$$\left.+\Delta t\nu^{-1}\|U_h^n\|\|\nabla U_h^n\|\|\nabla\eta^{n+1}\|^2+\Delta t\nu^{-1}\|U_h^n\|\|\nabla U_h^n\|\|\nabla u^{n+1}\|^2\right\}$$

olur. (2.5) ile tanımlanan normları kullanıp (2.6) yaklaşım özelliklerini uygularsak

$$\left\|\phi_h^N\right\|^2+\left\|2\phi_h^N-\phi_h^{N-1}\right\|^2+\sum_{n=0}^{N-1}\{\left\|\phi_h^{n+1}-2\phi_h^n+\phi_h^{n-1}\right\|^2+\Delta t\nu\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|^2+\Delta t\gamma\left\|\nabla.\phi_h^{n+1}\right\|^2\}$$
$$\leq\left\|\phi_h^0\right\|^2+\left\|2\phi_h^0-\phi_h^{-1}\right\|^2+\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}C\nu^{-3}\left\|\phi_h^{n+1}\right\|^2\left\|\nabla u^{n+1}\right\|^4+C\left\{\nu^{-1}h^{2k+2}\left\|\left|u_t\right|\right\|_{2,k+1}^2+\nu^{-1}\Delta t^4\left\|\left|u_{ttt}\right|\right\|_{2,0}^2\right.$$
$$+\left(\nu+\gamma\right)h^{2k}\left\|\left|u\right|\right\|_{2,k+1}^2+\nu^{-1}h^{2s+2}\left\|\left|p\right|\right\|_{2,s+1}^2+\nu^{-1}\left(\alpha^2h^{2k}+h^{2k+2}\right)\left\|\left|\overline{u}\right|\right\|_{2,k+1}^2+\alpha^4\nu^{-1}\left\|\left|\Delta u\right|\right\|_{2,0}^2$$
$$\left.+h^{2k+1}\nu^{-1}\left(\left\|\left|u\right|\right\|_{4,k+1}^4+\left\|\left|\nabla u\right|\right\|_{4,0}^4\right)+C\nu^{-1}\left\|\left|\nabla u\right|\right\|_{2,0}^2+C^*\left(\nu^{-1},f,u_0,u_{-1}\right)\right\}$$

olur.

Burada sürekli çözüm olan u ve U nun düzenlilik özelliği ve $u_h$ve U_h de kararlılık özelllikleri kullanılmış ve buradan oluşan terimler C^* olarak gösterilmiştir. Elde edilen denklemin son hâline Gronwall lemmasını uygularsak,

$$\left\|\phi_h^N\right\|^2+\left\|2\phi_h^N-\phi_h^{N-1}\right\|^2+\sum_{n=0}^{N-1}\{\left\|\phi_h^{n+1}-2\phi_h^n+\phi_h^{n-1}\right\|^2+\Delta t\nu\left\|\nabla\phi_h^{n+1}\right\|^2+\Delta t\gamma\left\|\nabla.\phi_h^{n+1}\right\|^2\}$$

$$\leq \left\|\phi_h^0\right\|^2 + \left\|2\phi_h^0 - \phi_h^{-1}\right\|^2 + C\,\exp\left(\tilde{C}\nu^{-3}T\right)\Big\{\nu^{-1}h^{2k+2}\left\|u_t\right\|_{2,k+1}^2 + \nu^{-1}\Delta t^4\left\|u_{ttt}\right\|_{2,0}^2 + \left(\nu+\gamma\right)h^{2k}\left\|u\right\|_{2,k+1}^2$$
$$+\nu^{-1}h^{2s+2}\left\|p\right\|_{2,s+1}^2 + \nu^{-1}\left(\alpha^2h^{2k} + h^{2k+2}\right)\left|\overline{u}\right|_{2,k+1}^2 + \alpha^4\nu^{-1}\left\|\Delta u\right\|_{2,0}^2$$
$$+h^{2k+1}\nu^{-1}\left(\left\|u\right\|_{4,k+1}^4 + \left\|\nabla u\right\|_{4,0}^4\right) + C\nu^{-1}\left\|\nabla u\right\|_{2,0}^2 + C^*\left(\nu^{-1}, f, u_0, u_{-1}\right)\Big\}$$

olur. Son olarak da yaklaşım özellikleri kullanılıp $\left\|e^{n+1}\right\| \leq \left\|\eta^{n+1} - \phi_h^{n+1}\right\| \leq \left\|\eta^{n+1}\right\| + \left\|\phi_h^{n+1}\right\|$ üçgen eşitsizliği hata terimlerine uygulanırsa Teorem 3.2'deki ifade elde edilmiş olur.

