Masterarbeit

Basiskompetenzen in der Sekundarschule

Ein diagnostisches Instrument zur Differenzierung des Unterrichts mit dem Sekundarstufen-Lehrmittel Mathematik I des Lehrmittelverlags Zürich

Theoretische Auseinandersetzung

Begleitperson: Anette Köchlin

Experte: Rainer Kirchhofer

Studierender: Gabriel Gmünder

HS 2012/SG4

Im Stuppen 4

8048 Zürich

gmuender.gabriel@learnhfh.ch

076 411 13 65

HfH Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik

Abstract

Aufbauend auf dem Modell der Basiskompetenzen wurde in der Masterarbeit *Basiskompetenzen in der Sekundarschule* ein diagnostisches Instrument entwickelt, welches die Beurteilung der Ressourcen von schwachen Mathematikschülerinnen und -schülern in der Sekundarstufe zulässt. Das diagnostische Instrument soll für den Unterricht mit dem Sekundarstufen-Lehrmittel Mathematik I aufzeigen, inwiefern einzelne Aufgaben angepasst werden müssen, damit spezifische Basiskompetenzen integrativ erworben und trainiert werden können. Als Unterstützung für Lehrpersonen wird für jede arithmetische Aufgabe eine Auflistung der vorausgesetzten Basiskompetenzen mitgeliefert. Zusätzlich werden Differenzierungsmöglichkeiten und handelnde Zugänge für die einzelnen Aufgaben der arithmetischen Kapitel angegeben. In einer ersten Evaluation wurde es als praxistauglich erachtet.

Inhaltsverzeichnis

Abstract

Aufbauend auf dem Modell der Basiskompetenzen wurde in der Masterarbeit *Basiskompetenzen in der Sekundarschule* ein diagnostisches Instrument entwickelt, welches die Beurteilung der Ressourcen von schwachen Mathematikschülerinnen und -schülern in der Sekundarstufe zulässt. Das diagnostische Instrument soll für den Unterricht mit dem Sekundarstufen-Lehrmittel Mathematik I aufzeigen, inwiefern einzelne Aufgaben angepasst werden müssen, damit spezifische Basiskompetenzen integrativ erworben und trainiert werden können. Als Unterstützung für Lehrpersonen wird für jede arithmetische Aufgabe eine Auflistung der vorausgesetzten Basiskompetenzen mitgeliefert. Zusätzlich werden Differenzierungsmöglichkeiten und handelnde Zugänge für die einzelnen Aufgaben der arithmetischen Kapitel angegeben. In einer ersten Evaluation wurde es als praxistauglich erachtet.

1 Ausgangslage

Die Schülerinnen und Schüler der Sekundarschule des Kantons Zürich arbeiten mit einem neuen Mathematiklehrmittel. Dieses ist in verschiedene Schwierigkeitsgrade gegliedert und ermöglicht Lehrpersonen eine einfache Differenzierung des Unterrichts im Bereich des Lehrplans. Lernende mit besonderem Förderbedarf im Fach Mathematik wurden dabei hingegen nicht berücksichtigt. Da die Förderung von Lernenden mit besonderen Bedürfnissen sowie sonderpädagogischen Angebote auf die Integration ausgerichtet sind, brauchen Förder- und Mathematiklehrpersonen zusätzliche Hinweise zum heilpädagogischen Umgang mit dem Lehrmittel.

1.1 Heilpädagogische Relevanz

Dass solche Ergänzungen für Regelklassen wichtig sind, lässt sich mit der Entwicklung der Heilpädagogik bzw. des Schulsystems erklären. Die Bedeutung des Begriffs Heilpädagogik ist schwierig zu definieren: Zum einen könne man sie als autonomes Fachgebiet zwischen Pädagogik und Medizin einordnen, andererseits sei sie auch als Pädagogik der Vielfalt verstehen (vgl. Biewer, 2009, S. 7). Dementsprechend verweist Biewer auch darauf hin, dass zwischen den Begriffen Heilpädagogik und inklusiver Pädagogik zwar eine thematische Spannweite liege, aber auch eine zeitliche. Die klassische Heilpädagogik, ein Werkzeug, das früher hauptsächlich in Sonderschulen bei der Arbeit mit deutlich wahrnehmbaren somatischen Schädigungen eingesetzt wurde (z.B. bei Gehörlosigkeit, Blindheit, kognitiven und motorischen Beeinträchtigungen) wandelt sich zusehends in eine Pädagogik für alle (vgl. Biewer, 2009, S. 7).

Die früheste bisher bekannte heilpädagogische Handlung wird aus dem 16. Jahrhundert überliefert. Dabei wird beschrieben, wie ein Benediktinermönch bei 12 gehörlosen Menschen die Lautsprache zu entwickeln versuchte und als Hilfsmittel ein Fingeralphabet benutzte (vgl. Löwe, 1983, S. 13). Während dazumal die schulische Bildung für Kinder im Allgemeinen aus wirtschaftlichen Gründen als Privileg galt, sprach man Kindern mit einer geistigen Behinderung oder einer Lernstörung die Bildsamkeit bis ins 18. Jahrhundert hinein ab (vgl. Biewer, 2009, S. 18) – eine These, die erstaunlicherweise erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts entkräftet wurde. Bis jedoch aus diesen Erkenntnissen ein Recht auf Bildung für alle heranwuchs, verstrich viel Zeit, sowie auch in Deutschland und Österreich im Kontext der Euthanasie mit dem Reichsschulpflichtgesetz von 1938 die Diskussion zur Unterscheidung von bildbaren und nicht bildbaren Menschen wieder aufflammte. Davon ausgenommen war die Schweiz: *„Im Unterschied zu Deutschland und Österreich konnte sich eine pädagogisch und psychologisch akzentuierte Heilpädagogik in der Schweiz bis heute bruchlos entwickeln“* (Biewer, 2009, S. 26). Bemühungen von Elternverbänden war es letztendlich zu verdanken, dass im deutschsprachigen Raum auch für Schülerinnen und Schüler mit leichten Behinderungen seit den 1960er und 1950er Jahren eine Schulpflicht bzw. das Recht auf Bildung besteht (vgl. Biewer, 2009, S. 149). In der Schweiz wurde der Grundstein mit dem Invalidenversicherungsgesetz (IVG) von 1960 gelegt, welches Kindern mit einer leichten Behinderung das Recht auf Bildung garantiert (vgl. Konferenz der kantonalen Sozialdirektorinnen und

Sozialdirektoren (SODK), o.J.). Dieses Recht wurde in den späten 1980er Jahren mit der internationalen Kinderrechtskonvention international eingefordert und zu Beginn der 1990er Jahren mit der Unterzeichnung der Erklärung von Salamanca erweitert: Während die Kinderrechtskonvention von 1989 die Nichtdiskriminierung und Möglichkeiten zur gesellschaftlichen Partizipation von behinderten Personen unter 18 Jahren fordert, beinhaltet die Erklärung von Salamanca von 1994 ebenso den Zugang zu Regelschulen für Kinder mit besonderem Erziehungs- und Bildungsbedarf (vgl. Biewer, 2009, S. 128 &). Elf Jahre später haben sich im Kanton Zürich sowohl das Stimmvolk als auch der Kantonsrat für die Verankerung der Integration im Volksschulgesetz ausgesprochen: *„Die Förderung von Kindern mit besonderen pädagogischen Bedürfnissen hat einen hohen Stellenwert und eine klar integrative Ausrichtung: Schülerinnen und Schüler mit Lernschwierigkeiten [...] werden so weit wie möglich innerhalb der Regelklasse gefördert* (Bildungsdirektion Kanton Zürich, 2006, S. 7).

Die Wahrung der Chancengleichheit ist auch heute als auschlaggebender Impuls hin zur Integration zu werten (vgl. Bildungsdirektion Kanton Zürich, 2007, S. 2), gleichzeitig änderte sich aber auch die Sichtweise auf Personen mit besonderen pädagogischen Bedürfnissen. „Behinderungen" treten meist erst dann zu Tage, wenn ein Individuum an gesellschaftlichen, geschäftlichen oder schulischen Anlässen nur ungenügend teilhaben kann, weil die Umgebung dies nicht zulässt. Eine Kurzsichtigkeit konnte für Menschen im Pleistozän einem Todesurteil gleichkommen. Weil sich bis heute die Anforderungen an den Menschen stark geändert haben und Hilfsmittel wie z.B. Brillen die Kurzsichtigkeit korrigieren können, kann der Mensch dennoch vollständig partizipieren und die Sehschwäche wird nicht weiter als Behinderung wahrgenommen. Passt man die schulischen Anforderungen für Lernende ihren Fähig- und Fertigkeiten an und bieten Lehrpersonen auch ihnen passende Hilfsmittel, kann die Teilhabe auch bei Kindern mit Lernschwächen, -störungen und -behinderungen in der Schule drastisch erhöht werden. Die UNESCO fordert deshalb, dass in Regelschulen ein Umdenken stattfindet: An Stelle des Denkmusters *Child as a Problem* sollte jenes des *Education System as a Problem* Einzug halten (vgl. UNESCO, 2005, S. 27), denn Behinderungen von Personen resultieren aus ungünstigen Strukturen des Umfelds (vgl. Thoma & Rehle, 2009, S. 31). Die Strukturen des schulischen Umfelds von Lernenden ergeben sich aus Lehrpersonen, Mitschülerinnen und –schüler, Räumlichkeiten sowie den Unterrichtsinhalten, die wiederum von Lehrplänen und Lehrmitteln geprägt werden. Damit Schülerinnen und Schüler mit besonderem Förderbedarf im Fach Mathematik eine hohe Teilhabe erreichen, müssen diese Ressourcen optimal genutzt werden: Lehrpersonen müssen einen differenzierten Unterricht anbieten können, haben aber oft Mühe dies zu bewerkstelligen, da sich die Inhalte der Lehrmittel am Lehrplan orientieren und wenig Spielraum zur Differenzierung anbieten oder weil sie nicht wissen, dass für bestimmte Lernende differenziert werden müsste. Auch das neue Mathematiklehrmittel des Kantons Zürich setzt die Vorgaben des Lehrplans für die jeweilige Klassenstufe um. Lernende mit Schwierigkeiten bezüglich basaler Mathematikfertigkeiten, können grösstenteils nicht erfolgreich partizipieren, weshalb es nötig wird, darauf hinzuweisen, welche Themen und Aufgaben des Lehrmittels zum Training basaler Fertigkeiten genutzt sowie welche Aufgaben zu deren Vorbereitung und Ergänzung beigezogen werden können. Denn der Unterricht *„muss sich der geistigen Entwicklung der Lernenden anpassen [...]“* (Vollrath, 2001, S. 35).

1.2 Zielsetzung und Vorgehen

Das Ziel dieser Entwicklungsarbeit sind ergänzende heilpädagogische Materialien, welche die Differenzierung des Unterrichts für schwache Mathematiklernende der Volksschule (Oberstufe) ermöglichen. Es soll einerseits ein Diagnoseinstrument entworfen werden, welches den Lehrpersonen hilft, die Ressourcen der Lernenden zu erkennen. Andererseits soll auch der Umgang mit diesem Instrument erklärt werden und Schlüsse für die Arbeit mit dem offiziellen Lehrmittel des Kantons Zürich gezogen werden.

So entstanden zu Beginn einige Leitfragen, welche durch die folgende theoretische Auseinandersetzung beantwortet werden sollen: Welche Kompetenzen und welches Vorwissen bestimmen den Lernerfolg in der Sekundarstufe? Gibt sind typische Schwierigkeiten für schwache Mathematiklernende? Welche Voraussetzungen erfordern die Aufgaben des Lehrmittels? Wie können die Aufgaben der arithmetischen Kapitel angepasst werden, wenn gewisse vorausgesetzte Kompetenzen ungenügend ausgebildet sind? Das Modell der Basiskompetenzen von Moser Opitz et al. (vgl. 2010) spielt dabei eine zentrale Rolle.

Nach der theoretischen Auseinandersetzung zeigte sich, dass für jedes einzelne Kapitel kleine Lernstandserfassungen notwendig sind, da sich der Lernstand kontinuierlich verändert und damit eine lernwegsbegleitende Diagnostik notwendig wird. Zusätzlich zeigte sich bei der Sichtung des Lehrmittels, dass sich die Voraussetzungen sogar von Aufgabe zu Aufgabe innerhalb der Kapitel verändern. Dies hatte zur Folge, dass im Kommentar (siehe Produkt) jede einzelne Aufgabe bezüglich Differenzierungsmöglichkeiten berücksichtigt wird. Da es im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich war, das vollständige Lehrmittel abzudecken, wurden die geometrischen Kapitel nicht berücksichtigt.

Es ist also das Ziel, ein Diagnose-Instrument zu erstellen und Differenzierungsmöglichkeiten im Sekundarlehrmittel Mathematik I aufzuzeigen, um die Partizipation von schwachen Mathematikschülerinnen und -schülern zu erhöhen und dabei folgende Kriterien zu beachten:

- Das Instrument und der Kommentar sind theoretisch fundiert.
- Das diagnostische Instrument bildet Start eines Förderkreislaufs.
- Der Kommentar zeigt Möglichkeiten zur Differenzierung auf (Ressourcenorientierung).

2 Charakteristische Schwierigkeiten beim Eintritt in die Sekundarschule

Trotz unterschiedlicher Form und Ausprägung der Schwierigkeiten beim Mathematiklernen, können Schülerinnen und Schüler, die über Förderbedarf verfügen, in zwei unterschiedliche Personengruppen eingeteilt werden. Zum einen handelt es sich um Kinder, welche temporär und nur bei spezifischen Inhalten Schwierigkeiten vorweisen, zum anderen weisen aber einige Kinder einen sehr grossen Leistungsrückstand auf, der auf gravierenderen stofflichen Lücken beruht (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 13). Haben Schülerinnen und Schüler also in einem Themenbereich Förderbedarf, der für viele andere Kinder ebenfalls eine Hürde darstellt, soll dies nicht als Prophezeiung für breit gefächerte Lücken im mathematischen Basisstoff oder besonderen Förderbedarf gewertet werden. Zu diesen typischen Stolpersteinen gehören das Dividieren (im Speziellen das schriftliche Rechenverfahren), das Rechnen mit der Null, das Schätzen, das Runden und Überschlagen sowie das Bearbeiten von komplexen Textaufgaben (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 13). Um an genauere Hinweise bezüglich stofflicher Lücken zu gelangen, empfehlen sich qualitative Lernstandserfassungen, die im Kapitel 4.1.2 näher beleuchtet werden.

Neben diesen typischen Stolpersteinen haben gewisse Lernende aber schwerwiegendere Probleme, die sich z.B. in ungenügender Rechengeschwindigkeit manifestieren und deren Ursachen Defizite beim Abruf von mathematischem Basiswissen sind. Daraus resultiert, dass Schülerinnen und Schüler mit besonderem Förderbedarf während der Primarstufe ineffektive Strategien für einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben verwenden, oft basale Kopfrechenaufgaben zählend lösen und Schwierigkeiten beim Problemlösen aufweisen (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 13 f.). Untersuchungen in der Schweiz haben gezeigt, dass sich dieses Bild auch in der Sekundarstufe kaum ändert: Um einfache Kopfrechenaufgaben zu lösen, greifen viele Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe auf Abzählstrategien oder schriftliche Rechenverfahren zurück. Im Gegensatz zu Lernenden ohne besonderen Förderbedarf wiesen diese Defizite in allen getesteten Bereichen auf (vgl. Moser Opitz, 2009, S. 33 f.).

2.1 Mögliche Ursachen für verzögertes Mathematiklernen

Die aktuelle Forschung zeigt auf, dass nicht einzelne Ursachen für Schwierigkeiten und verzögertes Mathematiklernen verantwortlich gemacht werden können (vgl. Schneider, Küspert & Krajewski, 2013, S. 190). Meistens entstehen Schwierigkeiten aufgrund verschiedener Faktoren, welche in den kommenden Unterkapiteln genauer beleuchtet werden:

- Gesellschaftliche bzw. strukturelle Rahmenbedingungen
- Individuelle Voraussetzungen
- Unterrichtliche Aspekte

(vgl. Moser Opitz, 2009, S. 30 f.)

2.1.1 Gesellschaftliche bzw. schulstrukturelle Rahmenbedingungen

PISA und andere Studien zeigen, dass Schulleistungen im Allgemeinen, aber auch die Mathematikleistungen von Faktoren wie dem besuchten Schultyp, dem Geschlecht, der sozialen Herkunft und den Kenntnissen der Unterrichtssprache beeinflusst werden. Auf diese Variablen können Lehrpersonen nur bedingt einwirken (vgl. Moser Opitz, 2007, S. 167 ff.).

2.1.2 Individuelle Voraussetzungen

Zu Schwierigkeiten beim Mathematiklernen können neben den bereits erwähnten strukturellen Ursachen auch individuelle Faktoren der Lernenden führen: neuropsychologische Voraussetzungen, genetische Komponenten, das Arbeitsgedächtnis, kognitive Grundfähigkeiten, sprachliche Fähigkeiten, z.B. die Lesekompetenz, das Selbstkonzept, motivationale Aspekte oder emotionale Faktoren, z.B. Ängstlichkeit (vgl. Moser Opitz, 2009, S. 31). Auch wenn diese Faktoren von der Lehrperson nicht direkt beeinflusst werden können, kann sie den Unterricht dennoch so gestalten, dass die Partizipation der Lernenden mit Beeinträchtigungen erleichtert wird. Damit Lehrpersonen adäquate Hilfestellungen anbieten können, müssen sie die individuellen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler sorgfältig erfassen (vgl. Moser Opitz, 2009, S. 31).

2.1.3 Unterrichtliche Aspekte

Auf unterrichtliche Aspekte haben Lehrpersonen konkrete, direkte Einflussmöglichkeiten und Lücken im mathematischen Wissen der Schülerinnen und Schüler können auch unterrichtsbedingt entstehen (vgl. Moser Opitz, 2009, S. 31). Deshalb wird diesem Unterkapitel mehr Platz gegönnt sowie es in drei Teile gegliedert wird: Lehr- und Lernverständnis, Aufbau mathematischer Vorstellung und Lerninhalte.

Lehr- und Lernverständnis

Eine Reihe von Hinweisen deuten darauf hin, dass Schwierigkeiten beim Mathematiklernen direkt mit der Beschaffenheit des Unterrichts zusammenhängen (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 16). Eine einseitige Betonung auf Auswendiglernen und Faktenwissen kann sich auf die Motivation der Schülerinnen und Schüler niederschlagen und gleichzeitig den Aufbau von einem tragfähigen inhaltlichen Verständnis behindern. (vgl. Moser Opitz, 2009, S. 32). Ebenso sollte nicht blind auf Lehrmittel für Lernende mit besonderem Förderbedarf im Fach Mathematik vertraut werden: Sie sind oft kleinschrittig und reduktionistisch gestaltet und verhindern von Anfang an gewisse Lerngelegenheiten und damit auch Entwicklungschancen und die Einsicht in einen Gesamtzusammenhang (vgl. Scherer, 1995a, S. 57). Daraus kann die Schlussfolgerung gezogen werden, dass der Mathematikunterricht für Schülerinnen und Schüler mit besonderem Förderbedarf einerseits möglichst vielseitig gestaltet werden und sich am Regelklassenunterricht orientieren soll.

Aufbau mathematischer Vorstellung

Lehrpersonen müssen darauf achten, wie sie mathematische Vorstellungen aufbauen. Neben Überlegungen bezüglich der Repräsentationsmodi ist es entscheidend, dass Lehrpersonen Materialien und Veranschaulichungen ebenso wie deren Lerninhalt als Lernstoff beachten: Schülerinnen und Schüler müssen den Umgang mit diesen erarbeiten und verstehen. Gleichzeitig müssen Arbeitsmittel gezielt ausgewählt werden, da nicht jedes Arbeitsmittel für jedes mathematische Thema geeignet ist (vgl. Moser Opitz, 2009, S. 32). Bei der Wahl von Hilfsmitteln und Veranschaulichungen kann eine didaktische Analyse nach Klafki unterstützend wirken: Diese berücksichtigt Inhalte und Handlungsformen und zielt darauf ab, deren Wert oder auch Bildungsgehalt einzuschätzen und „*stellt auch heute immer noch eine wichtige Orientierungshilfe für die Gestaltung von Unterricht dar*“ (Heckmann & Padberg, 2008, S. 43).

Lerninhalte

Lerninhalte in Lehrplänen und Schulbüchern sind aus heutiger Sicht für den Erwerb grundlegender Kompetenzen und Konzepte nicht alle gleich wichtig und müssen folglich nicht auch nicht alle gleich intensiv bearbeitet werden (Moser Opitz, 2009, S. 32). Ein typisches Beispiel bietet die Vermittlung der Multiplikation: Anstatt Einmaleins-Reihen zu memorisieren, ist es gerade für Rechnerinnen und Rechner mit Lücken im Basisstoff oder kognitiven Beeinträchtigungen wichtig, sogenannte Kern- oder Schlüsselaufgaben zu erarbeiten ($2 \cdot x$, $5 \cdot x$, $10 \cdot x$) und die weiteren Aufgaben abzuleiten (Moser Opitz, 2009, S. 32). Der Unterricht müsste deswegen die Vorstellungen zur Multiplikation und das Operationsverständnis fokussieren. Untersuchungen zeigen zudem, dass dabei das Fachwissen der Lehrperson zu unterschiedlichen Vorgehensweisen bei Rechenoperationen eine grosse Rolle spielt (vgl. Moser Opitz, 2009, S. 32).

2.2 Was müssen Lernende mitbringen, um am Mathematikunterricht der 1. Sekundarklasse teilhaben zu können?

Die Erkenntnisse des Kapitels 2 drängen zwei Fragen auf: Ob und welche basalen Unterrichtsinhalte und Kompetenzen bei Schülerinnen und Schülern mit besonderem Förderbedarf in der Sekundarstufe fokussiert werden müssen. Die folgenden Kapitel 2.2.1 und 2.2.2 sollen diesen Fragen nachgehen.

2.2.1 Die Entwicklung früher mathematischer Kompetenzen

Krajewski entwickelte zwischen 2003 und 2007 das Entwicklungsmodell der Zahl-Grössen-Verknüpfung, welches die frühen Phasen der Kompetenzentwicklung fokussiert und bis in die Sekundarstufe übertragen werden kann (vgl. Schneider, Küspert & Krajewski, 2013, S. 25). Das Modell ist eine der neuesten Thesen zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen und gilt als das bedeutsamste Entwicklungsmodell der Gegenwart (vgl. Schneider, Küspert & Krajewski, 2013, S. 24) Es unterteilt die ersten mathematischen Kompetenzen in drei Ebenen:

Erste Ebene: Zahlwörter und Ziffern ohne Mengen- und Grössenbezug

Auf der ersten Kompetenzebene erwerben Lernende die Zahlwortfolge und die arabische Schreibweise der Ziffern sowie deren sichere und automatische Beherrschung (vgl. Ennemoser & Krajewski, 2013, S. 227). Das Modell macht die Annahme, dass bereits in einem frühen Stadium Zahlwörter erwerben, ohne zu verstehen, dass diese einer bestimmten Menge oder Grösse zugeordnet werden können (vgl. Schneider, Küspert & Krajewski, 2013, S. 26). *„In der Sekundarschule kann diese grundlegende Einsicht* [Zuordnung von Zahlen und Ziffern zu Mengen oder Grössen, Anm. d. Verf.] *im Regelfall vorausgesetzt werden"* (Ennemoser & Krajewski, 2013, S. 227). Problematisch ist es jedoch, wenn angenommen wird, dass dies bei Sekundarschülern auch in grösseren Zahlenräumen der Fall ist. Auch wenn Schülerinnen und Schüler grosse rationale Zahlen (z.B. 23'563.4) korrekt aufschreiben oder vorlesen, kann nicht zwingend darauf geschlossen werden, dass sie die entsprechenden Grössenrepräsentationen verstanden haben: Das Schreiben und lesen von Zahlen kann auch mit intuitiv erworbenen Strategien bewerkstelligt werden (vgl. Ennemoser & Krajewski, 2013, S. 227).

Zweite Ebene: Verknüpfung der Zahlwörter und Ziffern mit Mengen oder Grössen

Auf zweiter Ebene ordnet Krajewski das Zahl-Grössen-Verständnis ein. Zunächst können Lernende Zahlen nur ungenau einer Grösse oder Menge zuordnen. Sie ordnen eine Zahl nur groben Kategorien zu (viel, wenig) und können z.B. nahe beieinanderliegende Zahlen kaum vergleichen. Die Zahl-Grössenzuordnung wird mit der zeit immer genauer, bis zuletzt Zahlen exakten Grössen oder Mengen zugeordnet werden können. Während sich dieses Verständnis bei kleinen Zahlen üblicherweise früh herausbildet, sind in grösseren Zahlenräumen vor allem tragfähige Vorstellungen zum dezimalen Stellenwertsystem von zentraler Bedeutung (vgl. Ennemoser & Krajewski, 2013, S. 228).

Dritte Ebene: Verknüpfung der Zahlwörter und Ziffern mit Zahlrelationen

Die dritte Ebene kennzeichnet sich durch das Verständnis der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung (vgl. Ennemoser & Krajewski, 2013, S. 228). Schülerinnen und Schüler lernen, dass eine beliebige Zahl in Teilgrössen zerlegt werden kann, welche zusammengesetzt wieder die Ursprungszahl ergeben. Damit verbunden ist ebenso der Umstand, dass die Differenz zweier Zahlen immer mit einer dritten Zahl angegeben werden kann (vgl. Ennemoser & Krajewski, S. 228). Auf der dritten Ebene kommen Lernende dementsprechend zu Einsichten bezüglich der Beziehungen zwischen verschiedenen Zahlen.

2.2.2 Grundlegendes Basiswissen als Prädiktoren für gute Mathematikleistungen in der Sekundarstufe

Um im Fach Mathematik auch zu Beginn der Sekundarstufe gute Leistungen zu erbringen, müssen Schülerinnen und Schüler jedoch weitere Kenntnisse erworben haben. Verschiedene Untersuchungen wiesen nach, dass folgende mathematische Bereiche besonders wichtig für den Aufbau weiterführender Kompetenzen in der Sekundarstufe sind (vgl. Moser Opitz, 2009, S. 34):

- Zählen in Schritten grösser als 1
- Dezimalsystem
- Division

Freesemann et al. verweisen zusätzlich auf das Operationsverständnis zu allen Grundoperationen, da dieses für den Aufbau und die Konsolidierung eines inhaltlichen Verständnisses der Grundschulmathematik essentiell seien (vgl. 2010, S. 2 f.) und fordern hierauf Bezug nehmend ein zusätzliches Rechentraining für schwache Schülerinnen und Schüler. Weiter hält Schmidt fest, dass der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden muss (vgl. dritte Ebene des Entwicklungsmodells von Krajewski), da sie auch eine wichtige Grundlage für das Verständnis zur Addition und Subtraktion bildet (vgl. Schmidt, 2009, S. 124). Die Schülerinnen und Schüler sollten demnach in folgenden Kompetenzen angemessene Vorstellungen entwickeln, um am Mathematikunterricht der Sekundarstufe teilhaben zu können:

- Zählen in Schritten grösser als 1
- Dezimalsystem (Bündeln, Entbündeln, Stellenwertschreibweise, Orientierung am Zahlenstrahl, Zahlzerlegungen)
- Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
- Verständnis der Grundoperationen und Mathematisierungen

Die Anzahl der Schülerinnen und Schüler, welche diese Kompetenzen zu Beginn der Sekundarstufe nicht erarbeitet haben ist gross: Fast ein Fünftel der Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I müssen im Fach Mathematik als Risikogruppe betrachtet werden, da sie am Ende der obligatorischen Schulzeit nur über das arithmetische und geometrische Grundwissen der 4. Primarklasse verfügen (vgl. Freesemann et al., 2010, S. 2). Gleichzeitig deckten die PISA-Studien auf, dass ebenfalls etwa 20 Prozent der Lernenden am Ende der vierten Klasse Mathematikleistungen erbrachten, die dem Kenntnisstand der zweiten Primarklasse entsprechen. Dies wirft die Frage auf, ob Schülerinnen und Schüler mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen in der Sekundarstufe I keine curricularen Inhalte erwerben, sondern lediglich basale mathematische Kenntnisse festigen (vgl. Fritz & Schmidt, 2009, S. 7 ff.).

Die Forschung fordert deshalb für Schülerinnen und Schüler mit Rechenschwächen auch in der Sekundarstufe einen gezielten Aufbau der Basiskompetenzen: Da „*rechenschwache Schülerinnen und*

Schüler in höheren Schuljahren zentrale mathematische Kompetenzen der Grundschulmathematik [...] nicht erworben haben und deshalb in den weiteren mathematischen Lernprozessen beeinträchtigt sind“ (Moser Opitz et al. 2010, S. 7) und weil das Verständnis der basalen Kompetenzen einen zentralen Prädiktor für die aktuelle Schulleistung in der Sekundarschule darstellen (vgl. Freesemann et al., 2010, S. 2), soll eine Entwicklung der Basiskompetenzen in der Sekundarstufe erfolgen (vgl. Moser Opitz, 2009, S. 41). D.h., es wird aufgrund der hierarchischen Aspekte der Mathematik von diesen Autorinnen konkludiert, dass das Verständnis der Basiskompetenzen als notwendige Voraussetzung für weiteres Mathematiklernen gilt und dass diese Kenntnisse vor dem Erwerb anderer Kompetenzen gefestigt werden müssen (vgl. Humbach, 2009, S. 70; Ennemoser & Krajewski, 2013, S. 225). Im Verlauf des folgenden Kapitels 3 werden diese Basiskompetenzen genauer durchleuchtet.

3 Beschreibung der Basiskompetenzen

Um diesen Basiskompetenzen und deren Strukturen ein Gesicht zu geben, werden sie in den folgenden Abschnitten erläutert. Die Erkenntnisse werden im Kapitel 9 des Produktes in tabellarischer Form zusammengefasst, da sie die Grundlage für die Förderung mathematischer Basiskompetenzen bilden.

3.1 Mengenerfassen und Zählkompetenz

Bereits im 13. Jahrhundert postulierte Roger Bacon, dass den Menschen das mathematische Denken angeboren ist bzw., dass das menschliche Gehirn bereits bei der Geburt für einen mathematischen Umgang mit Mengen und Zahlen vorbereitet ist. Diese Aussage wurde gegen Ende des letzten Jahrhunderts wieder aktuell, da neuere Untersuchungen belegen, dass Kleinkinder wie auch Säuglinge tatsächlich über einen Zahlensinn verfügen: Z.B. können Säuglinge kleine Mengen – d.h. eine Anzahl von drei bis vier Elementen – präzise erfassen. Neben diesem Kernsystem der Mengenerfassung konnte ein zweites System nachgewiesen werden, das eine Unterscheidung zweier Mengen erlaubt. Diese Unterscheidung verläuft jedoch ungenau und gelingt ausschliesslich bei klar unterscheidbaren Mengen (vgl. Fritz, Ricken & Balzer, 2009, S. 12 f.). Mit etwa zwei Jahren beginnen Kinder – oft auch fehlerhaft – zu zählen, d.h., sie repetieren die Zahlwortreihe, die sie bei Geschwistern oder Eltern gehört haben (vgl. Moser Opitz, 2007, S. 82), benutzen diese Fertigkeit aber noch nicht, um Objekte zu zählen (vgl. Fritz, Ricken & Balzer, 2009, S. 15). Für Moser Opitz ist das Zählen deswegen eine sozial bzw. kulturell vermittelte Fertigkeit. Um Gegenstände präzise abzuzählen, erwerben Kinder im Alter von etwa drei Jahren allmählich drei sogenannte how-to-count- und zwei what-to-count-Prinzipien (vgl. Krauthausen & Scherer 2007, S. 12 f.).

1. *Eindeutigkeitsprinzip:* Jedem Gegenstand darf nur ein Zahlwort zugeordnet werden.
2. *Prinzip der stabilen Ordnung:* Die verschiedenen Zahlwörter müssen in einer stabilen Ordnung vorliegen.
3. *Kardinalprinzip:* Die Anzahl der Gegenstände wird durch das letzte Zahlwort bestimmt.
4. *Abstraktionsprinzip:* Die ersten drei Prinzipien können bei beliebigen Gegenständen von beliebiger Anzahl angewendet werden.
5. *Prinzip der Irrelevanz der Anordnung:* Die Anordnung der Gegenstände ist für die Anzahl irrelevant.

Im Regelfall entwickelt sich die Zählkompetenz so weit, als dass Kinder bis zum Schuleintritt vorwärts bis 20 zählen und in diesem Zahlenraum eine korrekte Anzahl bestimmen können (vgl. Moser Opitz, 2007, S. 82). Zu diesem Zeitpunkt scheinen die meisten Kinder den kardinalen Zahlaspekt verstanden zu haben. Während der Grundschulzeit entwickeln Kinder weitere Zahlaspekte und erkennen die Beziehungen zwischen diesen und gelangen so nach und nach zu einem umfassenden Zahlbegriff (vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 15). Beim Erwerb und der Vernetzung der verschiedenen Zahlaspekte spielen konkrete Erfahrungen in speziellen Situation eine wichtige Rolle – wie sich diese Lernprozesse jedoch genau vollziehen, ist nach Padberg und Benz nicht gesichert: *„[...] dazu gibt es immer noch wesentlich mehr offene Fragen als konkrete Ergebnisse“* (2011, S. 16). Wichtig erscheint deswegen vor allem eine ganzheitliche Thematisierung der verschiedenen Zahlaspekte im Unterricht, damit Lernende einen umfassenden Zahlbegriff erwerben. Die Tabelle 1 erklärt und fasst die von Padberg und Benz im Fliesstext genannten Zahlaspekte zusammen (vgl. 2011, S. 14 f.).

Tabelle 1: *Charakterisierung der verschiedenen Zahlaspekte*

Zahlaspekt	**Erklärung**	**Frage**	**Beispiel**
1. Kardinalzahlaspekt	Beschreibung von Anzahlen	Wie viele?	Es gibt 26 Kantone.
2. Ordinalzahlaspekte			
▪ Ordnungszahl	Kennzeichen einer Reihenfolge innerhalb einer geordneten Reihe	An welcher Stelle? Die wievielte?	Heute ist der 7. April. Er belegt den 3. Platz.
▪ Zählzahl	Kennzeichen einer Reihenfolge innerhalb einer geordneten Reihe	An welcher Stelle?	Ich lese auf Seite 10. Er hat die Startnummer 4.
3. Masszahlaspekt	Bezeichnung von Grössen	Wie lang? Wie teuer?	Die Strecke beträgt 1 cm. Es kostet 5 Fr.
4. Operatoraspekt	Beschreibung der Vielfachheit von Handlungen u. Vorgängen	Wie oft?	Er geht 3-mal zum Arzt.
5. Rechenzahlaspekte			
▪ algorithmischer Aspekt	Umgang mit Zahl nach einem Algorithmus, Rezept	-	schriftliche Addition
▪ algebraischer Aspekt	Zahl unter Verwendung algebraischer Gesetzmässigkeit	-	Kommutativgesetz, Assoziativgesetz
6. Codierungsaspekt	Benennung oder Unterscheidung von Dingen	-	S12 (S-Bahn), Telefonnummer

3.1.1 Zählkompetenz als Ausgangspunkt für den Erwerb grundlegender mathematischer Kompetenzen

Moser Opitz hält fest, dass das Zählen einerseits für die ersten arithmetischen Lernprozesse eine zentrale Kompetenz sei (2007, S. 81). Z.B. ist das Zählen in Schritten eine wichtige Voraussetzung und Unterstützung für die Ablösung vom zählenden Rechnen und unterstützt Schülerinnen und Schüler dabei, zunehmend auf andere Hilfsmittel (z.B. Finger) zu verzichten (2007, S. 84 f.). So ist es nicht verwunderlich, dass lernschwache Mathematikschülerinnen und -Schüler auch in der Sekundarstufe signifikant schlechter in Schritten grösser als 1 zählen können als jene Kinder ohne Lernschwierigkeiten (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 14). Das Fehlen dieser Grundlage verzögert das weitere Mathematiklernen: *„Eine gesicherte Zählkompetenz scheint somit für den Erwerb mathematischer Fähigkeiten eine zentrale Rolle zu spielen“* (Moser Opitz, 2007, S. 87).
Für den unvollständigen Erwerb der Zählkompetenzen bei Kindern können verschiedene Ursachen oder Vermutungen ausgemacht werden (vgl. Moser Opitz, 2007, S. 88):

- Einige Kinder verwenden den Zählakt nicht als Mittel zur Bestimmung einer Anzahl, sondern repetieren lediglich mechanisch die Zahlwortreihe.

- Eine weitere Erklärung besagt, dass ein Teil der Kinder Schwierigkeiten hat, während numerischen Aktivitäten Informationen im Arbeitsgedächtnis zu speichern.

