

Szacowanie niepewności pomiarów współrzędnościowych

Część 1: Niepewność pomiaru ogólnie

Władysław JAKUBIEC, Wojciech PŁOWUCHA, Paweł ROSNER, Mirosław WOJTYŁA



Akademia
Techniczno-Humanistyczna
w Bielsku-Białej



Wydział
Budowy Maszyn i Informatyki



Laboratorium Wzorcujące
Akredytacja PCA Nr AP 138

Cel kursu

Uporządkowanie dostępnych informacji z zakresu niepewności pomiaru, a szczególnie pomiarów współrzędnościowych.

Przygotowanie do szerokiego wdrożenia w przemyśle metody szacowania niepewności opracowanej w ATH i zwalidowanej w ramach projektu EMPIR EURAMET numer 17NRM03 “Standards for the evaluation of the uncertainty of coordinate measurements in industry EUCoM” koordynowanego Alessandro Balsamo (INRIM).



EMPIR EURAMET Project

Projekt 17NRM03 “Standards for the evaluation of the uncertainty of coordinate measurements in industry EUCoM” jest realizowany w latach 2019-2021 przez:

INRIM (Italy) (coordinator),
Metroserf (Estonia),
GUM (Poland),
NPL (UK),
TUBITAK (Turkey),
ATH (Poland),
przy współpracy z Politechniką Krakowską.

IK4-TEKNIKER (Spain),
CMI (Czech Republic),
DTI (Denemark),
PTB (Germany),
NMIJ-AIST (Japan),
UNIPD (Italy),

Więcej informacji na <https://eucom-empir.eu>



Analiza literatury dotyczącej niepewności pomiaru

Podstawowym dokumentem jest przewodnik GUM [JCGM 100, 101 i 104].

Na uwagę zasługują również [EA-4/02 i ISO 14253-2].

W obszarze metrologii współrzędnościowej ważne są [ISO 15530-1, -3, -4].

Warto również wspomnieć o [VDI/VDE 2617-11] i projekcie [ISO 15530-2].

- JCGM 104:2009 Evaluation of measurement data. An introduction to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” and related documents
- JCGM 100 Evaluation of measurement data. Guide to the expression of uncertainty in measurement
- JCGM 101 Evaluation of measurement data. Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement”. Propagation of distributions using a Monte Carlo method
- EA-4/02 Evaluation of the Uncertainty of Measurement In Calibration
- ISO 14253-2 Geometrical product specifications (GPS). Inspection by measurement of workpieces and measuring equipment. Part 2: Guidance for the estimation of uncertainty in GPS measurement, in calibration of measuring equipment and in product verification
- ISO 15530 Technique for determining the uncertainty of measurement. Part 1 (TS): Overview and metrological characteristics. Part 3: Use of calibrated workpieces or measurement standards. Part 4 (TS): Evaluating task-specific measurement uncertainty using simulation. Part 2 (projekt)
- VDI/VDE 2617: 2011 Accuracy of coordinate measuring machines. Characteristics and their checking. Determination of the uncertainty of measurement for coordinate measuring machines using uncertainty budgets

Dokumenty ogólne

JCGM 104

JCGM 100

JCGM 101

Dokument ogólny dotyczący
wzorcowania w różnych dziedzinach

EA-4/02

Dokumenty dotyczące wzorcowania
i pomiarów geometrycznych

ISO 14253-2 Wytyczne szacowania
niepewności pomiarów w GPS

Dokumenty dotyczące pomiarów współrzędnościowych

ISO 15530-1 (overview)

ISO 15530-3 (wywzorcowany przedmiot)

ISO/TS 15530-4 (Monte Carlo)
(UES uncertainty evaluation software)

VDI/VDE 2617-11 (uncertainty budgets)

15530-x (sensitivity analysis)

15530-2 (wielopozycyjna)

JCGM 100

WYRAŻANIE
NIEPEWNOŚCI
POMIARU

PRZEWODNIK

ISO International Organization for Standardization
IEC International Electrotechnical Commission
IEC International Commission on Illumination
ISO International Organization for Standardization
IAF International Federation of Calibration and
Certification
ILAC International Laboratory Accreditation
Cooperation

Copyright 2008

BIPM

JCGM 100:2008

GUM 1995 with minor corrections

Evaluation of measurement
data — Guide to the expression
of uncertainty in measurement

*Évaluation des données de mesure —
Guide pour l'expression de l'incertitude de
mesure*

BIPM

JCGM 100:2008

GUM 1995 wersja poprawiona

Ewaluacja danych pomiarowych
Przewodnik wyrażania
niepewności pomiaru

*Évaluation des données de mesure —
Guide pour l'expression de l'incertitude de
mesure*

JCGM 104 i JCGM 101

JCGM 101:2008

BIPM

JCGM 104:2009

Evaluation of measurement data — An introduction to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” and related documents

Évaluation des données de mesure — Une introduction au “Guide pour l’expression de l’incertitude de mesure” et aux documents qui le concernent

PM

Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” — Propagation of distributions using a Monte Carlo method

Évaluation des données de mesure — Supplément 1 du “Guide pour l’expression de l’incertitude de mesure” — Propagation de distributions par une méthode de Monte Carlo

EA-4/02

EA-4/02 • Evaluation of the Uncertainty of Measurement In Calibration

EA-4/02 • Wyznaczanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu



European
co-operation for
Accreditation

*Numer
publikacji*

EA-4/02 M: 2013

Wyznaczanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu

Evaluation of the Uncertainty of Measurement In Calibration



*Publication
Reference*

EA-4/02 M: 2013

Evaluation of the Uncertainty of Measurement In Calibration

ISO 14253-2

INTERNATIONAL
STANDARD

ISO
14253-2

First edition
2011-04-15

PN-EN ISO 14253-2

Wprowadza
EN ISO 14253-2:2011, IDT

Zastępuje
PKN-ISO/TS 14253-2:2009

Geometrical product specifications
(GPS) — Inspection by measurement of
workpieces and measuring equipment —

Part 2:

Guidance for the **estimation**
of uncertainty in GPS measurement,
in calibration of measuring equipment
and in product verification

Specyfikacje geometrii wyrobów (GPS)
Kontrola wyrobów i wyposażenia pomiarowego
za pomocą pomiarów
Część 2: Wytyczne **szacowania** niepewności
pomiarów w GPS, przy wzorcowaniu wyposażenia
pomiarowego i sprawdzaniu wyrobów

„Przewodnik GUM” – etapy szacowania niepewności

1. **Sformułowanie** (formulation):

- określenie wielkości wyjściowej Y ,
- identyfikacja wielkości wejściowych, od których zależy Y ,
- opracowanie modelu pomiaru uzależniającego Y od wielkości wejściowych,
- na podstawie dostępnej wiedzy, przypisywanie rozkładów prawdopodobieństwa do wielkości wejściowych (metody A i B)

2. **Propagacja i posumowanie** (propagation and summarizing)

obejmujące zwykle:

- obliczenie wartości oczekiwanej Y ,
- obliczenie odchylenia standardowego Y czyli niepewności standardowej $u(y)$,
- obliczenie przedziału rozszerzenia zawierającego Y z określonym prawdopodobieństwem rozszerzenia.

Etap 1: sformułowanie – przypisywanie rozkładów do wielkości wejściowych

Przypisywanie rozkładów poszczególnym składnikom niepewności następuje:

- na podstawie wyników powtórzonych pomiarów (metoda A);
- na podstawie wcześniejszej wiedzy o danym składniku (metoda B);

Etap 1: sformułowanie – przypisywanie rozkładów do wielkości wejściowych

Do dyspozycji są dowolne rozkłady prawdopodobieństwa. Jednak najczęściej stosowane to:

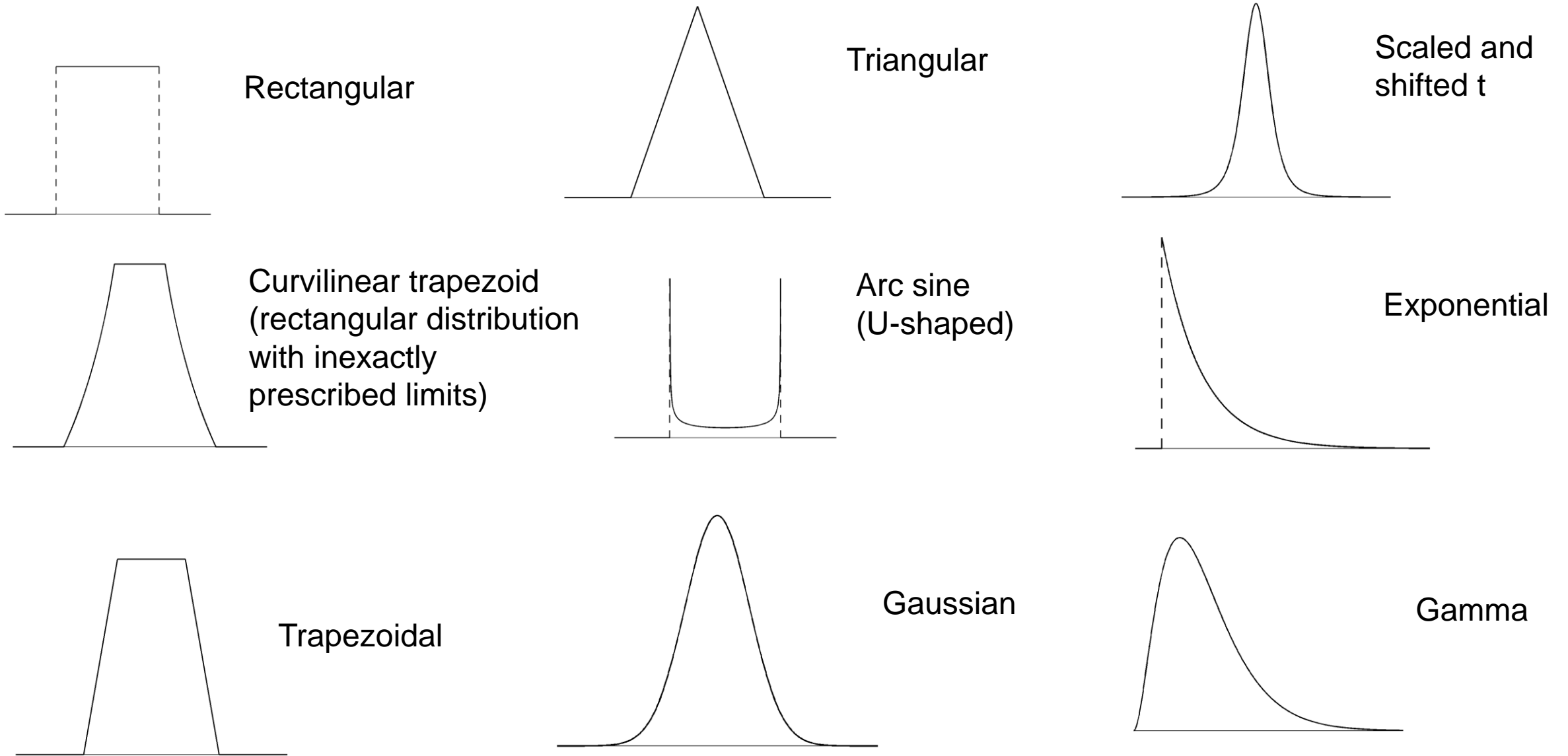
w przypadku metody A:

- normalny,
- t-Studenta,

w przypadku metody B:

- jednostajny (równomierny, prostokątny),
- normalny,
- rozkład o kształcie litery U (mowa o kształcie funkcji gęstości),
- trójkątny,
- rozkład o kształcie litery V,
- rozkład dwuwartościowy (VDI/VDE 2617-11),

Etap 1: sformułowanie – rozkłady wymienione w JCGM 101



Source: JCGM 101

Metody typu A i B według Przewodnika

(GUM 2.3.2) metoda typu A obliczania niepewności - metoda realizowana drogą analizy statystycznej serii obserwacji

(GUM 2.3.3) metoda typu B obliczania niepewności - metoda realizowana **innymi sposobami** niż analiza serii obserwacji

Metody typu A i B według Przewodnika

(GUM 3.3.5)

Tak więc niepewność standardowa typu A jest obliczana z funkcji gęstości prawdopodobieństwa otrzymanej z obserwowanego rozkładu częstości,

podczas gdy niepewność standardowa typu B jest obliczana na podstawie założonej funkcji gęstości prawdopodobieństwa opartej na stopniu wiary w to, że zajdzie dane zdarzenie

(GUM 4.16) Metoda typu A obliczania składowych niepewności standardowej opiera się na rozkładach częstości, podczas gdy metoda typu B obliczania składowych niepewności opiera się na rozkładach danych a priori.

Etap 1: przypisywanie rozkładów do wielkości wejściowych

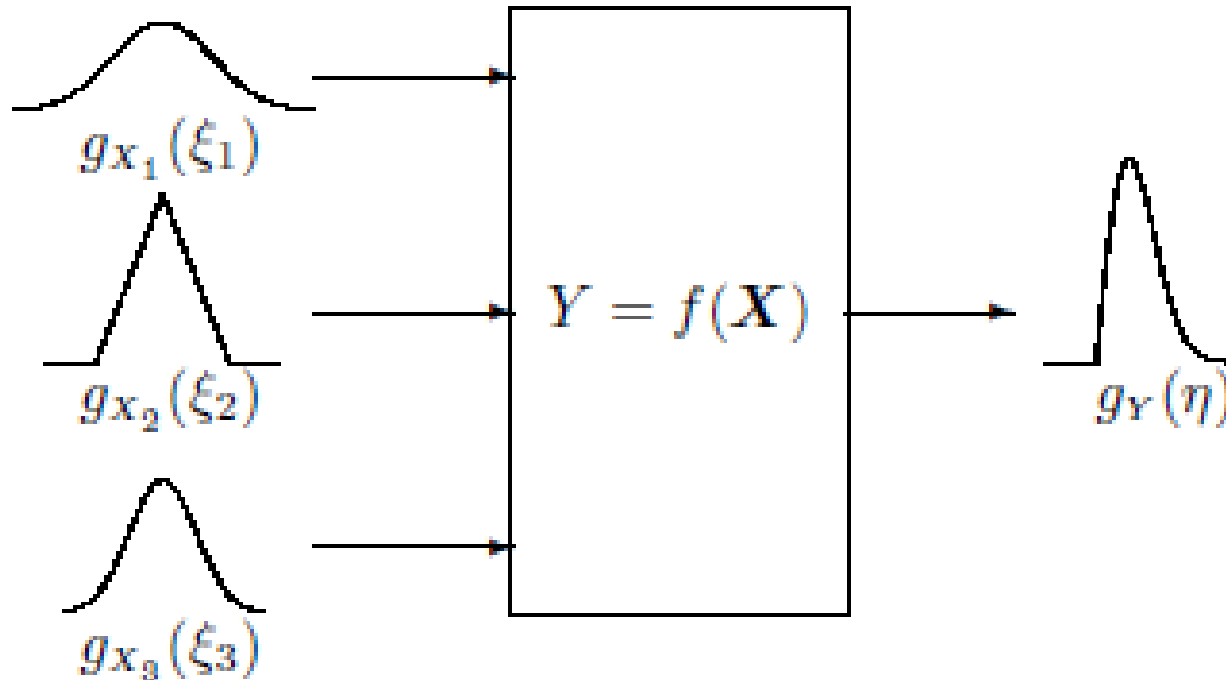
[EA-4/02 3.3] Przyjęcie **prostokątnego** rozkładu prawdopodobieństwa wielkości wejściowej X_i jest uzasadnione, jeżeli znamy tylko granice jej zmienności.