Sonuç 3.1. Teorem 3.2'de elde edilen hata yaklaşımı optimal bir hata yaklaşımıdır. Örneğin Taylor-Hood sonlu eleman çifti seçilecek olursa ($k=2, s=1$), (P^2, P^1) polinom seçimlerine göre hatanın mertebesi 2 olur ki bu da beklenen mertebedir. Ayrıca $h, \Delta t, \alpha \to 0$ iken $u \to u_h$ olduğu da teorem ifadesinden açıktır.

4. SAYISAL TEST

Bu bölümde teorik sonuçlarımızı doğrulamak için sayısal bir simülasyon sunulmuştur. Hesaplamalarda, herkese açık lisanslı bir sonlu eleman yazılım paketi olan FreeFem++ kullanılmıştır [13]. Bu sayısal test, ele aldığımız (3.1)-(3.2)'deki şemanın yakınsama davranışını ortaya çıkarmak ve Teorem 3.2'de elde edilen sonucu doğrulamak amacıyla yapılmıştır.

İlk önce uzaysal hatanın mertebesi incelenmiştir. Burada Sonuç 3.1'de bahsedilen Taylor-Hood sonlu eleman çifti düşünülmüş olduğundan hata için beklenen mertebe 2'dir. Model problem hesapsal bölge $\Omega = \left(0,1\right)^2$'dir. Hesapsal bölge, çeşitli kaba ağ çözünürlüğü ile üçgenlenmiş olup ağ genişliği $h = 2^{-1}$'den $h = 2^{-6}$'ya kadar alınmıştır. Bu seçimler, yakınsama oranlarını doğrulamak ve modeller arasındaki hataları karşılaştırmak için yeterli olmuştur. Yakınsayan çözüm [0, 1] zaman aralığında hesaplanmıştır. Uzaysal hatanın etkisini en aza indirmek ve hata üzerindeki zamansal etkiyi tam olarak ortaya çıkarmak için $\Delta t = 0,00625$ alınmıştır. $\nu = \gamma = 1$ ve $\alpha = h$ için hatanın H_1 normları değerlendirilmiştir. Bu test problemi için gerçek hız ve basınç değişkenleri aşağıdaki gibi ele alınmıştır:

$$u = \begin{bmatrix} e^t cos(y) \\ e^t sin(x) \end{bmatrix} \; p = (x-y)(1+\ t).$$

Bu değerler (1.1)'de yerine yazılarak f fonksiyonu elde edilmiştir. Sayısal çözümün sonuçları farklı h değerleri için *Çizelge 1*'de verilmiştir. Bu çizelgedende görüldüğü üzere, uzaysal anlamda yakınsama derecesi 2'dir ve beklenen optimal yakınsama derecesidir.

Çizelge 1. $\boldsymbol{\Delta t} = 0,00625$; $\boldsymbol{\gamma} = 1$; $\alpha = \boldsymbol{h}$ ***ve*** $\boldsymbol{\nu} = 1$ *için bulunan hız hataları ve oranları*

h	$\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^h\right)\right\|$	Oran
2^{-1}	0,00216	--
2^{-2}	0,0005	2,07

2^{-3}	0,0001	2,32
2^{-4}	$3,5.10^{-5}$	1,73
2^{-5}	$8,9.10^{-6}$	1,95
2^{-6}	$2,2.10^{-6}$	2,03

Benzer şekilde zamansal hatanın derecesini bulmak için aynı bölgede aynı özel çözüm fonksiyonları ve sağ taraf kullanılarak bu kez sabit bir $h = 2^{-6}$ ağ kalınlığı alınmış ve $[0,2]$ zaman aralığında değişen Δt değerlerine göre hatalar kıyaslanarak zamansal hata ayırt edilmiştir. Elde edilen sonuçlar *Çizelge 2*'de sunulmuştur. Görüldüğü üzere zamansal boyutta da optimal hata derecesi olan 2'ye yaklaşık olarak ulaşılmıştır.