- Ebenso können eine eingeschränkte Hörspanne und Schwierigkeiten im visuell-räumlichen Bereich den Zählakt beeinflussen und begrenzen.

Für Lehrpersonen ist vor allem interessant, dass eine oder mehrere dieser Ursachen meist dazu führen, dass Kinder mit Lernschwierigkeiten den Zählakt nicht flüssig durchführen können, in der Folge oft arithmetische Aktivitäten wie das Zählen vermeiden und deshalb deutlich weniger Erfahrungen sammeln als andere Kinder (vgl. Moser Opitz, 2007, S. 88). Da sie die Zählkompetenzen nicht im Alltag erwerben, brauchen sie Unterstützung und Anregung von aussen: Der Zählkompetenz muss deshalb in der Schule bei Kindern mit Mathematiklernschwierigkeiten besondere Aufmerksamkeit zugesprochen werden (vgl. Moser Opitz, 2007, S. 89).

3.2 Dezimalsystem

Im Gegensatz zum System der römischen Zahlen (Additionssystem) rechnen wir heute mit einem Stellenwertsystem, dessen Ursprung in Indien zu finden ist und von Adam Ries im deutschsprachigen Raum verbreitet wurde (vgl. Wikipedia, 2015, o.S.). Die Darstellung von Zahlen in Stellenwertsystemen ist für Schülerinnen und Schüler deshalb so wichtig, weil es auch eine zentrale mathematische Grundidee darstellt: *„Mit einer endlichen Anzahl von Ziffern kann jede Zahl unter Nutzung des Schreibraumes (Stelle) eindeutig dargestellt werden“* (Scherer & Moser Opitz, 2010, S.

130). Haben Lernende keine oder eine unvollständige Einsicht in das heute genutzte Dezimalsystem, fehlen ihnen wichtige Grundlagen für viele mathematische Lernprozesse: das Verständnis von Zahlen, Zahlvorstellungen, den Erwerb der Grundoperationen, Dezimalzahlen und Grössen, die Basis für das Schätzen, Überschlagen und runden von Zahlen (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 130). Cawley et al. gehen so weit, als dass das dezimale Stellenwertsystem die Voraussetzung für arithmetisches Lernen überhaupt sei (2007, S. 22).
Wie bereits kurz erwähnt, beruht das dezimale Stellenwertsystem auf der Annahme, dass der Vorrat an Ziffern endlich ist: Der Wert der Zahl wird einerseits durch die Ziffer, als auch durch die Stelle, an der sie steht, definiert. Deshalb braucht es einen Platzhalter, den die Ziffer Null symbolisiert. Der Wert einer Stelle kann unterschiedlich sein und hängt vom Wert der Ziffern ab, die wir einsetzen. Normalerweise benutzen wir das Dezimalsystem, das, wie es der Name impliziert, zehn unterschiedliche Ziffern pro Stelle zulässt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

In einer Zahl verwendet, enthält jede Ziffer zwei Informationen:

1. Die Ziffer vermittelt die Anzahl der Bündel für einen Stellenwert (Zahlenwert der Ziffer).
2. Die Position der Ziffer innerhalb einer Zahl vermittelt die Mächtigkeit des zugehörigen Stellenwertes (Stellenwert der Ziffer).

(vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 82)

An erster Stelle können also Zahlen von 0 bis 9 ($x \times 10^0$) dargestellt werden. An zweiter Stelle Zahlen mit dem Wert von $x \times 10^1$, an dritter Stelle $x \times 10\hat{}2$ usw. Für x kann eine beliebige Ziffer von 0-9 eingesetzt werden.
Die Zahl 5401 wird also folgendermassen zusammengesetzt:

1×10^0	+	0×10^1	+	4×10^2	+	$5 \times 10\hat{}3$
1 Einer	+	0 Zehner	+	4 Hunderter	+	5 Tausender

(vgl. Padberg, 2005, S. 56)

Aus diesem Grund ist es unabdingbar, dass tiefere Stellen zu höherwertigen Stellen gebündelt werden können, sobald der Zahlwert den maximal möglichen Stellenwert ($9 \times 10\hat{}x$) überschreitet. Ist die Zahl kleiner, als es die Stelle zu schreiben zulässt, muss die Stelle in die nächstkleinere Stelle entbündelt werden*. „Für ein wirkliches Verständnis des Zehnersystems müssen nämlich Bündelung und Stellenwert als die zentralen Prinzipien erkannt werden“* (Padberg, 2005, S. 61). Zusammenfassend nennt Ross vier Wissenselemente, die von Lernenden benötigt werden, um Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem richtig zu verstehen (Ross, 1989, S. 47 zit. n. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 133):

- *Stellenwert* (Position der Ziffer innerhalb der Zahl)
- *Multiplikative Eigenschaft:* Der Wert einer einzelnen Stelle kann berechnet werden indem die Anzahl der Einheiten (Ziffer) mit dem Stellenwert (Position) vervielfacht wird. Die 5 in der oben genannten Zahl 5401 bedeutet 5×1000, die 4 bedeutet 4×100, die 0 bedeutet 0×10 und die 1 bedeutet 1×1.
- *Additive Eigenschaft:* Die Mächtigkeit der ganzen Zahl setzt sich aus den Summen der einzelnen Stellenwerten zusammen: $5000 + 400 + 0 + 1$.
- *Eigenschaft der Basis 10:* Die Werte der Stellen nehmen nach links mit Zehnerpotenzen zu. Die erste Stelle hat demnach 10^0, die zweite Stelle den Wert 10^1, die dritte Stelle 10^2 und die vierte Stelle 10^3.

3.2.1 Übungsformen zum Bündeln von Stellenwerten

Handelndes Bündeln

Padberg spricht sich bei der enaktiven Erarbeitung des Bündelns gegen dezimale Bündelungen aus, da die Basis 10 zu gross und deshalb zu unübersichtlich ist. „*Wegen der simultanen Erfassbarkeit und der besseren Überschaubarkeit sind kleinere Bündelungszahlen wie drei, vier oder fünf [...] wesentlich besser geeignet*“ (Padberg, 2005, S. 61). Scherer und Moser Opitz halten zwar fest, dass Padberg dies erwähnt, äussern sich dazu jedoch nicht mit einer dezidierten Meinung (vgl. 2010, S. 132) – sie erwähnen die Erarbeitung des Bündelungsprinzips mit Basen kleiner als 10 aber auch nicht in ihren Vorschlägen. Der Gedanke Padbergs ist hingegen interessant, weil Schülerinnen und Schüler wenig Zeit für das Zählen von Gegenständen aufbringen und somit die aktive Lernzeit mit dem eigentlichen Lerngegenstand des Bündelns und Entbündelns gesteigert wird. Gleichzeitig spricht die hohe Verfügbarkeit von Materialien für diese Methodik, da beispielsweise Kekse oftmals in Kunststoffschalen mit mehreren Abteilungen für zwei bis vier Stück verkauft werden. Bei einem spielerischen Ansatz zum Einstieg notieren sich Lernende, wie viele Kekse benötigt werden, um alle Abteilungen der leeren Verpackung voll zu besetzen. Danach wird die Verpackung vollständig gefüllt und die Überlegungen der Schülerinnen und Schüler verifiziert. In späteren Aufgaben wird die Anzahl der Kekse variiert und der Frage nachgegangen, wie viele Abteile der Verpackung restlos aufgefüllt werden können. Mögliche Kritik zu diesem Verfahren könnte sich darauf beziehen, dass Lernende eine zusätzliche Transferleistung hin zum dezimalen Bündeln erbringen müssen und eine fortgesetzte Ordnung nur bedingt möglich ist: *„Die Grundidee der dezimalen Struktur wird erst im Zahlenraum bis 1000 richtig sichtbar. Erst wenn zehn Hunderter zu einem Tausender gebündelt werden, findet eine Bündelung dritter Ordnung statt, und das Prinzip der fortgesetzten Ordnung wird deutlich“* (Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 140). Dies spricht einerseits für die Erarbeitung des Bündelungsprinzip mit der Basis 10, vor allem aber auch für eine Lernerleichterung durch die Einsicht in grössere Zusammenhänge im Sinne einer ganzheitlichen Erarbeitung des Zahlenraums (vgl. Scherer, 1995b, S.

151). Zusätzlich halten Scherer und Moser Opitz fest, dass eine Einschränkung des Zahlenraums im zweistelligen Bereich für ältere Schülerinnen und Schüler demotivierend wirken kann (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 141).

„Für die [enaktive, Anm. d. Verf.] *fortgesetzte Bündelung im Tausenderraum eignet sich besonders das Dienes-Material [...]"* (Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 142), weil es den Kardinalzahlaspekt akzentuiert und das Bündelungsprinzip gut exemplifiziert. Gleichzeitig lassen sich auch Entbündelungsvorgänge modellieren, indem 1000er-Würfel gegen Hunderterplatten ausgetauscht werden, um Subtraktionen korrekt darstellen zu können. Damit Lernende bei der Arbeit mit Dienes-Material substanzielle Einsichten ins Prinzip der fortgesetzten Bündelung erhalten, müssen Zahlen auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen notiert werden. Dienes-Material sollte demnach beispielsweise im Verbund mit Stellenwerttabellen eingesetzt werden (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 143).

Strukturiertes Zählen im Hunderterraum

Strukturiertes zählen kann schwache Schülerinnen und Schüler ebenfalls dabei unterstützen, Einsichten zum Bündelungsprinzip zu erhalten. (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 141). Dabei werden grössere Mengen von Gegenständen gezählt und deren Anzahl (vgl. Kardinalzahlaspekt) auf einer Stellenwerttabelle notiert, um die enaktive Ebene mit der symbolischen Ebene zu vernetzen. Das Strukturierte Zählen bietet der Lehrperson und den Lernenden demzufolge eine Gelegenheit, im Unterricht auf effiziente Vorgehensweisen wie das Bündeln in Zehnergruppen einzugehen.

Zusätzlich können Schülerinnen und Schüler auch beim Zählen in Zweier, Fünfer- oder Zehnerschritten Analogien erkennen. Als Kritik fügt Padberg aber hinzu, dass das Zählen in Schritten eher den operativen Übungen zur Addition und Subtraktion und nicht der spezifischen Förderung des Bündelungsprinzips zugeordnet wird. Die Lernenden bilden – solange sie noch rechnen müssen – in erster Linie analoge Additions- und Subtraktionsaufgaben (2005, S. 94).

Einsicht in das schriftliche Verfahren der Addition

Padberg empfiehlt aus diesem Grund auch Untersuchungen der schriftlichen Addition. *„Die Einsicht in das Verfahren der schriftlichen Addition im Dezimalsystem kann durch Erarbeitung der charakteristischen Kennzeichen (Prinzip des Bündelns, Prinzip des Übertrags, Rückgriff auf das kleine Einspluseins, Beachtung des Stellenwertes der Ziffern) [...] vertieft werden"* (Padberg, 2005, S. 61).

3.3 Addition und Subtraktion

Verschiedene Untersuchungen belegen, dass bereits Säuglinge über Anlagen verfügen, um das arithmetische Konzept des Vermehrens und Verminderns zu verstehen und dass die früher gemachten Erkenntnisse über die angeborenen Kernsysteme (vgl. Kapitel 3.1) erweitert wurden: Das Kernsystem der Mengenerfassung dient neben dem Vergleich kleiner Grössen ebenso dem Erkennen von Mengenveränderungen (vgl. Fritz, Ricken & Balzer, 2009, S. 16 f.). Im Alter von drei Jahren können Kinder bereits Handlungen des Vermehrens und Verminderns mit Mengen grösser als 3 verstehen – sie können die Mengen jedoch noch nicht genau bestimmen. Bei Schuleintritt können rund 90 % der Schülerinnen und Schüler bereits einfache Additionen durchführen; die Hälfte bis zwei Drittel der Lernenden können sogar ohne Abzählmöglichkeiten auf symbolischer Ebene Additionen im Zahlenraum bis 10 lösen Schulanfänger nutzen dabei oft Zählstrategien (vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 88 f.):

- *vollständiges Auszählen*: Alle Elemente werden zusammengelegt und ausgezählt.
- *Weiterzählen vom ersten Summanden aus*: Der Zählvorgang wird erst bei der Anzahl des ersten Summanden gestartet.
- *Weiterzählen vom grösseren Summanden aus*: Das Kommutativgesetzt wird bereits beachtet und die kleinere Menge wird zur grösseren hinzugezählt (Effizienzsteigerung).
- *Weiterzählen vom grösseren Summanden aus in grösseren Schritten*: Um schneller zum Ergebnis zu kommen, wird in Zweier- oder grösseren Schritten weitergezählt.

Leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler haben oft Schwierigkeiten bei Ablösung von Zählstrategien hin zu Rechenstrategien. Diese Kinder lösen einerseits (aufgrund der Ineffizienz von Zählstrategien) deutlich weniger Aufgaben und machen dabei mehr Fehler als Kinder, die bereits Rechenstrategien einsetzen. Padberg und Benz fordern deshalb, dass Lehrpersonen leistungsschwächere Kinder nicht blind ihre eigenen Strategien anwenden lassen, sondern eine Ablösung der Zählstrategien und den Einsatz von Rechenstrategien fördern und einfordern (vgl. 2011, S. 92 f.).

Typische Aufgabentypen, die Kinder in der Ablösung von Zählstrategien unterstützen, sind beispielsweise (vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 100 ff.; Scherer, 2012, S. 7):

- Strukturiertes Zählen
- Eins-plus-eins-Aufgaben memorisieren
- Verdoppelungsaufgaben memorisieren
- Tauschaufgaben
- Analogieaufgaben
- Nachbaraufgaben
- schrittweises Rechnen
- gegensinniges Verändern
- stellenweises Rechnen
- Umkehroperationen

Auch wenn das Memorisieren von Verdopplungsaufgaben und Eins-plus-eins-Aufgaben für Lehrpersonen einfach in den Unterricht zu integrieren ist, darf es nicht im Vordergrund stehen.

Aktuelle Erkenntnisse aus der Lernforschung implizieren eine gute Durchmischung der Rechenstrategien (vgl. Scherer, 2012, S. 6).
Erklärungen und Veranschaulichungen dieser Trainingsmöglichkeiten werden im Kapitel 9 des Produktes erläutert.

3.4 Teil-Teil-Ganzes-Beziehungen als Voraussetzung für Addition und Subtraktion

In einer international geführten Diskussion hat sich in den 1980er-Jahren herausgebildet, dass vor allem das Konzept der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung beim Erwerb der Addition und Subtraktion von besonderer Bedeutung ist (vgl. Schmidt, 2009, S. 127). Demnach müssen Schülerinnen und Schüler jene Vorstellung konstruieren, dass eine Menge oder Natürliche Zahl (ausgenommen 1) in Teilmengen aufteilbar ist und die Summe der Teilmengen die ursprüngliche Menge oder Zahl beschreibt. Die Abbildung 1 stellt dies schematisch dar.

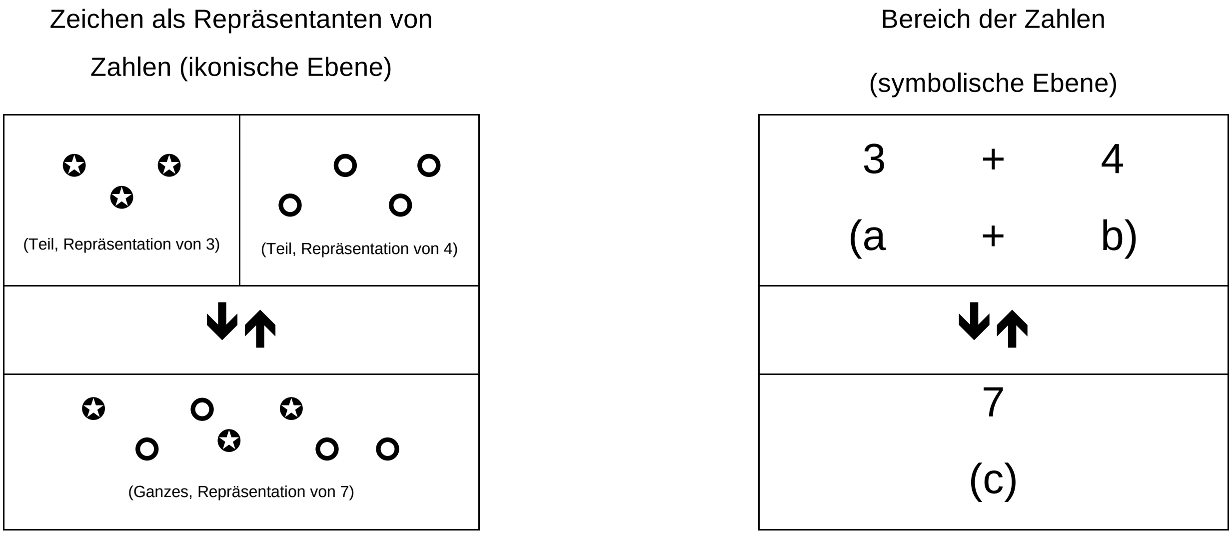


Abbildung 1: *schematische Darstellung des Teil-Teil-Ganzes-Konzepts nach Schmidt, 2009, S. 127*

Um Vorstellungen zu Teil-Teil-Ganzes-Beziehungen zu erwerben und festigen, eignen sich verschiedene Materialien und Aufgabenstellungen, welche im Kapitel 9.3 des Produktes gegliedert nach Repräsentationsmodi vorgestellt werden.

3.5 Multiplikation

Untersuchungen zeigen, dass Kinder bereits vor der Bearbeitung der Multiplikation in der Primarschule multiplikative Sachverhalte verstehen und einfache Sachaufgaben dazu lösen können: Knapp 80 % der Schulanfänger und Schulanfängerinnen bearbeiteten in einer Studie von Rasch eine

einfache multiplikative Sachaufgabe richtig. Andere Studien von Bönig, Selter oder Padberg und Ventker endeten mit ähnlichen Werten (vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 124) – die meisten Schülerinnen und Schüler verfügen also schon beim Schuleintritt über grosse Vorkenntnisse zur Multiplikation. Padberg und Benz halten aber ebenso fest, dass einige Kinder zu Beginn der Primarschule keinerlei Grundverständnis bezüglich der Multiplikation erworben haben (vgl. 2011, S. 126). Das Lernen der Multiplikation und Division bedeutet deswegen für viele Schülerinnen und Schüler einen „cutoff Punkt“, *„der aufzeigt, ob grössere Lernschwierigkeiten vorhanden sind oder nicht“* (Moser Opitz, 2007, S. 106).
Um einfache Sachaufgaben mit multiplikativen Eigenschaften zu lösen, benutzten Kinder unterschiedliche Strategien, die am Beispiel folgender Aufgabe dargelegt werden (vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 125 ff.):

Kaffee und Kuchen mit den 7 Zwergen: Jeder Zwerg trinkt 2 Tassen Kaffee. Wie viele Kaffeetassen werden getrunken?

- *Direktes Modellieren mit Material:* Die Lernenden legen z.B. für jeden Zwerg zwei Wendeplättchen ab und zählen vollständig und meist in Einerschritten ab.

- *Rhythmisches Zählen in gleich grossen Teilabschnitten:* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, usw. Die Schülerinnen und Schüler betonen die unterstrichenen Zahlen und zählen die Teilabschnitte mit den Fingern mit (1, 2, erster Finger, 3, 4, zweiter Finger, 5, 6, dritter Finger usw.).

- *Benutzung von Zahlenfolgen:* 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14

- *Wiederholtes Addieren gleicher Summanden:* 2 + 2 = 4; 4 + 2 = 6; 6 + 2 = 8; ...; 12 + 2 = 14

- *Multiplikative Rechnungen:* 7 x 2 = 14 – hierbei muss aber das Ergebnis der gesuchten Malaufgabe schon bekannt sein.

Abgesehen von der ersten Strategie, lässt sich bei den anderen Formen eine multiplikative Struktur erkennen. Dennoch birgt auch die rhythmische Zählstrategie (vgl. zweite Strategie) Risiken in sich: Obwohl sie schwerfällig, zeitraubend und fehleranfällig ist, neigen manche Schülerinnen und Schüler dazu, sie beizubehalten, was negative Spätwirkungen bis in die Sekundarstufe oder in das Erwachsenenalter zur Folge haben kann (vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 128). Lehrpersonen sollten demnach eine variable Verwendung verschiedener Strategien fördern und fordern, denn *„Flexibles Rechnen [...] ist ein wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts“* (Scherer, 2012, S.6).

Verbleiben Schülerinnen und Schüler dennoch bei Zählstrategien im multiplikativen Kontext bis zum Ende der Primarschulzeit, treten in höheren Schuljahren im Umgang mit Multiplikationen typische

Probleme auf, wobei Schwierigkeiten mit der Automatisierung des Einmaleins vordergründig zu den Auffälligsten gehören. Lernende müssen Aufgaben wie 7 x 6 immer wieder neu berechnen, häufig durch das Aufsagen der kompletten Einmaleins-Reihe und unter Beizug des fehleranfälligen Fingerrechnens (vgl. Scherer, 2012, S. 5). Neben der fehlenden Automatisierung nennt Scherer vier weitere Bereiche in denen bei leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern oftmals Defizite festzustellen sind (vgl. 2012, S. 6):

- *Beziehungen zwischen einzelnen Aufgaben:* Lernschwache Schülerinnen und Schüler benutzen Kern- oder Schlüsselaufgaben (z.B. 1 x 6, 2 x 6, 5 x 6, 10 x 6) nicht als Anhaltspunkte, um schneller zum Resultat der gewünschten Einmaleins-Aufgabe zu gelangen.

- *Rechengesetze:* Aufgrund von Gedächtnisproblemen oder mangelndem Verständnis werden Rechengesetze wie das Kommutativgesetz nicht angewendet: *„Stellt man Kindern die Aufgabe 6 x 8 und nach erfolgreicher Berechnung sofort im Anschluss die Aufgabe 8 x 6, so berechnen viele Kinder diese Aufgabe wieder völlig neu“* (Scherer, 2012, S. 6).

- *Erweiterungen:* Erweiterungen zum kleinen Einmaleins oder auch mechanisches Ausnutzen von Regeln führen zu Unsicherheiten und Fehlern beim Berechnen von Aufgaben im Zehner- oder Hunderter-Einmaleins: *„4 x 8 ergibt 32. Weil 80 eine Null mehr als 8 hat, muss dem Resultat ebenfalls eine Null angehängt werden. Deshalb ergibt 4 x 80 nun 320.“* Wird diese Regel aber bei 50 x 80 angewendet, können Unsicherheiten auftreten: Weil nicht darauf geachtet wird, dass 5 x 8 bereits eine Null im Ergebnis (40) hat, wird einfach ein Ergebnis mit zwei Nullen notiert: 50 x 80 ergibt dann 400.

- *Wechsel der Repräsentationsebene:* Den Kindern gelingen keine Transferleistungen zwischen enaktiver, ikonischer und symbolischer Repräsentationsebene. Dass diese Übersetzungen nicht gelingen, muss aber nicht zwingend auf Defizite der Kinder zurückgeführt werden, sondern kann auch Folge des Unterrichts sein. Gerade im Unterricht mit lernschwachen Schülerinnen und Schülern verläuft dieser – als Differenzierung gedacht – zu kleinschrittig: Einmaleins-Reihen werden beispielsweise isoliert betrachtet, was den Lernenden die Erfahrung des Kommutativgesetzes zusätzlich erschwert.

Gerade, weil die zuvor angesprochene Automatisierung des Einmaleins vielen Lehrpersonen am ehesten auffällt, neigen sie dazu, diese einseitige Abrufbarkeit im Unterricht zu priorisieren. *„Unbestritten ist das geläufige Beherrschen einer Grundfertigkeit wie der des Einmaleins sehr wichtig. Das flexible Erfassen und Anwenden multiplikativer Situationen [...] sowie das Ausnutzen von Beziehungen [...] stellen dabei eine zentrale Voraussetzung dar“* (Scherer, 2012, S. 6). Die Automatisierung sollte demnach erst als Folge des Operationsverständnis’ erworben werden, *„auch* *wenn als langfristiges Ziel das geläufige Beherrschen einer Grundfertigkeit wie der des Einmaleins [...] zu sehen ist“* (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 128). Damit SchülerInnen und Schüler zu einem automatisierten Abruf des Einmaleins gelangen, müssen vorerst

- verschiedene Operationen,
- Repräsentationsebenen,
- und verschiedene (Multiplikations-) Aufgaben

im Kontext der Multiplikation vernetzt werden (vgl. Scherer, 2012, S. 7).

Mit dem letzten Zitat beantworten Scherer und Moser Opitz auch die Frage nach der Notwendigkeit des Beherrschens des Einmaleins. Wenn auch mit mehr Vehemenz, halten Padberg und Benz ähnlich fest: *„Es ist sogar ausgesprochen wichtig, dass die Kinder die Fakten des Kleinen Einmaleins nicht nur „irgendwie“, sondern sicher beherrschen“* (vgl. 2011, S. 138). Als Gründe dafür werden die später folgenden Überschlagsrechnungen (vgl. Kapitel 3.6, Validierung von Sachaufgaben), den Aufbau von Grössenvorstellungen oder dereinst zu erwerbende schriftliche Rechenverfahren genannt. Dennoch soll an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen werden, dass der Erwerb der Vernetzungen bzw. des konzeptuellen Verständnis’ der Multiplikation Vorrang hat (vgl. Moser Opitz, 2007, S. 113). Im Kapitel 3.5.4 wird zudem auf die Möglichkeiten von lernschwachen Lernenden eingegangen, welche nicht in der Lage sind, das Einmaleins vollständig zu automatisieren.

3.5.1 Vernetzung verschiedener Operationen im Kontext der Multiplikation

Mathematische Beziehungen müssen von den Lernenden aktiv konstruiert werden (vgl. Scherer, 2012, S. 7). Um mathematische Beziehungen zwischen verschiedenen Operationen anzusprechen, eignen sich oftmals Umkehraufgaben. Mathematische Operationen können und sollen im Unterricht umgeformt werden (vgl. Scherer, 2012, S. 7), womit auch die im Kapitel 2.2.2 geforderte Thematisierung der Division im Unterricht für Lernende mit besonderem Förderbedarf im Bereich des Dividierens aufgegriffen wird. Fehlen den Schülerinnen und Schülern aber grundlegende Vorstellungen zur Multiplikation, eignen sich Felddarstellungen wie Hunderterfeld, Eierkartons, Flaschenkästen, Briefmarkenbögen und Ähnliches zum Aufbau des Operationsverständnisses (vgl. Krauthausen & Scherer, 2007, S. 28). Schülerinnen sollen als Aufgabe z.B. die zum Gegenstand oder zur Darstellung passenden Multiplikationen erkennen und notieren.
Eine Erkenntnis ist bei der Vernetzung der Multiplikation für Scherer von besonderer Bedeutung: Das Konzept der Multiplikation als fortlaufende Addition (vgl. 2012, S. 7). Während zu Beginn Verdopplungsaufgaben additiv wie auch multiplikativ verstanden und notiert werden sollen (z.B. 2 x 8 = 8 + 8), können später auch Multiplikationen mit grösseren Multiplikatoren zu fortlaufenden Additionen umgeformt werden (4 x 8 = 8 + 8 + 8 + 8). Ob und wie schnell Lernende solche Zusammenhänge verstehen, hängt neben der methodisch-didaktischen Aufbereitung aber stark von

ihnen selbst ab: *„Betont werden soll an dieser Stelle noch einmal, dass die mathematische Struktur erst durch einen geistigen Akt in eine solche Darstellung hineingelesen wird“* (Scherer, 2012, S. 7). Gerade bei lernschwachen Schülerinnen und Schüler kann die Betrachtung der Multiplikation aus dem Blickwinkel der fortlaufenden Addition aber dazu führen, dass das Verständnis des Malnehmens nicht aufgebaut wird. Untersuchungen von Baroody bestätigten diese Annahme – er fand eine erkennbare Korrelation zwischen schwachen Multiplikationsleistungen und der Verwendung von Additionsstrategien (vgl. Moser Opitz, 2007, S. 107). Die Gründe könnten darin liegen, als dass bei der Anwendung von Additionsstrategien oft zeitlich-sukzessive Modelle (Multiplikation in Stufen: Rita geht nacheinander viermal zu ihrem Tisch und legt 3 Bücher hin) benutzt werden und räumlich-simultane Modelle (vgl. die zuvor erwähnten Felddarstellungen und Verpackungsmaterialien) zu knapp zum Zug kommen (vgl. Moser Opitz 2007, S. 107). Moser Opitz sieht deshalb in der Berücksichtigung der multiplikativen Rechengesetze (Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz) besondere Bedeutsamkeit für rechenschwache Lernende. Dazu eignen sich beispielsweise verdoppeln, halbieren, Tauschaufgaben und das Hunderterfeld mit Malwinkel (vgl. Moser Opitz, 2007, S 108).

3.5.2 Vernetzung der Repräsentationsebenen

Prediger beschreibt das Operationsverständnis in Anlehnung an Huinker auch als die Fertigkeit zwischen drei verschiedenen Repräsentationsebenen *hin und her* übersetzen zu können (vgl. 2009, S. 220). Dabei soll es nicht das Ziel sein, ausschliesslich auf symbolischer Ebene operieren zu können – vielmehr ist die Übersetzung von der symbolischen zur enaktiven oder ikonischen Ebene hin für den Aufbau des Operationsverständnisses gleichwertig (vgl. Scherer, 2012, S. 7). Denn je nach Kontext kann sich eine andere Repräsentationsebene als besonders anregend erweisen (vgl. Prediger, 2009, S. 222). Die Übersetzungsprozesse müssen aktiv und selbstständig von den Schülerinnen und Schülern konstruiert, aber von Lehrpersonen veranlasst werden, indem sie symbolisch notierte Aufgaben zu Rechengeschichten, realen Situationen sowie Skizzen und Zeichnungen umformen lassen (vgl. Scherer 2012, S. 7 f.).

3.5.3 Vernetzung verschiedener Multiplikationsaufgaben

Als eine der wichtigsten Beziehungen zwischen verschiedenen Multiplikationsaufgaben nennt Scherer das Kommutativgesetz (vgl. 2012, S. 8), also sogenannte Tauschaufgaben (5 x 4 und 4 x 5), welche sich immer das gleiche Ergebnis teilen. Daneben müssen auch Nachbaraufgaben (3 x 4 und 5 x 4 zu der Aufgabe 4 x 4) den Weg in den Unterricht finden, damit Schülerinnen und Schüler lernen, bereits memorisierte Aufgaben zu nutzen, um wiederum schwierigere Aufgaben abzuleiten. Dazu gehört auch das Automatisieren von Kern- bzw. Schlüsselaufgaben wie 1 x 6, 2 x 6, 5 x 6 und 10 x 6 (vgl. Scherer, 2012, S. 8). Zusätzliche Möglichkeiten nennen Padberg & Benz (vgl. 2011, S. 141):

- *Verdopplung und Halbierung eines Faktors:* 2 x 7 = 14. Durch Verdoppeln erhält man 4 x 7 = 28, durch weiteres Verdoppeln 8 x 7 = 56.

- *Gegensinniges Verändern beider Faktoren:* Wenn Multiplikator und Multiplikand gegensinnig vervielfacht oder geteilt werden, bleibt das Ergebnis gleich: 4 x 6 = 2 x 12.

3.5.4 Automatisierung des Einmaleins

„*Für die weitere Vertiefung und Übung [...] wird in fachdidaktischen Publikationen und Erfahrungsberichten im Wesentlichen ein ganzheitliches Vorgehen vorgeschlagen*" (Krauthausen & Scherer, 2007, S. 31). Für Schülerinnen und Schüler ist es einfacher, das Einmaleins zu automatisieren, wenn sie die Zusammenhänge der verschiedenen Reihen ausnützen können. Um Lernende beim Finden von Zusammenhängen zu unterstützen, kann der ganzheitliche Ansatz strukturiert werden: Reihen mit ausgeprägten Ähnlichkeiten (Fünfer- und Zehnerreihe oder Zweier-, Vierer- und Sechserreihe sowie Dreier-, Sechser-, und Neunerreihe) können paketweise im Unterricht behandelt werden (vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 142). Oftmals wird erst am Schluss die Siebenerreihe thematisiert, da keine offensichtlichen Zusammenhänge zu anderen Reihen bestehen (vgl. Padberg & Benz, 2011, S.142).
Weil lernschwache Schülerinnen und Schüler bei der Automatisierung des Einmaleins unterschiedlich weit kommen, d.h., eine vollständige Automatisierung nicht für alle Lernende möglich ist (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 128), werden zu Beginn sogenannte Kern- oder Schlüsselaufgaben fokussiert, welche als Stützpunkte für das Berechnen der restlichen Einmaleinsaufgaben zum Nutzen gereichen. Um von Kernaufgaben auf die restlichen Aufgaben schliessen zu können, sind bei der Automatisierung die zuvor besprochenen Vernetzungen von Multiplikationsaufgaben äusserst wichtig. Fast jede Einmaleinsaufgabe lässt sich aus Kernaufgaben herleiten, wenn Lernende folgende Strategien verstehen und anwenden können:

- Tauschaufgaben (Kommutativgesetz)
- Nachbarsaufgaben
- verdoppeln und halbieren eines Faktors
- gegensinniges Verändern beider Faktoren

Deshalb kommen Scherer und Moser Opitz zum Schluss: „*Auch solche Teilkenntnisse* [Kenntnisse bez. der Kernaufgaben, Anm. d. Verf.] *sind eine wichtige Grundlage [...] und sind insgesamt wichtiger zu bewerten, als auswendiggelernte Einmaleinsreihen*" (2010, S. 128). Damit Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe Inhalte bearbeiten können, die auf der Grundlage des Multiplizierens basieren, bedarf es dementsprechend nicht vollumfänglicher Kenntnisse des Einmaleins, sondern der Fähigkeit, multiplikative Vorgänge zu erfassen und in eine andere Repräsentationsebene übersetzen zu können.

3.6 Division

Wie bei der Multiplikation belegen einige Studien, dass ca. 80 % aller Kinder schon vor der Thematisierung der Division in der Primarschule verschiedene Kontextaufgaben zur Division erfolgreich bearbeiten können (vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 149). In einer Untersuchung mit dreieinhalb- bis viereinhalbjährigen Kindern wurden diese dazu aufgefordert acht Gegenstände mit einem andere Kind zu teilen. Dabei wurden verschiedene Lösungsstrategien beobachtet (vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 149):

- *fortlaufendes Verteilen:* Sie geben abwechslungsweise einen Gegenstand dem Partner und behalten einen.
- *Reihen bilden:* Sie legen gleichlange und gegenüberstehende Reihen.
- *teilen nach Augenmass:* Sie schauen die Gegenstände an und teilen (ohne Zählvorgang) in zwei gleiche Teile.
- *Muster-Bildung:* Sie legen zwei identische Muster, die darauf schliessen lasen, dass für jedes Muster gleich viele Gegenstände verwendet wurden.

Auch wenn die Anzahl von Gegenständen auf neun erhöht wurde und diese an drei Personen verteilt werden mussten, blieben die Lösungsstrategien gleich. Gründe für das gute Abschneiden sind darin zu sehen, als das Teilen eine alltagsbezogene Tätigkeit ist, die Kinder schon vor dem Eintritt in die Primarschule lernen (vgl. Moser Opitz, 2007, S. 109). Darum ist es erstaunlich, dass das Dividieren oft auch Lernenden in der Sekundarschule sowie Erwachsenen oftmals Schwierigkeiten bereitet und dass dennoch nur wenige Untersuchungen zur Division (im Vergleich zu den restlichen Operationen) vorliegen (vgl. Moser Opitz, 2007, S. 109 ff.).

3.6.1 Aufbau inhaltlicher Vorstellungen

Die Multiplikation und Division stehen zwar in einer engen Beziehung zueinander, gleichwohl raten Padberg und Benz von einer gleichzeitigen grundlegenden Erschliessung ab (vgl. 2011, S. 152). Um die Division systematisch zu erarbeiten, ist es zunächst erforderlich, dass Schülerinnen und Schüler über ein gutes konzeptuelles Verständnis der Multiplikation verfügen und rechnerische Sicherheit im Zahlenraum bis 100 mitbringen, da Lernende sonst nicht dazu in der Lage sind, tragfähige inhaltliche Vorstellungen zu konstruieren (vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 152).
Für den Aufbau des konzeptuellen Verständnis' zur Division kann auf zwei unterschiedliche Modelle zurückgegriffen werden (vgl. Moser Opitz, 2007, S. 109):

- *Aufteilen:* Eine gegebene Menge wird in Teilmengen mit vorgeschriebener Mächtigkeit aufgeteilt. Unterschreitet eine Teilmenge am Schluss die geforderte Mächtigkeit, bleibt sie als Rest übrig. Es wird dementsprechend eine Anzahl von Teilmengen gesucht.