Jeżeli natomiast wiadomo, że wartości danej wielkości znajdujące się w pobliżu środka przedziału zmienności są bardziej prawdopodobne niż wartości znajdujące się w pobliżu jej granic, to lepszym modelem będzie **rozkład trójkątny** lub **rozkład normalny**.

Natomiast gdy bardziej prawdopodobne są wartości znajdujące się w pobliżu granic niż wartości ze środka przedziału zmienności, bardziej odpowiedni może być **rozkład o kształcie litery U**.

Etap 2: propagacja

Propagacja rozkładów to operacja mająca na celu wyznaczenie rozkładu **funkcji** jednej lub więcej zmiennych losowych.



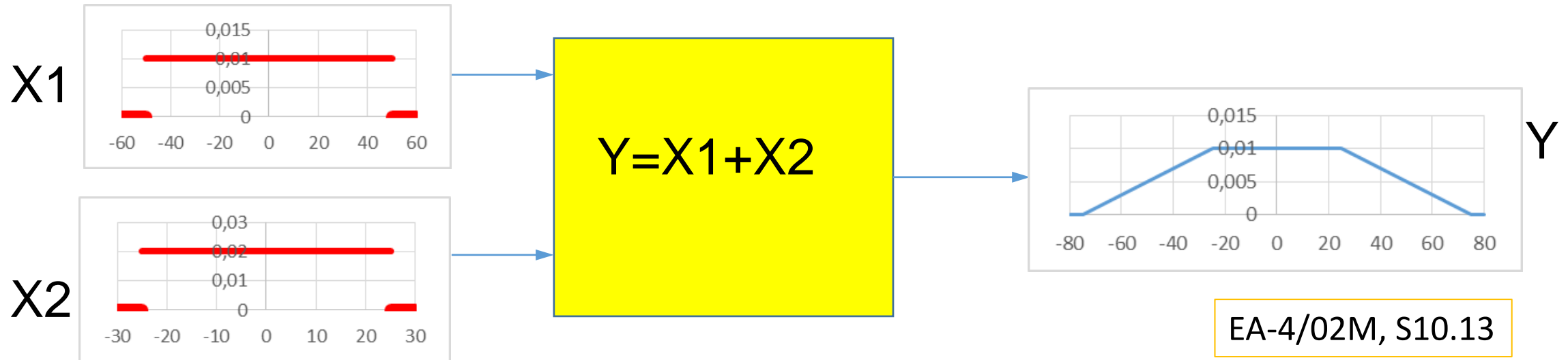
Etap 2: propagacja

Propagacja rozkładów może być realizowana:

- analitycznie,
- na podstawie centralnego twierdzenia granicznego rachunku prawdopodobieństwa (prawo propagacji niepewności, podejście GUM, GUM uncertainty framework, analiza wrażliwości, metoda budżetu niepewności),
- metodą Monte Carlo (symulacyjnie).

Etap 2: propagacja analitycznie

Suma rozkładów jednostajnych



Suma rozkładów normalnych

$$N(\mu_1, \sigma_1) + N(\mu_2, \sigma_2) = N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1 + \sigma_2})$$

Etap 2: propagacja analitycznie - przykład

Rozwiązanie analityczne polega na analitycznym obliczeniu splotu funkcji rozkładów prawdopodobieństwa. W przypadku dwóch wielkości wejściowych o rozkładach jednostajnych o znanych szerokościach połówkowych a_1 i a_2 , wielkość wyjściowa ma rozkład trapezowy dla której funkcja gęstości prawdopodobieństwa ma postać (patrz EA-4/02M, S10.13)

$$\varphi(y) = \frac{1}{a(1+\beta)} \cdot \begin{cases} 1 & |y| < \beta \cdot a \\ \frac{1}{1-\beta} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) & \beta \cdot a \leq |y| \leq a \\ 0 & a < |y| \end{cases}$$

w którym

$$a = a_1 + a_2 \quad b = |a_1 - a_2| \quad \beta = \frac{b}{a} = \frac{|a_1 - a_2|}{a_1 + a_2}$$

Etap 2: propagacja – prawo propagacji niepewności

$$Y = \lim \sum_{i=1}^n X_i$$

$$Y \approx N(\mu, \sigma)$$

$$\mu = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)}$$

Centralne twierdzenie graniczne rachunku prawdopodobieństwa (wersja uproszczona):

SUMA znacznej liczby zmiennych losowych o dowolnych rozkładach ma rozkład normalny, którego wariancja jest równa sumie wariancji poszczególnych składników.

Jakubiec W., Płowucha W., Rosner P.: Szacowanie niepewności pomiaru w budowie maszyn. Budżet niepewności. Mechanik 12/2016, s. 1802-1805

Etap 2: propagacja – prawo propagacji niepewności

W przypadku, kiedy model pomiaru ma postać funkcji nieliniowej zastosowanie centralnego twierdzenia granicznego wymaga wcześniejszej linearyzacji funkcji, co wykonuje się przez jej rozwinięcie w szereg potęgowy (Tylora) i odrzucenie wyrazów rzędu drugiego i wyższych.

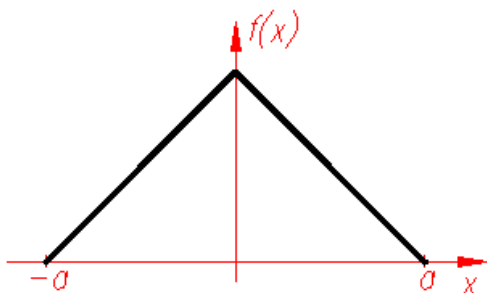
Łącznie (przy założeniu, że nie ma korelacji między wielkościami wejściowymi) prowadzi to do następującego wzoru na niepewność złożoną, zwanego **prawem propagacji niepewności**

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_c^2(x_i)$$

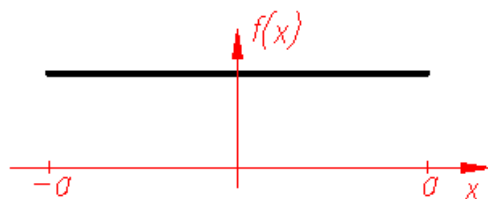
Etap 2: propagacja – prawo propagacji niepewności (obliczanie u na podstawie a)

odchylenie standardowe zmiennej losowej u szacowane na podstawie znajomości rodzaju rozkładu i wartości a określającej przedział $(-a, a)$ zawierający praktycznie wszystkie obserwacje tej zmiennej

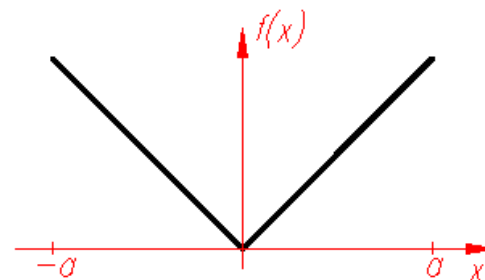
$$u = ba$$



trójkątny
 $b=0,41$



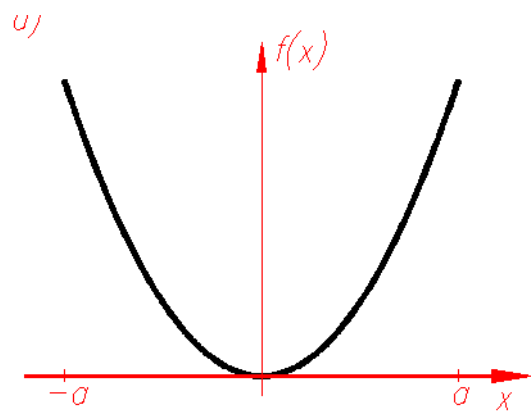
jednostajny
 $b=0,58$



V
 $b=0,71$

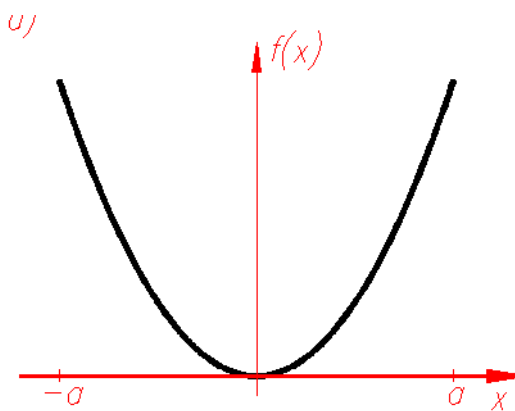
Etap 2: propagacja – prawo propagacji niepewności (obliczanie u na podstawie a) cd.

Różne rozkłady U (o kształcie litery U)



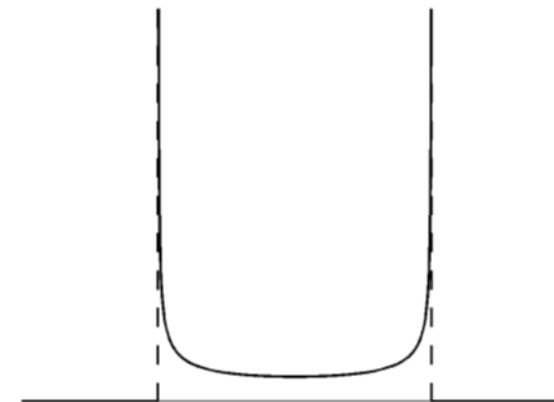
$$f(x) = \frac{3x^2}{2a^3}$$

funkcja
kwadratowa
 $b=0,77$



$$f(x) = \frac{2|x^3|}{a^4}$$

wielomian
3-stopnia
 $b=0,82$

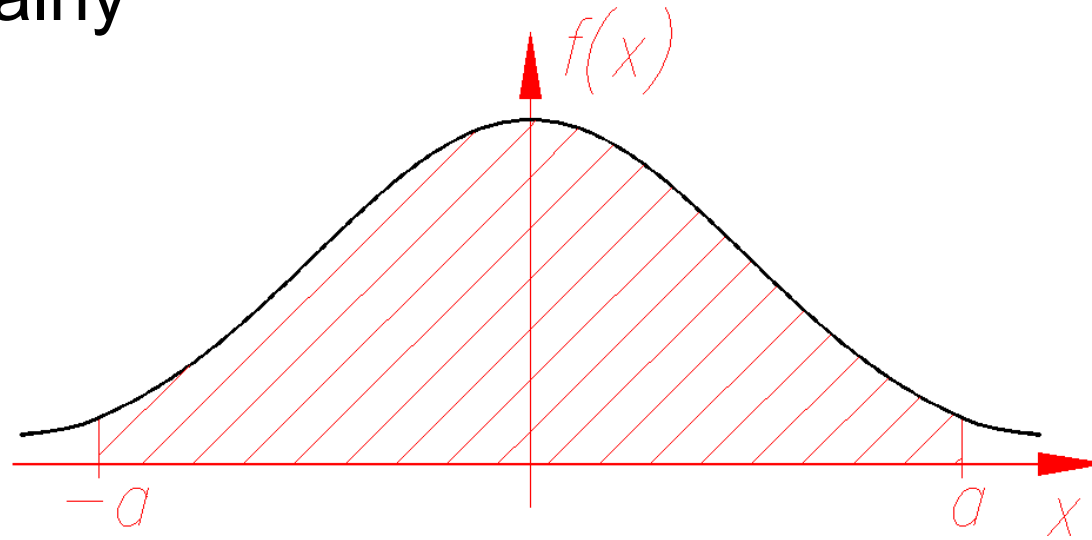


$$f(x) = \frac{1}{\pi a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

arcus sinus
 $b=0,71$

Etap 2: propagacja – prawo propagacji niepewności (obliczanie u na podstawie a) cd.

Rozkład normalny



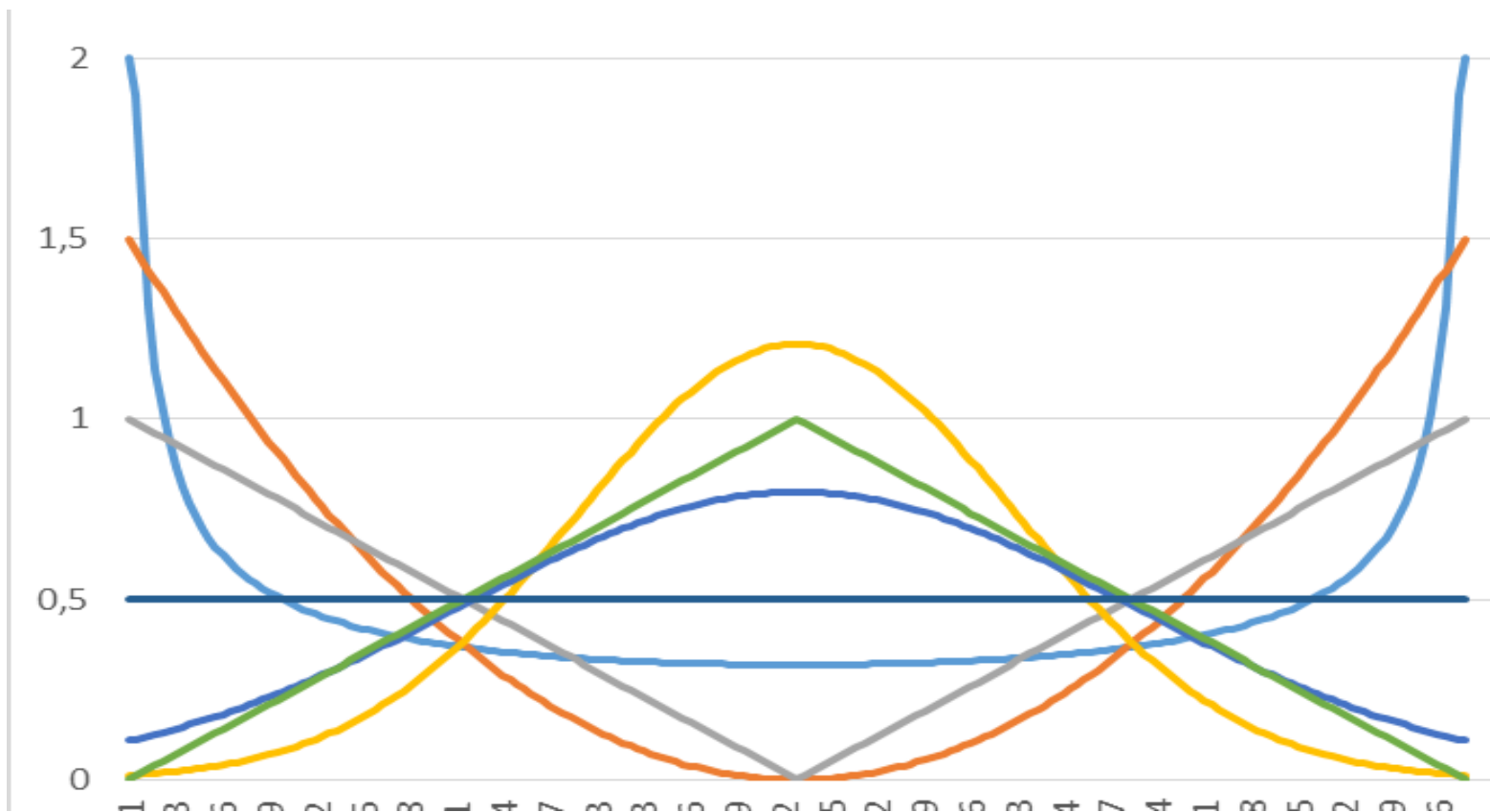
$$P=0,95$$
$$b=0,5$$

$$P=0,9973$$
$$b=0,33$$

$$P=0,99$$
$$b=0,39$$

Zestawienie rozkładów prawdopodobieństwa

Metoda typu B, do obliczenia niepewności standardowej wymaga znajomości wartości skrajnej a oraz współczynnika $b=1/k$ zależnego od rozkładu prawdopodobieństwa



Rozkład prawdopodobieństwa	1/k
normalny (P=0,9973)	0,33
trójkątny	0,41
normalny (P=0,955)	0,5
jednostajny	0,58
V	0,71
U (rozkład arcsin)	0,71
U (funkcja kwadratowa)	0,77
dwuwartościowy	1

Etap 2: podsumowanie (dla prawa propagacji niepewności)

W przypadku zastosowania do propagacji centralnego twierdzenia granicznego (**prawo propagacji niepewności**) wynikiem obliczeń jest odchylenie standardowe (niepewność standardowa) u rozumiane jako parametr rozkładu normalnego.