Çizelge 2. $\gamma = 1$, $\boldsymbol{h = 2^{-6}}$ ***ve*** $\mathbf{v} = 1$ *için bulunan hız hataları ve oranları*

Δt	$\left\lVert \nabla \left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^h \right) \right\rVert$	**Oran**
2^{0}	0,10	--
2^{-1}	0,034	1,55
2^{-2}	0,009	1,91
2^{-3}	0,002	2,16
2^{-4}	0,0007	1,53
2^{-5}	0,0002	1,80

Verilen çizelgelerden de görüldüğü üzere Teorem 3.2'de elde edilen teorik yakınsama oranları model bir problem üzerinde de doğrulanmış olup, çalışmada tanımlanan algoritmanın doğruluğu ve etkinliği sayısal olarak göz önüne konulmuştur.

5. SONUÇ

Bu çalışmada, Navier-Stokes denklemleri için bir türbülans modeli olarak kullanılan Leray–α modelinin grad-div kararlılışatırması ele alınmıştır. Oluşturulan sonlu elemanlar algoritmasında BDF2 zaman şeması uygulanmış ve lineer olmayan terim 2. mertebeden bir dış kestirim açılımıyla lineerleştirilmiştir. Oluşturulan tamamen ayrık şemanın kararlılık ve yakınsaklık özellikleri gösterilerek sayısal çözümün varlık ve teklik durumu ele alınmıştır. Ayrıca teorik yakınsama oranlarını doğrulamak için önerilen algoritmanın etkinliğini gösteren sayısal yakınsama testleri de sunulmuştur. Grad-div kararlılaştırması içeren benzer şemaların başka türbülans modellerine uygulanması ve incelenmesi ileriki çalışma konuları olarak düşünülmektedir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 119F345 numaralı proje kapsamında desteklenmektedir. Bu destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ediyoruz.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması/çakışması bulunmamaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Foias, C., Manley, O., Rosa, R., Temam, R., & Meng, J. (2002). Navier-Stokes Equations and Turbulence. Encyclopedia of Math and its Applications, Vol. 83. Applied Mechanics Reviews, 55(3), B57.
[2] Leray, J. (1934). Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Mathematica, 63(1), 193-248.

[3] Cheskidov, A., Holm, D. D., Olson, E., & Titi, E. S. (2005). On a Leray–α model of turbulence. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 461(2055), 629-649.
[4] Hill, R. (2010). Benchmark Testing the α-models of Turbulence. A project presented to the Graduate School of Clemson University.
[5] Bowers, A. L., & Rebholz, L. G. (2013). Numerical study of a regularization model for incompressible flow with deconvolution-based adaptive nonlinear filtering. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 258, 1-12.
[6] Busa, A. (2014). The Leray-α model of turbulence. Tech. report, MS Thesis, Free University of Berlin.
[7] Akbaş, M., & Bowers, A. (2021). Improving accuracy in the Leray model for incompressible nonisothermal flows via adaptive deconvolution-based nonlinear filtering. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 44(8), 6679-6699.
[8] Layton W. (2008). Introduction to the Numerical Analysis of Incompressible Viscous Flows. SIAM.
[9] Brenner S, Scott LR. (1994). The Mathematical Theory of Finite Element Methods: Springer-Verlag.
[10] Zhang S. (2005). A new family of stable mixed finite elements for the 3d Stokes equations. Math Comp., 74(250):543-554.
[11] Heywood, J. Rannacher, R. (1990). Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem. Part IV: Error analysis for the second-order time discretization. SIAM J. Numer. Anal., 27(2):353-384.
[12] Layton, W., Manica, C. C., Neda, M., & Rebholz, L. G. (2008). Numerical analysis and computational testing of a high accuracy Leray-deconvolution model of turbulence. Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal, 24(2), 555-582.
[13] Hecht, F. (2012). New development in FreeFem++. Journal of Numerical Mathematics, 20(3-4), 251-266.