  Beispiel: *Eine Klasse besteht aus 20 Kindern. Die Lehrerin sagt, dass die Kinder sich in Vierergruppen aufteilen soll. Wie viele Gruppen entstehen?*

- *Verteilen:* Eine gegebene Menge wird gleichmässig in eine vorgeschriebene Anzahl von Teilmengen verteilt. Wird mit natürlichen Zahlen gerechnet, kann ein Rest übrig bleiben. Es wird demnach die Anzahl von Elementen in den Teilmengen gesucht.

  Beispiel: *Lea verteilt 18 Karten an 3 Kinder. Wie viele Karten bekommt jedes Kind?*

Damit Lernende ein grundlegendes Operationsverständnis zur Division erwerben, ist es nötig, dass beide Modelle erschlossen werden (vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 157) – sie müssen demgegenüber aber nicht in der Lage sein, die Modelle zu benennen oder zu unterschieden (vgl. Moser Opitz 2007, S. 109). Zur Einführung können Mengen von beliebigen Gegenständen aufgeteilt oder verteilt werden sowie es auch zahlreiche passende Darstellungen in verschiedenen Lehrmitteln zur Bearbeitung auf ikonischer Ebene gibt.
Eine weitere Möglichkeit zur Einführung der Division bildet die Möglichkeit die Division als Umkehrfunktion der Multiplikation darzustellen, gänzlich ohne die Veranschaulichungen des Aufteilens und Verteilens: 21 : 7 wird als jene Zahl festgelegt, welche mit 3 multipliziert 21 ergibt (vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 156). Ist das Einmaleins bereits automatisiert vorhanden, lassen sich symbolisch notierte Aufgaben so bequem berechnen. Moser Opitz warnt ausdrücklich vor einer einseitigen Bearbeitung der Division als Umkehrfunktion der Multiplikation: *„Dies kann [...] beispielsweise zu Schwierigkeiten beim Bruchrechnen führen“* (Moser Opitz, 2007, S. 110). Wie die Multiplikation mit der Addition vernetzt werden kann, nämlich als fortlaufende Addition, gelingt dies auch bei der Division und der Subtraktion. Der Term 21 : 7 erhält dann folgende Bedeutung: Wievielmal kannst du 7 von 21 subtrahieren, bis du 0 erhältst? Weil genau es dreimal möglich ist, lautet das Ergebnis der Division 21: 7 = 3 (vgl. Padberg & Benz, 2011, S. 156). Auch hier sei angemerkt, dass Padberg und Benz darin nur eine ergänzende Möglichkeit zur Einführung sehen und raten von einer dauerhaften Bearbeitung von Divisionen mittels fortlaufender Subtraktion ab (vgl. 2011, S. 157). Als dritte Möglichkeit, um die Division einzuführen, nennen Padberg und Benz den multiplikativen Vergleich, d.h., Aufgaben, die sowohl mit Divisionen als auch mit Multiplikationen gelöst werden können (vgl. 2011, S. 157):

Kim und Laura sparen beide ihr Taschengeld. Kim hat bereits 45 Franken zur Seite gelegt. Kim hat bereits 5-mal soviel Geld gespart wie Laura. Wie viel Geld sparte Laura?

Als Einführung der Division bei Schülerinnen und Schülern mit besonderem Förderbedarf eignen sich diese Aufgaben nicht. Padberg und Benz attestieren diesen Aufgaben besondere Komplexität, sie bereiten vielen Lernenden besondere Schwierigkeiten (vgl. 2011, S. 157).
Abschliessend bleibt festzuhalten, dass zu Beginn vor allem enaktive und ikonische Erfahrungen mit den Modellen des Auf- und Verteilens wichtig sind. Dabei lassen sich ergänzend auch Phasen integrieren, in denen die Division als Umkehroperation oder als fortlaufende Subtraktion dargestellt wird. Die Frage, ob nach einer systematischen Einführung auch multiplikative Vergleiche angestellt werden können, kann bei Lernenden mit besonderem Förderbedarf wohl weniger mit Literatur, denn mit den individuellen Möglichkeiten der Schülerinnen und Schüler beantwortet werden.

3.7 Mathematisieren

Der Begriff Mathematisieren bedeutet, dass Schülerinnen und Schüler Kontextsituationen auf eine mathematische Ebene übersetzen, was besonders bei der Bearbeitung von Sachaufgaben ins Gewicht fällt: *„Der Unterricht soll mathematische Begriffsbildungen und Verfahren mit Situationen aus der Lebenswirklichkeit der Kinder in Zusammenhang bringen“* (Krauthausen & Scherer, 2007, S. 78). Dabei sollen Lernende einerseits Alltagswissen nutzen, um mathematische Inhalte verstehen zu können, andererseits aber mittels Mathematisierung auch zusätzliches Wissen zur Wirklichkeit erlangen (vgl. Krauthausen & Scherer, 2007, S. 78).
Vergleicht man die Leistungen der Mathematisierungsfähigkeit mit jenen der Arithmetik und Geometrie, zeigt sich, dass viele Schülerinnen und Schüler im Bereich des Sachrechnens tendenziell mehr Mühe haben (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 161). Studien zeigen, dass dies auf verschiedene Ursachen zurückgeführt werden könnte: Es wird angenommen, dass viele Lernende den Kontext einer Sachaufgabe nicht ernst nehmen und ihn deshalb gar nicht erfassen. So lösten Schülerinnen und Schüler in Untersuchungen auch Aufgaben die keinen Sinn machen und deswegen unlösbar sind (Kapitänsaufgaben): Schülerinnen und Schüler durchlaufen den Prozess des Mathematisierens unvollständig und fixieren lediglich das Finden oder Lösen einer Rechnung (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 163). Dies kann auf der regelmässigen Arbeit an realitätsfernen Aufgaben fussen, die nicht der Lebenswirklichkeit der Lernenden entsprechen (vgl. Prediger, 2009, S. 216) oder aber auch durch Verständnisprobleme auf der Ebene der Kontextstruktur hervorgerufen werden (vgl. Prediger, 2009, S. 2014). Wird der Prozess des Mathematisierens (Modellbildung) ernst genommen, geht es um mehr als das Finden einer Rechnung. Die Bearbeitung von Sachaufgaben bedarf einer behutsamen Vorbereitung der Lernenden und kann in drei Schritten folgendermassen ablaufen (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 166 f.):

1. Lernende beschreiben die Aufgabe mit eigenen Worten, ohne auf dabei numerische Details einzugehen. Sie geben damit der Lehrperson Hinweise, inwiefern sie den Text und dessen Kontext verstanden haben und an welchen Stellen das Textverständnis Lücken aufweist.

2. Schwierige Aufgaben können in Grafiken, Skizzen oder Handlungen portiert werden. Gerade das nachspielen von Situationen soll eine zentrale Rolle im Mathematikunterricht spielen.

3. Ist der Kontext geklärt, kann die Lehrperson gezielte Fragen zur Aufgabe stellen, damit relevante Daten der Aufgabe geklärt werden: Wie schwer ist ein Elefant? Wie viele Tiere leben in der Herde?

3.7.1 Die Struktur des Kontextes als Hindernis

Ebenso wurden dem Sachrechnen gegenüber allgemein negative Einstellungen festgestellt sowie sich je nach Struktur des Kontexts der Aufgaben grosse Leistungsunterschiede ergaben (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 161 ff.). Auch Prediger sieht besonders in der strukturellen Beschaffenheit von Sachaufgaben Stolpersteine, die den Modellbildungsprozess erschweren (vgl. 2009, S. 214). Die Fehlende Bewusstheit zur Bedeutsamkeit von Strukturwörtern wie *über, unter, während oder unterdessen* verunmöglichen einen umfassenden Modellbildungsprozess. In der Umgangssprache werden meist Substantive fokussiert (*Wer weiss, was eine Goldmine ist?*), in der Bildungssprache und beim Mathematisieren von Kontexten dominieren hingegen Strukturwörter. Fehlende oder unvollständige Vorstellungen bezüglich dieser Strukturwörter führen zu strukturellen Schwierigkeiten, welche über Probleme mit nicht vorhandenen Kenntnissen zu einzelnen Vokabeln hinauswachsen (vgl. Prediger, 2009, S. 214). Aus dieser Perspektive müssen Lehrpersonen der Erarbeitung der Kontextstruktur im Unterricht bewusste Aufmerksamkeit schenken, indem sie vor dem Unterricht die Strukturwörter einer Aufgabe identifizieren und diese während dem Unterricht in den weiter oben genannten Schritten zur Vorbereitung thematisieren.

3.7.2 Förderung des Operationsverständnis’

Eine verbreitete Fehlerquelle findet sich in der Operationswahl, die besonders bei rechenschwachen Lernenden oft nicht tragfähig ist und auf unvollständig entwickelten inhaltlichen Vorstellungen bezüglich der Grundoperationen beruht (vgl. Prediger, 2009, S. 2017). So wurden in einer qualitativen Untersuchung Schülerinnen und Schüler der Klassen 5 und 8 gebeten, je eine Gleichung mit einer Multiplikation und mit einer Division zu erklären. Sie konnten die Erklärungen nach ihrer Wahl rein verbal, mit Material oder mit Zeichnungen ausführen. Nur 30 Prozent der als rechenschwach eingestuften Lernenden konnten die Multiplikation treffend beschreiben, bei der Division gelang es sogar nur 20 Prozent der Schülerinnen und Schüler mit einer Rechenschwäche (vgl. Moser Opitz, 2007, S. 206 f.). Oft fehlen Kindern adäquate Vorstellungen der Grundoperationen, was die Übersetzung eines sprachlich verfassten Kontexts in ein mathematisches Modell verunmöglicht – auch wenn die Struktur des Kontexts ausreichend verstanden wurde. Möchte die Lehrperson das Mathematisieren mit Schülerinnen und Schülern mit besonderem Förderbedarf üben, sollte sie darauf achten, ob die Lernenden für eine spezifische Aufgabe über adäquate Grundvorstellungen verfügen.

Die Diagnose sollte dabei nicht auf anderen Textaufgaben basieren, sondern gelingt am einfachsten, wenn symbolisch notierte Aufgaben (z.B. $\square \times 4 = 96$) von Lernenden zu einer Rechengeschichte umgeformt werden oder einem jüngeren Kind erklärt werden müssen: „*Wird nicht die Mathematisierung von Textaufgaben, sondern die Interpretation gegebener Gleichungen verlangt, zeigen sich nicht tragfähige inhaltliche Vorstellungen von Operationen besonders gut*“ (Prediger, 2009, S. 217).

3.7.3 Validieren der Aufgaben

Neben der Erfassung des Kontexts, der Mathematisierung zum Modell und der Rechenphase gehört auch eine Validierung der Lösung explizit in den Unterricht (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 174). Schülerinnen und Schüler können dank Erfahrungswerten sehr genau bestimmen, ob eine Lösung richtig sein kann oder ob sie wohl falsch ist. Sie wissen, dass Autos nicht mehrere Kilometer lang sind, dass Menschen nicht tausende Kilogramm schwer sind und dass das Füllen einer Badewanne nicht Jahre dauert. Es sei denn, sie haben keine Vorstellungen zu den Grössen, mit denen sie rechnen, oder den Lernenden fehlen Vergleichsgrössen. Wie bereits in vorangehenden Kapiteln erwähnt, sollten im Unterricht nicht ständig Aufgaben thematisiert werden, die jeglicher Lebenswirklichkeit der Kinder fern sind, denn sie berauben die Lernenden auch einer unkomplizierten Validationsmöglichkeit (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 174). Kinder werden nicht abschätzen können, ob die Tankfüllung eines Schiffes 20’000, 200’000 oder 2'000’000 Franken kostet – sowie viele Erwachsene übrigens auch nicht (grosse Meeresriesen bunkern wohlgemerkt Treibstoff für über 4'000'000 Franken in ihren Tanks).

Treffen Lernende dennoch auf solche Aufgaben – denn sie können durchaus interessant sein – ist es wichtig, dass sie neben der Validierung mit der Frage „Kann das Ergebnis stimmen?“ auch andere Validierungsformen kennen. Dazu gehören die Fragen „Gibt es andere Rechenwege (Modellbildungen), die ebenfalls/besser passen?“ oder „Wurde richtig gerechnet?“. Ob richtig gerechnet wurde, können Lernende auch mittels Überschlagen herausfinden. Die gleichen Operationen werden mit gerundeten Zahlen wiederholt, um einen ungefähren Wert zu erhalten. Für Schülerinnen und Schüler mit besonderem Förderbedarf kann diese Methode äusserst herausfordernd sein, denn das Überschlagen erfordert verschiedene Kompetenzen: Es müssen bereits differenzierte Vorstellungen zu Strukturen und Beziehungen der Zahlen sowie zu den Grundoperationen vorhanden sein, um Lösungen systematisch validieren zu können. Gleichzeitig bietet das Überschlagen aber genau deswegen Möglichkeiten, um Einsicht in diese Kompetenzen zu erhalten (vgl. Moser Opitz, 2007, S. 114). Wichtig ist, dass die Phasen des Validierens immer wieder explizit thematisiert und dass Lernende durch geeignete Aufgabenstellungen während der Validierung herausgefordert werden (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 174). Dies zeigt, dass auch für schwächere Schülerinnen und Schüler komplexere Strategien wie das Überschlagen in den Unterricht miteinbezogen werden sollten.

4 Der Lösungsansatz

Das Kapitel soll der Frage nachgehen, wie diese Erkenntnisse umgesetzt werden können. Einerseits soll auch für Lernende mit besonderem Förderbedarf das offizielle Lehrmittel benutzt werden. Andererseits soll der Unterricht differenziert angeboten werden, damit Lernende mit besonderem Förderbedarf partizipieren können. Es sollen bei der Planung spezifische Schwierigkeiten berücksichtigt und im Unterricht gefördert werden. Das folgende Unterkapitel 4.1 beschreibt aus diesem Grund das förderdiagnostische vorgehen.

4.1 Förderdiagnostik

Der Begriff Förderdiagnostik ist schwierig einzugrenzen und wird deshalb von verschiedenen Autoren und Autorinnen unterschiedlich definiert (vgl. Suhrweier, 2002, S. 39). Gemeinsam haben alle Definitionsversuche, dass sie davon ausgehen, als dass Lernende mit besonderem Förderbedarf identifiziert und anschliessend aufgrund der gewonnenen Daten optimal gefördert werden können (vgl. Niedermann, Schweizer & Steppacher, 2007, S. 21). Bezüglich des Modells der Förderdiagnostik stützt sich die vorliegende Arbeit vorwiegend auf die Gedanken von Niedermann, Schweizer und Steppacher. Einerseits lehnen sie sich, wie auch an der HfH üblich, an die Förderdiagnostik nach ICF, andererseits ist das Konzept gut an die aktuellen Rahmenbedingen der integrativen Förderung im Kanton Zürich angepasst: Sie beschreiben den Unterricht und die Arbeit der schulischen Heilpädagogin oder des schulischen Heilpädagogen in einem integrativen Unterrichtssetting (vgl. Niedermann, Schweizer, & Steppacher, 2007, S. 17).

4.1.1 Förderkreislauf

Kann die Lehrperson über Ressourcen und Schwächen eines Kindes urteilen, schreitet sie aufgrund der gewonnenen Daten und Fakten voran. Der einsetzende Kreislauf aus Lernstandserfassung, Unterrichtsplanung und Evaluation wird gemeinhin als Förderkreislauf bezeichnet und wird von Niedermann, Schweizer und Steppacher (vgl. 2007. S. 58) differenziert dargestellt:

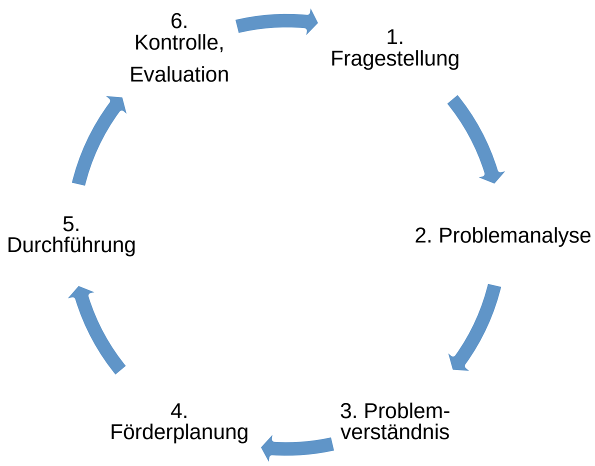


Abbildung 2: *Ablauf des Förderkreislaufs nach Niedermann, Schweizer und Steppacher, 2007, S. 58*

Der Förderkreislauf zeigt, dass es neben einer Fragestellung vor allem eine Methodik oder ein Instrument zur Problemanalyse benötigt wird. Erst wenn Lehrpersonen wissen, wieso Schülerinnen und Schüler über Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Kompetenzen verfügen, kann anschliessend eine Förderplanung erstellt werden, welche auf dem individuellen Förderbedarf aufbaut. Im 2 wurde festgehalten, welche Faktoren bzw. Basiskompetenzen den Lernerfolg im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe massgeblich beeinflussen. Dabei hat sich gezeigt, dass sich zwischen verschiedenen Basiskompetenzen Synergien aber auch Abhängigkeiten entwickeln. Beispielsweise setzt erfolgreiches Mathematisieren tragfähige Vorstellungen zum Operationsverständnis voraus, welche von Lernenden nur konstruiert werden können, wenn wiederum Teil-Teil-Ganzes-Beziehungen, Zahlaspekte, Zählkompetenzen und Einsichten ins Dezimalsystem als gefestigt gelten. Erreichen Schülerinnen und Schüler relevante Ziele des Mathematikunterrichts bei weitem nicht, stellt sich die Frage, ob und welche Basiskompetenzen nicht ausreichend erworben wurden. In den folgenden Unterkapiteln wird aus diesem Grund die Diagnostik mathematischer Kompetenzen genauer beleuchtet.

4.1.2 Grundlagen der Diagnostik

Damit man an Daten zu den Schülerinnen und Schülern gelangt, ist es vorab wichtig, Erkenntnisse mit einem Diagnoseverfahren zu machen; die Abklärung des Lernstandes ist als Kern des förderdiagnostischen Vorgehens zu verstehen (vgl. Buholzer, 2003, S. 33). Dafür gibt es unterschiedliche Möglichkeiten: Screening- und Testverfahren, Beobachtungen, aber auch Analysen von Arbeitsprodukten und Gespräche (vgl. Niedermann, Schweizer & Steppacher 2007, S. 34 ff.). Weiter fordern die eben genannten Autoren auf den gleichen Seiten, dass die Wahl der Methode nie zum Selbstzweck verkommen dürfe, vielmehr jedoch der Förderung der Schülerinnen und Schüler dienen solle. Infolgedessen fordert Kretschmann eine *lernwegsbegleitende Diagnostik*, welche kontinuierlich mehr oder weniger intensiv den Förderbedarf ermittelt (vgl. 2002, S. 107).
Unabhängig von der Wahl des diagnostischen Hilfsmittels läuft die Lehrperson Gefahr, Lernende zu verobjektisieren. Dies kann dann geschehen, wenn die diagnostisch handelnde Lehrperson nur noch das direkt Erfassbare, den Output des Kindes betrachtet und die inneren Beweggründe ausser Acht lässt: *„Förderdiagnostik wird unter der Annahme betrieben, dass das Kind ein autonomes, selbstreflexives, rationales emotionales und auf Kommunikation hin gerichtetes Individuum ist“* (Niedermann, Schweizer & Steppacher, 2007, S. 27). Dazu gehört, dass Lernenden erklärt wird, weshalb der Umgang mit mathematischen Kompetenzen untersucht wird, Ziele werden transparent kommuniziert sowie auch Erfolge und Misserfolge besprochen und aufgearbeitet werden. Es soll gemeinsam nach deren Gründe gesucht werden, damit das Kind weiss, wo es steht (vgl. Suhrweier, 2002, S. 43). Kurz gesagt: *„Das zu diagnostizierende Kind soll verstehen, was und warum es mit ihm geschieht“* (Suhrweier, 2002, S. 43).

4.1.3 Diagnostik mathematischer Schulleistungen

In den letzten Jahren kamen immer mehr neue Instrumente zur Diagnostik mathematischer Schulleistungen hinzu, die sich grob in zwei Kategorien einteilen lassen. Einerseits gibt es eine Reihe curricular valider Tests, die darauf abzielen, Schulleistungen nach Lernzielen reliabel zu erfassen. Eine weitere Gruppe von Tests zielt darauf ab, jene Voraussetzungen zu überprüfen, die zur Bearbeitung von bestimmten Unterrichtsinhalten erforderlich sind (vgl. Ennemoser & Krajewski, 2013, S. 226). Ennemoser und Krajewski betonen, dass Untersuchungen der letzten Jahre den besonderen Wert dieser Verfahren zeigten: Instrumente der zweiten Kategorie überprüfen die sogenannten Basiskompetenzen, welche auch in der Sekundarstufe substanziellen Einfluss auf die Mathematikleistungen haben (vgl. 2013, S. 226). Als wichtigen Vertreter dieser Gruppe kann der Test BASIS-MATH 4-8 angesehen werden, da dieses Instrument insbesondere auch für ältere Schüler der Sekundarschule konzipiert wurde (vgl. Moser Opitz, Ramseier & Reusser, 2013, S. 271). Demnach versucht der BASIS-MATH 4-8 nicht curriculare Inhalte zu überprüfen, sondern diagnostiziert Stärken und Schwächen jener Inhalte, die nach aktuellem Forschungsstand für die mathematische Entwicklung fundamental sind (vgl. Moser Opitz, Ramseier & Reusser, 2013, S. 272). Dabei handelt es sich um die in Kapitel 2.2.2 und Kapitel 3 beschriebenen Basiskompetenzen (vgl. Moser Opitz, Ramseier & Reusser, 2013, S. 273 ff.; Moser Opitz et al., 2010, S. 13):

- Zählen
- Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems
- Beziehung Teil-Teil-Ganzes
- Rechenstrategien
- Sachrechnen und Mathematisierungsfähigkeit (inkludiert das Operationsverständnis)

Es wurden Belege gefunden, dass Kenntnisse des basalen Lernstoffs für die Partizipation an Unterrichtsinhalten bedeutender als die Intelligenz der Lernenden ist „*und* [bei lernzielorientierten Tests, Anm. d. Verf.] *deutlich mehr Varianz aufklärt als die Intelligenz (fünftes Schuljahr 68.8 % Varianzaufklärung für die Kenntnis des basalen Lernstoffs, 17 % für die Intelligenz; achtes Schuljahr 52.3 % Varianzaufklärung für die Kenntnis des basalen Lernstoffs, 32.5 % für die Intelligenz)*“ (Moser Opitz, Ramseier & Reuss, 2013, S. 273). Daraus lässt sich ableiten, dass das wichtigste Kriterium für eine tiefgreifende Differenzierung eines Themas im offiziellen Sekundarstufen-Mathematiklehrmittel die Kenntnis des basalen Lehrstoffs ist, welcher dem Thema zugrunde liegt. Soll darüber entschieden werden, ob Schülerinnen und Schüler den Lernzielen des Lehrmittels folgen können, muss dies für jede Thematik bzw. für jedes Kapitel von Neuem beurteilt werden, was sich auch mit dem Grundgedanken Kretschmanns lernwegsbegleitender Diagnostik deckt (vgl. Kapitel 4.1). Eine gute Grundlage dazu bieten die nach Basiskompetenzen gegliederten Aufgaben des diagnostischen Instruments BASIS-MATH 4-8. Das diagnostische Instrument kann sich dementsprechend an die Tests von Moser Opitz et al. (2010) anlehnen, welches auch zu den qualitativen Verfahren gezählt werden kann. D.h., es interessiert wie Lernende rechnen und nicht wie viel.

5 Analyse des Lehrmittels

Im Kapitel 2.1 wurde die aktuelle Situation und die Ziele eines integrativen Settings beschrieben. Zusammenfassend kann daraus entnommen werden, dass Schülerinnen und Schüler der Volksschule im Kanton Zürich unabhängig von ihrem Leistungsniveau möglichst am Unterricht der Regelklasse teilhaben sollten, d.h., der Unterricht muss sich den Fähigkeiten und erworbenen Fertigkeiten der Lernenden anpassen. Aus dem Kapitel 3.1 lässt sich entnehmen, dass der Unterricht nicht ausschliesslich von reduktionistischen oder kleinschrittigen Lehrmitteln aus dem sonderpädagogischen Bereich geprägt sein sollte und dass verschiedene Faktoren das Mathematiklernen beeinflussen und für schwache Leistungen verantwortlich sind. Neben gesellschaftlich-strukturellen und individuellen Dispositionen wurden auch unterrichtliche Aspekte aufgezeigt, die von Lehrpersonen leicht angepasst werden können: das Lehr- und Lernverständnis, den spezifischen Aufbau von mathematischen Vorstellungen und die gezielte Auswahl von Lerninhalten. In den folgenden Unterkapiteln wird somit auf diese Punkte eingegangen und die einzelnen Themen und Aufgabenstellungen nach folgenden Fragen untersucht:

- *Lerninhalte:* Welche Aufgaben werden bereitgestellt? Welche basalen Kenntnisse sind für eine erfolgreiche Bearbeitung des Lerninhalts wichtig oder können damit aufgegriffen und vertieft werden? Ab Kapitel 2 des Produktes werden unter diesem Titel die einzelnen Aufgaben beschrieben und nach Basiskompetenzen aufgeschlüsselt.

- *Lehr- und Lernverständnis:* Wie können mit den Aufgaben tragfähige Vorstellungen aufgebaut werden? Welche Anpassungen können gemacht werden, wenn die Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler nicht mit den Ansprüchen der Themen und Aufgaben übereinstimmen? Welche Bedeutung haben die Lerninhalte für die Schülerinnen und Schüler? Ab Kapitel 2 des Produktes werden unter diesem Titel Vorschläge zur Bearbeitung der einzelnen Aufgaben gemacht.

- *Aufbau mathematischer Vorstellungen*: Welche Hilfsmittel und Aufgaben unterstützen den Lernprozess der basalen Kompetenzen zusätzlich? Wie können die Lerninhalte auf verschiedenen Repräsentationsebenen veranschaulicht werden? Die Methoden, Beispiele und Hilfsmittel zum Aufbau mathematischer Vorstellungen werden im Kapitel 9 des Produktes, tabellarisch zusammengefasst, gelten für somit für alle arithmetischen Bereiche des Lehrmittels und sollen aufzeigen, wie mathematische Vorstellungen zu einzelnen Basiskompetenzen aufgebaut werden können.

5.1 Aufbau des Lehrmittels

Das Lehrmittel für die Sekundarschule ist in drei Jahrgänge für die 1. bis 3. Sekundarklasse gegliedert. Das hier besprochene Lehrmittel Mathematik 1 wird demnach in der ersten Sekundarklasse für die Abteilungen A, B und C eingesetzt und wurde für drei Anforderungsstufen konzipiert. Dabei ist man von der niedrigsten Anforderungsstufe III ausgegangen und hat die Aufgaben für die Anforderungsstufen II und I ausgebaut (vgl. Lehrmittelverlag, 2011, S. 6).

Die Lernenden erhalten ein Themenbuch, ein Begleitheft, ein Arbeitsheft und die Möglichkeit, bestimmte Aufgaben im Webportal des Lehrmittelverlags vertiefend zu trainieren. Für Lehrpersonen sind zusätzlich ein Handbuch sowie Lösungen erhältlich.

- Das Themenbuch ist für alle Schülerinnen und Schüler identisch gestaltet und soll den Schülerinnen und Schülern aller Anforderungsstufen die Möglichkeit geben, in ein Thema einzusteigen. Es ist für alle Lernenden die Basis des Lehrwerks (vgl. Lehrmittelverlag Zürich, 2011, S. 3) und bildet damit auch den Ausgangspunkt des integrativen Unterrichts für Schülerinnen und Schüler mit besonderem Förderbedarf. Die Analyse des Lehrmittels beginnt deshalb immer mit den Aufgaben und Einführungen des Themenbuches. Die Bezeichnung der Aufgaben erfolgt mit Nummern und Buchstaben (vgl. 1a, 1b, 1c).

- Die Arbeitshefte wurden in drei Anforderungsniveaus differenziert: I (hoch), II (mittel), III (niedrig) und bauen auf den Erkenntnissen des Themenbuches auf. Wird vom Arbeitsheft gesprochen, ist in der Regel das Arbeitsheft der Anforderungsstufe III die Rede. Das Arbeitsheft bietet vertiefende Aufgaben, welche selbstständig gelöst werden sollen. Die Nummerierung der Aufgaben wurde im Buch und Arbeitsheft identisch gewählt. Die Aufgaben 4.1, 4.2, 4.3 des Arbeitsheftes korrespondieren mit der Aufgabe 4 des Themenbuches. Teilaufgaben werden ebenfalls mit Buchstaben benannt (vgl. 4.1a, 4.1b, 4.1c).

- Das Begleitheft ist als Theoriefundus zu den jeweiligen Kapiteln gedacht. Auf allen Doppelseiten werden auf der linken Seite Regeln, Definitionen und Hilfen angeboten, während die Lernenden auf der rechten Seite Platz für Notizen, eigene Ideen oder Beispiele finden. So soll schrittweise ein persönliches Nachschlagewerk entstehen.

- Das Webportal bietet neben geometrischen Veranschaulichungen für die Algebra und Arithmetik Trainingsaufgaben. Manche Aufgaben können auf den Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler reagieren (z.B. Primfaktorzerlegung).

- Das Handbuch für Lehrpersonen bietet eine Jahresplanung, in der für jedes Kapitel angegeben wird, wie lange ein (Teil-) Kapitel bearbeitet werden soll, damit alle Lehrplanziele im Unterricht thematisiert werden können. Bei Schülerinnen und Schülern mit angepassten Lernzielen, muss dennoch abgewogen werden, ob bestimmten Inhalten und Zielen mehr Zeit gewidmet werden soll.

Es werden kaum didaktische Hinweise gegeben und Vorschläge zur Differenzierung fehlen. Dafür wird klar auf die Voraussetzungen hingewiesen. Für das Kapitel 2 (Potenzen) wird beispielsweise festgehalten: „*Vorausgesetzt wird, dass die Grundoperationen mit natürlichen Zahlen beherrscht werden*“ (Keller et al., 2011c, Kapitel 2, S. 1).

- In den Lösungen befinden sich Lösungen und Lösungshinweise.

Das Modell der Differenzierung richtet sich demnach nach Modellen wie das von Krippner (1992), welche eine gemeinsame Einführung mit Grundanforderungen vorsehen. Während ein Teil der Klasse danach an weiterführenden Aufgaben arbeitet, üben sich schwächere Lernende an weiteren Aufgaben der Grundanforderungen (vgl. Storz, 2014, S. 66). Diese Differenzierungsmethodik kann zwar unterschiedliche Entwicklungspotenziale bedienen, berücksichtigt verschiedene Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler oft nicht gebührend, weil die Zugänge zu Inhalten die gleichen bleiben (vgl. Storz, 2014, S. 66). Für schwache Mathematiklernende muss deswegen darüber nachgedacht werden, wie die Zugänge differenziert und mit handelnden und ikonischen Elementen ergänzt werden können.

6 Umsetzung und Evaluation in der Schule Kappeli

6.1 Ausgangslage Schule Kappeli

In Absprache mit sechs Lehrpersonen der Schule Kappeli in Zürich-Altstetten wurde das Instrument während sechs Wochen evaluiert. Die Bedürfnisse der Lehrpersonen unterschieden sich aufgrund der verschiedenen Unterrichtssettings stark. Zum einen wurde das Instrument sowohl in 1. sowie 2. Sekundarklassen eingesetzt (ausschliesslich in der Abteilung B), was einen entscheidenden Einfluss auf die Anzahl von Lektionen hat, welche durch schulische Heilpädagogen und Heilpädagoginnen begleitet werden. In den 1. Sekundarklassen kann der ganze Mathematikunterricht von Förderlehrpersonen begleitet werden, während in der 2. Sekundarklassen nur noch die Hälfte aller Lektionen abgedeckt werden können. Eine Ausnahme bildet eine 2. Sekundarklasse, welcher mehrere IS-Schülerinnen und IS-Schüler angehören: Sie wird fast durchgehend von einem schulischen Heilpädagogen begleitet. Aufgrund der Settings war es auch nötig, dass sich Mathematiklehrpersonen ohne heilpädagogischen Hintergrund mit dem Instrument auseinandersetzten. Da der Sekundarschule Kappeli für das nächste Schuljahr eine ganze Vollzeiteinheit an heilpädagogischer Unterstützung gestrichen wurde, ist dies ein Vorteil für die Evaluation, da in Zukunft auch in der 1. Sekundarstufe nicht mehr jede Mathematiklektion von heilpädagogischer Förderung begleitet wird. Die praktische Erprobung dauerte 6 Wochen, es wurden teils verschiedene Kapitel bearbeitet, um verschiedene Eindrücke zu erhalten: Variablen, Grössen, die Welt der negativen Zahlen, Rechnen mit Variablen, Wahrscheinlichkeit.

6.2 Lehrpersonen

In der folgenden Tabelle 2 werden die Teilnehmer des Gruppeninterviews mit ihrer Funktion vorgestellt.

Tabelle 2: *evaluierende Lehrpersonen der Schule Kappeli*

Person	**Funktion**	**Klasse**
A	Schulischer Heilpädagoge (ISS)	2. Sekundarklasse
B	Schulische Heilpädagogin (IF)	2. Sekundarklasse
C	Lehrperson Mathematik	2. Sekundarklasse
D	Schulischer Heilpädagoge (IF)	1. Sekundarklasse
E	Schulische Heilpädagogin (IF)	1. Sekundarklasse
F	Lehrperson Mathematik	1. Sekundarklasse

6.3 Methodisches Vorgehen

Bezüglich der Methodik bestehen grundsätzlich zwei Kategorien von Auswertungsmöglichkeiten. Es quantitative und qualitative Methoden werden klar voneinander abgegrenzt (vgl. Atteslander, 2010, S. 350). Quantitative Verfahren eignen sich vor allem um gut vergleichbare Daten auszuwerten. Die folgende Tabelle 3 listet die Eigenschaften von qualitativen und quantitativen Verfahren auf:

Tabelle 3: *Unterschiede von qualitativen und quantitativen Erhebungen nach Atteslander, 2010, S. 350*

	quantitative Forschung	**qualitative Forschung**
Ziele	erklären, nomothetisch, Theorie- prüfend	verstehen, idiographisch, Theorie-entwickelnd
Vorgehen	deduktiv, objektiv, ätiologisch, ahistorisch, geschlossen	induktiv, subjektiv, interpretativ, historisierend, offen
Verhalten der Forscher	Prädetermination des Forschers, Distanz, statisch, starres Vorgehen, partikularistisch, Zufallsstichprobe	Relevanzsysteme der Betroffenen, Identifikation, dynamisch-prozessual, flexibles Vorgehen, holistisch, theoretical sampling
Merkmale	Datenferne, Unterschiede, reduktive Datenanalyse, hohes Messniveau	Datennähe, Gemeinsamkeiten, explikative Datenanalyse, niedriges Messniveau

Da die Daten schwierig zu vergleichen sind, weil das Instrument in unterschiedlichen Klassen angewandt wurde (Altersunterschiede, Unterschiede bezüglich der kognitiven Fähigkeiten, des Vorwissens, der unterrichteten Thematik und der Unterrichtsgestaltung der Lehrpersonen), setzt die

Evaluation auf eine qualitative Erhebung. Weitere Vorteile sind der Tabelle 3 zu entnehmen: Da die Evaluation auch nach Verbesserungen sucht, passt die Theorie-entwickelnde Zielsetzung von qualitativen Methoden eher zum Wesen dieser Entwicklungsarbeit.