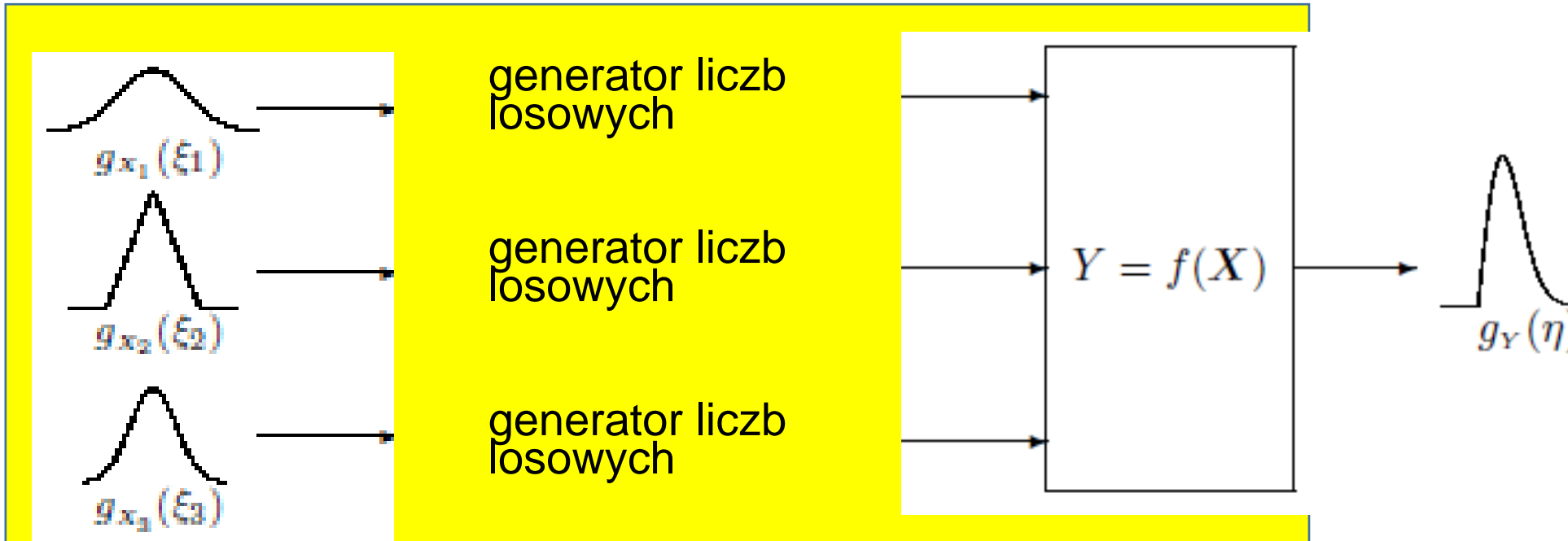
Wtedy $U=2u$

Etap 2: propagacja - metoda Monte Carlo

rozkłady wielkości wejściowych

model pomiaru

rozkład wielkości wyjściowej

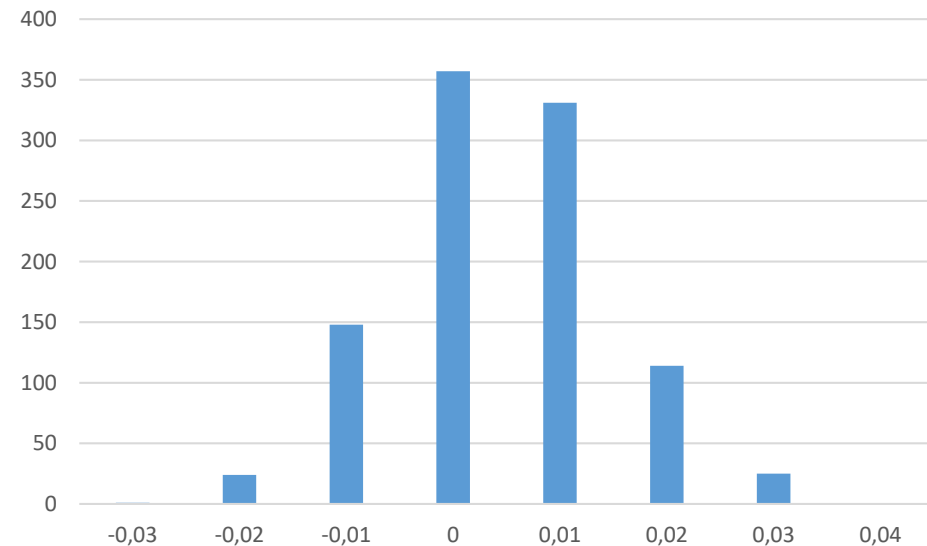
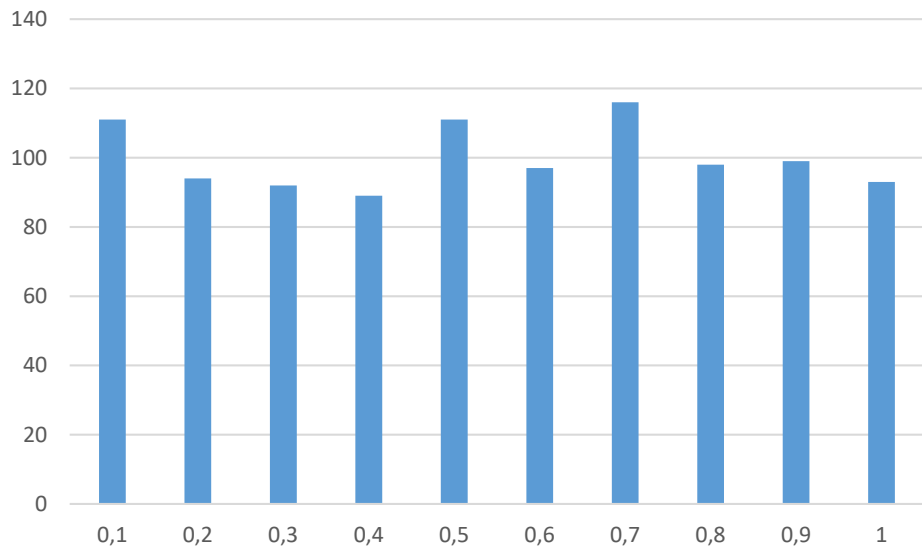
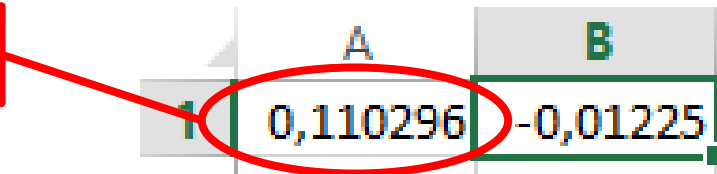


Wielokrotnie powtórzone obliczenia

Etap 2: propagacja - metoda Monte Carlo

B1	:	X	✓	f_x	=ROZKŁ.NORMALNY.ODWR(A1;0;0,01)				
	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	0,110296	-0,01225							
2	0,257597	-0,00651							
3	0,857076	0,010673							
4	0,641317	0,00362							
5	0,84426	0,010121							

=los()



JCGM 101

Wzory na funkcje gęstości, wartość oczekiwaną i wariancję.

Algorytmy generowania liczb losowych.

Zalecenia co do liczby powtórzeń (number of Monte Carlo trials)

- orientacyjna wartość to milion.

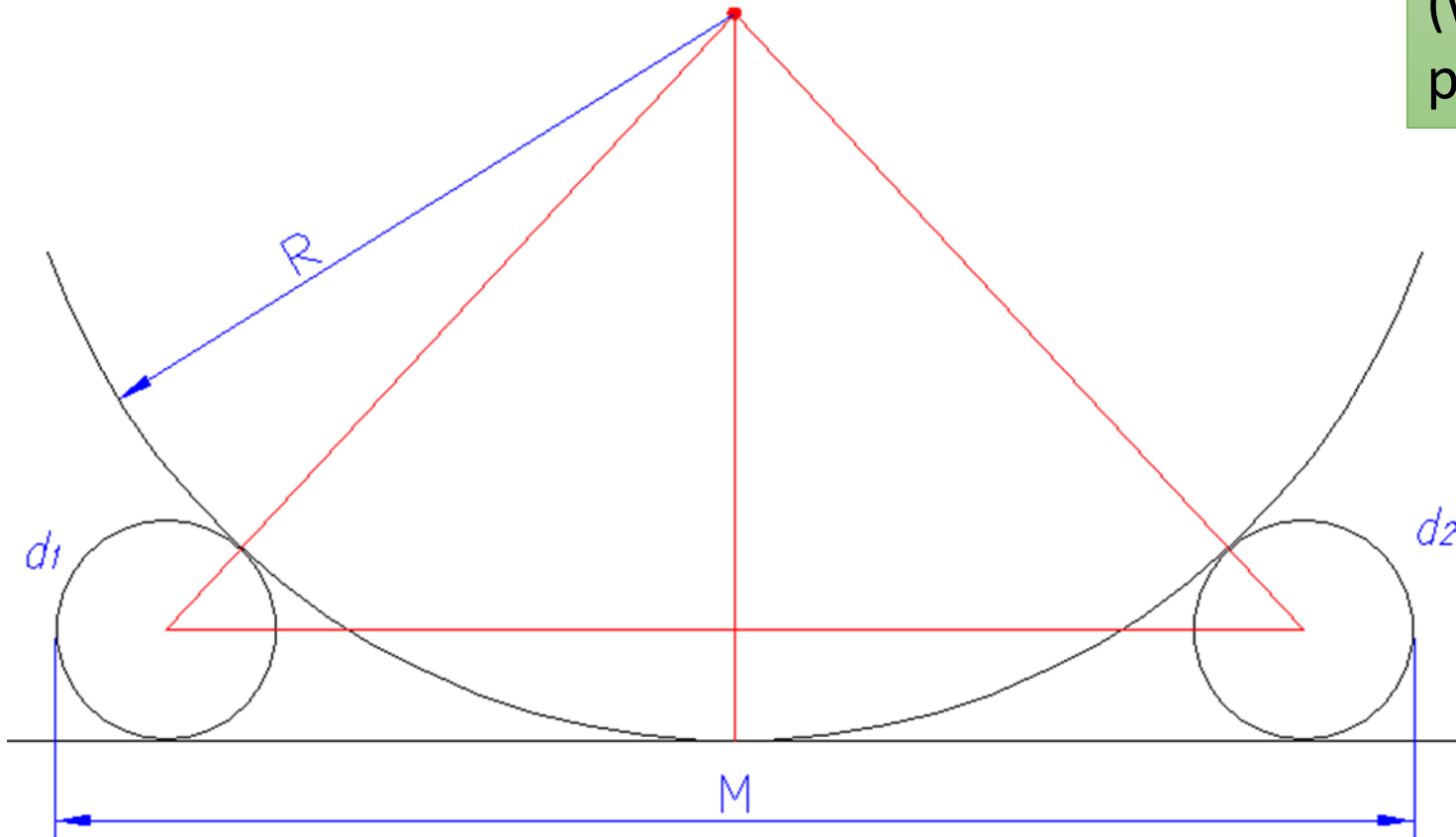
Do generowania liczb losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 1)$ - generator Wichmann'a i Hill'a.

Do generowania liczb losowych o rozkładzie normalnym - generator Box'a-Muller'a (Box-Muller Gaussian generator).

Przykład 1: pomiar promienia łuku

Etap 1: sformułowanie (model pomiaru)

Model pomiaru to wzór według którego oblicza się wartość wielkości mierzonej (wielkość wyjściowa, wynik pomiaru) na podstawie posiadanych informacji

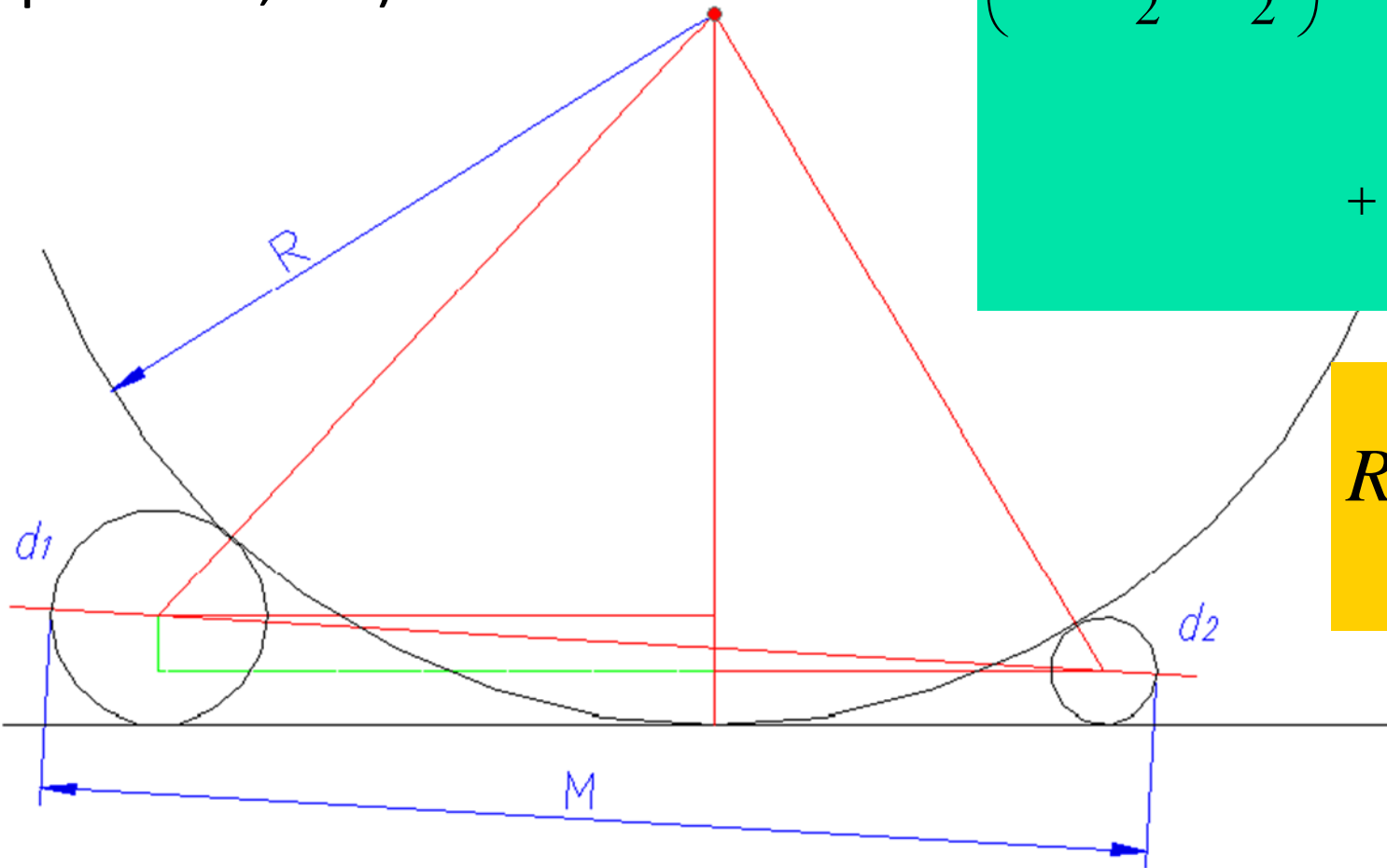


$$\left(\frac{M-d}{2}\right)^2 = \left(R + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(R - \frac{d}{2}\right)^2$$

$$R = \frac{(M-d)^2}{8d}$$

Przykład 1: pomiar promienia łuku

Etap 1: sformułowanie (model pomiaru, cd.)



$$\left(M - \frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\left(R + \frac{d_1}{2}\right)^2 - \left(R - \frac{d_1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(R + \frac{d_2}{2}\right)^2 - \left(R - \frac{d_2}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2}\right)^2$$

$$R = \frac{M^2 - M(d_1 + d_2) + d_1 d_2}{2\left(\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2}\right)^2}$$

Źródło: Jakubiec W.: Adequacy and generality conditions in estimation of uncertainty in measurements of geometrical quantities. Advances in manufacturing science and technology Vol. 31, No. 4, 2007, s. 19-30

Przykład 1: pomiar promienia łuku

Etap 2: propagacja i podsumowanie

Okazuje się, że **różne modele prowadzą do różnych oszacowań** niepewności; w niektórych przypadkach różnice mogą być istotne

W pierwszym przypadku

$$u_R = \pm \sqrt{\left(\frac{M-d}{4d}u_M\right)^2 + \left(\frac{d^2 - M^2}{8d^2}u_d\right)^2}$$

W drugim przypadku

$$u_R = \pm \sqrt{\left(\frac{M-d}{4d}u_M\right)^2 + 2\left(\frac{d^2 - M^2}{8d^2}u_d\right)^2}$$

Przykład 2: Wzorcowanie suwmiarki [EA-4/02]

Etap 1: sformułowanie (model pomiaru)

Model pomiaru to wzór według którego oblicza się wartość wielkości mierzonej (wielkość wyjściowa, wynik pomiaru) na podstawie posiadanych informacji

$$E_X = l_{iX} - l_s + \delta l_t + \delta l_{iX} + \delta l_M$$

E_X - wartość wskazana przez suwmiarkę,

l_{iX} - rzeczywista długość płytki wzorcowej,

l_s - długość nominalna płytki wzorcowej,

δl_t - poprawka temperaturowa,

δl_{iX} - poprawka na ograniczoną rozdzielczość suwmiarki

δl_M - poprawka związana z oddziaływaniami natury mechanicznej, jak nacisk pomiarowy, błąd Abbego oraz odchylenia od płaskości i równoległości płaszczyzn pomiarowych

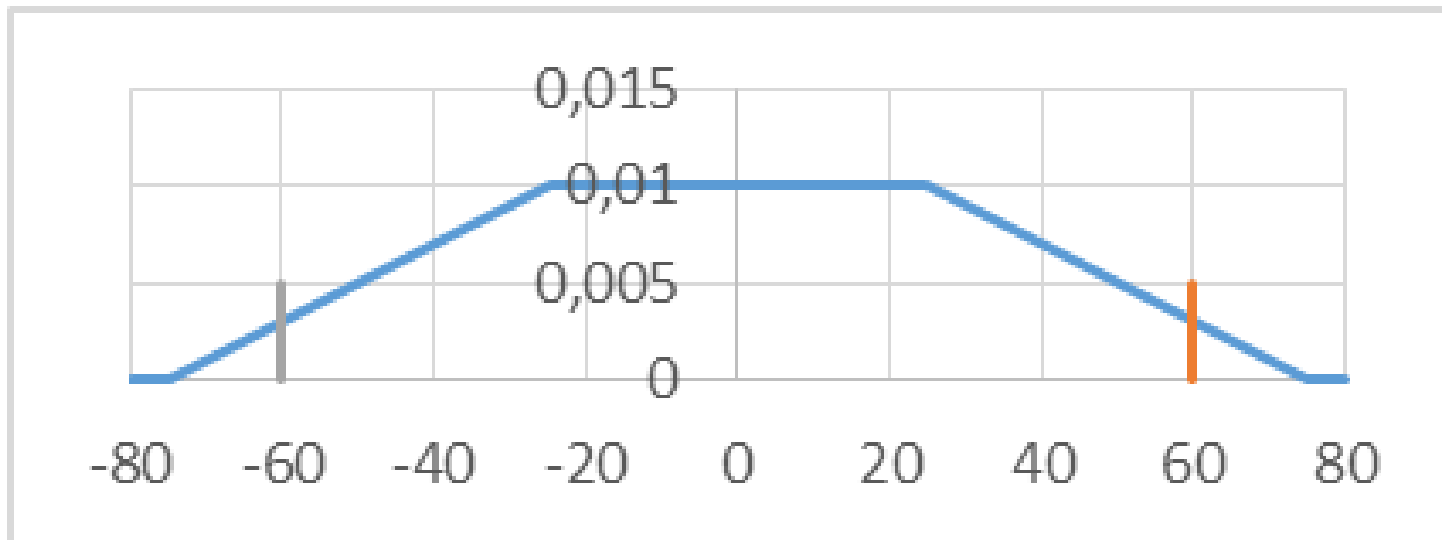
Przykład 2: Wzorcowanie suwmiarki [EA-4/02]

Etap 2: podsumowanie (dla podejścia teoretycznego)

Celem jest obliczenie niepewności rozszerzonej.

W przypadku, gdy wynikiem propagacji jest **rozkład teoretyczny** należy znaleźć symetryczny przedział odpowiadający prawdopodobieństwu 0,95.

Dla przykładu z rozkładem trapezowym jest to $U=59,19$



$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \cdot f(x) dx$$

Źródło: Płowucha W., Jakubiec W., Rosner P.: Szacowanie niepewności pomiaru – metoda Monte Carlo. Mechanik 12/2017 <https://doi.org/10.17814/mechanik.2017.12.195>

Przykład 2: Wzorcowanie suwmiarki [EA-4/02], cd.

Model

$$E_X = l_{iX} - l_s + \delta l_t + \delta l_{iX} + \delta l_M$$

E_X - wartość wskazana przez suwmiarkę,
 l_{iX} - rzeczywista długość płytki wzorcowej,

l_s - długość nominalna płytki wzorcowej,

δl_t - poprawka na ograniczoną rozdzielczość suwmiarki,

δl_{iX} - poprawka na ograniczoną rozdzielczość suwmiarki,

δl_M - poprawka związana z oddziaływaniami natury mechanicznej, jak nacisk pomiarowy, błąd Abbego oraz odchylenia od płaskości i równoległości płaszczyzn pomiarowych

Budżet niepewności pomiaru

wielkość	a	rozkład	u
l_s	0,8	jednostajny	0,46
δl_t	3,45	jednostajny	2
δl_{iX}	25	jednostajny	15
δl_M	50	jednostajny	29
uc=			33

$$a(\delta l_t) = l_s \cdot \bar{\alpha} \cdot \Delta t$$

α - średni temperaturowy współczynnik rozszerzalności suwmiarki i płytki wzorcowej,

Δt - różnica temperatur suwmiarki i płytki wzorcowej,

$$a(l_s) = 0,8 \mu\text{m}$$

$$a(\delta l_t) = 150 \text{ mm} \times 11,5 \text{ E-6 } 1/\text{K} \times 2 \text{ K} = 3,45 \mu\text{m}$$

$$a(\delta l_{iX}) = 25 \mu\text{m}$$

$$a(\delta l_M) = 50 \mu\text{m}$$

$$u(l_s) = 0,8 \mu\text{m} \times 0,58 = 0,46 \mu\text{m}$$

$$u(\delta l_t) = 3,45 \mu\text{m} \times 0,58 = 2 \mu\text{m}$$

$$u(\delta l_{iX}) = 25 \mu\text{m} \times 0,58 = 15 \mu\text{m}$$

$$u(\delta l_M) = 50 \mu\text{m} \times 0,58 = 29 \mu\text{m}$$

W. Jakubiec, W. Płowucha, P. Rosner: Błąd temperaturowy w pomiarach geometrycznych. Rocznik 89, Mechanik 11/2016, s. 1714-1715

Przykład 2: Wzorcowanie suwmiarki [EA-4/02], cd.

Model

$$E_X = l_{iX} - l_s + \delta l_t + \delta l_{iX} + \delta l_M$$

E_X - wartość wskazana przez suwmiarkę,
 l_{iX} - rzeczywista długość płytki wzorcowej,
 l_s - długość nominalna płytki wzorcowej,
 δl_t - poprawka na ograniczoną rozdzielczość suwmiarki,
 δl_{iX} - poprawka na ograniczoną rozdzielczość suwmiarki,
 δl_M - poprawka związana z oddziaływaniami natury mechanicznej, jak nacisk pomiarowy, błąd Abbego oraz odchylenia od płaskości i równoległości płaszczyzn pomiarowych

Budżet niepewności pomiaru

wielkość	a	rozkład	u
l_s	0,8	jednostajny	0,46
δl_t	3,45	jednostajny	2
δl_{iX}	25	jednostajny	15
δl_M	50	jednostajny	29
uc=			33

$$a(\delta l_t) = l_s \cdot \bar{\alpha} \cdot \Delta t$$

α - średni temperaturowy współczynnik rozszerzalności suwmiarki i płytki wzorcowej,
 Δt - różnica temperatur suwmiarki i płytki wzorcowej,

$$a(l_s) = 0,8 \mu\text{m}$$

$$a(\delta l_t) = 150 \text{ mm} \times 11,5 \text{ E-6 1/K} \times 2 \text{ K} = 3,45 \mu\text{m}$$

$$a(\delta l_{iX}) = 25 \mu\text{m}$$

$$a(\delta l_M) = 50 \mu\text{m}$$

$$u(l_s) = 0,8 \mu\text{m} \times 0,58 = 0,46 \mu\text{m}$$

$$u(\delta l_t) = 3,45 \mu\text{m} \times 0,58 = 2 \mu\text{m}$$

$$u(\delta l_{iX}) = 25 \mu\text{m} \times 0,58 = 15 \mu\text{m}$$

$$u(\delta l_M) = 50 \mu\text{m} \times 0,58 = 29 \mu\text{m}$$

Jakubiec W., Płowucha W., Rosner P.:
Błąd temperaturowy w pomiarach geometrycznych. Rocznik 89,
Mechanik 11/2016, s. 1714-1715

Przykład 2: Wzorcowanie suwmiarki [EA-4/02], cd.

Model

$$E_X = l_{iX} - l_s + \delta l_t + \delta l_{iX} + \delta l_M$$

EX - wartość wskazana przez suwmiarkę,
liX - rzeczywista długość płytki wzorcowej,
ls - długość nominalna płytki wzorcowej,
 δl_t - poprawka na ograniczoną rozdzielczość suwmiarki,
 δl_{iX} - poprawka na ograniczoną rozdzielczość suwmiarki,
 δl_M - poprawka związana z oddziaływaniami natury mechanicznej, jak nacisk pomiarowy, błąd Abbego oraz odchylenia od płaskości i równoległości płaszczyzn pomiarowych

Budżet niepewności pomiaru

wielkość	a	rozkład	u
ls	0,8	jednostajny	0,46
δl_t	3,45	jednostajny	2
δl_{iX}	25	jednostajny	15
δl_M	50	jednostajny	29
uc=			33

$$a(\delta l_t) = l_s \cdot \bar{\alpha} \cdot \Delta t$$

α - średni temperaturowy współczynnik rozszerzalności suwmiarki i płytki wzorcowej,
 Δt - różnica temperatur suwmiarki i płytki wzorcowej,

$$a(ls) = 0,8 \mu\text{m}$$

$$a(\delta l_t) = 150 \text{ mm} \times 11,5 \text{ E-6 } 1/\text{K} \times 2 \text{ K} = 3,45 \mu\text{m}$$

$$a(\delta l_{iX}) = 25 \mu\text{m}$$

$$a(\delta l_M) = 50 \mu\text{m}$$

$$u(ls) = 0,8 \mu\text{m} \times 0,58 = 0,46 \mu\text{m}$$

$$u(\delta l_t) = 3,45 \mu\text{m} \times 0,58 = 2 \mu\text{m}$$

$$u(\delta l_{iX}) = 25 \mu\text{m} \times 0,58 = 15 \mu\text{m}$$

$$u(\delta l_M) = 50 \mu\text{m} \times 0,58 = 29 \mu\text{m}$$

Przykład 2: Wzorcowanie suwmiarki [EA-4/02], cd.