Aus ökonomischen Gründen sowie auch aufgrund der Vorteile des Verfahrens, wurde die Methodik des Gruppeninterviews gewählt. Hopf nennt aber auch Nachteile (vgl. 2007, S. 359), woraus sich durch eine geschickte Handhabung auch Vorteile ergeben können:

Tabelle 4: *Vor- und abgeleitete Nachteile von Gruppenverfahren*

Nachteile der Gruppenverfahren nach Hopf	**abgeleitete Vorteile der Gruppenverfahren**
▪ Ängste und Unsicherheiten der interviewenden Person sowie der Interviewpartner ▪ Fehlende Geduld: Die gleichzeitige Befragung und Notation der Daten kann überfordern. ▪ Einzelne Teilnehmer kommen viel öfters zu Wort als andere (Dominanz). ▪ Suggestive Fragen verändern die Daten.	▪ gegenseitige Anregungen ▪ die Gruppendynamik kann zu unterschiedlichen Aussagen führen ▪ Interaktion führt zu neuen Fragen und Daten ▪ Kontrolle der Interviewsituation

Zum Teil können die Nachteile aber durch bewusstes Verhalten der interviewenden Person und durch die Planung des Interviews vermieden werden:

- Unsicherheiten lösen. Fruchtbare Gesprächsatmosphäre generieren: Zeitgefäss definieren, neutrale Räumlichkeit wählen, Anforderungen und Erwartungen vorrangig klären (vgl. Herrmanns, 2007, S. 361)
- Dominanz der interviewenden Person durch Gesprächstechniken wie aktives Zuhören vermeiden
- Durch gerichtete Fragen allen Interviewpartnern Raum geben
- Suggestive Fragen vermeiden und offene Fragestellungen benutzen

6.4 Gesprächsplanung

Mittels einer Onlineumfrage wurde ein Termin gefunden, der für alle Teilnehmenden ohne Terminkonflikte wahrnehmbar ist. Es wurde ein maximaler Zeitrahmen von 90 Minuten festgelegt. Das Gespräch fand im Sitzungszimmer des Schulhauses statt.

6.4.1 Ablauf

- Begrüssung, Klärung der Ziele und der Erwartungen an das Gespräch
- Erste Erfahrungen aller Teilnehmenden werden ausgetauscht: Welche Themen und Kapitel wurden behandelt? Welche Erfolge und Rückschläge prägten den Unterricht?
- Die Teilnehmenden schreiben aufgrund ihrer Erfahrungen auf grüne Kärtchen positive Punkte, auf gelbe negative Punkte
- Die Kärtchen werden diskutiert.
- Die interviewende Person stellt Fragen, fasst die Diskussion zusammen, hört aktiv zu. Schreibt zu bestimmten Feststellungen ev. neue Kärtchen.
- Abschluss der Evaluation, Verabschiedung und Bedankung

6.5 Ergebnisse und Diskussion der wichtigsten Punkte

Die Besprechung der Ergebnisse war äusserst interessant, vor allem auch, weil sich unterschiedliche Ansichten zu verschiedenen Themen gezeigt haben. Unterschiedliche Meinungen liessen sich einerseits durch die verschiedenen Voraussetzungen der Klassen erklären, es waren aber ebenso auch abweichende pädagogische Auffassungen festzustellen.

Abbildung 3: *die wichtigsten positiven Erfahrungen und kritische Anmerkungen zum Instrument*

Die Punkte können in einer Tabelle zusammengefasst werden:

Tabelle 5: Zusammenfassung der *positiven Erfahrungen und kritischen Anmerkungen zum Instrument*

positive Erfahrungen (grün)	**kritische Anmerkungen**
▪ spannende Theorie, verständlich erklärt ▪ Tests verschaffen einen guten Überblick & Orientierung zum Lehrmittel und den Lernenden ▪ gute Umsetzung der Theorie (gut einsetzbarer Kommentar) ▪ übersichtliche Darstellung der Tabellen ▪ gute Empfehlungen zu Hilfsmitteln ▪ gute Differenzierung mit Einbezug der enaktiven Ebene ▪ auch für Lernende mit bes. Förderbedarf spannende Aufgaben ▪ Möglichkeiten zum Training von Basiskompetenzen werden aufgezeigt ▪ Motivation der Lernenden war hoch ▪ Kommentar deckt ganzes Jahr ab	▪ Schwierigkeiten bei der Umsetzung ohne SHP, auch bei Tests (qualitativer Ansatz) ▪ Aufgaben wechseln zu schnell, schwache SuS können nicht lange selbstständig arbeiten, Anpassung nimmt zu viel Zeit in Anspruch ▪ Hausaufgaben mit dem offiziellen Lehrmittel kaum möglich, zu viel Text im Arbeitsheft ▪ Zu wenige Einführungsaufgaben ▪ Herausforderungen ab Aufgabe 4 im Themenbuch und Themenheft meistens zu hoch ▪ Es müsste einen Verzeichniseintrag zu jeder Aufgabe geben. ▪ Zu viel Stoff, ganze Kapitel weglassen ▪ Aufgaben umschreiben, Sprache für schwache Schülerinnen und Schüler sowie DaZ-Lernende anpassen

6.6 Diskussion der Theorie und des diagnostischen Instrumentes

Zum Diagnoseverfahren war kaum Kritik zu vernehmen. Die Lehrpersonen waren von der theoretischen Auseinandersetzung überzeugt, vor allem die Mathematiklehrpersonen ohne heilpädagogischen Hintergrund erwähnten im Gespräch, dass die Theorie für sie neu war und ihr Denken zum Mathematikunterricht massgeblich beeinflusst hätte. Alle Lehrpersonen möchten die Tests weiterhin benutzen und fragten nach Tests zu geometrischen Kapiteln.

Die Mathematik-Lehrperson aus den 1. Sekundarklassen würde ein Screening (quantitative Beurteilung nach Punkten) vorziehen, da so die ganze Klasse erfasst werden könnte. Sie hat die Vermutung, dass viele Lernende im Niveau III Schwierigkeiten bezüglich der Basiskompetenzen haben. Dies ist eine berechtigte Kritik. Mit quantitativen Tests wird aber z.B. die Erfassung des Operationsverständnisses ungenau. Ob Lernende alle Multiplikationen beispielsweise als fortlaufende Addition sehen, wird nicht ersichtlich. Von der anderen Mathematiklehrperson wurde ein Lösungsvorschlag gemacht: Wenn die heilpädagogische Lehrperson die Klasse begleitet, wäre eine Mischform möglich. Lernende lösen den Test selbstständig, während zwei Lehrpersonen in kurzen

Phasen den Lernstand auch qualitativ Beurteilen. Die Ergebnisse aus quantitativer und qualitativer Lernstandserfassung müssten verglichen werden.

6.7 Diskussion des Kommentars und der Partizipation

Kontrovers wurde das Thema Partizipation diskutiert, da drei Lehrpersonen (Mathematiklehrpersonen und eine Heilpädagogin) einen höheren Grad an inhaltlicher Separation bevorzugen würden. Dabei ging es vor allem darum, dass die Aufgaben des Lehrmittels oft sehr kurz sind und die Basiskompetenzen sich innerhalb eines Themas immer wieder abwechseln würden – d.h., es finde keine Konsolidierung der Basiskompetenzen statt, da zu oft hin und her gesprungen würde. Ein Heilpädagoge und eine Heilpädagogin entgegneten diesem Umstand damit, dass dies zu Einseitigkeiten führen würde: Sie seien der Meinung, dass Mathematik eine Sprache sei und man lerne Italienisch, indem man jahrelang Pizza Vegetariana auf Italienisch bestellt. Ausserdem wurden motivationale Aspekte genannt: Einige Lernende einer 1. Sekundarklasse seien zuerst etwas erschrocken, als sie plötzlich mit dem Lehrmittel der restlichen Lernenden arbeiten sollten. Nach handelnden Aufgaben seien sie auch stolz darauf gewesen, dass sie die Aufgaben lösen konnten (z.B. Variablen, Aufgabe 1, handelnde Differenzierung). Eng mit der Kritik verbunden war die Forderung nach mehr basalen Aufgaben, welche immer gleich aufgebaut sind und deshalb selbstständig bearbeitet werden können. Würden sich die Aufgaben gleichen, z.B. wie die sich immer wieder repetierende Arbeit mit Grössentabellen, könnten Lernende selbstständiger Arbeiten. Gerade Hausaufgaben, welche von Lernenden alleine bearbeitet werden müssen, waren schwierig zu erteilen und für zwei Lehrpersonen nur über andere Lehrmittel realisierbar (Primarschullehrmittel). Dass nicht alle Lehrpersonen so empfunden haben, lag neben der unterschiedlichen Begleitung von heilpädagogischen Lehrpersonen auch an den Themen. Während Aufgaben zu Grössen, Ebene Figuren (Flächenberechnungen) und zu Welt der negativen Zahlen als sehr gut differenziert und umsetzbar eingestuft wurden, hatten gewisse Lernende bei anderen Themen (Rechnen mit Variablen, Wahrscheinlichkeit) grosse Schwierigkeiten. Davon ausgenommen sind die zusätzlichen handelnden Elemente, welche von allen Lehrpersonen geschätzt wurden und einen gemeinsamen Einstieg in ein Thema ermöglichten. Diese Kritik zeigt auf, dass der Kommentar zwar einen gemeinsamen Einstieg ermöglicht, die Komplexität der (differenzierten) Aufgaben aber oft noch die kognitiven Ressourcen der Lernen übersteigt und dass sich alle Mathematiklehrpersonen sowie auch die heilpädagogischen Lehrpersonen ein zusätzliches Arbeitsheft oder Arbeitsblätter wünschen. Es sollen auch selbsterklärende Aufgaben vorhanden sein. Ab Aufgabe 4 sei meistens eine Überforderungen (für viele Lernende) zu spüren. Es sollen deshalb zu jedem Kapitel Aufgaben vorhanden sein, welche zwei bis drei Basiskompetenzen auch isoliert fokussieren. Dabei müsse vor allem auch auf die Sprache geachtet werden: Viele schwache Mathematiklernende würden auch über schwache Lesekompetenzen verfügen. Ein genereller Ausschluss von Aufgaben wollte und sollte das vorliegende Instrument aber nie machen und zeigt, dass hier unterschiedliche Bedürfnisse zu tragen kommen: Das Diagnose-Instrument und vor allem der Kommentar suchen Ressourcen und

Möglichkeiten zur Maximierung der Partizipation und nicht nach Ausschlusskriterien. Erst wenn sich methodische Probleme ergeben (z.B. die ausschliessliche Thematisierung der Multiplikation als fortlaufende Addition) wird auf andere Aufgaben verweisen. Ob Aufgaben gelöst oder ausgelassen werden, sollte von den Ressourcen und nicht von den Schwächen der Lernenden abhängen.

Eine weitere Verbesserungsmöglichkeit würden fertige Prüfungen bieten, die am Schluss von Lernenden gelöst werden können. Dies ist aber bei einer individuellen Differenzierung bei Lernenden mit angepassten Lernzielen nur bedingt möglich. Es könnte allenfalls eine Auswahl an Prüfungsaufgaben angeboten werden.

6.8 Diskussion Weltwissen durch Mathematik vs. Basiskompetenz

Die Diskussion zum den verschiedenen Aufgabentypen im Arbeitsheft, ermöglichte auch eine Diskussion zum Sinn und Zweck des Mathematikunterrichts. Die drei Lehrpersonen, welche die verschiedenartigen Aufgabentypen kritisierten, waren stark der Meinung, dass strenger zwischen Basiskompetenzen und Kontextverständnis unterschieden werden müsse. Es müsse zuerst eine Konsolidierung der Rechenfertigkeiten und des Operationsverständnisses erfolgen. Der Kommentar, bzw. die Methodik des Instrumentes in Verbindung mit dem Kommentar, müsse genauere Ausschlusskriterien für das Auslassen von Aufgaben liefern. Dem ist zwar einerseits zuzustimmen, doch gerade die Verbindung von Weltwissen mit der Mathematik ist für Lernende wertvoll, da reale Situationen verstanden werden wollen und dabei auch Vorwissen einbezogen werden kann. Denkbar wäre ein Ansatz, bei dem die Aufgaben nach Schwierigkeiten beurteilt würden, d.h., dass im Lehrmittel die Aufgaben bereits gewissen Anforderungsstufen zugeordnet werden könnten. Es konnte (von allen Lehrpersonen) festgestellt werden, dass die Motivation im Unterricht eher zunahm, die Lernenden würden vor allem positiv berichten.

6.9 Diskussion zum Umfang

Die Bearbeitungszeit würde sich durch handelnde Elemente stark verändern. Die vorgeschlagenen Bearbeitungszeiten des Handbuchs (vgl. Keller et al., 2011c) seien kaum noch einhaltbar. Einige Themen wären nur kurz bearbeitbar, andere Themen (z.B. Grössen) würde sich hingegen in die Länge ziehen. Es sei auch deswegen schwierig, den Unterricht zu koordinieren. Damit verbunden war auch die Kritik, dass

6.10 Verbesserungen bei einer weiteren Bearbeitung

Würde das Instrument nochmals überarbeitet werden, könnten folgende Verbesserungen und Anpassungen vorgenommen werden:

- Basisaufgaben für das Arbeitsheft (Arbeitsblätter) erstellen: Sogenannte 0.1 bis 0.9 Aufgaben, in denen die wichtigsten Basiskompetenzen für das Thema selbsterklärend bearbeitet werden können. Sie sollten thematisch eingegliedert sein.
- Sprachliche Differenzierung der Aufgaben
- Weitere Aufgaben auf enaktiver Ebene erstellen
- Diagnoseverfahren anpassen, damit mehr Lernende erfasst werden können
- Ein Kapitel mit Anleitungen und Vorschlägen zu einer veränderten Jahresplanung

7 Fazit

Es war das Ziel, ein Instrument zu erstellen, das einerseits die Ressourcen von Lernenden mit besonderem Förderbedarf feststellen kann und zeigt, wie mit den vorhandenen Ressourcen im offiziellen Lehrmittel gearbeitet werden kann. Somit wurden Lernstandserfassungen und ein Kommentar zum Lehrmittel Mathematik I konzipiert, um zu zeigen, welche Aufgaben zum Training und Erwerb bestimmter Basiskompetenzen bearbeitet werden können und welche Aufgaben bezüglich der Basiskompetenzen angepasst werden müssten. Gleichzeitig werden auch Differenzierungsvorschläge und Hinweise zu Hilfsmitteln festgehalten, die den Grad an Partizipation erhöhen.

Für die Konzipierung des Instrumentes war es nötig, theoretische Hintergründe zum Erwerb mathematischer Kompetenzen in der Sekundarschule zu beleuchten und festzuhalten. Diese Grundlagen bildeten in der theoretischen Auseinandersetzung den Ausgangspunkt für eine systematische Analyse des Lehrmittels, bei der jede einzelne Aufgabe bezüglich ihrer Voraussetzungen untersucht wurde. Basierend auf den vorgefundenen Basiskompetenzen, wurden Bearbeitungsvorschläge gemacht und Hilfsmittel thematisiert, welche es erlauben, noch nicht erworbene Basiskompetenzen zu umgehen oder zu erwerben.

Die Evaluation wurde mit sechs Lehrpersonen der Sekundarschule Kappeli durchgeführt, als Methodik zur Datenerhebung wurde ein Gruppeninterview gewählt. Die Datenerhebung ergab, dass sich das diagnostische Instrument einfach anwenden lässt, die Lehrpersonen nannten aber auch Stolpersteine. Diese waren hauptsächlich damit verbunden, dass wenige Lernende Schwierigkeiten hatten, selbstständig mit den Aufgaben des Lehrmittels zu arbeiten (auch in differenzierter Form), da sich die Aufgabentypen oft ändern und das Lehrmittel die Aufgaben meist über längere sprachliche Formulierungen erklärt. Am ehesten zeigte sich dies, wenn die Lernenden Hausaufgaben machen mussten. Auch wenn die Aufgaben zuvor erklärt und differenziert wurden, hatten sie zu Hause vergessen, wie sie die Aufgaben lösen sollten. Das Instrument wurde als theoretisch fundiert bezeichnet und die diagnostischen Tests werden zusammen mit dem Kommentar in der Schule weiterhin verwendet. Es ist eine positive Bilanz zu ziehen: Lernende einer zweiten Sekundarklasse mit IS-Status können so zum ersten Mal mit dem offiziellen Lehrmittel arbeiten. Zuvor wurden sie fast ausschliesslich mit anderen Lehrmitteln aus dem sonderpädagogischen Bereich konfrontiert.

Das Modell der Basiskompetenzen hat aber seine Grenzen: Sind Lernende kognitiv nicht in der Lage, sich gewisse Basiskompetenzen anzueignen, bedarf es anderer Konzepte, d.h., es werden eher Algorithmen oder Rezepte wichtig, die zeigen, wie alltägliche mathematische Vorgänge bearbeitet werden sollen (z.B. Kontoführung, Einkauf, Zeitmanagement).

Wird die Arbeit fortgesetzt, wäre es sicherlich sinnvoll, zu allen Themen weitere basale Aufgaben zu entwerfen, welche von schwachen Mathematiklernenden selbstständig bearbeitet werden können. Dazu wäre es sinnvoll, die Sprache der oft kompliziert verfassten Aufgabenbeschreibungen zu differenzieren.

Das Instrument lässt eine Beurteilung der erworbenen Basiskompetenzen zu und ermutigt Lehrpersonen zum Training der Basiskompetenzen mit dem offiziellen Mathematikehrmittel der Sekundarstufe. Damit ist ein Grundstein für mehr Integration bzw. Partizipation gelegt.

8 Abbildungsverzeichnis

9 Tabellenverzeichnis

10 Quellenverzeichnis

10.1 Literaturverzeichnis

Atteslander, P. (2010). *Methoden der empirischen Sozialforschung*. Berlin: Erich Schmidt Verlag GmbH & Co. KG

Biewer, G. (2009). *Grundlagen der Heilpädagogik und der Inklusiven Pädagogik.* Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

Bildungsdirektion Kanton Zürich (2006). *Das Volksschulgesetz in Kürze.* Zürich: Bildungsdirektion, Volksschulamt.

Bildungsdirektion Kanton Zürich (2007). *Angebote für Schülerinnen und Schüler mit besonderen pädagogischen Bedürfnissen. Von der Separation zur Integration.* Zürich: Lehrmittelverlag des Kantons Zürich.

Buholzer, A. (2003). *Förderdiagnostisches Sehen, Denken und Handeln.* Aarau: Bildung Sauerländer.

Cawley J. F., Parmar, R. S., Lucas-Fusco, L. M., Kilian, J. D. & Foley, T. E. (2007). Place value and mathematics for students with mild disabilities: data and suggested practices. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, 5 (1). 21 – 39.

Ennemoser, M. & Krajewski, K. (2013). Entwicklungsorientierte Diagnostik mathematischer Basiskompetenzen in den Klassen 5 bis 9. In: Hasselhorn, M., Heinze, A., Schneider W. & Trautwein, U. (Hrsg.). *Diagnostik mathematischer Kompetenzen* (S. 225 – 240). Göttingen: Hogrefe Verlag GmbH & Co. KG.

Freesemann, O., Matull, I., Prediger, S., Moser Opitz, E. & Hussmann, S. (2010). *Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern - Entwicklung und Evaluation eines Förderkonzepts für die Sekundarstufe I.* Zugriff am 20.11.2015 unter:
http://www.zora.uzh.ch/42599/1/BzMU10_FREESEMANN_Okka_Rechenschwaeche-2.pdf

Fritz, A., Ricken G. & Balzer, L. (2009). Warum fällt manchen Kindern das Rechnen schwer? In: Fritz, A. & Schmidt, S. (Hrsg.). *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I* (S. 58 – 72). Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Fritz, A. & Schmidt, S. (2009). *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Hermanns, H. (2007). Interviewen als Tätigkeit. In: Flick, U, von Kardorff E. & Steinke, I. (Hrsg.). Qualitative Forschung. Ein Handbuch (S. 360 – 369). Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verlag

Heckmann, K. & Padberg, F. (2008). *Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Hopf, C. (2007). Qualitative Interviews – ein Überblick. In: Flick, U, von Kardorff E. & Steinke, I. (Hrsg.). Qualitative Forschung. Ein Handbuch (S. 349 – 360). Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verlag

Humbach, M. (2009). Arithmetisches Basiswissen in der Jahrgangsstufe 10*.* In: Fritz, A. & Schmidt, S. (Hrsg.). *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I* (S. 58 – 72). Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Keller, F., Bollmann B., Rohrbach, C. & Schelldorfer, R. (2011a). *Mathematik 1. Themenbuch*. Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Keller, F., Bollmann B., Rohrbach, C. & Schelldorfer, R. (2011b). *Mathematik 1. Arbeitsheft*. Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Keller, F., Bollmann B., Rohrbach, C. & Schelldorfer, R. (2011c). *Mathematik 1. Handbuch*. Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Krauthausen G., Scherer P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. 3. neu bearbeitete Auflage. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Kretschmann, R. (2002). Förderdiagnostik in den Lernbereichen Deutsch und Mathematik. In: Mutzeck, W. (Hrsg.). *Förderdiagnostik. Konzepte und Methoden* (S. 103 – 136) (3. überarbeitete Aufl.). Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Lehrmittelverlag Zürich (2011). *Mathematik 1 Sekundarstufe I. Auszug aus dem neuen Mathematik-Lehrmittel für die erste Sekundarklasse*. Zürich: Lehrmittelverlag Zürich. Zugriff am 7.4.2016 unter: http://www.lehrmittelverlag-zuerich.ch/Portals/1/Documents/lehrmittelsites/mathsek1/mathsek1_docs/LMV_ProspAusz_Math1_72.pdf

Lehrmittelverlag Zürich (2015). *Bezüge zum Lehrplan 21*. Zürich: Lehrmittelverlag Zürich. Zugriff am 7.4.2016 unter: http://www.lehrmittelverlag-zuerich.ch/Portals/1/Documents/lehrmittelsites/mathsek1/LP21/150721_M1SekI_ASIII_LP21_Uebersicht.pdf

Löwe, A. (1983). Gehörlosenpädagogik. In: Solarovà, Svitluse (Hrsg.). *Geschichte der Sonderpädagogik* (S. 12 – 48). Stuttgart: Kohlhammer.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern*. Bern, Stuttgart und Wien: Haupt Verlag

Moser Opitz, E. (2009). Grundschulmathematik als Voraussetzung für Mathematiklernen in der Sek. I. In: Fritz, A., Schmidt, S. (Hrsg.). *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I* (S. 29 – 43). Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Moser Opitz, E., Ramseier, E. & Reusser L. (2013). Basisdiagnostik Mathematik für die Klassen 4-8 (BASIS-MATH 4-8). In: Hasselhorn, M., Heinze, A., Schneider W. & Trautwein, U. (Hrsg.). *Diagnostik mathematischer Kompetenzen* (S. 271 – 286). Göttingen: Hogrefe Verlag GmbH & Co. KG.

Moser Opitz, E., Reusser L., Moeri Müller, M., Anliker, B., Wittich, C. & Freesemann O. (2010). *BASIS-MATH 4-8 4-8, Basisdiagnostik Mathematik für die Klassen 4-8, Manual.* Bern: Huber.

Müller, G. N. & Wittmann, E. C. (Hrsg.) (1995). *Mit Kinder rechnen.* Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband – e.V.

Niedermann, A., Schweizer, R. & Steppacher, J. (2007). *Förderdiagnostik im Unterricht.* Biel: SZH.

Padberg, F. (2005). *Didaktik der Arithmetik.* München: Elsevier GmbH, Spektrum Akademischer Verlag.

Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik*. *Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (4. erweiterte, stark überarbeitete Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Prediger S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül. In: Fritz, A. & Schmidt, S. (Hrsg.). *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I* (S. 58 – 72). Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Scherer, P. (1995a). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung*. Heidelberg: Schindele

Scherer, P. (1995b). Ganzheitlicher Einstieg in neue Zahlenräume – auch für lernschwache Schüler?! In: Müller, G. N. & Wittmann, E. C. (Hrsg.). *Mit Kindern rechnen* (S.151 – 164). Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule.

Scherer, P. (2012). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern durch Fordern. Band 3: Multiplikation und Division im Hunderterraum* (4. Aufl.). Buxtehude: Persen Verlag.

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schmidt, S. (2009). Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. In: Fritz, A., Schmidt, S. (Hrsg.). *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I* (S. 124 – 140). Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Schneider, W., Küspert P. & Krajewski, K. (2013). *Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen.* Paderborn: Verlag Ferdinand Schöningh GmbH & Co.

SODK (o.J.). *Wichtigste Bundesgesetze.* Zugriff am 21.05.2015 unter: http://www.sodk.ch/fachbereiche/behindertenpolitik/bund/

Storz, R. (2014). *Mathematik differenziert und individualisiert unterrichten. Mit vielen Beispielen aus der Sekundarstufe I*. Hallbergmoos: Aulis Verlag.

Suhrweier, H. (2002). Prinzipien einer Förderdiagnostik. In: Mutzeck, W. (Hrsg.). *Förderdiagnostik. Konzepte und Methoden* (3. überarbeitete Aufl.). Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Thoma, P. & Rehle, C. (2009). *Inklusive Schule. Leben und Lernen mittendrin.* Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

UNESCO (2005). *Guidelines for Inclusion. Ensuring Access to Education for All.* Paris: Unesco

Vollrath, H. J. (2001). Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Wikipedia (2015). *Stellenwertsystem*. Zugriff am 27.12.2015 unter: https://de.wikipedia.org/wiki/Stellenwertsystem

Wittmann, E. Ch. (2009). *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Wiesbaden: Vieweg + Teubner

Masterarbeit

Basiskompetenzen in der Sekundarschule

Ein diagnostisches Instrument zur Differenzierung des Unterrichts mit dem Sekundarstufen-Lehrmittel Mathematik I des Lehrmittelverlags Zürich

Produkt

Begleitperson: Anette Köchlin
Experte: Rainer Kirchhofer
Studierender: Gabriel Gmünder
HS 2012/SG4
Im Stuppen 4
8048 Zürich
gmuender.gabriel@learnhfh.ch
076 411 13 65

HfH Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik

Inhaltsverzeichnis

1 Beschreibung des Instruments

1.1 Beurteilung der Basiskompetenzen

Schülerinnen und Schüler der Volksschule im Kanton Zürich sollten unabhängig von ihrem Leistungsniveau möglichst am Unterricht der Regelklasse teilhaben, d.h., der Unterricht muss sich den Fähigkeiten und erworbenen Fertigkeiten der Lernenden anpassen. Gleichzeitig darf der Unterricht nicht ausschliesslich von reduktionistischen oder kleinschrittigen Lehrmitteln aus dem sonderpädagogischen Bereich geprägt sein.

Verschiedene Wissenschaftliche Untersuchungen zeigen, dass eine erfolgreiche Bearbeitung von mathematischen Inhalten stark vom bisherigen Erwerb sogenannter Basiskompetenzen abhängt (vgl. Moser Opitz, 2009, S. 41).

Im einzelnen sind dies

- das Mengenerfassen und die Zählkompetenz,
- das Dezimalsystem,
- die Teil-Teil-Ganzes-Beziehung,
- die Addition,
- die Subtraktion,
- die Multiplikation,
- die Division,
- und das Mathematisieren.

Soll darüber entschieden werden,

- an welchen Themen Lernende arbeiten sollten, weil sie noch über Lücken im Basisstoff verfügen und
- welche Aufgaben Lernende nicht bearbeiten sollten, weil sie eine Überforderung darstellen würden,

können Erkenntnisse zu den bisher erworbenen Basiskompetenzen entscheidenden Aufschluss liefern. Im Kapitel 8 liegen zu jedem arithmetischen Teilkapitel Basistests vor, welche eine Beurteilung der vorausgesetzten Basiskompetenzen ermöglichen.

1.2 Differenzierung des Unterrichts

Verschiedene Faktoren beeinflussen das Mathematiklernen und können für schwache Leistungen verantwortlich gemacht werden. Neben gesellschaftlich-strukturellen und individuellen Dispositionen wurden auch unterrichtliche Aspekte aufgezeigt, die von Lehrpersonen leicht angepasst werden können: das Lehr- und Lernverständnis, den spezifischen Aufbau von mathematischen Vorstellungen und die gezielte Auswahl von Lerninhalten. In den folgenden Unterkapiteln wird somit auf diese Punkte eingegangen und die einzelnen Themen und Aufgabenstellungen nach folgenden Fragen untersucht:

- *Lerninhalte:* Welche basalen Kenntnisse sind für eine erfolgreiche Bearbeitung des Lerninhalts wichtig oder können damit aufgegriffen und vertieft werden? Ab Kapitel 2 werden unter diesem Titel die einzelnen Aufgaben nach Basiskompetenzen tabellarisch aufgeschlüsselt.

- *Lehr- und Lernverständnis:* Wie können mit den Aufgaben tragfähige Vorstellungen aufgebaut werden? Welche Anpassungen können gemacht werden, wenn die Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler mit den Ansprüchen der Themen und Aufgaben nicht übereinstimmen? Welche Bedeutung haben die Lerninhalte für die Schülerinnen und Schüler? Ab Kapitel 2 werden unter diesem Titel Vorschläge zur Bearbeitung der einzelnen Aufgaben gemacht.

- *Aufbau mathematischer Vorstellungen*: Welche Hilfsmittel und Aufgaben unterstützen den Lernprozess der basalen Kompetenzen zusätzlich? Wie können die Lerninhalte auf verschiedenen Repräsentationsebenen veranschaulicht werden? Die Methoden, Beispiele und Hilfsmittel zum Aufbau mathematischer Vorstellungen werden im Kapitel 9 tabellarisch zusammengefasst, gelten für somit für alle arithmetischen Bereiche des Lehrmittels und sollen aufzeigen, wie mathematische Vorstellungen zu einzelnen Basiskompetenzen aufgebaut werden können.

1.3 Aufbau des Lehrmittels

Das Lehrmittel für die Sekundarschule ist in drei Jahrgänge für die 1. bis 3. Sekundarklasse gegliedert. Das hier besprochene Lehrmittel Mathematik 1 wird demnach in der ersten Sekundarklasse für die Abteilungen A, B und C eingesetzt und wurde für drei Anforderungsstufen konzipiert. Dabei ist man von der niedrigsten Anforderungsstufe III ausgegangen und hat die Aufgaben für die Anforderungsstufen II und I ausgebaut (vgl. Lehrmittelverlag, 2011, S. 6).

Die Lernenden erhalten ein Themenbuch, ein Begleitheft, ein Arbeitsheft und die Möglichkeit, bestimmte Aufgaben im Webportal des Lehrmittelverlags vertiefend zu trainieren. Für Lehrpersonen sind zusätzlich ein Handbuch sowie Lösungen erhältlich.

- Das Themenbuch ist für alle Schülerinnen und Schüler identisch gestaltet und soll den Schülerinnen und Schülern aller Anforderungsstufen die Möglichkeit geben, in ein Thema einzusteigen. Es ist für alle Lernenden die Basis des Lehrwerks (vgl. Lehrmittelverlag Zürich, 2011, S. 3) und bildet damit auch den Ausgangspunkt des integrativen Unterrichts für Schülerinnen und Schüler mit besonderem Förderbedarf.

Die Analyse des Lehrmittels beginnt deshalb immer mit den Aufgaben und Einführungen des Themenbuches. Die Bezeichnung der Aufgaben erfolgt mit Nummern und Buchstaben (vgl. 1a, 1b, 1c).

- Die Arbeitshefte wurden in drei Anforderungsniveaus differenziert: I (hoch), II (mittel), III (niedrig) und bauen auf den Erkenntnissen des Themenbuches auf. Wird vom Arbeitsheft gesprochen, ist in der Regel das Arbeitsheft der Anforderungsstufe III die Rede. Das Arbeitsheft bietet vertiefende Aufgaben, welche selbstständig gelöst werden sollen. Die Nummerierung der Aufgaben wurde im Buch und Arbeitsheft identisch gewählt. Die Aufgaben 4.1, 4.2, 4.3 des Arbeitsheftes korrespondieren mit der Aufgabe 4 des Themenbuches. Teilaufgaben werden ebenfalls mit Buchstaben benannt (vgl. 4.1a, 4.1b, 4.1c).

- Das Begleitheft ist als Theoriefundus zu den jeweiligen Kapiteln gedacht. Auf allen Doppelseiten werden auf der linken Seite Regeln, Definitionen und Hilfen angeboten, während die Lernenden auf der rechten Seite Platz für Notizen, eigene Ideen oder Beispiele finden. So soll schrittweise ein persönliches Nachschlagewerk entstehen.

- Das Webportal bietet neben geometrischen Veranschaulichungen für die Algebra und Arithmetik Trainingsaufgaben. Manche Aufgaben können auf den Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler reagieren (z.B. Primfaktorzerlegung).

- Das Handbuch für Lehrpersonen bietet eine Jahresplanung, in der für jedes Kapitel angegeben wird, wie lange ein (Teil-) Kapitel bearbeitet werden soll, damit alle Lehrplanziele im Unterricht thematisiert werden können. Bei Schülerinnen und Schülern mit angepassten Lernzielen, muss dennoch abgewogen werden, ob bestimmten Inhalten und Zielen mehr Zeit gewidmet werden soll. Es werden kaum didaktische Hinweise gegeben und Vorschläge zur Differenzierung fehlen. Dafür wird klar auf die Voraussetzungen hingewiesen. Für das Kapitel 2 (Potenzen) wird beispielsweise festgehalten: „*Vorausgesetzt wird, dass die Grundoperationen mit natürlichen Zahlen beherrscht werden*“ (Keller et al., 2011c, Kapitel 2, S. 1).

- In den Lösungen befinden sich Lösungen und Lösungshinweise.

Das Modell der Differenzierung richtet sich demnach nach Modellen wie das von Krippner (1992), welche eine gemeinsame Einführung mit Grundanforderungen vorsehen. Während ein Teil der Klasse danach an weiterführenden Aufgaben arbeitet, üben sich schwächere Lernende an weiteren Aufgaben der Grundanforderungen (vgl. Storz, 2014, S. 66). Diese Differenzierungsmethodik kann zwar unterschiedliche Entwicklungspotenziale bedienen, berücksichtigt verschiedene Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler oft nicht gebührend, weil die Zugänge zu den Inhalten die gleichen bleiben (vgl. Storz, 2014, S. 66). Für schwache Mathematiklernende muss deswegen darüber nachgedacht werden, wie die Zugänge differenziert und mit handelnden und ikonischen Elementen ergänzt werden können.

Ab dem folgenden Kapitel 2 werden deshalb die Lehrplanbezüge zu jedem Kapitel genannt, die Lerninhalte aller Aufgaben beschrieben und auf das Lehr- und Lernverständnis untersucht sowie auch Angaben zur

Differenzierung für Schülerinnen mit Lücken in den Basiskompetenzen gemacht werden. Der Aufbau mathematischer Vorstellungen, d.h., Lerninhalte, welche zusätzlich den Erwerb basaler Kompetenzen fördern, wird wie bereits erwähnt im Kapitel 9 festgehalten. Erklärungen und Bilder zu Hilfsmitteln werden ab Kapitel 10 festgehalten.

Sofern nicht anders gekennzeichnet, beziehen sich alle Kommentare zu Aufgaben auf Keller et al. 2011a (Themenbuch) und Keller et al. 2011b (Arbeitsheft). Die Seitenzahlen sind in den Titeln der jeweiligen Kapitel angegeben.

2 Kapitel 2: Die Welt der natürlichen Zahlen

Keller et al. nennen für die Kapitel 2a, 2b und 2c als Voraussetzung, „*dass die Grundoperationen mit natürlichen Zahlen beherrscht werden. Hilfreich sind auch bereits praktische Erfahrungen mit Regeln und Gesetzen wie «Faktoren vertauschen», «Klammerregel» usw. aus der Thematik «geschickt Rechnen»*“ (2011c, Kapitel 2, S. 1).