Przykład wzorcowania suwmiarki z [EA-4/02]

symbol wielkości	estymata wielkości	niepewność standardowa	rozkład prawdopodobieństwa	współczynnik wrażliwości	udział niepewności
X_i	x_i	$u(x_i)$		c_i	$u_i(y)$
l_X	150,10 mm	–	–	–	–
l_s	150,00 mm	0,46 μm	prostokątny	-1,0	-0,46 μm
Δt	0	1,15 K	prostokątny	1,7 μmK^{-1}	2,0 μm
δl_X	0	15 μm	prostokątny	1,0	15 μm
δl_M	0	29 μm	prostokątny	1,0	29 μm
E_X	0,10 mm				33 μm

Przykład 3: Pomiar średnicy wałka mikrometrem [ISO 14253-2]

Etap 1: sformułowanie (model pomiaru)

W [ISO 14253-2], dla pomiaru średnicy wałka mikrometrem nie podano modelu pomiaru - podano tylko wzór na niepewność

$$u_c = \sqrt{u_{ML}^2 + u_{MF}^2 + u_{MF}^2 + u_{MP}^2 + u_{RR}^2 + u_{NP}^2 + u_{TD}^2 + u_{TA}^2 + u_{WE}^2}$$

Można z niego wnioskować, że wielkość wyjściowa jest prostą **sumą 9 wielkości wejściowych**. Poszczególne składniki (wielkości wejściowe) to:

δ_{ML} – błąd wskazania

δ_{MF} – błąd płaskości (2 razy)

δ_{MP} – błąd równoległości

δ_{RR} – powtarzalność lub rozdzielczość

δ_{NP} – zmienność zera

δ_{TD} – różnica temperatur

δ_{TA} – temperatura

δ_{WE} – odchyłka kształtu przedmiotu

Model pomiaru to wzór według którego oblicza się wartość wielkości mierzonej (wielkość wyjściowa, wynik pomiaru) na podstawie posiadanych informacji

Etap 2: propagacja – prawo propagacji niepewności

Nazwa składowej	Typ metody wyznaczenia	Typ rozkładu	Liczba pomiarów	Granica zmienności a' jednostki wielkości wpływającej	Granica zmienności a μm	Współczynnik korelacji	Mnożnik rozkładu b	Składowa niepewności u_{xx} μm
u_{ML} Mikrometr – błąd wskazania	B	Równ.		3,0 μm	3,0	0	0,6	1,80 ⁽¹⁾
u_{MF} Mikrometr – płaskość 1	B	Normalny		1,0 μm	1,0	0	0,5	0,50 ⁽³⁾
u_{MF} Mikrometr – płaskość 2	B	Normalny		1,0 μm	1,0	0	0,5	0,50 ⁽³⁾
u_{MP} Mikrometr – równoległość	B	Normalny		2,0 μm	2,0	0	0,5	1,00 ⁽²⁾
u_{RR} Powtarzalność	A		15			0		1,20 ⁽²⁾
u_{NP} Zmienność punktu 0	A		15			0		1,00 ⁽²⁾
u_{TD} Różnica temperatur	B	U		10 °C	2,8	0	0,7	1,96 ⁽¹⁾
u_{TA} Temperatura	B	U		15 °C $\alpha_1/\alpha_2 = 1,1$	0,4	0	0,7	0,28 ⁽³⁾
u_{WE} Odchyłka kształtu wyrobu	B	Równomierny		3,0 μm	3,0	0	0,6	1,80 ⁽¹⁾
Niepewność standardowa złożona, u_c								3,79
Niepewność rozszerzona ($k = 2$), U								7,58

Przykład: budżet niepewności dla pomiaru średnicy wałka mikrometrem [ISO 14253-2]

Jakubiec E., Płowucha W., Rosner P.: Szacowanie niepewności pomiaru w budowie maszyn. Dyskusja budżetu niepewności. Mechanik 12/2016 s. 1806-1808

Uwagi do ISO 14253-2

ISO 3611:2010 Geometrical product specifications (GPS).
Dimensional measuring equipment: Micrometers for external
measurements. Design and metrological characteristics
(poprzednia wersja 1978)

PN-82/M-53200 Przyrządy mikrometryczne. Wymagania

Full contact error (MPEJ),
Repeatability (MPER),
Partial surface contact error (MPEE),

Etap 1: przypisywanie rozkładów do wielkości wejściowych

Przykład 1: pomiar promienia łuku

Zarówno dla R jak i dla d przyjęto rozkłady normalne

Przykład 2: wzorcowanie suwmiarki

Dla wszystkich 4 wielkości wejściowych przyjęto rozkład jednostajny (prostokątny)

Przykład 3: pomiar średnicy wałka mikrometrem

Dla 2 wielkości wejściowych przyjęto rozkład jednostajny (równomierny), dla 3 - normalny i dla 2 - U (arcusa sinusa)

Etap 2: propagacja – prawo propagacji niepewności

Przykład: Model dla pomiaru promienia łuku

$$R = \frac{(M - d)^2}{8d}$$

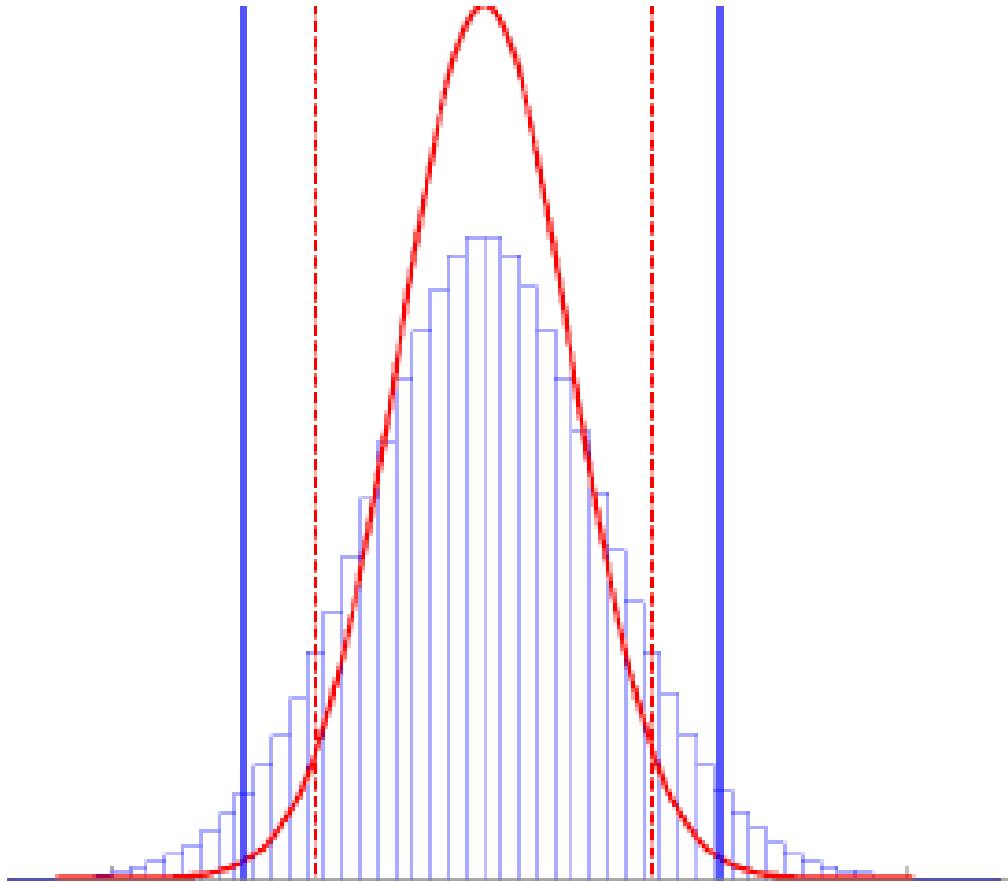
Wzór na obliczenie niepewności standardowej

$$u_R = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial M} u_M\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial d} u_d\right)^2}$$

Po wstawieniu wartości pochodnych cząstkowych

$$u_R = \pm \sqrt{\left(\frac{M - d}{4d} u_M\right)^2 + \left(\frac{d^2 - M^2}{8d^2} u_d\right)^2}$$

Etap 2: podsumowanie (dla metody Monte Carlo)



Przedział zawierający 95% obserwacji

Próba dopasowania rozkładu normalnego do wyników symulacji

Jeśli wartość średnia nie jest znana

$$u = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Jeśli wartość średnia jest znana

$$u = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}$$

Etap 2: podsumowanie (dla metody Monte Carlo)

	A	B	C	D	E	F
1	-5,08741	-34,5134	-39,6008			

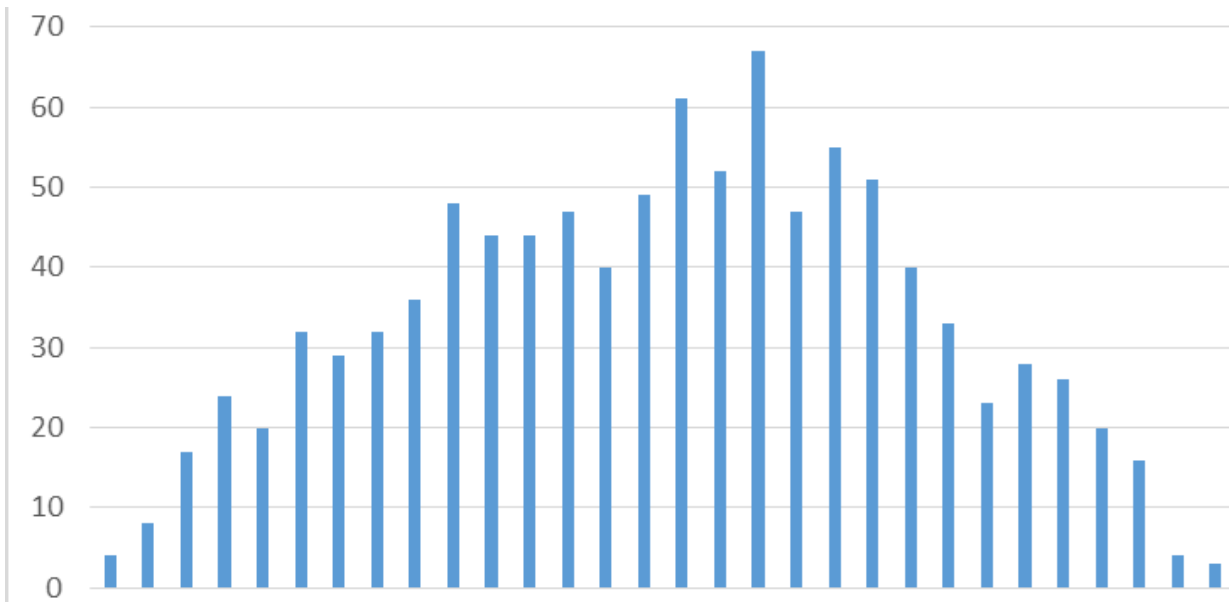
$$=100*\text{los}()-0,5) \quad =A1+B1$$

W razie potrzeby można zademonstrować obliczenia w MS Excel

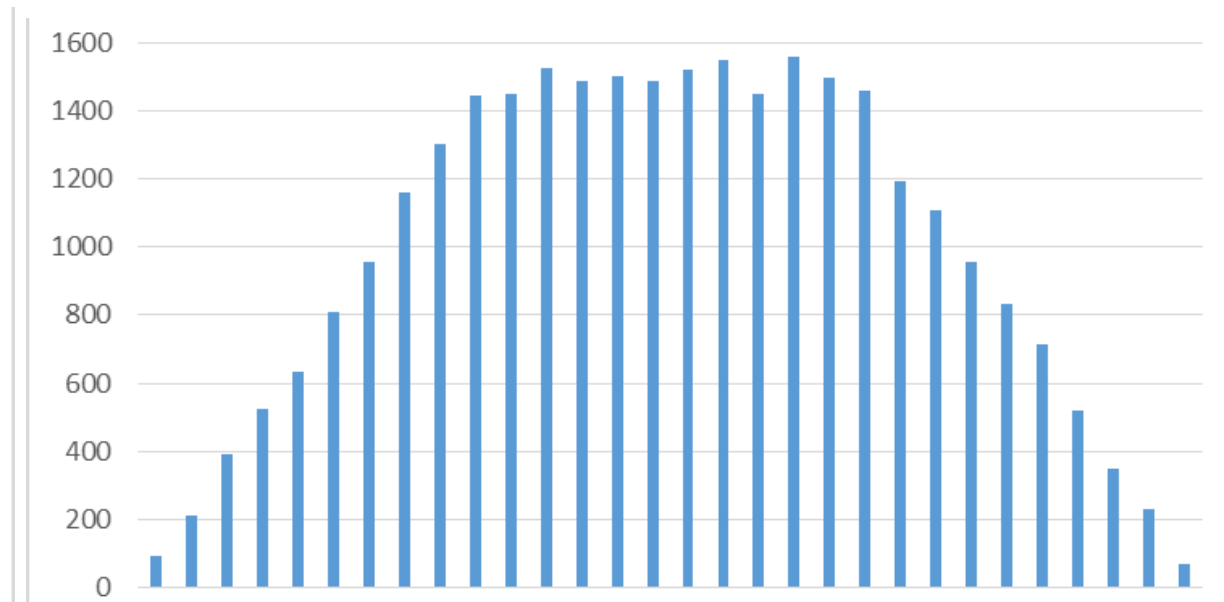
Źródło: Płowucha W., Jakubiec W., Rosner P.: Szacowanie niepewności pomiaru – metoda Monte Carlo. Mechanik 12/2017 <https://doi.org/10.17814/mechanik.2017.12.195>

Etap 2: podsumowanie (dla metody Monte Carlo)

$$J(-25,25)+J(-50, 50)$$



N=1000

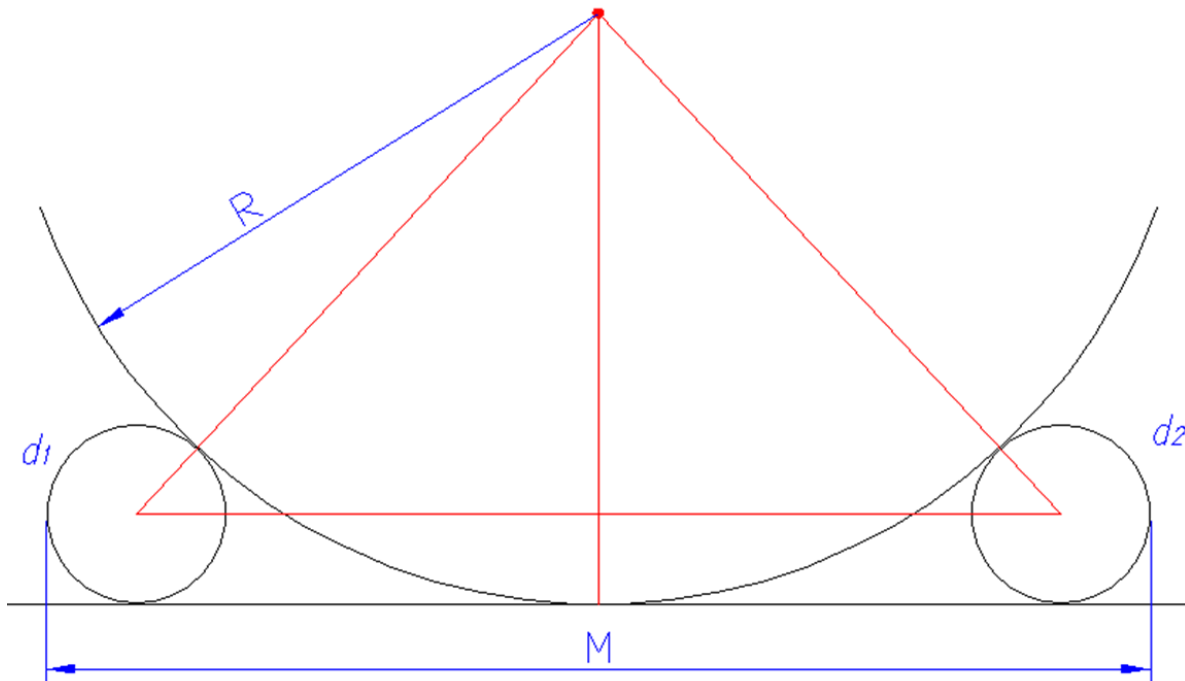


N=30000

Źródło: Płowucha W., Jakubiec W., Rosner P.: Szacowanie niepewności pomiaru – metoda Monte Carlo. Mechanik 12/2017 <https://doi.org/10.17814/mechanik.2017.12.195>

Pojęcie „pod-budżetu” [EA-4/02 S13.5].

Pojęcie pod-budżetów powinno być przede wszystkim stosowane w klasycznych pomiarach pośrednich, np. pomiar promienia łuku, gdzie (formalnie) takie pod-budżety powinny być wykonane dla niepewności pomiaru średnicy waleczka oraz dla niepewności pomiaru mikrometrem



$$R = \frac{(M - d)^2}{8d}$$

$$u_R = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial M} u_M\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial d} u_d\right)^2}$$

Problem „pod-budżetu” – pomiar promienia łuku

Przykład liczbowy: $d=6$ mm, $M=49,852$ mm, $R=40,062$ mm

$dR/dM=1,83$, $dR/dd=8,6$

Pod-budżet dla u_M

	a, μm	rozkład	u, μm
Błąd wskazań	6	jednostajny	3,5
Powtarzalność			6,8
$u_M=$			7,5

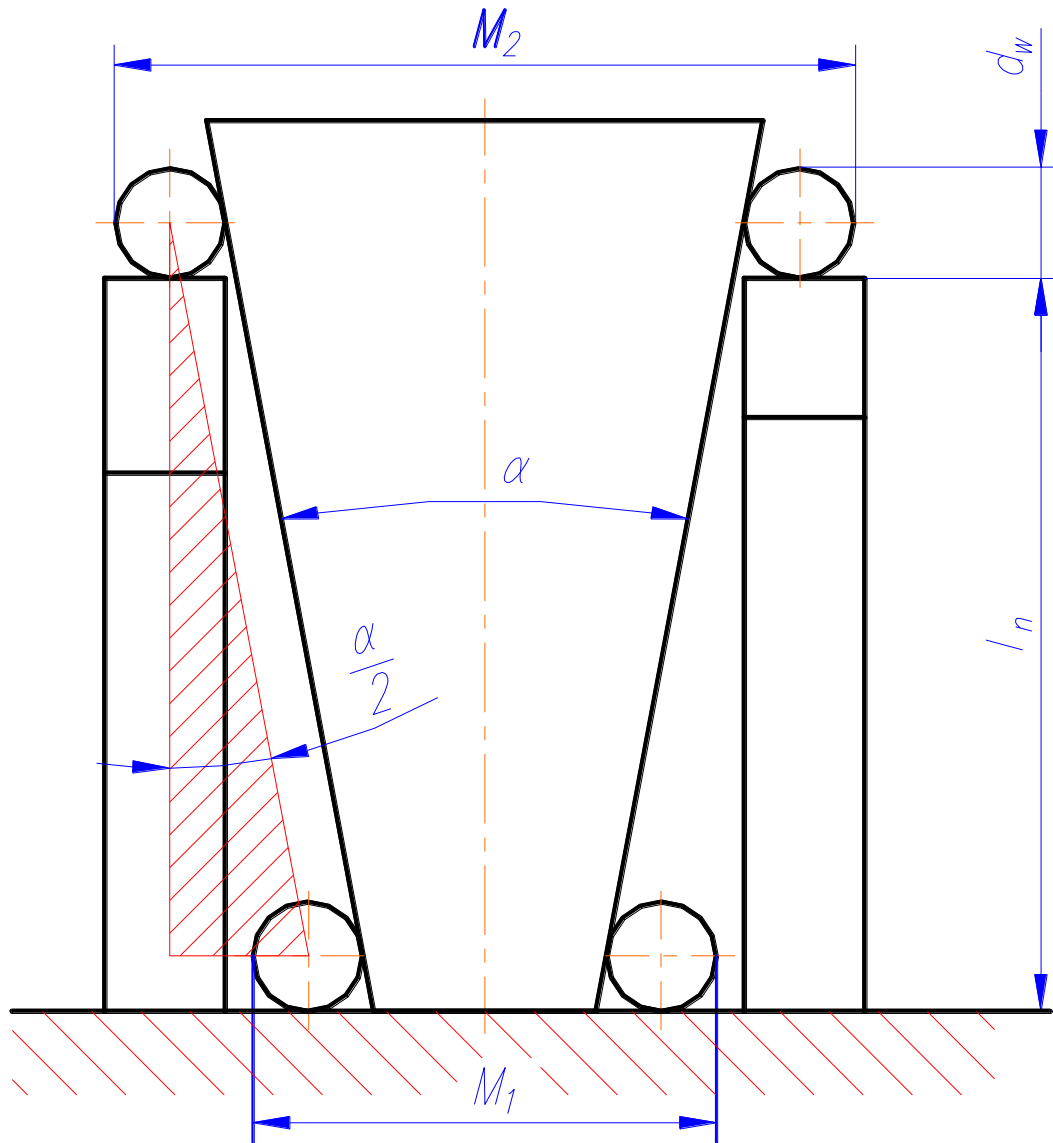
Pod-budżet dla u_d

	a, μm	rozkład	u, μm
Toler. średnicy	1	jednostajny	0,58
Toler. okrągłości	1	jednostajny	0,58
$u_d=$			0,82

Budżet dla u_R

	u_i , μm	wsp. wrażliwości	u, μm
M	7,5	1,83	13,8
d	0,82	8,6	7
$u_R=$			15,4

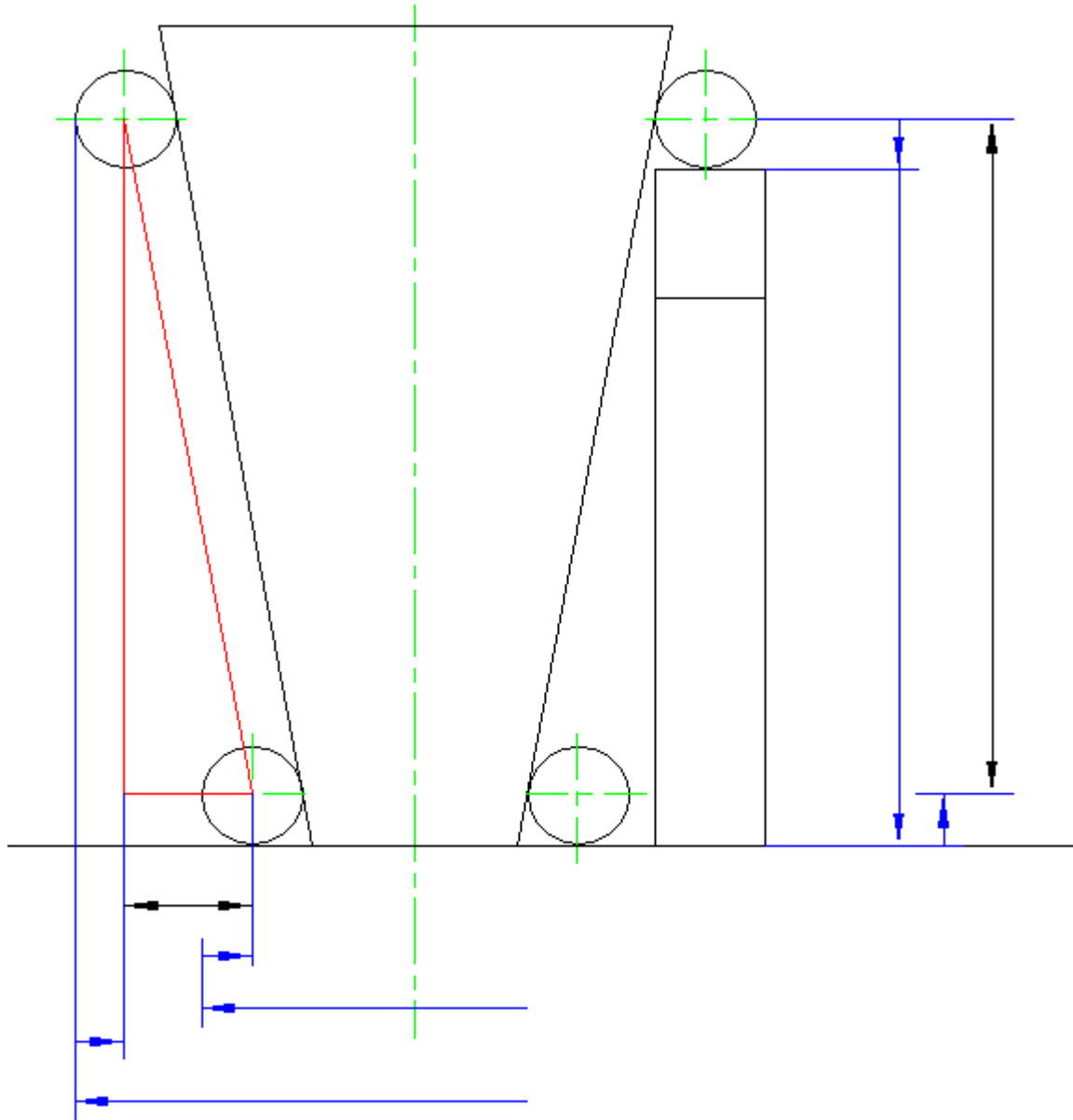
Przykład 4. Pomiar kąta stożka zewnętrznego



$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{M_2 - M_1}{2l_n}$$

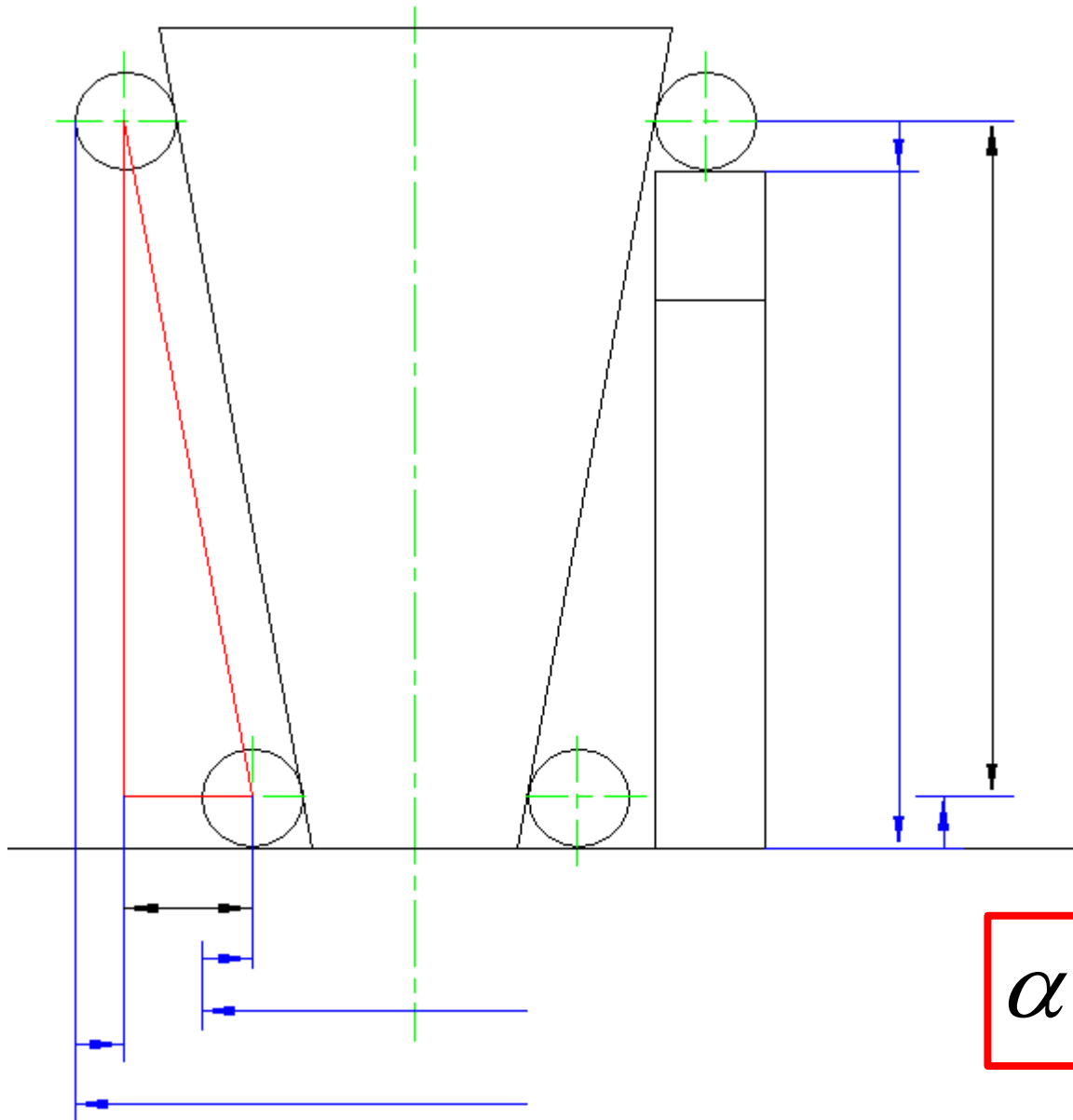
$$\alpha = f(M_1, M_2, l_n) \quad ?$$

Przykład 4. Pomiar kąta stożka zewnętrznego



$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{M_2}{2} - \frac{d_w}{2} - \left(\frac{M_1}{2} - \frac{d_w}{2} \right)}{l_n + \frac{d_w}{2} - \frac{d_w}{2}}$$