2.1 Kapitel 2a: Potenzen, Regeln und Gesetze (S. 20 bis S. 23)

2.1.1 Lehrplanbezüge (vgl. Lehrmittelverlag Zürich, 2015, o.S.)

Handlungs-/Themenaspekte:

- Operieren und Benennen
- Erforschen und Argumentieren
- Mathematisieren und Darstellen

Kompetenzen:

Kompetenzbereich Zahl und Variable:

- Arithmetische Begriffe und Symbole verstehen und verwenden, Zahlen lesen und schreiben
- Flexibel zählen, Zahlen nach der Grösse ordnen und Ergebnisse überschlagen
- Addieren, subtrahieren multiplizieren, dividieren und potenzieren
- Terme verglichen und umformen, Gleichungen lösen, Gesetze und Regeln anwenden
- Zahl- und Operationsbeziehungen sowie arithmetische Muster erforschen und Erkenntnisse austauschen
- Aussagen, Vermutungen und Ergebnisse zu Zahlen und Variablen erläutern, überprüfen und begründen
- Hilfsmittel nutzen beim Erforschen arithmetischer Muster
- Rechenwege darstellen, beschreiben, austauschen und nachvollziehen
- Anzahlen, Zahlenfolgen und Terme veranschaulichen, beschreiben und verallgemeinern

Kompetenzbereich Grössen, Funktionen, Daten und Zufall:

- Sachsituationen mathematisieren, darstellen, berechnen sowie Ergebnisse interpretieren und überprüfen

2.1.2 Lerninhalte: Potenzen (S. 20 – 21)

Tabelle 1: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zum Thema Potenzen*

Aufgabe	**vorausgesetzte Basiskompetenzen**
1a	Addition, Multiplikation
1b	Multiplikation oder Addition
2a	Multiplikation
2b	Multiplikation
3a	Multiplikation
3b	Multiplikation
3c	Multiplikation
3d	Multiplikation
3e	Multiplikation
4	Mathematisieren, Multiplikation

Tabelle 2: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Arbeitsheft zum Thema Potenzen*

Aufgabe	**vorausgesetzte Basiskompetenzen**
1.1	Addition, Multiplikation
1.2	Multiplikation, Addition
2.1	Multiplikation
2.2	Multiplikation
3.1	Multiplikation, Division als Umkehroperation
3.2	Multiplikation
4.1	Mathematisieren, Multiplikation
4.2	Mathematisieren, Multiplikation
4.3	Mathematisieren, Multiplikation

2.1.3 Lehr und Lernverständnis: Potenzen (S. 20 – 21)

Die Erarbeitung des Themas Potenzen geschieht in **Aufgabe 1 und 2** behutsam und anschaulich auf symbolischer Ebene, indem ein Vergleich mit der Multiplikation als fortlaufende Addition herangezogen wird. Für Schülerinnen, die über nahezu tragfähige oder tragfähige Vorstellungen zur Multiplikation verfügen, ist die Bearbeitung des Themas sinnvoll gestaltet, da sie neben der Erarbeitung eines neuen Themas auch das multiplikative Verständnis weiter festigen können. Ebenso bieten die symbolisch notierten Multiplikationen als fortlaufende Additionen eine Basis, um Rechengeschichten zu erfinden und somit Anknüpfungspunkte für zeitlich-sukzessive Multiplikationen. Problematisch sind die **Aufgaben 2** und **3** im Buch und im Arbeitsheft, da keine einzige Potenz im Zahlenraum bis 100 berechenbar ist und sehr schnell grosse Potenzen (z.B. 50^4, 9^5 oder 117^2) aufgegriffen werden. Daraus resultieren Rechnungen wie 6561 x 9. Auch die Aufgaben des Webportals bieten hier keine Differenzierungsmöglichkeit. Sollen Schülerinnen mit grossen Lücken im Basisstoff Potenzen berechnen bleiben dennoch vier Möglichkeiten:

- Differenzierung bezüglich der Mächtigkeit von Basis- und Hochzahl (vgl. 3^3, 2^4 und 5^3)
- Rechnen mit schriftlichen Operationen
- Berechnung der Potenzen mit dem Taschenrechner
- Auslassung der Berechnung und ausschliessliche Notation als fortgesetzte Multiplikation bzw. Potenz

Training der Multiplikation

Soll die Rechenfertigkeit zur Multiplikation trainiert werden, lässt sich die Verwendung des Taschenrechners ausschliessen. Um die Mächtigkeit von Potenzen zu erfahren, wäre eine Überschreitung des Zahlenraums bis 1000 nicht zwingend notwendig, weshalb eine Differenzierung der Basis- und Hochzahl sinnvoll erscheint. Einige grössere Potenzen des Arbeitsheftes könnten dennoch als fortlaufende Multiplikationen notiert und mit dem Taschenrechner berechnet werden. Steht nicht das blosse Rechnen mit Multiplikationen im Zentrum, sondern das Verständnis der Potenz als fortlaufende Multiplikation, ist die Verwendung des Taschenrechners legitim (vgl. Kapitel 10.2).

Training des Operationsverständnisses zur Multiplikation und des Mathematisierens

Die **Aufgabe 4** kann gut als Baumdiagramm dargestellt und differenziert werden, indem der Zahlenraum verkleinert wird: Wann erhalten mehr als 20 Leute die Kettenmail? Wann erhalten mehr als 100 Leute die Kettenmail? Gleichzeitig kann auch die Komplexität reduziert werden, indem die Basiszahl auf 2 verkleinert wird. Damit wäre es auch möglich, den Vorgang einer Kettenmail in einer Schulklasse handelnd mit Papier-Mails durchzuspielen. Nach der Berechnung der Aufgabe, müssen Modellbildung und Rechnungen validiert werden. Da Potenzen schwierig abzuschätzen sind, eignet sich ein Vergleich mit zuvor angefertigten Baumdiagrammen.

Erwerb des Operationsverständnisses zur Multiplikation

Verfügen Schülerinnen über besonderen Förderbedarf, weil das Operationsverständnis zur Multiplikation gänzlich fehlt, kann mit der Erarbeitung des Themas im Lehrmittel begonnen werden (im Sinne eines Einstiegs über das Modell der Multiplikation als fortlaufende Addition), während auch zusätzliche Materialien zu räumlich-simultanen Modellen zur Differenzierung eingesetzt werden, um die Operationsvorstellungen der Multiplikation zu vertiefen. Für eine tragfähige Erarbeitung der Multiplikation fehlen diesem Kapitel, welches sich ausschliesslich mit der Multiplikation als fortlaufende Addition befasst (zeitlich-sukzessiv), wichtige Ansichten, bietet dennoch für Schülerinnen und Schüler mit besonderem Förderbedarf eine wichtige Einsicht zum Operationsverständnis der Multiplikation. Beispiele für Ergänzende Aufgaben und Materialien zur Multiplikation befinden sich im Kapitel 9. Potenzen können auch nach der Erarbeitung der Multiplikation thematisiert werden.

2.1.4 Lerninhalte: Regeln und Gesetze (S. 22 – 23)

Tabelle 3: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Buch zum Thema Regeln und Gesetze*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
5a	Addition
5b	Subtraktion
5c	Addition, Subtraktion
5d	Addition, Subtraktion
6a	Multiplikation
6b	Division
6c	Multiplikation, Division
6d	Multiplikation, Division
7a	Subtraktion, Division
7b	Subtraktion, Multiplikation
7c	Addition, Division
7d	Addition, Multiplikation
8	Grundoperationen gemischt
9a	Addition, Subtraktion, Mathematisieren
9b	Multiplikation, Mathematisieren
9c	Multiplikation, Mathematisieren
9d	Multiplikation, Division, Mathematisieren

Tabelle 4: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Arbeitsheft zum Thema Regeln und Gesetze*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
5.1	Addition, Subtraktion
5.2	Addition, Subtraktion
6.1	Multiplikation, Division
6.2	Multiplikation, Division
8.1	Grundoperationen gemischt
8.2	Grundoperationen gemischt
8.3	Multiplikation, Addition, Subtraktion
8.4	Division; Addition; Subtraktion
8.5	Grundoperationen gemischt (Distributivgesetz)
8.6	Grundoperationen gemischt (Distributivgesetz)
8.7	Grundoperationen gemischt
9.1	Mathematisieren
9.2	Mathematisieren
10.1	Addition; Subtraktion
10.2	Addition; Subtraktion
11.1	Multiplikation
11.2	Multiplikation
11.3	Multiplikation
12.1	Addition; Subtraktion
12.1	Grundoperationen gemischt
13.1	Multiplikation (Potenzen mit Basis 10)

2.1.5 Lehr- und Lernverständnis: Regeln und Gesetze (S. 22 – 23)

Das Thema Regeln und Gesetze setzt für eine undifferenzierte Bearbeitung voraus, dass die Schülerinnen und Schüler im Zahlenraum bis 1000 mit allen Grundoperationen sicher rechnen können. Schwache Mathematiklernende mit Lücken im Basisstoff werden ohne individuelle Unterstützung deshalb Schwierigkeiten haben.

Training der Addition und Subtraktion und Erwerb des Kommutativgesetzes

Die Additionen der **Aufgabe 5** beinhalten bis zu zwei Dezimalstellenübergänge (zu Zehner- und Hunderterstellenwerten) und eignen sich deshalb, um die Strategie des Schrittweisen Rechnens zu erwerben oder zu festigen. Neben dem Schrittweisen Rechnen, sollte das Kommutativgesetz möglichst früh fokussiert werden: Tauschaufgaben bieten wichtige Einsichten für die Entwicklung des operativen Verständnisses und verkürzen die Rechenzeit in den Aufgaben deutlich. Als Unterstützung zum Schrittweisen Rechnen können auf enaktiver Ebene Dienes-Material oder auf ikonischer Ebene Zahlenstrahlen oder Rechenstriche sowie Hunderterfelder benutzt werden. Aufgrund der Überschreitung des Zahlenraums bis 100 eignen sich die Hundertertafel und Wendepunkte (hoher Zählaufwand) nicht.

Training der Multiplikation und des Kommutativgesetzes

Um die **Aufgabe 6** lösen zu können, wird das flexible Rechnen bzw. das Operationsverständnis zu Multiplikation und Division vorausgesetzt. Im Kapitel 3.5 der theoretischen Auseinandersetzung wird davon abgeraten, bei arithmetischen Schwierigkeiten im Zahlenraum bis 100 bereits Divisionen ein- oder auszuführen. Die Aufgabe kann dahingehend differenziert werden, als dass bei tragfähigen Vorstellungen zur Multiplikation die Divisionen mit Multiplikationen des Kleinen Einmaleins' ersetzt werden, um einerseits das multiplikative Verständnis, die Automatisierung des Einmaleins aber vor allem das Kommutativgesetz in Verbindung mit der Multiplikationen zu erwerben. Rechnen Schülerinnen und Schüler im Zahlenraum bis 100 relativ sicher, können Lernende auch inhaltliche Vorstellungen zur Division erwerben (vgl. Kapitel 3.6). Dies würde aber auch eine inhaltliche Separation vom Lehrmittel mit sich ziehen, bietet hingegen den Vorteil, dass die **Aufgaben 7 und 8** und damit die Operatorrangfolge möglicherweise später wieder bearbeitet werden können. Da sich die Divisionen und Multiplikationen lediglich dem Kleinen Einmaleins bedienen, eignen sie sich auch für Lernende mit besonderem Förderbedarf (wenn das Operationsverständnis vorhanden ist) und bieten, wie im Kapitel 3.1.3 dieser Arbeit gefordert, einen gesamtheitlichen Zugang zu allen Grundoperationen. Fehlen den Lernenden Einsichten in die Operationsverständnisse, müsste dieses zur jeweiligen Operation aufgebaut werden.

Erwerb des Distributivgesetzes in Verbindung mit allen Grundrechenarten

Gleiches gilt für die Aufgaben zum Distributivgesetz (**Aufgabe 8.3** im Arbeitsheft), welches wie das Kommutativgesetz gerade auch bei Lernenden mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen den Erwerb des Operationsverständnis' der Multiplikation und Division unterstützen (vgl. Kapitel 4.4.1). Haben Lernende hingegen Lücken im Operationsverständnis, sind die Aufgaben ungeeignet, da keine handelnden oder ikonische Zugänge vorhanden sind. Der Erwerb des Operationsverständnisses hat auch im Hinblick auf kommende Kapitel des Lehrmittels Vorrang.

Training des Subtrahierens in Schritten

Die **Aufgabe 10** im Arbeitsheft lässt Lernende das Distributivgesetz anwenden und zeigt auf, wie Aufgaben auf symbolischer Ebene vereinfacht werden können (vgl. 80 – 37 = 80 – (30 + 7) = 80 – 30 – 7) und sollte demnach nicht weggelassen werden (vgl. Kapitel 3.1.3 und 4.4.1). Bei Schwierigkeiten kann die Aufgabe dahingehend umgewandelt werden, dass die Zahlenräume verkleinert werden und die Aufgaben ausschliesslich als Subtraktion in Schritten notiert werden (z.B. 80 – 30 – 7).

Training zum Operationsverständnis' der Grundrechenarten und zur Modellbildung

Die **Aufgabe 9** wurde im Arbeitsheft in zwei Teile gegliedert. **Aufgabe 9.1** erzählt kurze Rechengeschichten, welche mit dem passenden Term verbunden werden müssen und eignet sich dementsprechend auch gut für Schülerinnen und Schüler mit besonderem Förderbedarf. Da sie reale Kontextsituationen abbilden, die auch handelnd bearbeitet werden können, sind sie der **Aufgabe 9** im Buch und den **Aufgaben 9.2** im Arbeitsheft vorzuziehen.

Die Aufgabe 11 des Arbeitsheftes illustriert das Wachstum von Potenzen und soll von Schülerinnen und Schülern mit multiplikativem Verständnis und Kenntnissen zum Umgang mit Zahlenstrahlen bearbeitet werden. Die Zahlenstrahlen im Arbeitsheft sind jedoch sehr kurz. Im Geräteraum der Turnhalle sind in der Regel Rollmassbänder (10 Meter) zu finden. Legt man das Massband auf dem Boden aus, können die Zahlen auf Kärtchen notiert und auf einem Zahlenstrahl bis 1000 (1000 cm = 10 m) abgelegt werden.

2.2 Kapitel 2b: Variablen (S. 24 – S. 27)

2.2.1 Lehrplanbezüge (vgl. Lehrmittelverlag Zürich, 2015, o.S.)

Handlungs-/Themenaspekte:

- Operieren und Benennen
- Erforschen und Argumentieren
- Mathematisieren und Darstellen

Kompetenzen:

Kompetenzbereich Zahl und Variable:

- Arithmetische Begriffe und Symbole verstehen und verwenden, Zahlen lesen und schreiben
- Terme verglichen und umformen, Gleichungen lösen, Gesetze und Regeln anwenden
- Zahl- und Operationsbeziehungen sowie arithmetische Muster erforschen und Erkenntnisse austauschen
- Aussagen, Vermutungen und Ergebnisse zu Zahlen und Variablen erläutern, überprüfen und begründen
- Rechenwege darstellen, beschreiben, austauschen und nachvollziehen
- Anzahlen, Zahlenfolgen und Terme veranschaulichen, beschreiben und verallgemeinern

Kompetenzbereich Grössen, Funktionen, Daten und Zufall:

- Sachsituationen mathematisieren, darstellen, berechnen sowie Ergebnisse interpretieren und überprüfen
- Terme, Formeln, Gleichungen und Tabellen mit Sachsituationen konkretisieren

2.2.2 Lerninhalte: Variablen (S. 24 – 27)

Tabelle 5: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zum Thema Variablen*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
1a	Mathematisieren, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Multiplikation
1b	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
1c	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Multiplikation
2a	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Multiplikation als fortlaufende Addition
2b	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Multiplikation als fortlaufende Addition
2c	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation als fortlaufende Addition
2d	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation als fortlaufende Addition
3	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition
4	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division

Tabelle 6: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Arbeitsheft zum Thema Variablen*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
1.1	Mathematisieren, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
1.2	Mathematisieren, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Multiplikation,
1.3	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation
1.4	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation
1.5	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
2.1	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
2.2	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
2.3	Multiplikation, Addition, Mathematisieren
4.1	Mathematisieren, Division
4.2	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
4.3	Mathematisieren; Addition, Subtraktion, Multiplikation
4.4	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation

2.2.3 Lehr- Lernverständnis: Variablen (S. 24 – 27)

Die grösste Schwierigkeit der **Aufgabe 1** bildet die mathematische Modellbildung, welche bis zu dreimal geschehen muss: Bei den sechs Aufgaben sind zweimal die Anzahl Kugeln im Sack A, zweimal die Anzahl Kugeln im Sack B und zweimal die Anzahl Kugeln im Sack C bekannt. Neben den Strukturwörtern „mehr als“, „dreimal so viele“ muss für die Modellbildung auch die Verknüpfung zur Umkehroperation von Addition und Multiplikation vorhanden sein.

Training des Operationsverständnis aller Grundrechenarten und der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung

Die ersten vier Teilaufgaben der **Aufgabe 1** im Themenbuch beinhalten die Basiskompetenzen Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Mathematisieren, Addition, Subtraktion und Multiplikation. Da die Aufgaben einfach mit Material nachzuspielen sind, eignet sich ein handelnder Ansatz mit drei durchsichtigen Behältern und Murmeln. Die Lernenden erhalten somit nach der Klärung von Strukturwörtern auf enaktiver Ebene Einsichten in die Addition und die Subtraktion sowie in die Multiplikation. Methodisch wertvoll ist vor allem die Auseinandersetzung mit der Multiplikation, da sie – ohne auf eine Felddarstellung zurückzugreifen – Einsichten in das räumlich-simultane Modell anbietet. Lehrpersonen können ohne Aufwand weitere Teilaufgaben erstellen, indem sie die Tabelle einfach erweitern.

Da es sich um eine Sachaufgabe handelt, sollen Lernende die Resultate validieren. Hier bietet sich neben einer enaktiven Kontrolle mit Murmeln vor allem auch die Validation mittels Überschlagen an. Rechnen Schülerinnen im Zahlenraum bis 100 bereits sicher und verfügen über multiplikative Vorstellungen, sind auch die letzten zwei Teilaufgaben, die Divisionen im Bereich des Kleinen Einmaleins erfordern, eine gute Gelegenheit, um die Division im Kontext des Aufteilens zu erfahren. Haben Lernende Schwierigkeiten mit der Mathematisierung oder verwechseln die Säcke immer wieder, kann die Aufgabe dahingehend differenziert werden, als dass nur zwei Säcke gleichzeitig bearbeitet werden. So kann auch gezielt eine Operation mit ihrer Umkehroperation thematisiert werden.

Die **Aufgabe 1.1** im Arbeitsheft ist nahezu identisch zur ersten Aufgabe des Themenbuches. Auch hier lässt sich auf enaktiver Ebene arbeiten, indem die Situationen mit Murmeln nachgebildet werden. Ebenso können die zur Aufgabe 1 des Themenbuches genannten Differenzierungen übernommen werden. Ab **Teilaufgabe 1c** wird eine neue Darstellungsform (ikonische Ebene) eingeführt. Anstatt Bilder von Säcken werden nun Kästchen (☐) verwendet. Ein Kästchen soll die Anzahl Kugeln im Sack A repräsentieren. Etwas unglücklich ist die Darstellung der Säcke. Obwohl sie ganz unterschiedliche Mengen von Kugeln enthalten, sind sie alle gleich gross. Die Schülerinnen und Schüler sollen nun mit Kästchen und Subtraktionen die Totalzahl der Kugeln in allen Säcken darstellen. Auch hier sei soll über einen enaktiven Zugang mit durchsichtigen Behältern und Murmeln vorgegangen werden, da das Material einfach und schnell beispielhaft angeordnet werden kann. Aus der Skizze soll anschliessend ein Term gebildet werden, der in **Teilaufgabe 1d** angewendet wird, um die Gesamtzahl für alle in den Säcken enthaltenen Kugeln zu berechnen. Haben Lernende Mühe, selbstständig Terme zu bilden, kann auch in die andere Richtung mathematisiert werden. Den Lernenden werden verschiedene Terme angeboten und sie stellen die Terme enaktiv mit Murmeln und ikonisch mit Zeichnungen dar. Dies gilt auch für spätere Aufgaben des Arbeitsheftes.

Danach fordert **die Aufgabe 1.2** die Bildung von Termen zu verschiedenen Aussagen: „*Im Sack B hat es doppelt so viele Kugeln wie im Sack A*“. Auch hier können handlungsorientierte Ansätze nach einer Begriffsklärung den Start bilden. Die Situationen werden zuerst nachgestellt, danach zu Termen mathematisiert. Bei zweigliedrigen Instruktionen wie „*Im Sack B hat es dreimal so viele Kugeln und noch 2 mehr als im Sack A*“ kann der zweite Teil des Satzes zuerst abgedeckt werden, um der Aufgabe mehr Struktur zu verleihen.

Für die **Aufgabe 1.3** sind drei Terme festgehalten, der Term für den vierten Sack muss noch durch eine Mathematisierung erstellt werden. Um die Lückentexte ausfüllen zu können, darf bei Schwierigkeiten wiederum Material eingesetzt werden.

Die **Aufgabe 1.4** fordert zuerst Mathematisierungen von sprachlich notierten Termen. Als erstes sollten wiederum die Begriffe, d.h., Strukturwörter (hinzukommen, verfünffachen, 2-mal mehr usw.) thematisiert, mit Operationen in Verbindung gebracht und eventuell mit Skizzen illustriert werden. Im zweiten Teil sollen Rechengeschichten zu gegebenen Termen erfunden werden, was mit Hilfestellungen in Form von passenden Strukturwörtern (vgl. hinzukommen, verdoppeln, verdreifachen) unterstützt werden kann.

Verschiedene sprachlich notierte Aussagen sollen in der **Aufgabe 1.5** Termen zugeordnet werden. Für jeden Term sind bis zu acht Aussagen gegeben, was Lernende mit schwachen Lese- und Mathematisierungskompetenzen überfordert. Einerseits sollte auf die Rhythmisierung geachtet werden (nach drei bis vier untersuchten Aussagen kann eine zuvor abgemachte Bewegungspause oder ein Lernspiel eingebaut werden), andererseits können noch nicht untersuchte Aussagen abgedeckt werden, um die Aufgabe schlanker erscheinen zu lassen. Für die **Teilaufgabe a** und **b** wird das Operationsverständnis zur Addition und Subtraktion, für die **Teilaufgabe c** das Verständnis zur Multiplikation und für die **Teilaufgabe d** das Operationsverständnis zur Multiplikation und Division vorausgesetzt. Fehlt das Operationsverständnis zur jeweiligen Operation, sollte die Aufgabe durch handelnde Übungen ohne Variablen ersetzt werden. So können sprachliche Begriffe wie 3-mal so viele, 5 weniger oder 3-mal weniger thematisiert werden.

Die **Aufgabe 2.3 des Arbeitsheftes** widmet sich Fahrtkosten mit einer Bergbahn. Es werden einfache Zahlen angeboten (5 Fr., 8 Fr., 9 Fr., 15 Fr.), mit denen die Lernenden Fahrtkosten für Gruppen berechnen. Da das Lehrmittel keine Retourfahrten thematisiert, können die Beträge 9 Fr. und 15 Fr. für die Berechnung ignoriert werden. Die Aufgabe ist bezüglich Modellbildung und Zahlenraum gut für schwache Mathematiklernende angepasst und lässt sich für die Vertiefung des Operationsverständnisses zur Multiplikation und Addition einsetzen. Zur Modellbildung tragen Begriffsklärungen und Skizzen/Zeichnungen bei.

Bei **der Aufgabe 4** des Themenbuchs sollen mit der Variable r Terme für Zahlen gebildet werden, welche um 1 grösser sind, doppelt so gross sind, um 2 kleiner sind oder um 3 grösser sind als das Doppelte von r. Die nächsten zwei Teilaufgaben beziehen auch die Division mit ein, was für viele Schülerinnen und Schüler mit Schwierigkeiten verbunden sein dürfte. Anstatt einen Term zu entwerfen, der eine Zahl bilden soll, welche um 2 kleiner als die Hälfte von r ist, kann zuerst nur die Hälfte von r gebildet werden. Verfügen Schülerinnen und Schüler nicht über ein tragfähiges Operationsverständnis, können ansonsten sicher im Zahlenraum bis 100 rechnen, bietet sich hier ein ebenfalls Zeitpunkt, um die Division einzuführen oder das Verständnis zu vertiefen. Die Lernenden haben in den letzten Aufgaben bereits viele Erfahrungen mit der Multiplikation gemacht. Im Kapitel 3.5 lassen sich Methoden zur Einführung und zum Training der Division entnehmen.

Für die **Aufgaben 4.1** bis **4.4** des Arbeitsheftes müssen entweder zu Rechengeschichten Terme erarbeitet werden (Aufgabe 4.1 und 4.2), oder Rechengeschichten mit gegebenen Termen verbunden werden (Aufgabe 4.2 und 4.4). Neben dem Operationsverständnis, müssen Schülerinnen und Schüler für die Aufgaben 4.3 und 4.4 die Operatorrangfolge anwenden und Additionen sowie Subtraktionen einklammern können.

Begründung zum Auslassen der Aufgaben 2 im Themenbuch und Arbeitsheft (mit Ausnahme der Aufgabe 2.3 des Arbeitsheftes)

Die **Aufgaben 2** im Themenbuch und Arbeitsheft sind schwierig, da zweistellige Zahlen (Minutentarif in Rappen: z.B. 49, 52, 45 und 47) mit verschiedenen Faktoren multipliziert werden müssen und ein enaktive Zugänge kaum möglich sind. Die Zahlen sind gross (es bräuchte viel Zeit, mit handelndem Material zu agieren) und die Thematik von Gesprächskosten ist abstrakt. Je nach Ressourcen der Lernenden muss darüber nachgedacht werden, ob diese Aufgabe im Themenbuch und Arbeitsheft ausgelassen und übersprungen werden soll, weil enaktive und ikonische Zugänge fehlen, die Zahlen für Lernende mit schwachen Rechenfertigkeiten kompliziert sind und das Thema nicht mehr der Realität entspricht. Verbindungsgebühren werden heute nicht mehr verrechnet und Minutentarife erheben die Telekommunikationsanbieter ausschliesslich bei Prepaid-Angeboten. Da die überwiegende Mehrheit der Lernenden Datenflatrates (Gesprächskosten inkludiert) benutzen, die Kommunikation über soziale Medien geschieht – die auch Telefonfunktionen beinhalten – ist dieser Kontext für sie fremd. Sollen Lernende basale Kompetenzen trainieren, ermöglichen andere Aufgaben des Kapitels mehr aktive Lernzeit.

Training der Addition und der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung

Bei der folgenden **Aufgabe 3** liegt der Fokus auf der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, der Addition und auf dem Erkennen von Gesetzmässigkeiten. Bei Zahlenreihen wie 5, 4, 9, 13, 22, ... wird die nächste Zahl immer durch die Summe von zwei Vorgängerzahlen gebildet. Falls Lernende die Gesetzmässigkeit nicht finden können, sollten die Zahlenreihen bis auf drei Zahlen abgedeckt werden. Die Lernenden sollen herausfinden, wie die Zahlen 5, 4 und 9 oder 4, 9 und 13 zueinander in Beziehung stehen. Haben sie die Gesetzmässigkeit erkannt, bietet die Aufgabe ein breites Spektrum an Additionen, welche die Teil-Teil-Ganzes-Beziehung einbeziehen.

Training des Mathematisierens durch eine Differenzierung der Aufgabe 3c

Die **Teilaufgabe 3c** ist schwierig gestaltet, da die Schülerinnen und Schüler die Zahlen 22 oder 54 zuerst in Vielfache der Ausgangszahlen zerlegen müssen und weil zum ersten mal ein Term mit zwei Variablen auftaucht, der auch noch selbst gebildet werden soll. D.h., das Operationsverständnis zu Multiplikation, Addition und die Teil-Teil-Ganzes-Beziehung müssen gleichzeitig miteinander verknüpft und auf einer höheren Komplexitätsstufe angewendet werden. Um mit einem Term mit zwei unbekannten zu arbeiten, können stattdessen zwei Terme gegeben werden; der Richtige und ein Term der nicht zur Aufgabe passt. Die Schülerinnen und Schüler sollen sie untersuchen und den Richtigen identifizieren.

2.3 Kapitel 2c: Teiler, Vielfache und Primzahlen (S. 28 – 31)

Lehrplanbezüge (vgl. Lehrmittelverlag Zürich, 2015, o.S.)

Handlungs-/Themenaspekte:

- Operieren und Benennen
- Erforschen und Argumentieren
- Mathematisieren und Darstellen

Kompetenzen:

Kompetenzbereich Zahl und Variable:

- Arithmetische Begriffe und Symbole verstehen und verwenden, Zahlen lesen und schreiben
- Addieren, subtrahieren multiplizieren, dividieren und potenzieren
- Terme verglichen und umformen, Gleichungen lösen, Gesetze und Regeln anwenden
- Zahl- und Operationsbeziehungen sowie arithmetische Muster erforschen und Erkenntnisse austauschen
- Aussagen, Vermutungen und Ergebnisse zu Zahlen und Variablen erläutern, überprüfen und begründen
- Rechenwege darstellen, beschreiben, austauschen und nachvollziehen
- Anzahlen, Zahlenfolgen und Terme veranschaulichen, beschreiben und verallgemeinern

2.3.1 Lerninhalte: Teiler, Vielfache und Primzahlen (S. 28 – 31)

Tabelle 7: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zum Thema Teiler, Vielfache und Primzahlen*

Aufgabe	**vorausgesetzte Basiskompetenzen**
1	Division, lösbar Multiplikation als Umkehroperation
2a	Multiplikation, lösbar mit Division als Umkehroperation
2b	Division, lösbar mit Multiplikation als Umkehroperation
3	Multiplikation, Division
4	Multiplikation, Division
5	Division, Multiplikation als Umkehroperation
6	Division, Multiplikation als Umkehroperation
7a	Multiplikation
7b	Multiplikation
7c	Division
8	Multiplikation, Division

Tabelle 8: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Arbeitsheft zum Thema Teiler, Vielfache und Primzahlen*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
1.1	Division, lösbar mit Multiplikation als Umkehroperation
2.1	Multiplikation, Division
2.2	Multiplikation, Division
3.1	Multiplikation, Division
3.2	Multiplikation, Division
4.1	Multiplikation
4.2	Multiplikation
5.1	Division, lösbar mit Multiplikation als Umkehroperation
7.1	Multiplikation, Division
7.2	Division
8.1	Multiplikation, Division
8.2	Division

2.3.2 Lehr- und Lernverständnis: Teiler, Vielfache und Primzahlen (S. 28 – 31)

Schülerinnen und Schüler mit besonderem Förderbedarf, werden mit grosser Wahrscheinlichkeit erhebliche Schwierigkeiten haben, die **Aufgabe 1** zu lösen, da viele Lernende bis ins Erwachsenenalter das Operationsverständnis zur Division nicht erwerben. Zudem gehören alle Aufgaben in den Bereich des Grossen Einmaleins. Zwar könnte die Aufgabe als fortlaufende Subtraktion verstanden werden – von der regelmässigen Benützung von Additions- und Subtraktionsstrategien bei Multiplikation und Division wird aber im Allgemeinen abgeraten (vgl. Kapitel 4.4 und 4.5); die langen Subtraktionen würden auch enorm viel Zeit beanspruchen, was demotivierend wirken kann. Gleichzeitig verwendete das Lehrmittel diese Strategien bereits in früheren Aufgaben, d.h., man läuft Gefahr, dass Lernende Multiplikationen und Divisionen einseitig erfahren.

Training zur Automatisierung des Kleinen Einmaleins

Um dennoch das Thema Primzahlen aufgreifen zu können, bietet sich eher eine Differenzierung durch eine Reduktion des Zahlenraums (Kleines Einmaleins) und – je nach Verständnis der Multiplikation und Division – durch die Verwendung der Umkehroperation (Multiplikation) an. D.h., die Schülerinnen und Schüler könnten untersuchen, welche der gegebenen Zahlen zum Kleinen Einmaleins gehören („Welche Malrechnung hat diese Zahl als Ergebnis?") und welche Zahlen nur mit einer zusätzlichen Addition gebildet werden können. Haben Schülerinnen bereits tragfähige Vorstellungen zur Multiplikation und rechnen meist sicher im Zahlenraum bis 100, können mit kleineren Zahlen auch enaktive Verteilungen und Aufteilungen (z.B. mit Wendepunkten) angewendet werden, um am Operationsverständnis der Division zu arbeiten. Auch im Bereich des Kleinen Einmaleins sind so Divisionen mit Rest möglich, um so diese Zahlen später als Primzahlen zu identifizieren.

Gleiches gilt für die **Aufgabe 2**: Der Bereich des Grossen Einmaleins ist für Schülerinnen und Schüler mit Lücken im Basisstoff Multiplikation und Division nicht geschickt gewählt. Die Aufgabe kann bei Bedarf mit Zahlen des Kleinen Einmaleins und enaktiven Handlungen (z.B. Wendepunkte, Hunderterfeld mit Malwinkel) differenziert werden.

Die Primfaktorzerlegungen der **Aufgabe 3** beinhalten dagegen weniger Schwierigkeiten bezüglich des Einmaleins. Die meisten Zahlen stammen einerseits aus dem Bereich des Kleinen Einmaleins, andererseits kann mit einem Algorithmus, bzw. einer Anleitung und dem Weglassen einiger Teilaufgaben Vieles stark vereinfacht werden (scaffolding). Werden nur jene Nicht-Primzahlen bearbeitet, welche durch 2 teilbar sind, schrumpft der zu bearbeitende Zahlenraum durch das Halbieren, das von verschiedenen Autoren auch als wichtige Übung zum Erwerb des Operationsverständnis zur Multiplikation und Division genannt wird. So können beispielsweise die Zahlen 84, 70, 64, 120 und 102 einfach zerlegt werden. Hilfe beim Teilen bietet beispielsweise ein Hunderterfeld, dessen Punkte auf ikonischer Ebene aufgeteilt werden können und damit auch einen Repräsentationsebenen-Wechsel beinhaltet. Die geraden Zahlen sollten mit kleinen Primzahlen der Aufgabe 3 gemischt angeboten werden (z.B. 23, 31, 37, 59). So können Schülerinnen und Schüler mit besonderem Förderbedarf neben Primzahlen auch andere Gesetzmässigkeiten erfahren. Nicht jede Zahl kann mit einer Multiplikation gebildet werden (was eine Erleichterung bei der Automatisierung des Einmaleins bedeutet) oder dass gerade Zahlen immer durch 2 teilbar sind. Haben Lehrpersonen die Möglichkeit, Schülerinnen und Schüler am Computer arbeiten zu lassen, können mit dem Webportal weiterführende Übungen zur Primfaktorzerlegung auch im Zahlenraum des Kleinen Einmaleins gemacht werden, da die Software bei dieser Aufgabe auf die Fertigkeiten der Lernenden reagiert und die Schwierigkeit der Aufgaben automatisch differenziert.

Die Aufgabe 4 verlangt, dass Zahlen und ihre Vielfachen auf einer Hundertertafel eingekreist bzw. gestrichen werden. Als Folge erhalten die Lernenden eine Hundertertafel mit eingekreisten Primzahlen. Da sie der Reihe nach die Vielfachen einer Zahl streichen müssen, kann diese Aufgabe auch als eine Automatisierungsübung zum Kleinen Einmaleins und als Einstieg in das Grosse Einmaleins genutzt werden. Um die Aufgabe methodisch zu verfeinern und im Sinne einer ganzheitlichen Erarbeitung des Einmaleins', bietet es sich an, die Vielfachen unterschiedlicher Reihen mit verschiedenen Farben zu streichen. Damit kann aufgezeigt werden, dass sich die Ergebnisse des Kleinen Einmaleins' überschneiden und dass verwandte Reihen immer wieder die gleichen Ergebnisse hervorbringen.

Die bearbeitete Hundertertafel kann und soll auch für **die Aufgaben 5 und 6** als Hilfsmittel gebraucht werden. In diesen Aufgaben sollen Schülerinnen und Schüler alle Teiler von Zahlen im Zahlenraum bis 100 beschreiben. Da sich die Malrechnungen auf der farbig bearbeiteten Hundertertafel zurückverfolgen lassen, können diese Aufgaben nun schnell und vor allem ohne weitere fortlaufenden Additionen und Subtraktionen gelöst werden.

Die Aufgabe 7 ist dank einfachen Multiplikatoren (2 und 5) einfach zu lösen, D.h., es werden ausschliesslich Kernaufgaben berechnet, davon sind viele Aufgaben Verdoppelungen. Einige Multiplikationen (2 x 2, 2 x 5, 5 x 5) können enaktiv mit Wendepunkten dargestellt werden. Sobald die Ergebnisse grösser werden, empfiehlt sich eher eine symbolische Darstellung. Das Ziel ist, dass Schülerinnen erkennen, dass Operatoren zusammengefasst werden können (2 x 2 x 5 = 2 x 10 = 4 x 5).

Die Zahlengitter des Arbeitsblattes (**Aufgabe 8**) bedingen Multiplikationen und Divisionen mit ungerundeten, zweistelligen Zahlen. Für das Training des Operationsverständnisses im Bereich Multiplikation und Division sind sie nicht geeignet, da beispielsweise ein handelnder Zugang kaum möglich ist

3 Kapitel 3: Daten, Grössen und Prozente

Für das Kapitel 3 nennen Keller et al. nur Voraussetzungen zum Rechnen mit Grössen: Schülerinnen und Schüler sollen sich auf der Primarstufe schon mit Längen, Hohlmassen, Gewichten und Zeiten auseinandergesetzt haben (vgl. 2011c, Kapitel 3 S. 1). Wie die Tabellen 10 und 11 zeigen, sind für das Lesen, Erstellen und Bearbeiten der Säulen- und Liniendiagramme im Kapitel 3 weitere Kompetenzen nötig.