Przykład 4. Pomiar kąta stożka zewnętrznego

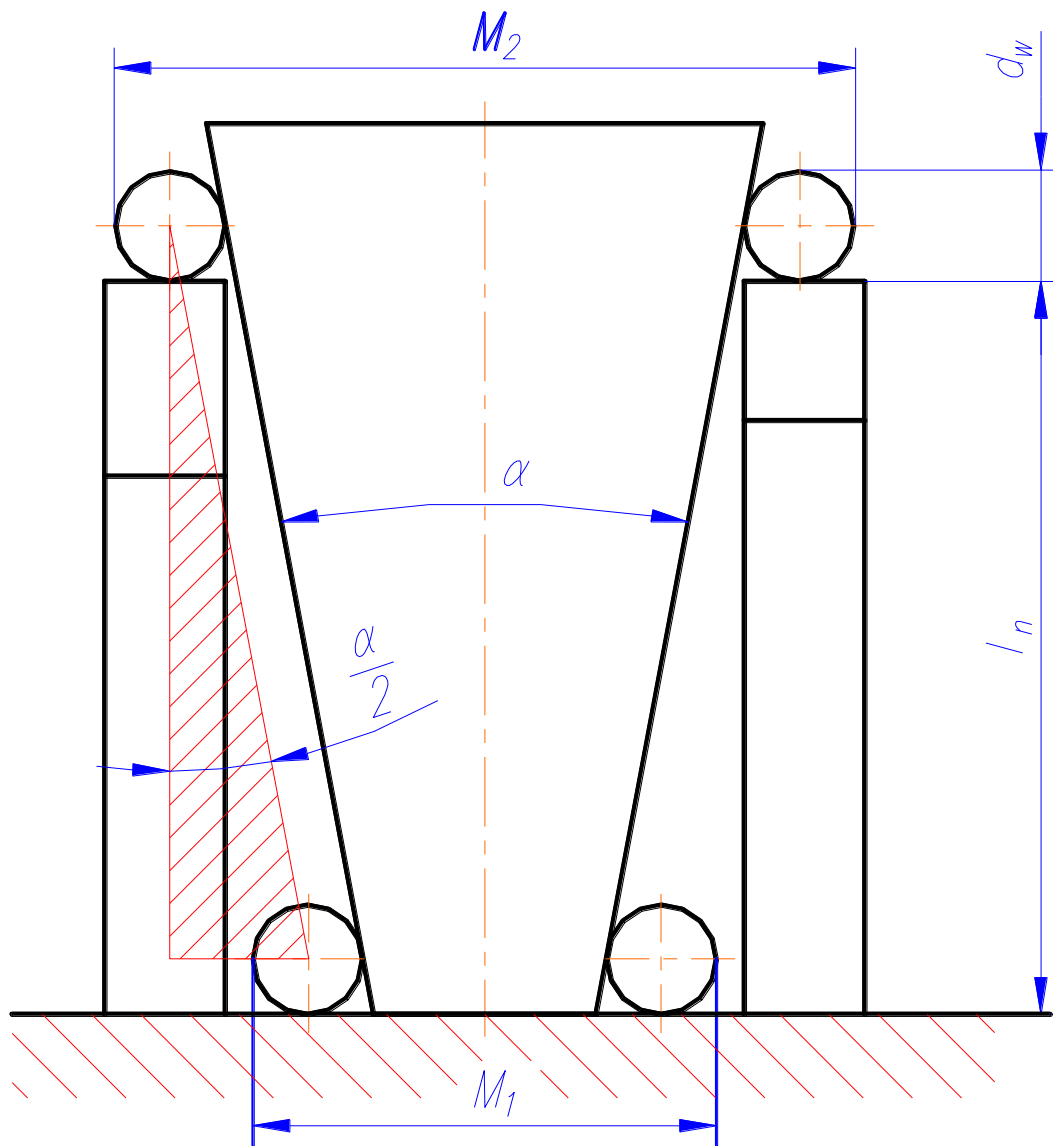


$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{M_2}{2} - \frac{d_w}{2} - \left(\frac{M_1}{2} - \frac{d_w}{2} \right)}{l_n + \frac{d_w}{2} - \frac{d_w}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{(M_2 - M_1) + (d_w - d_w)}{2l_n + (d_w - d_w)}$$

$$\alpha = \alpha(M_2 - M_1, d_w - d_w, l_n)$$

Przykład 4. Pomiar kąta stożka zewnętrznego



$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{M_2 - M_1}{2l_n}$$

$$\alpha = f(M_1, M_2, l_n)$$

MPE jako ważna informacja o dokładności

MPE (maximum permissible error) - błąd graniczny dopuszczalny

Przykłady

suwmiarka 0,02 – 0,05 mm

mikrometr 2 – 4 μm (dotyczy mikrometrów o zakresie do 50 mm)

CMM np. $2+3L/1000 \mu\text{m}$, gdzie L – długość w mm

MPE jako składnik niepewności

$$u = \text{MPE} \cdot b$$

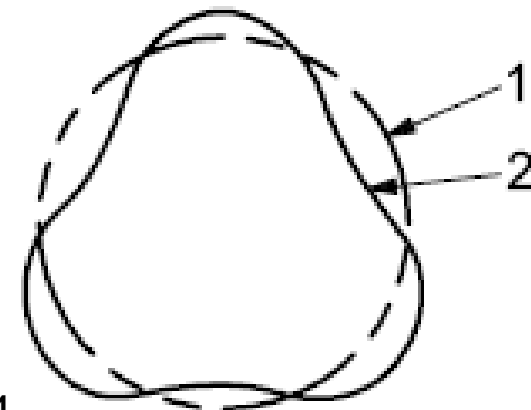
ISO 14253-2: „Jeśli dane dotyczące wzorcowania istnieją dla jednego egzemplarza wyposażenia pomiarowego lub dla większej liczby identycznych egzemplarzy, często można wykorzystać te dane do znalezienia typu rozkładu albo nawet ... do bezpośredniego wyznaczenia składowej niepewności ... jak w metodzie typu A wyznaczenia niepewności.”

Inne wykorzystanie symulacji – problem wpływu strategii próbkowania

W ISO/TS 15530-4 jest sugestia wykorzystania symulacji do oceny wpływu strategii próbkowania (liczba i rozmieszczenie punktów próbkowania) na niepewność pomiaru odchyłki okrągłości:

„A simple program can be written to place seven points equispaced about a circle having a 200 mm diameter and having a three-lobed form error of 0,1 mm imposed similar to that shown in Figure. This example considers the measurement of the form using least-squares fitting. The seven equispaced points are rotated **randomly** with respect to the three-lobed pattern. No other error source besides the form is considered in the measurement.”

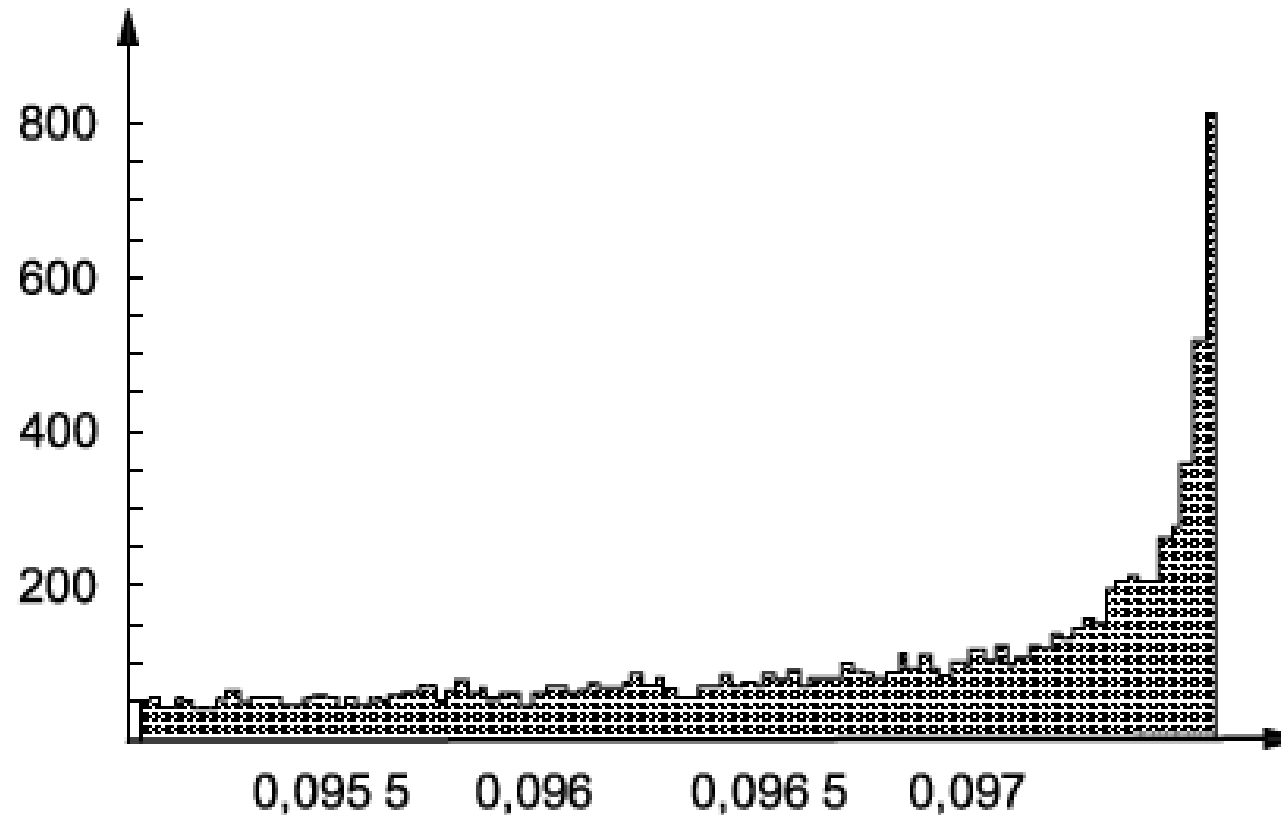
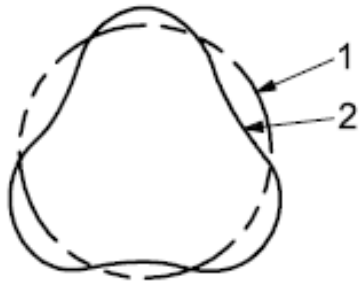
W dokumencie podano wzór na okrąg z trójgraniastością: $r = 100 + 0,05\sin(3\theta)$



Zamiast losowego – podział systematyczny

Zamiast generować losowe położenie kątowne pierwszego punktu próbkowania i wykonywać obliczenia np. milion razy, można przeprowadzić systematyczny podział odcinka $(0, 2\pi/7)$ na n części i wykonać obliczenia n razy, zmieniając położenie z krokiem $2\pi/(7n)$. Liczba powtórzeń nie musi być wtedy duża; już dla $n = 50$ uzyskuje się bardzo dobre wyniki. Jeżeli jednak wyniki mają być opracowane w postaci histogramu, warto przyjąć np. $n = 1000$.

Inne wykorzystanie symulacji – problem wpływu strategii próbkowania



— the smallest interval containing 95 % of measured values is [0,095 3; 0,097 5];

— the smallest interval containing 95 % of errors is [-0,004 7; -0,002 5].

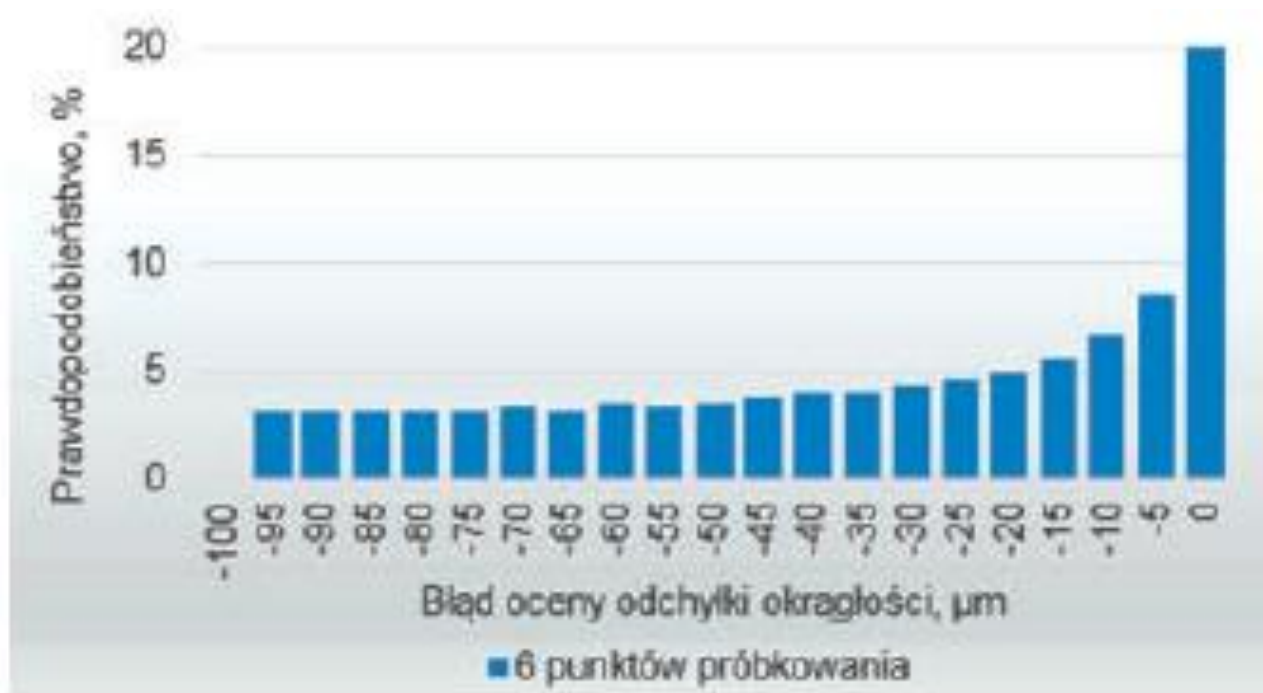
$$U(95 \%) = 0,004 7$$

Symulacja

W celu oceny wpływu liczby punktów próbkowania wykonano 3 eksperymenty symulacyjne dla 6, 7 i 8 równomiernie rozmieszczonych punktów.

Wyniki w postaci histogramów pokazano na rysunkach.

W każdym przypadku błędy pomiaru są wyłącznie ujemne.



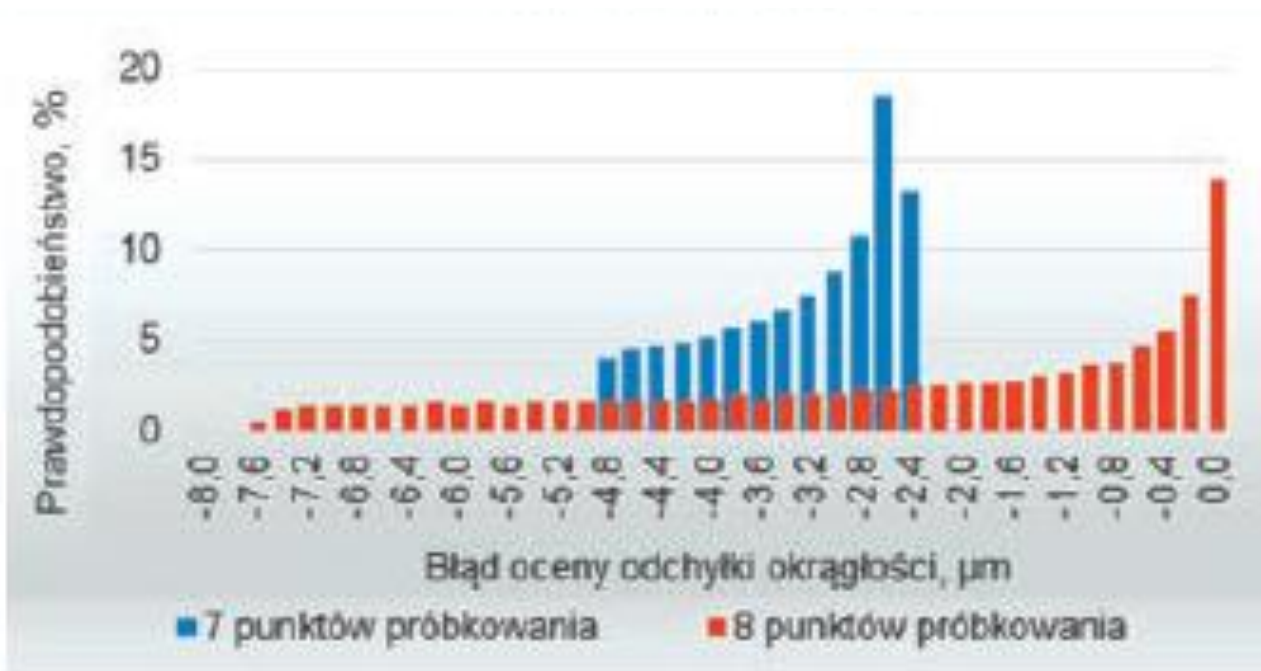
Przy 6 punktach próbkowania możliwe jest popełnienie zarówno błędu równego 0, jak i równego -100 μm . Po odrzuceniu 5% najgorszych wyników symulacji otrzymuje się wartość rozszerzonej niepewności pomiaru $U = 92 \mu\text{m}$.

Źródło: Płowucha W., Jakubiec W., Rosner P.: Szacowanie niepewności pomiaru. Metoda Monte Carlo. Mechanik 12/2017, s. 1152-4

Symulacja – podział systematyczny

W przypadku 7 pkt próbkowania błędy pomiaru zawierają się w granicach od -2,5 do -5 μm , co stanowi tylko 2,5% do 5% mierzonej wartości, chociaż nigdy nie są mniejsze niż -2,5 μm , a 95% błędów nie przekracza wartości $U = 4,6 \mu\text{m}$.

W przypadku 8 pkt próbkowania błędy pomiaru zawierają się w granicach od -7,6 μm do 0, a 95% błędów nie przekracza wartości $U = 6,9 \mu\text{m}$.



Źródło: Płowucha W., Jakubiec W., Rosner P.:
Szacowanie niepewności pomiaru. Metoda Monte
Carlo. Mechanik 12/2017, s. 1152-4

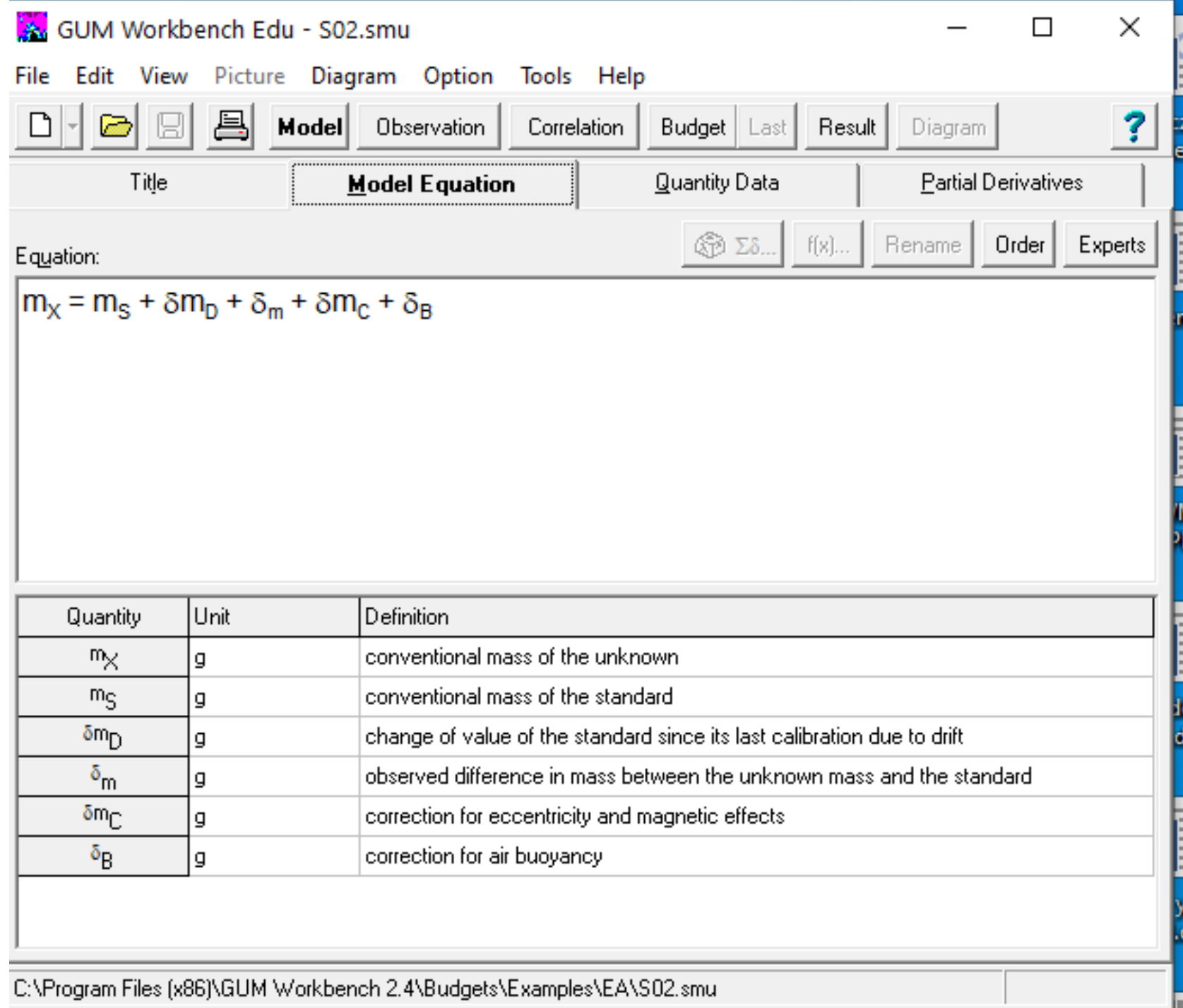
Oprogramowanie

<https://www.isobudgets.com/8-free-uncertainty-calculator-software-you-can-download-now/>

1. Gum Tree Calculator
2. QMSys GUM Standard
3. **Metrodata GmbH GUM Workbench Pro**
4. MUKit – Measurement Uncertainty Kit
5. NIST Uncertainty Machine
6. Hewlett-Packard UnCal 3.2
7. Uncertainty Sidekick
8. NPL Measurement Uncertainty Software

GUM Workbench

Przykład S2 z EA-4/02



GUM Workbench Edu - S02.smu

File Edit View Picture Diagram Option Tools Help

Model Observation Correlation Budget Last Result Diagram

Title **Model Equation** Quantity Data Partial Derivatives

Equation: $m_X = m_S + \delta m_D + \delta m + \delta m_C + \delta_B$

Quantity	Unit	Definition
m_X	g	conventional mass of the unknown
m_S	g	conventional mass of the standard
δm_D	g	change of value of the standard since its last calibration due to drift
δm	g	observed difference in mass between the unknown mass and the standard
δm_C	g	correction for eccentricity and magnetic effects
δ_B	g	correction for air buoyancy

C:\Program Files (x86)\GUM Workbench 2.4\Budgets\Examples\EA\S02.smu

GUM Workbench

Przykład S2 z EA-4/02

The screenshot shows the GUM Workbench Edu interface for a model named "change of value of the standard since its last calibration due to drift". The software window title is "GUM Workbench Edu - S02.smu". The menu bar includes File, Edit, View, Picture, Diagram, Option, Tools, and Help. The toolbar contains icons for file operations and tabs for Model, Observation, Correlation, Budget, Last, Result, and Diagram. The main workspace is divided into four tabs: Title, Model Equation, Quantity Data, and Partial Derivatives. The Quantity Data tab is active, showing the following configuration:

- Type: Type B
- Distribution: Rectangular
- Value: 0 g
- Halfwidth of Limits: 15E-3 g

On the left side, a list of variables is shown, with δm_D selected. Below the main workspace, there are tabs for Description and Picture 1. The Description tab is active, containing the text: "DRIFT OF THE VALUE OF THE STANDARD: The drift of conventional mass of the reference standard is estimated from previous calibrations to be zero within limits ± 15 mg". The status bar at the bottom shows the file path: "C:\Program Files (x86)\GUM Workbench 2.4\Budgets\Examples\EA\S02.smu".

GUM Workbench

Przykład S2 z EA-4/02

GUM Workbench Pro - S02.smu

File Edit View Picture Diagram Option Tools Help

Model Observation Correlation **Budget** Last Result Diagram ?

conventional mass of the unknown

Uncertainty Budget:

Quantity	Value	Standard Uncertainty	Distribution	Sensitivity Coefficient	Uncertainty Contribution	Index
m_S	10000.0050 g	0.0225 g	normal	1.0	0.022 g	59.6 %
δm_D	0.0 g	$8.66 \cdot 10^{-3}$ g	rectangular	1.0	$8.7 \cdot 10^{-3}$ g	8.8 %
δm_m	0.0200 g	0.0142 g	normal	1.0	0.014 g	23.7 %
δm_C	0.0 g	$5.77 \cdot 10^{-3}$ g	rectangular	1.0	$5.8 \cdot 10^{-3}$ g	3.9 %
δB	0.0 g	$5.77 \cdot 10^{-3}$ g	rectangular	1.0	$5.8 \cdot 10^{-3}$ g	3.9 %

m_X 10000.0250 g 0.0291 g

Result:

Value: 10000.025 g Expanded Uncertainty: \pm 0.058 g Coverage Factor: 2.00 Coverage: 95% (t-table 95.45%)

C:\Program Files (x86)\GUM Workbench 2.4\Budgets\Examples\EA\S02.smu

Terminologia

Niepewność pomiaru standardowa (u)

Niepewność pomiaru rozszerzona (U), $U=ku$

Przedział rozszerzenia

Prawdopodobieństwo (dla przedziału rozszerzenia) $P=0,95$

Współczynnik rozszerzenia – $k=2$

Niepewność pomiaru złożona (standardowa i rozszerzona)

Terminologia

Powtarzalność – odchylenie standardowe obliczone z powtórzonych pomiarów (**krótki przedział czasu**)

Precyzja pośrednia pomiaru – odchylenie standardowe obliczone z powtórzonych pomiarów (**dłuższy okres czasu**);

Propagacja rozkładów – znajdowanie rozkładu pewnej funkcji jednego lub kilku rozkładów prawdopodobieństwa;

Propagacja niepewności (metodyka GUM)

Budżet niepewności

Model pomiaru

Przykłady

Przykład 1: jeśli mierzymy przedmiot o kształcie zbliżonym do wzorca użytego do kalibracji w dobrych warunkach środowiskowych to prawie cała niepewność pochodzi od przyrządu i informacja o niej jest zawarta w MPE.

Przykład 2: Jeśli pomiar jest „niewygodny” (np. pomiar rozstawienia wałeczków w przykładzie z pomiaru promienia łuku), to prawie cała niepewność zawarta jest w powtarzalności.

Przykłady

Przykład 3. Rozłożenie pomiarów do oceny powtarzalności w dłuższym czasie pozwala uwzględnić w powtarzalności wpływ warunków środowiskowych. Formalnie wtedy nie mówi się o „powtarzalności” tylko o „precyzji pośredniej pomiaru” albo o „odtwarzalności” z wyraźnym zaznaczeniem, że jedynym zmienianym elementem względem powtarzalności jest to, że pomiary są wykonywane w dłuższym okresie czasu (a nie **w krótkim przedziale czasu**)

Patrz definicja powtarzalności (następny slajd)

Powtarzalność pomiaru

powtarzalność - precyzja pomiaru w warunkach powtarzalności pomiaru
warunek powtarzalności pomiaru - warunek pomiaru, spośród zbioru warunków, który to zbiór obejmuje

- tę samą procedurę pomiarową,
- tego samego wykonawcę pomiaru,
- ten sam układ pomiarowy,
- te same warunki użytkowania,
- to samo miejsce,
- pomiary powtarzane na tym samym lub podobnych obiektach,
- **w krótkim przedziale czasu**

UWAGA 1 Warunek pomiaru jest warunkiem powtarzalności jedynie w odniesieniu do określonego zbioru warunków powtarzalności.

Odtwarzalność pomiaru

odtwarzalność - precyzja pomiaru w warunkach odtwarzalności pomiaru
warunek odtwarzalności - warunek pomiaru, spośród zbioru warunków, który to zbiór obejmuje

- różne lokalizacje,
- różnych wykonawców,
- różne układy pomiarowe
- pomiary powtarzane na tym samym lub innych obiektach

UWAGA 1 Przy różnych układach pomiarowych mogą być stosowane różne procedury pomiarowe.

UWAGA 2 Specyfikacja powinna w stopniu praktycznym przedstawiać warunki zmienione i niezmienione

Precyzja pośrednia pomiaru

precyzja pośrednia - precyzja pomiaru w warunkach precyzji pośredniej pomiaru

warunek precyzji pośredniej - warunek pomiaru, spośród zbioru warunków, który to zbiór obejmuje

- tę samą procedurę pomiarową,
 - to samo miejsce
 - oraz pomiary powtarzane na tym samych lub podobnych obiektach
 - **w rozciągniętym okresie czasu;**
 - może też obejmować inne uwarunkowania pociągające za sobą zmiany
- UWAGA 1 Zmiany mogą obejmować nowe wzorcowanie, kalibratory, wykonawców i układy pomiarowe.

UWAGA 2 Specyfikacja warunków powinna zawierać warunki zmienne i niezmiennie w stopniu praktycznym.

Kilka oczywistych zależności

$$U \geq \text{MPE}$$

$u \geq$ powtarzalności (wyrażonej jako odchylenie standardowe)

$$U \geq \text{rozdzielczości}; u \geq \text{rozdzielczość}/\sqrt{2}$$

Pytania i odpowiedzi

Do czego jest potrzebna standardowa i rozszerzona niepewność pomiaru?

Niepewność rozszerzona jest szczególnie potrzebna przy podejmowaniu decyzji o zgodności lub niezgodności wyrobu ze specyfikacją.

Niepewność standardowa jest potrzebna tylko wtedy, gdy wynik pomiaru będzie wielkością wejściową dla innej wielkości wyjściowej