3.1 Kapitel 3a: Daten darstellen (S. 32 – 35)

3.1.1 Lehrplanbezüge (vgl. Lehrmittelverlag Zürich, 2015, o.S.)

Handlungs-/Themenaspekte:

- Operieren und Benennen
- Erforschen und Argumentieren
- Mathematisieren und Darstellen

Kompetenzen:

Kompetenzbereich Grössen, Funktionen, Daten und Zufall:

- Begriffe und Symbole zu Grössen, Funktionen, Daten und Zufall verstehen und verwenden
- Zu Grössenbeziehungen und funktionalen Zusammenhängen Fragen formulieren, diese erforschen sowie Ergebnisse überprüfen und begründen
- Daten zu Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit erheben, ordnen, darstellen, auswerten und interpretieren
- Sachsituationen mathematisieren, darstellen, berechnen sowie Ergebnisse interpretieren und überprüfen
- Terme, Formeln, Gleichungen und Tabellen mit Sachsituationen konkretisieren

3.1.2 Lerninhalte: Säulendiagramme (S. 32 – 33)

Tabelle 9: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Buch zum Thema Daten mit einem Säulendiagramm darstellen*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
1a	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Division, Multiplikation
1b	Division und Multiplikation, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
1c	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
1d	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
2a	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
2b	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
2c	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
2d	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung

Tabelle 10: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Arbeitsheft zum Thema Daten mit einem Säulendiagramm darstellen*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
1.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
1.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
1.3	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
1.4	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Division, Multiplikation
1.5	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
1.6	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
2.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
2.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
2.3	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung

3.1.3 Lehr- und Lernverständnis: Säulendiagramme (S. 32 – 33)

Während im Arbeitsheft fast für jede Aufgabe Kenntnisse zu Brüchen vorausgesetzt werden, können die Mehrheit der Aufgaben im Buch auch ohne diese Kenntnisse bearbeitet werden. Sollen alle Aufgaben bearbeitet werden, müssten verschiedene Bruchzahlaspekte und das Konzept der Äquivalenz der Bruchzahlen (bestehend aus den Bruchzahlaspekten Teil vom Ganzen und Verhältnisaspekt) verankert sein, da für die Bearbeitung vieler Aufgaben die Fertigkeit des Erweiterns und Kürzens von Brüchen ebenfalls vorausgesetzt wird. Die Schülerinnen und Schüler müssten sonst mehrere komplexe Lernziele gleichzeitig erwerben. Haben die Schülerinnen diese Fertigkeiten und Konzepte noch nicht erworben, sollten sie vor oder nach diesem Kapitel untersucht werden, da das Thema in seinen Grundzügen auch ohne Bruchzahlen bearbeitet werden kann. Für den Erwerb von Bruchzahlaspekten und der Äquivalenz der Bruchzahlen gibt es anschaulichere enaktive und ikonische Repräsentationsformen, als die ausschliesslich symbolische und teils ikonische Bearbeitung mit Zahlen aus Säulendiagrammen oder Tabellen.

Training der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung sowie des Mengenerfassens und der Zählkompetenz

Die restlichen Aufgaben setzen auf mathematischer Ebene eher einfache Kompetenzen voraus, dabei spielt das Mengenerfassen und der Kardinalzahlaspekt sowie die Teil-Teil-Ganzes-Beziehung die wichtigste Rolle. Falls Schülerinnen und Schüler Keine tragfähigen Vorstellungen zu diesen Konzepten erworben haben, lassen sie sich einfach mit spezifischen enaktiven Übungen dazu anreichern (vgl. Kapitel 3.1 und 3.3). Die Zahlenräume sind sehr klein und die ikonische Darstellung der Säulendiagramme unterstützt die Schülerinnen und Schüler visuell. Da Diagramme sowohl gelesen als auch gezeichnet werden müssen, findet bereits ein stetiger Wechsel zwischen der ikonischen und symbolischen Repräsentationsformen statt. Falls dennoch grössere Schwierigkeiten auftauchen, kann die Komplexität der Aufgaben zum Einstieg reduziert werden, indem die Anzahl Kategorien gesenkt wird: Anstatt nach Lieblingsschulfächern zu fragen, könnten die Lernenden eine Umfrage dazu gestalten, welches Brot am nächsten Klassenfrühstück gekauft werden soll (mit einer begrenzten Anzahl an Antworten, z.B. drei oder nur zwei Brotsorten). Die Ergebnisse könnten ebenso in Säulendiagrammen dargestellt werden. Dem

Thema wird von Keller et al. nur drei Lektionen zugesprochen (vgl. 2011c, Kapitel 3, S.1). Das Thema kann bei Schwierigkeiten zum Mengenerfassen auch länger bearbeitet werden.

3.1.4 Lerninhalte: Liniendiagramme (S. 34 – 35)

Tabelle 11: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Buch zum Thema eine Entwicklung mit einem Liniendiagramm darstellen*

Aufgabe	**vorausgesetzte Basiskompetenzen**
3a	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem
3b	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem
3c	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem
3c	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem
3d	Mengenerfassen und Zählkompetenz
3e	Mengenerfassen und Zählkompetenz
4	Mengenerfassen und Zählkompetenz
5	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung

Tabelle 12: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Buch zum Thema eine Entwicklung mit einem Liniendiagramm darstellen*

Aufgabe	**vorausgesetzte Basiskompetenzen**
3.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz
3.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz

3.1.5 Lehr- und Lernverständnis: Liniendiagramme (S. 34 – 35)

Nach Säulendiagrammen thematisiert das Lehrmittel Liniendiagramme, welche Daten darstellen, die sich über eine Zeitspanne verändern. Das Lehrmittel nennt als Beispiele das Bevölkerungswachstum eines Landes, die Anzahl behandelter Patienten in einem Spital oder die Abnahme des durchschnittlichen Benzinverbrauchs bei Autos. Liniendiagramme sind also wie Säulendiagramme immer mit einem Sachkontext verbunden und repräsentieren ebenfalls Zahlen und Daten auf ikonischer Ebene. Deshalb wäre es wünschenswert, auch Beispiele zu nennen, die Anknüpfungspunkte zum Leben der Schülerinnen und Schüler zulassen. Denkbar wäre eine Darstellung der Anzahl von Lektionen und Fächern in der Primar- und Sekundarschule oder die Entwicklung des monatlichen Sackgeldes seit der ersten Klasse, da die Lernenden einfach an diese Daten gelangen.

Training der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung sowie des Mengenerfassens und der Zählkompetenz

Zum Einstieg in das Thema stellt die **Aufgabe 3** eine Tabelle mit den Einwohnerzahlen der Stadt Bern zwischen Jahren 1900 und 2010 bereit. Die Anzahl Personen wird in 1000 und gerundet angegeben (im Jahr 1900 lebten nicht 68 sondern 68'000 Menschen in Bern). Da in Bern bis zu 160'000 Menschen lebten und später ein Liniendiagramm für die Bevölkerungsentwicklung in Zürich gezeichnet werden muss, sollten sich Schülerinnen und Schüler im Zahlenraum bis zu einer Million sicher bewegen können und das Wissenselement der multiplikativen Eigenschaft von Stellenwerten sowie Einsichten in die Eigenschaft der Basis 10 erworben haben. Wurden diese Zahlenräume noch nicht erschlossen, bietet das Arbeitsheft mit der **Aufgabe 3.1** eine sehr gute Differenzierungsmöglichkeit in Form eines Liniendiagramms zur Häufigkeit des Vornamens Nils in den Jahren 1995 bis 2009. Die Aufgabe hat für alle Schülerinnen und Schüler einen Lebensweltbezug und kann durchgehend im Zahlenraum bis 100 bearbeitet werden. Die Lernenden müssen die Daten des Diagramms in eine Tabelle übertragen, einen Lückentext ausfüllen und mittels Additionen und Subtraktionen Entwicklungen zwischen zwei Jahreszahlen berechnen. Wie bei Sachaufgaben üblich, ist es wichtig in den textbasierten Aufgaben Strukturwörter zu identifizieren und zu klären: Was bedeutet mehr, am meisten, weniger und am wenigsten? Was passiert wenn eine Anzahl steigt oder fällt?

Nach der Analyse des Diagramms, zeichnen die Lernenden ein Liniendiagramm für den Namen Sabrina. Interessant ist vor allem die letzte Teilaufgabe, in der auf die Website des Statistischen Amtes des Kantons Zürich verwiesen wird: Schülerinnen und Schüler können ihren eigenen oder die Namen von Freunden suchen und mit diesen Daten ebenfalls Liniendiagramme zeichnen. Um das Thema abzuschliessen und um zu zeigen, dass mit Liniendiagrammen auch ganz andere Daten und Zeitintervalle dargestellt werden können, eignet sich eine Teilaufgabe der **Aufgabe 4** im Buch: Beide laden zum Experimentieren ein, die zweite Aufgabe ist aber deutlich einfacher umzusetzen, weil ein Pulsmessgerät in wenigen Schulhäusern zum Inventar gehört. Eine didaktische Anmerkung zur PET-Flaschen-Aufgabe soll noch gemacht werden: Es wäre vorteilhaft, wenn die Schülerinnen und Schüler bereits vor dem Messen der Wasserstände mit einem Massband ein Zentimeter-Raster auf der PET-Flasche aufzeichnen, damit der Wasserpegel direkt abgelesen werden kann.

3.2 Kapitel 3b: Grössen und Prozente im Alltag (S. 36 – 39)

Lehrplanbezüge (vgl. Lehrmittelverlag Zürich, 2015, o.S.)

Handlungs-/Themenaspekte:

- Operieren und Benennen
- Erforschen und Argumentieren
- Mathematisieren und Darstellen

Kompetenzen:

Kompetenzbereich Zahl und Variable:

- Arithmetische Begriffe und Symbole verstehen und verwenden, Zahlen lesen und schreiben
- Flexibel zählen, Zahlen nach der Grösse ordnen und Ergebnisse überschlagen
- Addieren, subtrahieren multiplizieren, dividieren und potenzieren

Kompetenzbereich Grössen, Funktionen, Daten und Zufall:

- Begriffe und Symbole zu Grössen, Funktionen, Daten und Zufall verstehen und verwenden
- Grössen schätzen, messen umwandeln, runden und mit ihnen rechnen
- Funktionale Zusammenhänge beschreiben und Funktionswerte beschreiben
- Zu Grössenbeziehungen und funktionalen Zusammenhängen Fragen formulieren, diese erforschen sowie Ergebnisse überprüfen und begründen
- Sachsituationen mathematisieren, darstellen, berechnen sowie Ergebnisse interpretieren und überprüfen
- Terme, Formeln, Gleichungen und Tabellen mit Sachsituationen konkretisieren

3.2.1 Lerninhalte: Längenmasse, Hohlmasse und Gewichte (S. 36 – 37)

Tabelle 13: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zu den Themen Längenmasse, Hohlmasse und Gewichte*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
1a – 1d	Mengenerfassen und Zählkompetenz
2a – 2d	Mengenerfassen und Zählkompetenz
2e	Dezimalsystem (Eigenschaft der Basis 10), Division
3a – 3c	Mengenerfassen und Zählkompetenz
3d	Dezimalsystem (Eigenschaft der Basis 10), Division

Tabelle 14: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Arbeitsheft zu den Themen Längenmasse, Hohlmasse und Gewichte*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
1.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz
1.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz
1.3	Multiplikation; Division, Dezimalsystem (Eigenschaft der Basis 10)
1.4	Multiplikation; Division, Dezimalsystem (Eigenschaft der Basis 10)
1.5	Mathematisieren, Multiplikation, Division, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
2.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz
2.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz
2.3	Mengenerfassen und Zählkompetenz
2.4	Multiplikation, Division, Dezimalsystem (Eigenschaft der Basis 10)
2.5	Multiplikation, Division, Dezimalsystem (Eigenschaft der Basis 10)
2.6	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
3.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz
3.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz
3.3	Multiplikation, Division, Dezimalsystem (Eigenschaft der Basis 10)
3.4	Multiplikation, Division, Dezimalsystem (Eigenschaft der Basis 10)
3.5	Mathematisieren, Division, Multiplikation

3.2.2 Lehr- und Lernverständnis: Längenmasse, Hohlmasse und Gewichte (S. 36 – 37)

Die Aufgaben des Themenbuches und Arbeitsheftes sind für die Grössen Längenmasse, Hohlmasse und Gewichte fast identisch gestaltet. Deshalb werden – um die Übersichtlichkeit zu verbessern – die Aufgaben im Allgemeinen untersucht: Die folgenden Erkenntnisse gelten somit für Längenmasse, Hohlmasse sowie für die Gewichte. Davon ausgenommen werden die letzten Teilaufgaben zu jeder Grösse, welche als Sachaufgaben konzipiert wurden und sich deshalb unterscheiden.

Die ersten Teilaufgaben des Themenbuches versuchen Vorwissen zu aktivieren, bzw. Vorstellungen und Vergleichsgrössen zu verschiedenen Einheiten von Längenmassen, Hohlmassen und Gewichten aufzubauen. Dies geschieht ähnlich wie in Lehrmitteln der Primarstufe (durch Schätzen und Messen mit stetigem Wechsel zwischen den enaktiven, ikonischen und symbolischen Repräsentationsmodi). Die Abgrenzung von Primarlehrmitteln kann darin gesehen werden, als dass für das ganze Thema (inklusive Prozente und Zeit) lediglich zwei Wochen vorgesehen sind. Dies ergibt – bei sechs Mathematiklektionen wöchentlich – etwa zwei Lektionen Übungszeit für jede Grösse. Sind Schülerinnen und Schüler unsicher im Umgang mit Grössen, ist das wenig. Der Aufbau von Vorstellungen zu Grössen ist für das alltägliche Leben aufgrund hoher Gegenwarts- und Zukunftsbedeutung wichtig und handelnde Aktivitäten benötigen Zeit.

Training des Dezimalsystems (Eigenschaft der Basis 10)

Die Umrechnungsaufgaben des Themenbuches (**Aufgaben 2e und 3d**) setzen voraus, dass Lernende tragfähige Vorstellungen zum Dezimalsystem (Eigenschaft der Basis 10), zur Punktschreibweise von Dezimalbrüchen und zum Multiplizieren sowie zum Dividieren erworben haben. Ist dies nicht der Fall, können die Umrechnungsaufgaben dennoch mit einer Grössentabelle bearbeitet werden (s. Kapitel 10.1). Grössentabellen lassen Umrechnungen von Einheiten zu, ohne dass Schülerinnen und Schüler diese Voraussetzungen mitbringen, d.h., sie können als Hilfsmittel die Partizipation am Unterricht stark erhöhen. Dies gilt auch für die Umrechnungsaufgaben des Arbeitsheftes. Tragen die Lernenden Einheiten korrekt in die Grössentabelle ein, kann eine Strecke, ein Hohlmass oder ein Gewicht in jeder beliebigen Einheit abgelesen werden. Der Einsatz von Hilfsmitteln wie einer Grössentabelle muss vorbereitet werden, d.h., die Schülerinnen und Schüler brauchen Zeit, um sich an die Arbeit damit zu gewöhnen, weshalb sich die Bearbeitungszeit des Kapitels zusätzlich ausdehnen wird. Anstatt zwei Lektionen, ist eine Bearbeitungszeit von ca. sechs Lektionen für jede Grösse realistisch. Bei vorhandenem Operationsverständnis sollten parallel auch Multiplikationen und Divisionen mit Zehnerpotenzen erarbeitet werden, damit das Umrechnen von Einheiten nicht zu einer mechanischen Arbeit mit Grössentabellen verkommt. Erlangen die Lernenden erste Einsichten zur Eigenschaft der Basis 10, soll die Grössentabelle nur noch zur Validierung der Ergebnisse eingesetzt werden.

3.2.3 Lerninhalte: Zeit (S. 38)

Tabelle 15: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zum Thema Zeit im Themenbuch*

Aufgabe	**vorausgesetzte Basiskompetenzen**
4a	Subtraktion, Addition, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Dezimalsystem
4b	Division
4c	Mengenerfassen und Zählkompetenz

Tabelle 16: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Arbeitsheft zum Thema Zeit im Arbeitsheft*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
4.1	Subtraktion, Addition, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Dezimalsystem
4.2	Dezimalsystem
4.4	bündeln und entbündeln (Hexagesimalsystem)
4.5	bündeln und entbündeln (Hexagesimalsystem)
4.6	bündeln und entbündeln (Hexagesimalsystem)
4.7	bündeln und entbündeln (Hexagesimal- und Dezimalsystem)
4.8a	Addition, bündeln (Hexagesimalsystem)
4.8b	Addition, bündeln (Hexagesimalsystem)
4.8c	Mengenerfassen und Zählkompetenz

3.2.4 Lehr- und Lernverständnis: Zeit (S. 38)

Während die Schülerinnen und Schüler bei den restlichen Grössen mit Schätzungen und Messungen an die Grössen herangeführt werden, lässt das Lehrmittel diesen Schritt bei der Zeit aus. Bei der **Aufgabe 4a** müssen die Lernenden direkt mit Zeiten rechnen. Da sich die Aufgabe im Bereich von Sekunden und Hundertstelsekunden bewegt, wird die Schwierigkeit des Hexagesimalsystems (Stellenwertsystem mit der Basis 60) von Sekunden, Minuten und Stunden umgangen. Die Schwierigkeit der Aufgabe hängt mit der Punktschreibweise des Dezimalsystems, den schwierigen Additionen und Subtraktionen mit Dezimalübergängen und der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung zusammen. Zusätzlich müssen die Schülerinnen und Schüler den Text verstehen und mathematisieren können. Dazu eignen sich Skizzen aber auch Fotos und Videos von Wettkämpfen, die über Onlineportale leicht zu finden sind. Bei der Konzipierung der Aufgabe wurde eine zusätzliche Schwierigkeit eingebaut: Die Zeit des ersten Laufs von Dejan Kosir ist nur berechenbar, wenn der Begriff Vorsprung richtig mathematisiert wird (nach dem ersten Lauf hat Kosir einen Vorsprung von 0.72 Sekunden). Erschwerend ist der Text, weil eine Zeitstrafe im ersten Lauf von 0.72 Sekunden für Schoch erwähnt wird. Diese Strafe ist aber in der Laufzeit von Schoch bereits einberechnet und hat keinen Einfluss auf die Berechnung. Da die Zeit jedoch genau dem Vorsprung Kosirs nach dem ersten Lauf entspricht, kann schnell Verwirrung zum Umgang mit diesen 0.72 Sekunden entstehen. Wäre es eine Strafe, müssten sie zur Zeit von Schoch addiert werden, um die Laufzeit Schochs zu berechnen. Ist es ein Vorsprung, müssten sie von der Zeit Schochs subtrahiert werden, um die Laufzeit von Kosir zu berechnen. Es wäre besser, die Strafe würde gar nicht erwähnt werden – sie ist verwirrend und dient ausschliesslich der Dramaturgie der Aufgabe.

Training der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung

Sind diese (künstlich hervorgerufenen) Schwierigkeiten überwunden, müssen die restlichen Zeiten unter Verwendung der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung und Subtraktionen sowie Additionen berechnet werden. Fehlen den Schülerinnen und Schülern Vorstellungen zur Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, ist die Aufgabe nicht selbstständig lösbar, kann aber mit Unterstützung der Lehrperson dazu genutzt werden, Vorstellungen zur Teil-Teil-Ganzes-Beziehung zu erwerben. Als Einführung müssten aber zuerst enaktive, ikonische und andere symbolische

Aufgabentypen zum Aufbau der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung miteinbezogen werden (vgl. Kapitel 9.3). Die nächste Hürde besteht aus schwierigen Additionen und Subtraktionen, bei denen die Punktschreibweise eine zentrale Rolle spielt. Um die Rechnung 20.09 s – 0.79 s lösen zu können, benötigen Schülerinnen und Schüler Vorstellungen zur Punktschreibweise, d.h., auch zu Zahlen kleiner als 1. Dies könnte neben der Behandlung von Brüchen auch mit Zeitmessungen aufgegriffen werden – im Lehrmittel fehlen jedoch Aufgaben dazu. Diese Schwierigkeit kann mit auf ganze Sekunden gerundeten Zahlen umgangen werden. Damit steht die Teil-Teil-Ganzes-Beziehung im Fokus der Lernziele, aber nicht die Zeit als Grösse.

Training des Operationsverständnis zur Division

Für die **Aufgabe 4b** ist es nötig, dass Schülerinnen und Schüler ein tragfähiges Operationsverständnis zur Division erlangt haben, dessen Grundlage die Multiplikation und das sichere Rechnen im Zahlenraum bis 100 ist. Die Aufgabe kann erleichtert werden, indem die Lernenden eine Tabelle mit zwei Spalten erstellen, in der sie auf der einen Seite die Strecke aufführen und in der zweiten die dazu benötigte Zeit. So können sie auf individuellen Wegen verschiedene Zeitdauern und zurückgelegte Strecken berechnen und sich den geforderten Berechnungen schrittweise annähern. Haben die Schülerinnen und Schüler keine tragfähigen Vorstellungen zur Division, soll die Teilaufgabe ausgelassen werden.

Aufbau von Vorstellungen zur Grösse Zeit

Danach kann **Aufgabe 4c** in Angriff genommen werden. Sie dient als Ausgangspunkt für Umrechnungen von Zeiteinheiten m Arbeitsheft. Haben Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten, passende Ereignisse zu finden, kann eine Auswahl angeboten werden (z.B. Abstoss eines Fussballtorhüters, Schulstunde, Frühlingsputz usw.), die den einzelnen Zeiteinheiten zugeordnet werden sollen. Die Aufgaben des Arbeitsheftes unterscheiden sich, abgesehen von der ersten Aufgabe (**Aufgabe 4.1**, Parallelslalom), stark von jenen im Themenbuch.

Einführung oder Training dezimalen Punktschreibweise

Die **Multiple Choice-Aufgabe 4.2** vergleicht Zeiten zwischen 0.05 Sekunden und 1.2 Sekunden und beinhaltet keine Einführung der Zehntel- und Hundertstelsekunden, d.h., diese Kenntnisse werden vorausgesetzt. Verfügen Lernende noch nicht über diese Kenntnisse ist als Differenzierung ein Aufbau unter Einbezug einer Grössentabelle als Hilfsmittel (s. Kapitel 10.1) möglich. Da sich Hundertstel- und Zehntelsekunden nicht dem Hexagesimalsystem bedienen, lassen sich die Zeiten in eine Stellenwerttabelle eintragen und die Anzahl von Zehntel- und Hundertstelsekunden ablesen, die Schülerinnen und Schüler können am regulären Unterricht teilhaben. Haben Lernende noch nie mit Zehntelsekunden und Hundertstelsekunden operiert, wären zusätzliche enaktive Übungen, z.B. mit einer Stoppuhr eine gute Ergänzung.

Bündelungen mit unterschiedlichen Bündelungszahlen

Die **Aufgaben 4.3** bis **4.7** beinhalten ausschliesslich Umrechnungen von Einheiten. Die Schwierigkeiten liegen vor allem im hexagesimalen Charakter von Minuten und Stunden. Eine Grössentabelle im Dezimalsystem ist deswegen nicht anwendbar. Damit Schülerinnen und Schüler die Aufgabe bearbeiten können, müssen also Bündelungen und Entbündelungen mit der Basis 60 beherrscht werden. Dazu können vorrangig Aufgaben mit kleineren Basen (vgl. Kapitel 10.2, Übungsformen zum Bündeln von Stellenwerten) zum Einstieg herangezogen, die 60er-Reihe repetiert, notiert und einfache Aufgaben (2 h = ... min, 180 min = ... h) als Vorübungen bearbeitet werden. Als enaktives Material eignen sich Lernuhren: Die Schülerinnen und Schüler können die Uhr z.B. zwei Stunden nach vorne bewegen und beobachten, wie oft der Minutenzeiger eine volle Umdrehung macht, um herauszufinden, wie viele Minuten vergehen. Die Anzahl der Umdrehungen des Minutenzeigers multipliziert mit 60 ergibt die Anzahl Sekunden. Die Multiplikation kann auch als fortlaufende Addition dargestellt werden, da es sich um eine zeitlich-sukzessive Multiplikation handelt.

Für die **Aufgabe 4.7** können für die dezimalen Einheiten Grössentabellen verwendet werden, für die **Teilaufgabe d** kann wiederum eine Lernuhr angeboten werden. Die **Aufgabe 4.8a** ist von ähnlicher Beschaffenheit wie die Parallelslalom-Aufgabe. Aus drei Disziplinen soll die Gesamtzeit eines Triathlons berechnet werden. Dazu müssen Schülerinnen die Angaben aus Minuten und Sekunden addieren. Da keine Teilstrecken berechnet werden müssen, spielt jedoch die Teil-Teil-Ganzes-Beziehung nur eine untergeordnete Rolle. Soll dieser thematisiert werden, sollten die Zeiten vereinfacht werden, indem beispielsweise auf ganze Minuten gerundet wird. Um die Gesamtzeiten zu berechnen gibt es drei Möglichkeiten: Die Schülerinnen und Schüler addieren auf symbolischer Ebene in Schritten zuerst die Minuten, dann die Sekunden und rechnen die Sekunden bei Bedarf in Minuten um. Da diese Rechnungen (bis auf die Umrechnungen von Sekunden zu Minuten) im Zahlenraum bis 100 stattfinden, sollten die meisten Schülerinnen und Schüler kaum Schwierigkeiten haben. Ist dies dennoch der Fall, kann entweder auf ikonischer Ebene mit Rechenstrichen in Schritten gerechnet oder für eine Berechnung auf enaktiver Ebene eine Lernuhr zur Verfügung gestellt werden. Die Lernenden können die erste Minuten-Angabe einstellen und die zu addierenden Minuten hinzuzählen. Problematisch ist, dass diese Vorgehensweise dem Zählenden Rechnen zugeordnet werden kann, welches, wenn möglich, vermieden werden sollte – der Rechenstrich ist deshalb zu bevorzugen. Die Lernuhr kann aber wie bei den Umrechnungsaufgaben als Unterstützung bei der Umformung von Sekunden zu Minuten benutzt werden. Die **Aufgabe 8b** ist einfacher zu lösen, da lediglich zwei Zeiten addiert werden müssen und die Differenzierung und Methodik von Aufgabe 8a übernommen werden kann. Für die **Aufgabe 8c** sollen die Schülerinnen und Schüler die Ergebnisse analysieren und die Mächtigkeit von Zeitdauern vergleichen. Wichtig ist die Klärung von Strukturwörtern: Was bedeutet schlechter? Ist eine lange Zeitdauer besser oder schlechter? Was bedeutet eine mittelmässige Leistung? Was ist eine gute Leistung?

3.2.5 Lerninhalte: Aufgabe 5 (S. 38)

Drei Bilder enthalten überraschende Aussagen auf Zuckersäckchen. Durchschnittlich würden Menschen in der Schweiz in ihrem Leben 714 kg Schokolade essen, 12 Jahre fernsehen und 415 Millionen mal mit den Augen blinzeln. Die Lernenden sollen diese Aussagen validieren, indem sie die Angaben für ein ganzes Leben (ca. 80 Jahre) auf einen Tag oder für das Blinzeln auf eine Minute herunterrechnen.

Tabelle 17: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zum Thema Zeit*

Aufgabe	**vorausgesetzte Basiskompetenzen**
5	Division und/oder Multiplikation

3.2.6 Lehr- und Lernverständnis: Aufgabe 5 (S. 38)

Das Handbuch empfiehlt für die Schokoladenaufgabe in Schritten zu dividieren. Zuerst sollen 714 kg durch 80 geteilt werden, um den durchschnittlichen Konsum für ein Jahr zu erhalten. Eine weitere Division durch 365 ergibt den täglichen Verzehr von ca. 25 g.

Um auszurechnen, wie oft man pro Minute blinzelt, muss die Angabe von 415'000’000 zuerst durch 80, dann durch 365, durch 24 und schliesslich durch 60 geteilt werden.

Das Handbuch des Lehrmittels empfiehlt den Rechenweg über die Bruchschreibweise, um zu bestimmen, wie viel täglich ferngesehen wird. 12 von 80 Jahren würden $\frac{12}{80}$ entsprechen, gekürzt $\frac{3}{20}$. $\frac{3}{20}$ von 24 h sind 3.6 h oder 3 h 36 min.

Unabhängig vom gewählten Lösungsweg, sind mehrere Schwierigkeiten bezüglich der Voraussetzungen zu erkennen. Die Lernenden müssen über tragfähige Vorstellungen zur Division verfügen und auch in grossen Zahlenräumen sicher rechnen können. Wenn mit Brüchen gerechnet werden soll, kommen die Bruchzahlaspekte Teil vom Ganzen, Masszahlaspekt und Operatoraspekt hinzu. Werden Brüche gekürzt, muss auch die Äquivalenz verschiedener Brüche berücksichtigt werden.

Training der Division

Sind bereits Vorstellungen zur Division vorhanden, kann die Basiskompetenz über das Modell des Aufteilens trainiert werden. Die Mengen sollen für ein Jahr, für einen Tag oder im Falle des Blinzelns bis zu einer Minute schrittweise aufgeteilt werden. Da bei der Aufgabe der Schwerpunkt auf der Validierung dieser Aussagen sowie auf der mathematischen Modellbildung liegt und nicht auf dem blossen Rechnen, können Lernende für diese Aufgabe den Taschenrechner benutzen (vgl. Kapitel 10.2).

Operationsverständnis und Training der Multiplikation

Sind bisher keine (tragfähigen) Vorstellungen zur Division vorhanden, eignet sich die Aufgabe aber weniger, um die Division aufzugreifen. Die Mächtigkeit der Mengen ist sehr gross (vgl. 415'000'000 mal blinzeln), können nur durch mehrere Umformungen berechnet werden (vgl. 12 y = 4380 d = 105'120 h) und sind nur mit Rest oder Kommastellen zu berechnen (vgl. 714'000 : 80 : 365 = 24.4521). Stattdessen können aber multiplikative Annäherungen gute Ergebnisse liefern. Viele Lernende verfügen bereits über tragfähige Vorstellungen zur Multiplikation, während sie mit der Division noch Schwierigkeiten haben. Sie können schätzen, wie hoch ihr eigener täglicher Schokoladen- oder TV-Konsum ist oder in Partnerarbeit zählen, wie oft sie in einer Minute blinzeln. Mit Multiplikationen kann herausgefunden werden, wie viel Schokolade sie in zwei Tagen, fünf Tagen oder in einer Woche und in einem Monat essen.

Soll überprüft werden, ob die Angaben au den Zuckersäckchen ungefähr stimmen, kann dies nach den multiplikativen Vorübungen mit dem Taschenrechner geschehen. Da auch hier nicht das blosse Rechnen im Vordergrund steht, ist der Einsatz des Taschenrechners legitim. Das Kapitel 10.2 beschäftigt sich mit dieser Thematik und hält eine Begründung für den Taschenrechnereinsatz bereit.

3.2.7 Lerninhalte: Prozente (S. 38 – 39)

Tabelle 18: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zum Thema Prozente*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
6a	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
6b	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
6c	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
6d	Mathematisieren, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
7a	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
7b	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
7c	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
8	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division

Tabelle 19: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Arbeitsheft zum Thema Prozente*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
6.1	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
6.2	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
6.3	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
7.1	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
7.2	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Mathematisieren
7.3	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Mathematisieren, Multiplikation, Division
8.1	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Mathematisieren, Multiplikation, Division
8.2	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division

3.2.8 Lehr- und Lernverständnis: Prozente (S. 38 – 39)

Prozentzahlen sind eine andere Schreibweise für Teile vom Ganzen, also eine Schreibweise für Dezimalbrüche im Allgemeinen. Deshalb sind Vorkenntnisse zu Schreibweisen von Dezimalbrüchen für den Lernerfolg entscheidend. Wie bei der Bruchschreibweise üblich, sollten deshalb in der Einführung ebenfalls Verknüpfungen der Prozentschreibweise mit dem Alltagsleben gemacht werden. Wo haben die Lernenden bereits Erfahrungen mit Prozentzahlen gemacht? Was drücken die Prozentzahlen aus? Das Lehrmittel verzichtet auf eine derartige Verknüpfung.

Training der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung Anhand von Körpergrössen in Prozent und Längenmassen

Die **Einführungsaufgabe 6** des Lehrmittels bietet zudem einen handelnden Ansatz, indem Körpergrössen mit einem Prozentband verglichen werden und von allen Lernenden bearbeitet werden kann.

Erst die **Teilaufgabe 6d** sucht nach Möglichkeiten zur Berechnung von Teilmengen in Prozente ausgedrückt. Zur Berechnung stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung:

- Bruchschreibweise: 35 % von 200 cm = $\frac{35}{100}$ von 200 cm, also $\frac{35}{100}$ x 200 cm = 70 cm, bzw. 200 cm : 100 x 35 = 70 cm)

- Dezimalzahlschreibweise: 0.35 x 200 cm = 70 cm

Die Bruchschreibweise ist aufgrund des Vorwissens aus der Primarschule für die meisten Lernenden der einfachere Weg. Sie lernten bereits Teilmengen mittels Brüchen zu berechnen, d.h., die Aufgabe **6d** und die Folgenden sowie die **Aufgabe 6.3** und die Folgenden des Arbeitsheftes, setzen voraus, dass die Lernenden neben der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung auch die Bruchschreibweise von Dezimalzahlen und das damit verbundene Operationsverständnis zur Multiplikation und Division erworben haben. Haben Lernende diese Einsichten nicht erlangt, können sie zwar an der Einführung teilhaben und einige (zusätzliche) Aufgaben mit dem Prozentgummiband bearbeiten, um ein Gefühl für im Alltag angegebene Prozentzahlen zu erhalten.
Die Addition, die Subtraktion und die Teil-Teil-Ganzes Beziehung kann bei den restlichen Aufgaben zusätzlich fokussiert werden, indem z.B. in Tabellen die in der Aufgabe 6 angesprochenen Körperproportionen berechnet werden. Die Daten in den Tabellen könnten die Lernenden an anderen Schülerinnen und Schülern der Klasse selbstständig erheben.

Tabelle 20: *Beispiel einer Tabelle zum Training der Addition, Subtraktion und Teil-Teil-Ganzes-Beziehung anhand von Körpergrössen*

Namen der Lernenden	**Füsse bis Bauchnabel**	**Bauchnabel bis Kinn**	**Kinn bis Scheitel**	**Körpergrösse**
	82 cm	65 cm		162 cm
		67 cm	17 cm	170 cm
	50 cm		15 cm	135 cm
	61 cm	49 cm	16 cm	

Nach der Bestimmung der Proportionen in Längenmassen können die Proportionen an einer Wand mit Klebebändern markiert und die Prozentzahlen mit dem Prozentband bestimmt werden.

Das Konzept der Basiskompetenzen fordert aber zu diesem Zeitpunkt auch den Aufbau nicht erworbener Kompetenzen, um nachfolgend weiterführende Kenntnisse (wie die Prozentschreibweise) zu erwerben. Als fokussierte Basiskompetenz empfehlen sich jene nicht erworbenen Kompetenzen, die das Berechnen von Prozentzahlen voraussetzt (Division und Multiplikation).

3.3 Kapitel 3c: Flächen und Volumen (S. 40 – 43)

3.3.1 Lehrplanbezüge (vgl. Lehrmittelverlag Zürich, 2015, o.S.)

Handlungs-/Themenaspekte:

- Operieren und Benennen
- Erforschen und Argumentieren
- Mathematisieren und Darstellen

Kompetenzen:

Kompetenzbereich Form und Raum:

- Begriffe und Symbole verstehen und benennen
- Längen, Flächen und Volumen bestimmen und berechnen

Kompetenzbereich Grössen, Funktionen, Daten und Zufall:

- Begriffe und Symbole zu Grössen, Funktionen, Daten und Zufall verstehen und verwenden
- Grössen schätzen, messen umwandeln, runden und mit ihnen rechnen
- Zu Grössenbeziehungen und funktionalen Zusammenhängen Fragen formulieren, diese erforschen sowie Ergebnisse überprüfen und begründen
- Sachsituationen mathematisieren, darstellen, berechnen sowie Ergebnisse interpretieren und überprüfen

3.3.2 Lerninhalte: Die Hundertteiligkeit der Flächenmasse (S. 40 – 41)

Tabelle 21: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zum Thema Die Hundertteiligkeit der Flächenmasse*

Aufgabe	**vorausgesetzte Basiskompetenzen**
1a	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Multiplikation
1b	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Multiplikation
1c	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Multiplikation
2	Mengenerfassen und Zählkompetenz
3a	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Multiplikation
3b	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Multiplikation
3c	Multiplikation, Division
3d	Mengenerfassen und Zählkompetenz

Tabelle 22: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zum Thema Die Hundertteiligkeit der Flächenmasse*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
2.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Multiplikation
2.2	Multiplikation
2.3	Multiplikation, Division
2.4	Multiplikation, Division, Dezimalsystem (Eigenschaft der Basis 10)
2.5	Division, Dezimalsystem (Eigenschaft der Basis 10)
3.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Multiplikation
3.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Multiplikation

3.3.3 Lehr- und Lernverständnis: Die Hundertteiligkeit der Flächenmasse

Auf die Berechnung von Flächen wird im Lehrmittel nicht mehr speziell eingegangen. Wie der Name des Unterkapitels sagt, spielt vor allem die Hundertteiligkeit der Flächenmasse eine übergeordnete Rolle.

Erwerb und Vertiefung des Operationsverständnis' zur Multiplikation

Die Berechnung von rechteckigen und quadratischen Flächen hat auch für den Erwerb der Multiplikation eine besondere Bedeutung. Ein Rechteck kann in kleine Quadrate aufgeteilt werden, die Länge multipliziert mit der Breite ergibt die Gesamtzahl der Quadrate im Rechteck. Rechtecke mit einem Gitternetz sind räumlich-simultane Felddarstellungen von Multiplikationen, welche besonders wichtig für den Erwerb des Operativen Verständnis' sind. Haben Schülerinnen und Schüler Lücken in der Basiskompetenz Multiplikation, können auch Flächenberechnungen unterstützend wirken. Neben der Rechenfertigkeit kann auch das Kommutativgesetz auf ikonischer Ebene veranschaulicht werden. Zeichnet man das gleiche Rechteck zuerst auf der Länge und dann auf der Breite stehend, zeigt sich, dass beide gleich gross sind, die Berechnung sich jedoch unterscheidet. Für ein Rechteck mit der Länge 8 und der Breite 4 ergibt sich die Berechnung 8 x 4 = 32. Dreht man das Rechteck um 90 Grad, entsteht die Rechnung 4 x 8 = 32. Weiter können so auf ikonischer Ebene auch Übungen zum Gegensinnigen Verändern („Welche Rechtecke habe die Fläche 24?“), zum Halbieren und zum Verdoppeln, sowie zu Nachbarsaufgaben („Wie verändert sich die Berechnung und das Rechteck, wenn du eine Zeile hinzufügst?“) bearbeitet werden. Deshalb könnten Flächenberechnungen mit kariertem Papier (Einheit = Quadrate) den Umrechnungen des Lehrmittels vorangehen. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, das Thema Flächen noch vor dem Kapitel 2 (Die Welt der natürlichen Zahlen: Potenzen, Regeln und Gesetze) gleich zu Beginn des Schuljahres zu bearbeiten. Parallel kann die Automatisierung des Einmaleins über Kernaufgaben vorangetrieben werden (vgl. Kapitel 6.4). Können Schülerinnen und Schüler Flächen sicher berechnen, kann mit dem Umrechnen von Einheiten anhand der Aufgaben im Themenbuch begonnen werden.

Erarbeiten von Vorstellungen zu Flächenmassen

Die **Aufgabe 1a** gehört zu den handelnden Aufgaben und kann mit dem erworbenen Vorwissen ohne Anpassungen gelöst werden. Die **Aufgabe 1b** und **1c** will den Fokus auf die Hundertteiligkeit aller Einheiten legen und regt zu Überlegungen an. Wie viele mm^2 sind in einem cm^2? Wie viele cm^2 sind in einem dm^2? Es wird festgehalten, dass alle Flächeneinheiten hundertteilig sind.

Die **Aufgaben 2** und **3** widmen sich grösseren Flächeneinheiten: Die Lernenden sollen Flächen nennen, welche etwa 1 a, 1 ha, oder 1 km^2 gross sind. Danach sollen anhand einer Skizze die Flächen der Schweiz und Deutschlands geschätzt werden. Wird die Buchseite kopiert, kann ein Gitternetz (z.B. auf einer Hellraumprojektor-Folie) darüber gelegt werden kann. Danach sollen die Flächen verglichen werden und das Ergebnis als Prozentzahl und Bruch notiert werden. Hierauf muss verzichtet werden, wenn das Kapitel vorgezogen wird. Zum Schluss sollen Lernende in der **Teilaufgabe 3d** passende Einheiten für verschieden grosse Fläche nennen.

Anwendung des Operationsverständnis' der Multiplikation und Validierung mittels Überschlagen

Das Arbeitsheft startet mit der **Aufgabe 2.1**. Es sollen Strecken von Spielfeldmarkierungen abgelesen und damit Teilflächen eines Fussballfeldes berechnet werden. Dabei sollen vorrangig die kürzeste und längste Strecke gefunden werden, danach die kleinste und die grösste Fläche. Erschwerend wirkt, dass die Längen und Breiten der rechteckigen Flächen nicht direkt an einer Fläche abgelesen werden können, da z.B. für den Torraum die Länge nur auf der rechten Spielfeldseite und die Breite nur auf der linken Spielfeldseite abgelesen werden kann. Abhilfe kann eine vergrösserte Kopie schaffen, auf der die Lernenden die Strecken einzeichnen und benennen sowie die daraus entstehenden Flächen schraffieren. Da das Fussballfeld in englischen Yards konzipiert wurde, sind keine runden Zahlen angegeben, sondern Dezimalbrüche. Wenn jedoch mit gerundeten Zahlen überschlagen wird, können dennoch Rechnungen aus dem Bereich der Basiskompetenzen thematisiert und gleichzeitig die Ergebnisse Validiert werden: Die kleinste Fläche ist aus der Breite und Höhe eines Tores zu berechnen (2.44 m x 7.32 m, gerundet 2 m x 7 m). Ebenso kann in den folgenden (Teil-) **Aufgaben 2.1c**, **2.1d** und **2.2** vorgegangen werden: Einerseits werden mit dem Taschenrechner die exakten Berechnungen durchgeführt, danach werden die Ergebnisse mittels Überschlagen mit gerundeten Zahlen validiert.

Die **Aufgabe 2.3** beschreibt ein Zimmer und dessen Masse. Die Schülerinnen sollen die Fläche der Wände berechnen, da sie von einer Malerin gestrichen werden. Da zu dieser Sachaufgabe keine Skizze vorhanden ist, sollte für die mathematische Modellbildung eine Zeichnung oder sogar ein Kartonmodell (Schachtel mit ausgeschnittenen Türen und Fenstern) angefertigt werden. Wichtig ist die Berücksichtigung von Fenstern und Türen bei der Modellbildung: Es wird nicht die Fläche für jedes Fenster und jede Türe angegeben, sondern die Summe dieser Fläche (7 m^2). Für die **Teilaufgabe 2.3b** müssen die Schülerinnen und Schüler über das Operationsverständnis zur Division verfügen.

In der **Aufgabe 2.4a**, sollen die Schülerinnen und Schüler die Längen und Breiten von drei Rechtecken messen und die Flächen berechnen. Sie bietet keine neuen Zugänge, setzt aber auch keine neuen Kenntnisse voraus und kann wie die Aufgaben 2.2 und 2.1 bearbeitet werden.

Für die **Aufgabe 3.1** im Arbeitsheft müssen die Lernenden im Schulzimmer rechteckige Flächen suchen und schätzen. Danach sollen sie zur Validierung gemessen und berechnet werden. Die **Sachaufgabe 3.2** des Arbeitsheftes möchte, dass berechnet wird, wie viele Fussbälle auf einem Spielfeld Platz haben. Das Lehrmittel verweist auf zwei Lösungsmöglichkeiten (mit und ohne Division). Für Schülerinnen mit Schwierigkeiten zur Division wäre die erste Möglichkeit ein handelnder Ansatz denkbar, indem mit Fussbällen aus der Turnhalle ein Quadratmeter ausgelegt wird. Die Anzahl der Bälle kann mit der Fläche multipliziert werden. Wie bei früheren

Aufgaben mit sehr grossen Zahlen, kann eine Tabelle eingesetzt werden. Auf der einen Seite wird die Anzahl der Quadratmeter aufgeführt, auf der anderen Seite die Anzahl Bälle.

Training der Eigenschaft der Basis 10 anhand von Einheitenumrechnungen

Die Teilaufgabe **2.4b** verlangt, dass die Ergebnisse von Quadratmillimetern zu Quadratzentimetern umgerechnet werden. Als Unterstützung kann für diese und die folgende **Aufgabe 2.5** eine Grössentabelle angeboten werden. Wie bei vorherigen Umrechnungen von Einheiten soll sie aber eher zur Validierung von Ergebnissen beitragen. Das Ziel sollen auch hier Einsichten zur Eigenschaft der Basis 10 sein.

3.3.4 Lerninhalte: Von den Längen- über die Flächen- zu den Raummassen (S. 43 – 43)

Tabelle 23: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zum Thema Von den Längen- über die Flächen- zu den Raummassen*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
4a	Mengenerfassen und Zählkompetenz
4b	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Multiplikation
4c	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Multiplikation, Dezimalsystem (Eigenschaft der Basis 10)
5a	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Multiplikation, Dezimalsystem (Eigenschaft der Basis 10)
5b	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Multiplikation
6	Mengenerfassen und Zählkompetenz
7a	Multiplikation, Dezimalsystem (Eigenschaft der Basis 10)
7b	Division, Dezimalsystem (Eigenschaft der Basis 10)
7c	Multiplikation, Division

Tabelle 24: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Arbeitsheft zum Thema Von den Längen- über die Flächen- zu den Raummassen*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
5.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Multiplikation
5.2	Multiplikation, Division
6.1	Multiplikation, Division
7.1	Multiplikation
7.2	Mathematisieren, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Mengenerfassen und Zählkompetenz
7.3	Multiplikation, Division

3.3.5 Lehr- und Lernverständnis: Von den Längen- über die Flächen- zu den Raummassen (S. 42 – 43)

Enaktive Erarbeitung von Vorstellungen zu Raummassen

Das Thema startet mit einem Arbeitsblatt (**Aufgabe 4 des Themenbuches**) auf dem ein Kubikdezimeter dargestellt wird. Drei Kanten wurden mit Kubikzentimeter ausgelegt. Es wird gefragt, wie viele Kubikzentimeter einen Kubikdezimeter ausfüllen. Durch die bearbeiteten Flächenberechnungen können die Schülerinnen und Schüler bereits die Anzahl der Kubikzentimeter am Boden bestimmen, nun kommt eine weitere Dimension hinzu. Einen handelnden Zugang bietet die Arbeit mit Dienes-Material. Der Tausenderwürfel repräsentiert dabei einen Kubikdezimeter. Die Lernenden können diesen aus Einerwürfelchen, Zehnerstäben und Hunderterplatten nachbauen. Wichtig ist, dass dabei ein Wechsel der Repräsentationsebenen angestrebt wird: Das handelnde Modell soll mit der ikonischen Darstellung des Kubikdezimeters (vgl. Arbeitsblatt) verglichen werden und es sollen Rechnungen notiert werden, welche auch eine Bestimmung auf symbolischer Ebene zulassen. So kann in der Folge bestimmt werden, wie viele Kubikmillimeter in einem Kubikzentimeter oder wie viele Kubikmeter in einem Kubikkilometer sind. Um diese und die **Aufgaben 5 und 7** zu lösen, bedingt es auch spezifischer Kompetenzen zum Dezimalsystem. Ohne Einsichten in die Eigenschaft der Basis 10, werden die hierfür benötigten Multiplikationen wie 1000 x 1000 x 1000 sehr schwierig. Sollen die Lernenden diese Aufgaben berechnen, muss vorerst überprüft werden, ob sie diese Einsichten bereits erlangt haben. Fehlen sie, sollte nochmals das Berechnen von Zehnerpotenzen thematisiert (vgl. Längenmasse, Hohlmasse, Gewichte) oder die genannten Aufgaben ausgelassen werden.

Die **Aufgabe 6** bietet Spielraum für handelnde Zugänge und strebt eine Verbindung von Hohlmassen und Volumina an. Die Lernenden können einen Kubikzentimeter und Kubikdezimeter mit einer Spritze auffüllen und so diese Grössen vergleichen.

Training des Operationsverständnis zur Multiplikation

Für die **Aufgabe 7a** muss der tägliche Wasserverbrauch einer Person mit der Einwohnerzahl multipliziert werden. Zunächst müssen die Schülerinnen und Schüler die passende Operation finden. Dies kann mit vereinfachten Zahlenbeispielen gemacht werden: Wie viel Wasser verbrauchen zwei Personen? Wie viel Wasser verbrauchen fünf oder zehn Personen? Die zweite Schwierigkeit betrifft die Mächtigkeit der angestrebten Multiplikationen: D.h., die Zahlenräume, in denen sich die Lernenden bewegen müssen, werden sehr gross. In einem ersten Schritt kann die abgekürzte Schreibweise 3.3 Mio. in eine Stellenwerttabelle eingetragen werden. Somit steht der Weg für verschiedene Berechnungsmethoden offen (schriftliche oder halbschriftliche Verfahren, kopfrechnen oder Taschenrechner). Welche Methode gewählt wird, hängt von den erworbenen Kompetenzen der Lernenden ab. Haben Schülerinnen und Schüler bereits tragfähige Vorstellungen zum Dezimalsystem und zur Multiplikation, können die Rechnungen im Kopf oder halbschriftlich ausgeführt werden. Fehlen den Lernenden diese Vorstellungen, wäre eine Konzentration auf das Operationsverständnis denkbar, bei der der Wasserverbrauch für kleinere Anzahlen von Menschen berechnet wird, um sich schrittweise den Bevölkerungszahlen anzunähern (z.B. in einer Tabelle mit zwei Spalten: Auf der einen Seite wird die Anzahl der Personen notiert, auf der anderen Seite der passende Wasserverbrauch).

Im Arbeitsheft wird mit der **Aufgabe 5.1** begonnen. Die Schülerinnen und Schüler sollen das Volumen einer Zündholzschachtel schätzen und berechnen. Damit die Lernenden sich aktiv mit der Modellbildung auseinandersetzen, sollten sie die zu messenden Strecken auf der Schachtel farbig markieren. Die üblichen Masse von Zündholzschachteln sind 5 cm x 3.5 cm x 1.5 cm. Die Schwierigkeit liegt dabei in der Multiplikation von Dezimalbrüchen. Haben Lernende diese Fertigkeit noch nicht erworben, können die Lernenden mit schriftlichen Multiplikationen zum Ziel kommen. Das Ergebnis kann mit Überschlagen validiert werden (z.B. 5 cm x 3 cm x 2 cm).

Training der Eigenschaft der Basis 10

Für die **Aufgabe 7b** soll auf die enaktiven Erfahrungen, die Berechnungen und Ergebnisse der Aufgabe 6 zurückgegriffen werden (1 cm^3 = 1 ml). Das Ergebnis der Aufgabe 7a soll in Kubikmeter umgerechnet werden. Dies setzt das Operationsverständnis zur Division voraus, sowie die Einsicht in die Eigenschaft der Basis 10. Erfüllen die Lernenden diese und deren zugrunde liegenden Voraussetzungen nicht, unterstützt eine Grössentabelle, da so fehlende Einsichten zur Division und zur Eigenschaft der Basis 10 umgangen werden. Noch grösser werden die Zahlenräume für die Berechnung der **Aufgabe 7c**: Vom täglichen Verbrauch soll nun auf den jährlichen Wasserverbrauch geschlossen werden. Dies beinhaltet eine weitere Multiplikation mit 365. Da die Zahlen sehr gross werden, ist der Einsatz eines Taschenrechners für alle Schülerinnen und Schüler sinnvoll. Wieder solle eine Tabelle mit zwei Spalten angeboten werden, damit Lernende individuelle Wege, d.h., Annäherungen anstellen können. Für Umrechnungen von Einheiten kann eine Grössentabelle benutzt werden.

Die Umrechnungen der **Aufgaben 5.2** und **6.1** können wiederum mit Grössentabellen und der parallelen Thematisierung der Eigenschaft der Basis 10 bearbeitet werden – dies gilt auch für die Umrechnungsaufgaben des Webportals, auf die in beiden Aufgaben verwiesen wird.

Training des Operationsverständnis der Grundrechenarten und des Mathematisierens

In der **Sachaufgabe 7.1** werden das grösste und das kleinste Aquarium der Welt verglichen. Da für das grösste Aquarium eine Skizze fehlt, sollten Lernende diese zuerst zeichnen und beschriften. Zur Berechnung des Volumens sollte ein Taschenrechner benutzt werden. Das Volumen des kleinsten Aquariums lässt sich hingegen einfach berechnen. Für die Umrechnung von Kubikzentimeter zu Millilitern soll auf die enaktive Erarbeitung in der Aufgabe 6 des Themenbuchs verwiesen werden.

Die **Sachaufgabe 7.2** zeigt eine Tabelle, mit verschiedenen Angaben zum täglichen Wasserverbrauch im Haushalt (Toilettenspülung, Duschen, Waschmaschine usw.). Einige Angaben werden mit Prozentzahlen des gesamten Tagesverbrauchs beschrieben. So können die Lücken in der Tabelle berechnet werden. Eine Prozentzahl fehlt, sie kann mit einer Subtraktion errechnet werden, dies setzt zusätzlich auch Einsichten in die Teil-Teil-Ganzes-Beziehung voraus. Für die Umrechnung der Prozentzahlen müssen die Lernenden zusätzlich das Operationsverständnis zur Division und Multiplikation sowie den Prozentschreibweise-Aspekt Teil vom Ganzen erworben haben. Fehlen den Lernenden mehrere dieser Voraussetzungen, soll die Aufgabe weggelassen werden, da die Bearbeitungszeit eskalieren würde. Haben die Lernenden lediglich mit der Umrechnung der Prozentzahlen Schwierigkeiten, können die Volumina angegeben werden. Für die folgenden Teilaufgaben und ebenso für die **Aufgabe 7.3** können die Differenzierungsansätze der vorherigen Aufgaben benutzt werden (beschriftete Skizzen, Stellenwerttabellen, Taschenrechner, Aufgaben zur Eigenschaft der Basis 10, Grössentabellen).

4 Kapitel 5: Wahrscheinlichkeit, Regelmässigkeiten des Zufalls (S. 52 – 55)

4.1.1 Lehrplanbezüge (vgl. Lehrmittelverlag Zürich, 2015, o.S.)

Handlungs-/Themenaspekte:	▪ Operieren und Benennen ▪ Erforschen und Argumentieren ▪ Mathematisieren und Darstellen
Kompetenzen:	*Kompetenzbereich Zahl und Variable:* ▪ Arithmetische Begriffe und Symbole verstehen und verwenden, Zahlen lesen und schreiben ▪ Flexibel zählen, Zahlen nach der Grösse ordnen und Ergebnisse überschlagen *Kompetenzbereich Grössen, Funktionen, Daten und Zufall:* ▪ Begriffe und Symbole zu Grössen, Funktionen, Daten und Zufall verstehen und verwenden ▪ Funktionale Zusammenhänge beschreiben und Funktionswerte beschreiben ▪ Sachsituationen zur Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit erforschen, Vermutungen formulieren und überprüfen ▪ Daten zu Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit erheben, ordnen, darstellen, auswerten und interpretieren

4.1.2 Lerninhalte: Regelmässigkeit des Zufalls (S. 52 – 55)

Tabelle 25: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zum Thema Regelmässigkeiten des Zufalls*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
1a	Mengenerfassen und Zählkompetenz
1b	Mengenerfassen und Zählkompetenz Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
1c	Mengenerfassen und Zählkompetenz
1d	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
2a	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
2b	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
3a	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
3b	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
4a	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
4b	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
4c	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
5a	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung,
5b	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung,
5c	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung,
5d	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung,
6a	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung,
6b	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Multiplikation, Division
6c	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
6d	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Multiplikation, Division

Tabelle 26: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Arbeitsheft zum Thema Regelmässigkeiten des Zufalls*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
1.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Division
1.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Division
1.3	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
2.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
2.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
2.3	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
2.4	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
3.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
3.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
3.3	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
3.4	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
3.5	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
3.6	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
3.7	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Multiplikation, Division
5.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Division
5.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Division

4.1.3 Lehr- und Lernverständnis: Regelmässigkeiten des Zufalls (S. 52 – 55)

Keller et al. weisen darauf hin, dass der Erwerb der Kenntnisse und Fertigkeiten des Kapitels 3 (Bruch- und Prozentbegriff, Säulendiagramme) für dieses Kapitel vorausgesetzt wird (vgl. 2011c, Kapitel 5, S. 2).
Das Themenbuch startet mit einem Beispiel auf ikonischer Ebene und handelnden Elementen, um die Lernenden in das Thema Wahrscheinlichkeit einzuführen. Da die **Aufgabe 1** keine Wahrscheinlichkeitsberechnungen enthält, werden nur die Basiskompetenzen Mengenerfassen und Zählkompetenz sowie die Teil-Teil-Ganzes-Beziehung vorausgesetzt. Ab **Aufgabe 2** müssen hingegen Wahrscheinlichkeiten als Bruch- und Prozentzahl notiert und berechnet werden. D.h., diese Berechnungen beinhalten Basiskompetenzen, die einen typischen „cutoff Punkt“ für viele Lernende darstellen. Lernende, welchen die Basiskompetenzen (Mengenerfassen , Teil-Teil-Ganzes Beziehung, Division oder Multiplikation) fehlen, können die handelnden Aufgaben bearbeiten und damit Gesetzmässigkeiten des Begriffs Zufall erwerben. Um tragfähige mathematische Vorstellungen zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten zu erwerben, fehlen ihnen noch die Voraussetzungen.

Abbildung 1: *hierarchische Darstellung der Kompetenzen*

Die Lernenden können z.B. mit dem Taschenrechner nach einem Rezept die Wahrscheinlichkeiten berechnen. Das Lernziel ist dann aber die Ausführung eines mathematischen Algorithmus' und nicht die mathematische Erfassung und Verständnisbildung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (Auswendiglernen anstatt Bildung von inhaltlichem Verständnis).
Deshalb sollen die handelnden Teilaufgaben bearbeitet werden, um Vorstellungen zum Begriff Zufall zu erhalten. Dieser Begriff ist aus dem Alltag bekannt (vgl. Keller et al., 2011c, Kapitel 5, S. 1), d.h., es ist Vorwissen vorhanden, an dem angeknüpft werden kann und es besteht eine Gegenwarts- und Zukunftsbedeutung. Dazu gehören die Aufgaben 1, 4a, 4b und 5 des Themenbuchs sowie die Aufgaben 1.1a bis 1.1e, 1.2a bis 1.2d, 1.3a bis 1.3d, 5.1, 5.2a, 5.2b.
Folgend soll festgestellt werden, welche der benötigten Basiskompetenzen noch nicht erworben wurde. Denn das Thema Wahrscheinlichkeit lässt verschiedene Möglichkeiten offen, um Basiskompetenzen zu erwerben.

Beispiel zum Training des Mengenerfassens und der Zählkompetenz:
Die Lernenden können zusätzliche Übungen mit Würfeln, Jasskarten, verschiedenfarbigen Bällen oder Senet-Stäbchen machen. Sie Zählen die Ergebnisse und tragen sie in Tabellen und Säulendiagramme ein.

Beispiel zum Training der Addition, Subtraktion und Teil-Teil-Ganzes-Beziehung:
Die Lernenden berechnen die Ergebnisse innerhalb von Tabellen und erstellen zur Darstellung Säulendiagramme. Die Zahlenräume können beliebig angepasst werden.

Tabelle 27: *Beispiel einer Tabelle zum Training von Addition, Subtraktion und Teil-Teil-Ganzes-Beziehung*

Rosen	Eicheln	Schilten	Schellen	Total der Ziehungen
8	4		6	30
2	3	5		10
4	6	3	7	

Beispiel zum Training der Division, Modell des Aufteilens:

Die Lernenden berechnen, wie oft eine Rose gezogen, eine 4 gewürfelt oder ein Senet-Stäbchen auf die runde Seite fallen müsste. Zuerst kann die **Aufgabe 3.3** des Arbeitsheftes gelöst werden. Die Lernenden können das erworbene Wissen zum mathematischen Zufall nochmals anwenden und je nach Ressourcen angeben, wie oft ein Wurfergebnis eintreten sollte. Haben Lernende noch Schwierigkeiten mit der Berechnung von Prozentwerten, können sie die Wahrscheinlichkeit mit der sprachlichen Schreibweise („einer von 6“) und später in die Bruchschreibweise übersetzen ($\frac{1}{6}$). Danach können Aufgaben mit mehreren Würfen gelöst werden:

Beispiel Spielwürfel: „Eine Schülerin würfelt 54 mal. Wie oft wird sie eine 6 würfeln?“
Beispiel Oktaederwürfel: „Ein Schüler würfelt 64 mal. Wie oft sollte eine 8 gewürfelt werden?“

Die Lernenden notieren und berechnen die Division und verknüpfen sie mit der Multiplikation, indem sie die Umkehroperation festhalten.

5 Kapitel 6: Die Welt der ganzen Zahlen

Als Voraussetzungen für das Kapitel 6 werden ein sicherer Umgang mit Zahlenstrahlen erwartet, sowie die sichere Beherrschung der Grundoperationen. Für die Aufgaben 5 des Themenbuchs und des Arbeitsheftes müssen Lernende zudem in der Lage sein, Liniendiagramme (vgl. Kapitel 3a) zu zeichnen (vgl. Keller et al., 2011c, Kapitel 6, S. 2).

5.1 Kapitel 6a: Negative Zahlen oder das «Unter-Null» (S. 56 – 59)

5.1.1 Lehrplanbezüge (vgl. Lehrmittelverlag Zürich, 2015, o.S.)

Handlungs-/Themenaspekte:

- Operieren und Benennen
- Erforschen und Argumentieren
- Mathematisieren und Darstellen

Kompetenzen:

Kompetenzbereich Zahl und Variable:

- Arithmetische Begriffe und Symbole verstehen und verwenden, Zahlen lesen und schreiben
- Flexibel zählen, Zahlen nach der Grösse ordnen und Ergebnisse überschlagen
- Addieren, subtrahieren multiplizieren, dividieren und potenzieren
- Zahl- und Operationsbeziehungen sowie arithmetische Muster erforschen und Erkenntnisse austauschen
- Aussagen, Vermutungen und Ergebnisse zu Zahlen und Variablen erläutern, überprüfen und begründen
- Hilfsmittel nutzen beim Erforschen arithmetischer Muster
- Rechenwege darstellen, beschreiben, austauschen und nachvollziehen
- Anzahlen, Zahlenfolgen und Terme veranschaulichen, beschreiben und verallgemeinern

Kompetenzbereich Grössen, Funktionen, Daten und Zufall:

- Begriffe und Symbole zu Grössen, Funktionen, Daten und Zufall verstehen und verwenden
- Funktionale Zusammenhänge beschreiben und Funktionswerte bestimmen

5.1.2 Lerninhalte: Ganze Zahlen (S. 56 – 59)

Tabelle 28: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zum Thema Ganze Zahlen*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
1a	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem, Addition, Subtraktion
1b	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem, Addition, Subtraktion
2a	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem
2b	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem
3	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem, Addition, Subtraktion
4a – d	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem, Addition, Subtraktion
5a	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem, Addition, Subtraktion
5b	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem, Addition, Subtraktion

Tabelle 29: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Arbeitsheft zum Thema Ganze Zahlen*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
1.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem, Addition, Subtraktion
1.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem, Addition; Subtraktion
1.3	Mathematisieren, Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem, Addition, Subtraktion
1.4	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem, Addition, Subtraktion
2.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem
2.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem
2.3	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem, Addition, Subtraktion
2.4	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem
2.5	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem
2.6	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem
2.7	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem
3.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem; Addition; Subtraktion
4.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem; Addition; Subtraktion
4.2	Dezimalsystem, Addition, Subtraktion
4.3	Dezimalsystem, Addition, Subtraktion
5.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Mathematisieren, Dezimalsystem, Addition, Subtraktion
5.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Mathematisieren, Dezimalsystem, Addition, Subtraktion
5.3	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Mathematisieren, Dezimalsystem, Addition, Subtraktion

5.1.3 Lehr- und Lernverständnis: Ganze Zahlen (S. 56 – 59)

Vorübungen zum Dezimalsystem, dem flexiblen Rechnen (Addition und Subtraktion) und dem Hilfsmittel Zahlenstrahl

Das Kapitel führt in den negativen Zahlenraum ein. Der Zahlenraum bewegt sich zwischen -100 und +100, d.h., es werden nur Bündelungen und Entbündelungen erster und zweiter Ordnung nötig sein. Die von den Aufgaben am stärksten fokussierten Basiskompetenzen sind das Dezimalsystem und das Erfassen von Mengen und die Zählkompetenz. Damit Schülerinnen und Schüler mit Lücken in diesen Basiskompetenzen diese Aufgaben bearbeiten können, können Vorübungen zum Dezimalsystem gemacht werden. Einerseits soll strukturiert gezählt werden, um Regelmässigkeiten des Dezimalsystems zu erkennen sowie additive und subtraktive Fertigkeiten zu trainieren, andererseits soll der Zahlenstrahl und Rechenstrich als Hilfsmittel vorab thematisiert werden (vgl. Kapitel 6.2). Abgezählte Mengen können auf beschrifteten Zahlenstrahlen markiert und Additionen sowie Subtraktionen auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden. Der Zahlenstrahl soll als Wegstrecke gesehen werden, auf der flexibel nach vorne (Addition) und nach hinten (Subtraktion) in individuellen Schritten gerechnet werden kann. Aufgrund des für die Aufgabe 1 empfohlenen Zugangs, sollten die Additionen und Subtraktionen mit einem Wendepunkt „abgefahren“ werden. Für die Addition 22 + 19 könnte sich beispielweise folgendes Schema ergeben: Die Lernenden starten bei der Zahl 22 und fahren den Wendepunkt um 10 nach vorne (32). Danach verschieben sie den Wendepunkt zum nächsten 10er (40) und machen einen Einersprung zum Ergebnis (41).

Einführung der negativen Zahlen, Training des Dezimalsystems, der Addition und Subtraktion

Für die **Aufgabe 1a**, in der die Stockwerkposition eines Liftes bestimmt wird, sollten schwache Mathematiklernende einen zusätzlichen Zahlenstrahl von -10 bis 10 benutzen, dessen Zahlen die Stockwerke repräsentieren. Die Lernenden können nun mit einem Wendepunkt die beschriebenen Liftfahrten nachvollziehen, indem sie den Wendepunkt im Sinne der geforderten Stockwerkänderung verschieben und notieren, auf welcher Etage der Lift ankommt. Als Vorbereitung für die **Teilaufgabe b** können die einzelnen Fahrten mit verschiedenfarbigen Pfeilen markiert werden. In dieser Teilaufgabe müssen die Lernenden die Liftfahrten mit Additionen und Subtraktionen verknüpfen. Sind die Fahrten verschiedenfarbig markiert, können die Lernenden die Terme leicht zuordnen. Darauf folgt die Aufgabe 1.1 des Arbeitsheftes. Es werden acht Terme aufgelistet, die Liftfahrten repräsentieren (z.B. -1 – 5, 3 + 2). Jede Liftfahrt beginnt bei 0. Dieser Term steht nicht am Anfang der Liste, d.h., die Schülerinnen und Schüler müssen diesen zuerst markieren. Um einen handelnden Zugang zu bieten, empfiehlt sich wiederum die Arbeit mit einem Wendepunkt und einem Zahlenstrahl von -15 bis 15. Auf die gleiche Art und Weise können die folgenden Aufgaben (1.1 bis 1.4) des Arbeitsheftes gelöst werden.

Anzumerken ist, dass für die **Sachaufgabe 1.3** die wichtigsten Strukturwörter zur Mathematisierung identifiziert und besprochen werden müssen. Die Bedeutungen von sinken, steigen minimal, maximal, Unterschied und Abkühlung müssen geklärt und, falls möglich, mit zutreffenden Operationen in Verbindung gebracht werden. Die Lernenden können Zeichnungen zur Morgen-, Mittags- und zur Abendzeit anfertigen und Geschichten mit den genannten Wörtern zum Temperaturverlauf erfinden.

Additionen und Subtraktionen können auch mit der **Aufgabe 4** (Konto-Spiel) des Themenbuchs im Kontext von positiven und negativen Zahlen angewendet werden. Für schwache Lernende bietet auch hier ein Zahlenstrahl von -20 bis 20 Unterstützung. Sie können den Kontostand jeweils mit einem Wendepunkt markieren und ihn in den geforderten Schritten bewegen. Das Spiel kann ebenfalls im Webportal gespielt werden (**Aufgabe 4.1** im Arbeitsheft).

Die **Aufgabe 4.2** des Arbeitsheftes (und die **Aufgabe 4.3** im Webportal) besteht aus reinen Termen mit Additionen und Subtraktionen. Auch sie können mit einem Zahlenstrahl oder Rechenstrich gelöst werden. Da der Zahlenraum bis auf 100 (im positiven sowie negativen Zahlenraum) anwächst, empfiehlt sich hier eher eine Bearbeitung ohne Wendepunkte. Die einzelnen Rechenschritte sollten mit einem Stift markiert werden, da je nach Rechenweg, mehrere Schritte gemacht werden müssen. So geraten Zwischenergebnisse und die bereits gemachten Rechenschritte nicht in Vergessenheit.

Training des Mengenerfassens und Zählens

In den **Aufgaben 2** Themenbuchs und des Arbeitsheftes werden die Mächtigkeit von positiven und negativen Zahlen verglichen. Die Lernenden können diese Aufgaben zu Beginn wiederum mit Zahlenstrahlen lösen. Je weiter links eine Zahl zu finden ist, desto kleiner ist sie. Die **Aufgabe 3** bietet sowohl im Themenbuch sowie im Arbeitshaft Aufgaben zum Strukturierten Zählen. Haben Lernende Schwierigkeiten in Schritten grösser als 1 zu zählen, können Lehrpersonen zusätzliche mündliche und schriftliche Aufgaben zum Strukturierten Zählen leicht erstellen.

Die **Aufgaben 5** des Themenbuchs und des Arbeitsheftes müssten eigentlich zur Addition und Subtraktion gezählt werden. Sie sind alle deutlich schwieriger als die restlichen bisher behandelten Aufgaben. Für die Aufgaben im Arbeitsheft gilt dies, weil die Mathematisierung des Sachverhalts kompliziert ist und keine handelnden Zugänge vorhanden sind. Gleichzeitig sind auch die Ansprüche an die Rechenfertigkeit hoch. Da bereits viele Aufgaben zu den Basiskompetenzen Addition und Subtraktion geübt wurden, können die Aufgaben des Arbeitsheftes weggelassen werden und die **Aufgabe 5** des Themenbuchs insofern angepasst werden, als dass sie das Mengenerfassen fokussiert, welches bisher eher am Rande thematisiert wurde. In dieser Aufgabe soll ein Liniendiagramm gelesen werden und in ein Spielprotokoll übertragen werden. Danach sollen in einem Spielprotokoll fehlende Angaben ergänzt werden. Anstatt Angaben in willkürlichen Spielprotokollen zu ergänzen, können Lernende aber auch ihr eigenes Spielprotokoll zum Erstellen eines Liniendiagramms verwenden. Die Aufgabe bietet so teils einen handelnden Zugang und mit den selbst erstellten und deshalb vollständigen Spielprotokollen lässt sich der Fokus weg vom blossen Rechnen und hin zum Erfassen sowie Darstellen von Mengen lenken. Zuerst sollen die Lernenden das abgebildete Liniendiagramm der **Teilaufgabe 5a** beschreiben und Aussagen zum Spielverlauf machen. Als zweites zeichnen sie das Liniendiagramm zum eigenen Spielverlauf.

Training des Bündelns und Entbündelns von Stellenwerten

In der **Aufgabe 2.3** des Arbeitsheftes kommt dem Bündeln und Entbündeln von Stellenwerten eine wichtige Bedeutung zu. Von gegebenen Zahlen sollen die Nachbarszahlen und Zahlen die sich um 3 oder 5 unterscheiden gefunden werden. Da das Bündeln und Entbündeln eine wichtige Voraussetzung für einen flexiblen Umgang mit dem Dezimalsystem darstellt, können Lernende zu diesem Zeitpunkt auch mit weiteren Aufgaben im positiven Zahlbereich gefördert werden. Dies kann durch die Behandlung von Nachbarsaufgaben, Additionen und Subtraktionen mit Dienes-Material geschehen. Um die Nachbarszahlen von 1000 darzustellen muss für die Zahl 999 beispielsweise ein Tausenderwürfel in Hunderterplatten, Zehnerstäbchen und Einerwürfelchen *entbündelt* werden. Das Bündeln lässt sich z.B. durch Additionen aufgreifen: Die um 5 grössere Zahl als 995 ist 1000. Die Hunderter, Zehner und Einer müssen also zu einem Tausenderwürfel *gebündelt* werden.

5.2 Kapitel 6b: Koordinaten (S. 60 – 63)

5.2.1 Lehrplanbezüge (vgl. Lehrmittelverlag Zürich, 2015, o.S.)

Handlungs-/Themenaspekte:

- Operieren und Benennen
- Mathematisieren und Darstellen

Kompetenzen:

Form und Raum:

- *Begriffe und Symbole verstehen und verwenden*
- *Figuren und Körper abbilden, zerlegen und zusammensetzen*
- *Im Koordinatensystem die Koordinaten von Figuren und Körpern bestimmen bzw. Figuren und Körper aufgrund ihrer Koordinaten darstellen, Pläne lesen und zeichnen*

Kompetenzbereich Grössen, Funktionen, Daten und Zufall:

- Funktionale Zusammenhänge beschreiben und Funktionswerte bestimmen

5.2.2 Lerninhalte: Koordinaten (S. 60 – 63)

Tabelle 30: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zum Thema Koordinaten*

Aufgabe	**vorausgesetzte Basiskompetenzen**
1a	Mengenerfassen und Zählkompetenz
1b	Mengenerfassen und Zählkompetenz
2a	Mengenerfassen und Zählkompetenz
2b	Mengenerfassen und Zählkompetenz
2c	Mengenerfassen und Zählkompetenz
2d	Mengenerfassen und Zählkompetenz
2e	Mengenerfassen und Zählkompetenz
2f	Mengenerfassen und Zählkompetenz
3a	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Dezimalsystem (Eigenschaft der Basis 10 oder Bündeln)
3b	Mengenerfassen und Zählkompetenz
4a	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Multiplikation
4b	Dezimalsystem (Eigenschaften der Basis 10), Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
4c	-
4d	Mengenerfassen und Zählkompetenz

Tabelle 31: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Arbeitsheft zum Thema Koordinaten*

Aufgabe	**Basiskompetenzen**
1.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz
2.1	Mengenerfassen und Zählkompetenz
2.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Subtraktion
2.3	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Addition, Subtraktion
2.4	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Addition
4.1	Multiplikation
4.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Multiplikation
4.3	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Dezimalsystem
4.4	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Dezimalsystem

5.2.3 Lehr- und Lernverständnis: Koordinaten (S. 60 – 63)

Die **Aufgaben 3.1** und **3.2** des Arbeitsheftes gehören zu den geometrischen Konstruktionen, welche mit diesem Instrument nicht thematisiert werden.

Mengenerfassen und Zählkompetenz

Das Themenbuch startet mit der **Einführungsaufgabe 1a** im Themenbuch, in der die Schülerinnen und Schüler einzelne Koordinaten erfassen und notieren sollen. Haben die Lernenden im letzten Kapitel gelernt, wie mit Zahlenstrahlen und negativen Zahlen umgegangen wird, können sie diese Aufgaben lösen. Haben sie noch nie ein Koordinatensystem benutzt, können zusätzliche Aufgaben zur Notation von Koordinaten mit ausschliesslich positiven x- und y-Werten vorrangig gelöst werden.

Danach wird in der **Aufgabe 1b** ein „Schiffe versenken“ in einem Koordinatensystem mit positiven sowohl als auch negativen Koordinaten gespielt. Der Zahlenraum wurde klein gehalten (-5 bis 5). Es werden keine Stellenwerte überschritten, d.h., spezifische Kenntnisse zum Dezimalsystem werden nicht vorausgesetzt. Wichtig ist, dass die Regeln und der Spielablauf klar erklärt und mit Beispielen zu mehreren Spielzügen ergänzt wird. Es soll der Frage nachgegangen werden, wie man ein Schiff erkennt. Lernende können diese Übung auch im Webportal spielen.

Die **Aufgaben 2 und 3** sind auf einem Arbeitsblatt zu finden. Die Lernenden sollen die Koordinaten von Dreiecken, bzw. deren Ecken herauslesen. Die Koordinaten bewegen sich in beiden Aufgaben in kleinen Zahlenräumen (-8 bis 8). Schwieriger ist die **Aufgabe 3**, weil Koordinaten in Zentimeter und Millimetern abgelesen werden müssen. Die Angaben müssen in Dezimalbrüchen gemacht werden (z.B. 5.2 cm / 2.6 cm). Wenn Schülerinnen und Schüler Mühe mit dem Ablesen von Strecken in Zentimetern und Millimetern haben, können ausschliesslich die Millimeter gezählt und eine Grössentabelle zur Umformung angeboten werden.

Visuell-räumliche Übungen

Die **Aufgabe 2.1** des Arbeitsheftes ist zu Beginn nicht schwieriger, als die bisherigen Aufgaben. Es müssen aber deutlich mehr Koordinaten eingezeichnet und die Koordinaten müssen nach Anleitung genau verbunden werden, bis ein Penrose-Dreieck entsteht („unmögliche Figur“). Die Flächen können anschliessend ausgemalt werden. Da die Aufgabe von niedriger Komplexität, aber umfangreich ist, ist sie dennoch fehleranfällig. Die Lernenden müssen zwingend mit Bleistift arbeiten.

Für die **Aufgabe 2.2** ist das Verständnis der Subtraktion Voraussetzung. Ein Quadrat muss über den Nullpunkt gespiegelt werden. Die Lernenden müssen deshalb die Differenz der Koordinaten zum Nullpunkt erfassen können und über Kenntnisse zur Punktsymmetrie verfügen. Werden die Punkte der Quadrate wie verlangt verbunden, steht eine weitere „unmögliche Figur“. Die Lernenden sollen die Körper beschreiben. Falls dies Schwierigkeiten macht, kann die Figur – bestehend aus zwei Quadern – auch mit Modellen von Körpern verglichen und so den Quadern zugeordnet werden.

Die **Aufgabe 2.3** ist hingegen deutlich komplexer. Es soll ein Würfel anhand der Koordinaten seiner Ecken konstruiert werden. Es werden aber keine Angaben gemacht, welche Punkte verbunden werden müssen und zudem fehlen die Koordinaten für eine nicht sichtbare Ecke. Unterstützend wirkt, dass sobald die ersten vier Punkte markiert sind (vordere Fläche des Würfels), diese zu einem Quadrat verbunden werden sollen. Somit ist die wichtigste Fläche bereits definiert. Die **Teilaufgabe 2.3c** verlangt Spiegelungen an der x- und y-Achse, dies muss evtl. nochmals erklärt werden, damit die Lagebeschreibungen der **Teilaufgabe 2.3d** gemacht werden können. Anstatt die Würfel lediglich auf dem Papier zu vergleichen, können Modelle beigezogen und in die richtige Raumlage versetzt werden, um Begriffe wie links, rechts, von Oben, von Unten zu thematisieren. Können die Lernenden die Würfel nicht spiegeln, sollen verschiedene, mögliche Ansichten und Raumlagen der realen Würfelmodelle beschrieben werden.

Koordinaten mit Variablen

Die **Aufgabe 2.4** erhöht die Komplexität wiederum. Aus einem Dreieck, dessen Koordinaten bekannt sind, muss ein neues Dreieck gezeichnet werden. Bei der **Teilaufgabe 2.4b** wird nur der x-Wert verändert (x + n), für die **Teilaufgabe 2.4c** sollen zum x- und y-Wert die Variable m addiert werden (x + m / y + m). Da die Komplexität erneut erhöht wurde, die Kompetenzen des Lehrplans zum Bereich Form und Raum bereits komplett angesprochen wurden und die Aufgabe weder die Rechenfertigkeiten, noch das Operationsverständnis entscheidend trainiert, kann die Aufgabe für Lernende mit Lücken in den Basiskompetenzen ausgelassen werden.

Dezimalsystem: Eigenschaft der Basis 10 und Dezimalbrüche

Die **Aufgaben 4** des Themenbuchs und des Arbeitsheftes behandeln Koordinaten auf Landkarten. Zeigen die Tests, dass Lernende Schwierigkeiten beim Rechnen mit Zehnerpotenzen und dem Dezimalsystem haben, sind basale Übungen des Kapitels 6.2 zu bevorzugen. Die angebotenen Illustrationen (vor allem im Arbeitsheft) sind sehr klein und die Dezimalbrüche schwierig. Ebenso wie bei der Aufgabe 2.4 wurden die Kompetenzen des Lehrplans bereits angesprochen, d.h., die Aufgaben 4 behandeln das Thema der Koordinaten lediglich in einem neuen Sachkontext und mit schwierigen Dezimalbrüchen.

5.3 Kapitel 6c: Grundoperationen: Grundoperationen. Mit dem Negativen rechnen (S. 64 – 67)

5.3.1 Lehrplanbezüge (vgl. Lehrmittelverlag Zürich, 2015, o.S.)

Handlungs-/Themenaspekte:

- Operieren und Benennen
- Erforschen und Argumentieren
- Mathematisieren und Darstellen

Kompetenzen:

Kompetenzbereich Zahl und Variable:

- Arithmetische Begriffe und Symbole verstehen und verwenden, Zahlen lesen und schreiben
- Flexibel zählen, Zahlen nach der Grösse ordnen und Ergebnisse überschlagen
- Addieren, subtrahieren multiplizieren, dividieren und potenzieren
- Terme verglichen und umformen, Gleichungen lösen, Gesetze und Regeln anwenden
- Zahl- und Operationsbeziehungen sowie arithmetische Muster erforschen und Erkenntnisse austauschen
- Aussagen, Vermutungen und Ergebnisse zu Zahlen und Variablen erläutern, überprüfen und begründen
- Hilfsmittel nutzen beim Erforschen arithmetischer Muster
- Rechenwege darstellen, beschreiben, austauschen und nachvollziehen
- Anzahlen, Zahlenfolgen und Terme veranschaulichen, beschreiben und verallgemeinern

Kompetenzbereich Grössen, Funktionen, Daten und Zufall:

- Sachsituationen mathematisieren, darstellen, berechnen sowie Ergebnisse interpretieren und überprüfen

5.3.2 Lerninhalte: Grundoperationen. Mit dem Negativen rechnen (S. 62 – 67)

Tabelle 32: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zum Kapitel Grundoperationen*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
1a	-
1b	Multiplikation
1c	Multiplikation, Addition
1d	Multiplikation, Addition
2	Multiplikation, Division
3a	Multiplikation
3b	Multiplikation
3c	Multiplikation
4a	Mathematisieren, Subtraktion
4b	Mathematisieren, Subtraktion
4c	Mathematisieren, Multiplikation, Subtraktion
5a	Addition, Subtraktion
5b	Addition, Subtraktion
5c	Addition, Multiplikation

Tabelle 33: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Arbeitsheft zum Kapitel Grundoperationen*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
1.1	Multiplikation, Addition
1.2	Multiplikation
2.1	Multiplikation, Division
2.2	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
2.3	Addition, Subtraktion
3.1	Multiplikation, Division
4.1	Mathematisieren, Subtraktion
4.2	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation
4.3	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
5.1	Subtraktion, Multiplikation
5.2	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division

5.3.3 Lehr- und Lernverständnis: Grundoperationen. Mit dem Negativen rechnen (S. 62 – 67)

Training der Grundoperationen

Das Kapitel 6c thematisiert die Grundoperationen mit negativen Zahlen, es sind kaum Rechnungen mit positiven Zahlen vorhanden. Wenn Lernende über Schwierigkeiten mit Grundoperationen verfügen, müssten sie diese damit aufgrund von Aufgaben trainieren, welche das Ziel haben, den Umgang mit negativen Zahlen zu vertiefen und zu trainieren. Es würden dementsprechend mehrere Lernziele gleichzeitig angesprochen.

Falls Lücken in den Basiskompetenzen Multiplikation oder Division vorhanden sind, wird die Bearbeitung des Themas über das Lehrmittel schwierig. Die **Einführungsaufgabe 1** des Themenbuchs setzt bereits die Multiplikation mit negativen Zahlen voraus. Aus arithmetischer Sicht könnten diese Aufgaben mit der Darstellung der Multiplikation als fortlaufende Subtraktion differenziert werden (4 x (-20) = – 20 – 20 – 20 – 20). Da diese Zahlen auch mit mehreren Subtraktionen schnell zu berechnen sind (kleine Multiplikatoren von 2 bis 4 und 20 und -20 als Multiplikanden), könnte der Spielfluss nicht entscheidend verlangsamt werden. Bei der Addition und Subtraktion von negativen Zahlen dienen Zahlenstrahlen als Hilfsmittel.

Im Arbeitsheft, d.h., in jenem Teil des Lehrmittels, welcher alleine bearbeitet werden sollte, sind nur numerische Aufgaben zu finden (**Aufgaben 1.2** bis **3.1, 5.1 und 5.2**, mit Ausnahme der **Aufgabe 2.3** des Webportals) welche die Multiplikation und/oder die Division inkludieren. Welche Aufgaben bearbeitet werden können, ergibt sich aus der Tabelle 34. Aufgaben zu nicht erworbenen Basiskompetenzen sollten ausgelassen werden, da die Basiskompetenz immer unter der Verwendung von negativen Zahlen und in Verbindung mit Potenzen, Rechengesetzen, Klammern und anderen Operationen trainiert wird.

Mathematisieren

Die einzigen Aufgaben, die ausschliesslich mit Additionen und Subtraktionen auskommen, sind einzelne **Teilaufgaben der Sachaufgabe 4** im Themenbuch und Arbeitsheft. Diese haben aber einen komplizierten Kontext im Hintergrund (Windchill-Effekt). Problematisch ist dies deshalb, weil im Themenbuch total zwei und im Arbeitsheft sieben Subtraktionen, verteilt auf zwei Aufgaben, berechnet werden sollen. Da das Mathematisieren für diese drei Aufgaben viel Zeit in Anspruch nimmt, ist fraglich, ob schwache Mathematiklernende die Energie aufbringen, um sich gleichzeitig auf die Rechenfertigkeiten zu konzentrieren und korrekte Modelle zur Mathematisierung bilden können. Die Aufgabe trainiert deswegen vor allem das Mathematisieren.

Haben Schülerinnen und Schüler Lücken in mehreren Basiskompetenzen, empfiehlt sich dieses Kapitel weniger. Das Thema Grundoperationen soll beibehalten und mit basalen Aufgaben angereichert werden. Welche Typen von Aufgaben fokussiert werden müssten, wird im Kapitel Aufbau mathematischer Vorstellungen festgehalten.

6 Kapitel 7: Ebene Figuren (S. 68 – 79)

Als Voraussetzung für das Kapitel 7 nennen Keller et al. (vgl. 2011c, Kapitel 7, S. 2):

- Die Lernenden kennen die Namen verschiedener Dreieck- und Vierecksformen.
- Die Lernenden haben diese Figuren bezüglich ihrer Symmetrieeigenschaften untersucht und Achsen- sowie Punktspiegelungen durchgeführt.
- Die Lernenden kennen die Flächenmasse des Teilkapitels 3c und können einfache Flächenberechnungen durchführen.
- Die Lernenden können Prozentanteile berechnen.

6.1 Kapitel 7a: Umfang und Flächeninhalt von Rechtecken (S. 68 – 71)

6.1.1 Lehrplanbezüge (vgl. Lehrmittelverlag Zürich, 2015, o.S.)

Handlungs-/Themenaspekte:

- Operieren und Benennen
- Erforschen und Argumentieren

Kompetenzen:

Kompetenzbereich Form und Raum

- *Begriffe und Symbole verstehen und verwenden*
- *Figuren und Körper abbilden, zerlegen und zusammensetzen*
- *Längen, Flächen und Volumen bestimmen*
- *Geometrische Beziehungen, insb. zwischen Längen, Flächen und Volumen, erforschen, Vermutungen formulieren und Erkenntnisse austauschen*
- *Aussagen und Formeln zu geometrischen Beziehungen überprüfen, mit Beispielen belegen und begründen*

Kompetenzbereich Grössen, Funktionen, Daten und Zufall:

- Begriffe und Symbole zu Grössen, Funktionen, Daten und Zufall verstehen und verwenden
- Grössen schätzen, messen, umwandeln, runden und mit ihnen rechnen

6.1.2 Leninhalte: Umfang und Flächeninhalt von Rechtecken (S. 68 – 71)

Tabelle 34: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zum Kapitel Umfang und Flächeninhalt von Rechtecken*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
1a	Multiplikation
1b	Multiplikation
1c	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Addition oder Multiplikation
1d	Addition oder Multiplikation
1e	Addition oder Multiplikation
1f	Multiplikation
1g	Addition, Multiplikation
2a	Addition, Multiplikation
2b	Addition, Multiplikation
3a	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
3b	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Multiplikation
3c	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
3d	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
3e	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Addition
4a	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
4b	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung
4c	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Multiplikation
4d	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Multiplikation
4e	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Multiplikation

Tabelle 35: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Arbeitsheft zum Kapitel Umfang und Flächeninhalt von Rechtecken*

Aufgabe	**vorausgesetzte Basiskompetenzen**
1.1	Addition, Multiplikation
1.2	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Addition und/oder Multiplikation
1.3	Mengenerfassen und Zählkompetenz, Addition, Multiplikation
1.4	Addition, Multiplikation
1.5	Addition, Multiplikation
2.1	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Multiplikation
2.2	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion und/oder Division, Multiplikation
2.3	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion und/oder Division, Multiplikation
2.4	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
3.1	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Multiplikation
3.2	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Multiplikation
3.3	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Multiplikation

6.1.3 Lehr- und Lernverständnis: Umfang und Flächeninhalt von Rechtecken (S. 68 – 71)

Wie bereits im Lehr- und Lernverständnis zum Kapitel 3c, Die Hundertteiligkeit der Flächenmasse, festgehalten, gilt auch hier, dass die Flächenberechnungen nicht nur die Rechenfertigkeit trainieren, sondern das Operationsverständnis der Multiplikation massgeblich beeinflussen können (vgl. Felddarstellung, Kommutativgesetz). Was in diesem Kapitel hinzukommt, sind die Basiskompetenzen Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion und teilweise die Basiskompetenz Division. Gleichzeitig werden nun auch Umfangberechnungen angestrebt, welche jedoch einfach mittels Additionen (alle vier Seiten eines Rechtecks addieren) oder mittels multiplikativer Formel (2 x b + 2 x l) berechnet werden können.

Erwerb des Operationsverständnisses und Rechentraining zur Multiplikation

Der handelnde Zugang der **Aufgabe 1** bietet auch Lernenden mit Schwierigkeiten zur Multiplikation eine sehr gute Lernsituation zum Erwerb oder zum Training der Multiplikation. Es sollen aus 60 Quadraten möglichst viele Rechtecke gebildet werden. Dies heisst, es werden möglichst viele Multiplikationen mit dem Ergebnis 60 gesucht und handelnd dargestellt. Wieder lässt sich mit Tauschaufgaben und dem Drehen von Rechtecken um 90 Grad das Kommutativgesetz veranschaulichen. Da die Ergebnisse, d.h., die Multiplikationen, welche zur Flächenberechnung führen, in eine Tabelle eingetragen werden müssen, findet automatisch ein Repräsentationsebenen-Wechsel zur symbolischen Ebene hin statt. Die Aufgabe ist auch deshalb äusserst gut konzipiert, weil sie eine natürliche Differenzierung beinhaltet.

Die Berechnung des Umfangs findet ebenfalls enaktiv statt, indem eine Schnur um die entstehenden Rechtecke gelegt wird. Sie kann danach gemessen werden. Zum Rechentraining sowie zum Erwerb der Multiplikation können auch die Aufgaben **1.1, 1.2, 1.3, 1.4** und **1.5** des Arbeitsheftes genutzt werden. Bei rein numerischen

Aufgaben (vgl. Aufgabe 1.4) sollen zuerst Skizzen gezeichnet und beschriftet werden (Wechsel zwischen der ikonischen und symbolischen Ebene).

Erwerb und Training der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung

Ab den **Aufgaben 2** des Themenbuches und des Arbeitsheftes wird zudem die Teil-Teil-Ganzes-Beziehung angesprochen. E sollen entweder Figuren berechnet werden, die aus mehreren Teilflächen bestehen, bzw. Figuren, welchen ein rechteckiger Teil fehlt. Für die meisten Figuren kann sowohl über das Modell des Zerlegens sowie das Modell des Ergänzens vorgegangen werden. Dies erwähnt auch das Lehrmittel in der **Aufgabe 3** des Themenbuchs speziell.

Da es sich um gute ikonische Beispiele der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung handelt, sollten die Lernenden diese Bearbeiten. Haben sie Schwierigkeiten, können zu Beginn der Aufgabe 2 im Themenbuch nur einzelne Flächen berechnet werden. Wissen die Lernenden wie gross sie sind, können mittels Additionen Flächen der gleichen Farben addiert werden. Genau gleich können die Flächen der **Aufgabe 2.1** im Arbeitsheft berechnet werden. Die Aufgaben **2.2** und **2.3** enthalten unvollständige Tabellen, welche Ergänzt werden müssen. Um die auf symbolischer Ebene verfassten Aufgaben in die ikonische Ebene zu übersetzen, sollen Lernende Skizzen der Rechtecke und Quadrate machen, die gegebenen Längen, Breiten, Umfänge oder Flächen blau und die gesuchten Elemente rot markieren. Die Flächenangaben sind relativ kompliziert gewählt, in einem Fall sogar mit einem Dezimalbruch. D.h., der Taschenrechner muss verwendet werden. Gleichzeitig könnten aber auch einfachere Zahlen gewählt werden, um gleichzeitig die Rechenfertigkeiten zu trainieren. Haben die Lernenden kein Operationsverständnis zur Division, kann von hier sogar ein Einstieg in die Division mittels Umkehroperation ausgehen. Dieser müsste aber mit Übungen auf enaktiver, ikonischer und symbolischer Ebene zum Aufteilen und zum Verteilen weiter Unterstützt werden.

Ab **Aufgabe 3** müssen im Themenbuch und Arbeitsheft Flächen von Figuren berechnet werden, bei denen entweder das Modell des Ergänzens oder jenes des Zerlegens gewählt werden muss. Da eine Teilfläche eines Rechteckes fehlt kann die zu berechnende Fläche in kleinere Rechtecke zerlegt werden, welche addiert die Gesamtfläche ergeben. Die zweite Möglichkeit nennt sich Ergänzen, da eine Figur zu einem grösseren Rechteck ergänzt wird. Die überlappenden Teile werden berechnet und von der Fläche des grossen Rechtecks subtrahiert. Beide Modelle können thematisiert werden, um die Teil-Teil-Ganzes-Beziehung umfangreich anzusprechen. Die **Aufgabe 4** des Themenbuchs lässt die Teil-Teil-Ganzes Beziehung durch die Verwendung von farbigen, durchsichtigen Folien handelnd darstellen. Die Aufgabe glänzt ebenfalls durch natürliche Differenzierungsmöglichkeiten.

7 Kapitel 8: Rechnen mit Variablen (S. 80 – 85)

Für das Kapitel 8 setzen Keller et al. voraus, dass

- die Lernenden Variablen in Sachkontexten anwenden können und über die Einsicht der Variable als Zahlersatz verfügen,
- die Lernenden die Grundoperationen mit ganzen Zahlen beherrschen und dass
- die Lernenden vertraut mit den Formeln zur Berechnung von Flächeninhalt und Umfang vertraut sind (vgl. 2011c, Kapitel 8, S. 1).

7.1 Kapitel 8a: Terme und Termumformungen (S. 80 – 83)

7.1.1 Lehrplanbezüge (vgl. Lehrmittelverlag Zürich, 2015, o.S.)

Handlungs-/Themenaspekte:

- Operieren und Benennen
- Erforschen und Argumentieren
- Mathematisieren und Darstellen

Kompetenzen:

Kompetenzbereich Zahl und Variable:

- Arithmetische Begriffe und Symbole verstehen und verwenden, Zahlen lesen und schreiben
- Terme verglichen und umformen, Gleichungen lösen, Gesetze und Regeln anwenden
- Aussagen, Vermutungen und Ergebnisse zu Zahlen und Variablen erläutern, überprüfen und begründen
- Rechenwege darstellen, beschreiben, austauschen und nachvollziehen
- Anzahlen, Zahlenfolgen und Terme veranschaulichen, beschreiben und verallgemeinern
-

Form und Raum

- *Begriffe und Symbole verstehen und verwenden*

Kompetenzbereich Grössen, Funktionen, Daten und Zufall:

- Sachsituationen mathematisieren, darstellen, berechnen sowie Ergebnisse interpretieren und überprüfen
- Terme, Formeln, Gleichungen und Tabellen mit Sachsituationen konkretisieren.

7.1.2 Lerninhalte: Terme und Termumformungen (S. 80 – 83)

Tabelle 36: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zum Kapitel Terme und Termumformungen*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
1a	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
1b	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
1c	Addition, Multiplikation
2a	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
2b	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
3a	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
3b	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
4	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
5	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
6a	Mathematisieren, Addition
6b	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
6c	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
6d	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
7a	Mathematisieren, Subtraktion
7b	Mathematisieren, Subtraktion, Multiplikation
7c	Mathematisieren, Subtraktion, Multiplikation
7d	Mathematisieren, Subtraktion, Multiplikation
8	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation

Tabelle 37: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Arbeitsheft zum Kapitel Terme und Termumformungen*

Aufgabe	**vorausgesetzte Basiskompetenzen**
1.1	Mathematisieren, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Multiplikation
1.2	Mathematisieren, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Multiplikation
2.1	Mathematisieren, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Multiplikation
2.2	Mathematisieren, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Multiplikation
3.1	Mathematisieren, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Multiplikation
3.2	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
3.3	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
3.4	Mathematisieren, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Multiplikation
4.1	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
4.2	Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Multiplikation
5.1	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
6.1	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
6.2	Addition, Multiplikation
6.3	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
7.1	Mathematisieren, Subtraktion, Multiplikation
7.2	Subtraktion, Multiplikation
7.3	Subtraktion, Multiplikation
7.4	Addition, Subtraktion, Multiplikation
8.1	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation
8.2	Addition, Subtraktion, Multiplikation
9.1	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
9.2	Mathematisieren, Multiplikation, Addition

7.1.3 Lehr- und Lernverständnis: Terme und Termumformungen (S. 80 – 83)

Operationsverständnis der Multiplikation und der Addition

Das Teilkapitel 8a beginnt mit eher leichten **Aufgabe 1a** im Themenbuch, welche aber auf rein symbolischer Ebene bearbeitet werden sollen und es werden keine Beispiele festgehalten. Für Lernende mit schwachen Mathematikleistungen, die aber über das Operationsverständnis der Multiplikation verfügen, kann diese Aufgabe deshalb angepasst und ausgebaut werden, um das Operationsverständnis im Zusammenhang mit Variablen weiter zu trainieren. Anstatt, dass einfach ein Term zu Bestellungen gebildet wird, könnte mit einer Tabelle gearbeitet werden, die mit einem Beispiel beginnt:

Tabelle 38: *Tabelle zur Unterstützung und Differenzierung der Aufgabe 1a im Themenbuch*

Bestellung	**Term Fisch-Menü**	**Term Pasta-Menü**	**Term ganze Bestellung**
a) 3-mal Fisch, 5-mal Pasta	3f	5p	3f + 5p
b) 6-mal Fisch, 2-mal Pasta			
c)	4f	9p	
d)			5f + 6p
...	...	...	...

Danach können die Preise einer Imbissbude gegeben werden:

Das Fisch Menü kostet 9 Fr. / Das Pasta-Menü 8 Fr.

Die Lernenden berechnen in einer weiteren Tabelle die Gesamtpreise:

Tabelle 39: *Tabelle zur Unterstützung und Differenzierung der Aufgabe 1c im Themenbuch*

Bestellung	**Term**	**Rechnung**	**Gesamtpreis**
a)	3f + 5p	3 x 9 Fr. + 5 x 8 Fr.	67 Fr.
b)			
...	...	...	...

Die **Aufgabe 1.1** des Arbeitsheftes funktioniert ähnlich, allerdings sind die Getränkepreise mit Dezimalbrüchen angegeben (4.20 Fr.). Überfordert dies die Schülerinnen und Schüler, dürfen sie die Preise auf ganze Frankenbeträge runden. Haben die Lernenden diese Aufgaben erfolgreich gelöst, kann auch die **Aufgabe 1.2** bearbeitet werden, welche nun drei verschiedene Variablen bereithält. Es sollen wiederum Terme für Bestellungen gebildet werden. Auch hier kann eine Tabelle mit einem Beispiel (Morgen) unterstützend wirken:

Tabelle 40: *Tabelle zur Unterstützung und Differenzierung der Aufgabe 1.2a im Arbeitsheft*

Bestellung	**Vanillequark (v)**	**Apfelringe (a)**	**Torte (t)**	**Term**
Morgen	6v	2a	1t	6v + 2a + 1t
Mittag				
Abend				

Wiederum können anschliessend mit einer weiteren Tabelle die Preise berechnet werden (vgl. Tabelle 40).

Schwieriger wird die **Aufgabe 1.2c**, weil das bisherige System (eine Variable repräsentiert den Preis einer Ware) umgekehrt wird. Es gibt Variablen für Personen, welche eine Speise bestellen, der Preis ist bekannt, er muss also mit der einer unbekannten Anzahl von Menschen multipliziert werden. Die Menschen werden zusätzlich in zwei Gruppen kategorisiert (die Anzahl der Erwachsenen = e und die Anzahl der Jugendlichen = j). In einem zweiten Schritt müssen nun auch die Preise mit Variablen ersetzt werden, d.h., die Terme werden deutlich schwieriger, da das Abstraktionsniveau anwächst und das Arbeitsgedächtnis stärker gefordert wird (es müssen bereits fünf Variablen zugeordnet werden). Gelingt die Bildung für den Term mit Preisvariablen nicht, kann beispielsweise der Gesamtpreis berechnet werden (vgl. Tabelle 40).

Für die **Aufgaben 2.1**, **2.2** und **3.1** gilt dasselbe: Es werden wiederum höhere Anforderungen an das Arbeitsgedächtnis gestellt (10 Variablen), das Abstraktionsniveau erhöht sich aufgrund von bis zu drei Variablen in einem Term. Zusätzlich werden Terme auch mit Klammern geschrieben (Distributivgesetz, z.B. e(f + m)) und die Subtraktion kommt als weitere Basiskompetenz hinzu. Hatten Lernende bereits Schwierigkeiten mit der Aufgabe 1.2c, kann davon ausgegangen werden, dass die Herausforderungen dieser Aufgabe für sie zu gross sind.

Die weiteren Aufgaben nehmen bezüglich der Komplexität weiterhin zu, die Aufgaben eignen sich nicht, um Basiskompetenzen zu erwerben und eine Differenzierung wird immer schwieriger, weil das Ziel stets algebraische Termumformungen sind – meist ohne Sachbezug.

Training der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung

Die **Aufgabe 2** des Themenbuchs kann hingegen einfacher bearbeitet werden. Es soll eine Rechengeschichte zum Term 7p + 11f (7 Pasta-Menüs, 11 Fisch-Menüs) erzählt werden. Die Personen sollen dabei auf fünf 4er-Tischen gesetzt werden. Die Aufgabe kann ausgebaut werden, indem mehrere Geschichten erzählt werden sollen. Die Skizze der 4er-Tische aus dem Themenbuch kann mehrfach kopiert werden. Die Lernenden sollen die Personen und deren Menüs in verschiedenen Kombinationen den Tischen zuordnen und die Skizzen beschriften.

7.2 Kapitel 8b: Gleichungen (S. 84 – 85)

7.2.1 Lehrplanbezüge (vgl. Lehrmittelverlag Zürich, 2015, o.S.)

Handlungs-/Themenaspekte:

- Operieren und Benennen
- Erforschen und Argumentieren
- Mathematisieren und Darstellen

Kompetenzen:

Kompetenzbereich Zahl und Variable:

- Arithmetische Begriffe und Symbole verstehen und verwenden, Zahlen lesen und schreiben
- Addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren und potenzieren
- Terme vergleichen und umformen, Gleichungen lösen, Gesetze und Regeln anwenden
- Aussagen, Vermutungen und Ergebnisse zu Zahlen und Variablen erläutern, überprüfen und begründen
- Rechenwege darstellen, beschreiben, austauschen und nachvollziehen
- Anzahlen, Zahlenfolgen und Terme veranschaulichen, beschreiben und verallgemeinern

Form und Raum

- *Begriffe und Symbole verstehen und verwenden*
- *Längen, Flächen und Volumen bestimmen und berechnen*

Kompetenzbereich Grössen, Funktionen, Daten und Zufall:

- Begriffe und Symbole zu Grössen, Funktionen, Daten und Zufall verstehen und verwenden
- Grössen schätzen, messen, umwandeln, runden und mit ihnen rechnen
- Sachsituationen mathematisieren, darstellen, berechnen sowie Ergebnisse interpretieren und überprüfen
- Terme, Formeln, Gleichungen und Tabellen mit Sachsituationen konkretisieren.

7.2.2 Lerninhalte: Gleichungen (S. 84 – 85)

Tabelle 41: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Themenbuch zum Kapitel Gleichungen*

Aufgabe	**vorausgesetzte Basiskompetenzen**
1a	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
1b	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
2a	Mathematisieren, Addition, Multiplikation
2b	Addition, Subtraktion Multiplikation, Division
3a	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation
3b	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
4a	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
4b	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
4c	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
4d	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
5a	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation
5b	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
5c	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
6a	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation
6b	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation
7a	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
7b	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
7c	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
7d	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
8	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division

Tabelle 42: *Aufschlüsselung der Basiskompetenzen der Aufgaben im Arbeitsheft zum Kapitel Gleichungen*

Aufgabe	vorausgesetzte Basiskompetenzen
2.1	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
2.2	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
2.3	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
2.4	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
2.5	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
3.1	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
3.2	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
4.1	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
5.1	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
7.1	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
8.1	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
8.2	Mathematisieren, Addition, Multiplikation, Division
8.3	Mathematisieren, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division

7.2.3 Lehr- und Lernverständnis: Gleichungen (S. 84 – 85)

Mathematisieren

Damit Lernende Aufgaben zum Thema Gleichungen lösen können, werden für fast alle Aufgaben das Operationsverständnis aller Grundrechenarten vorausgesetzt, da für das Lösen einer Gleichung in der Regel auch die Umkehroperationen der in der Gleichung verwendeten Grundrechenart zur Anwendung kommt. Für Lernende mit schwachen Mathematisierungsfähigkeiten oder schwachem Leseverständnis kommt hinzu, dass fast alle Aufgaben sprachlich verfasst sind, d.h., auch wenn die mathematischen Voraussetzungen gegeben sind, müssen die Kontextsituationen zuerst erfasst werden. Um die Informationen der Aufgabe zu strukturieren, können die Lernenden Skizzen anfertigen und die numerischen Angaben in Tabellen übertragen.

Tabelle 43: *Zusammenfassung der Aufgabe 2.2 in tabellarischer Form; die grünen Angaben sollen von Lernenden ergänzt werden.*

	Honigmelonen	Gemüse	Salat
Preis	y Fr.	280 Fr.	150 Fr.
Anzahl	60	1	1

Die Aufgaben verfügen allesamt über einen ähnlichen Schwierigkeitsgrad, mit dem Unterschied, dass ab **Aufgabe 5** zwei Terme gebildet werden müssen – einen für die linke Seite und einen für die rechte Seite der Gleichung: $15y + 144 = 18y + 81$ (Aufgabe 5.1 des Arbeitsheftes). Die Aufgaben zuvor bestehen bloss aus einem Term und dessen Äquivalent als natürliche Zahl: $60y + 280 + 150 = 700$ (Aufgabe 2.2 des Arbeitsheftes).

Validierung der Aufgaben

Da die Zahlen und Kontextsituationen gut gewählt sind, können die Lernenden die meisten Aufgaben mit Erfahrungen aus dem Alltag validieren. Die Miete eines Pedalos, der Preis einer Melone oder einer Pizza kann von den Lernenden ungefähr abgeschätzt werden. Um die Rechenschritte zu kontrollieren bietet das Webportal einen Gleichungslöser an (vgl. Aufgabe 4 des Themenbuchs), der Gleichungen in einzelnen Schritten löst und Schritt für Schritt erklärt, wie vorgegangen werden soll.

8 Basistests

Im Allgemeinen lehnen sich die Tests an das Vorbild von Moser Opitz et al., BASIS-MATH 4 – 8 (vgl. 2010). Da keine Normierung stattgefunden hat, lassen sich lediglich qualitative Rückschlüsse ziehen. Es soll interessieren, wie Lernende rechnen und welche Kompetenzen sie bereits mitbringen.

Die Basistests passen zu den vorausgesetzten Basiskompetenzen eines jeden Kapitels, d.h., sie überprüfen, ob Lernende über die vorausgesetzten Basiskompetenzen verfügen. Sie sollten mit einzelnen Lernenden durchgeführt und qualitativ beurteilt werden.

8.1 Hinweise zur Durchführung

Allgemein gilt, dass die Lernenden jegliches Material brauchen dürfen (schriftliche und halbschriftliche Rechnungen, Hunderterfelder, Malwinkel, Zahlenstrahlen, Wendepunkte usw.). Die Lernenden sollten aber kein Material zur Verfügung gestellt bekommen, welches sie nicht kennen. Die Hilfsmittel müssten zuerst eingeführt werden. Verfügen die Lernenden über tragfähige Vorstellungen zu den einzelnen Basiskompetenzen und haben ausgebildete Rechenfertigkeiten, wären lediglich Wendepunkte für die Übungen zur Multiplikation und Division nötig. Es gibt keine Zeitbegrenzung.

8.1.1 Mengenerfassen und Zählkompetenz

Beispiel:

Mengenerfassen und Zählkompetenz|

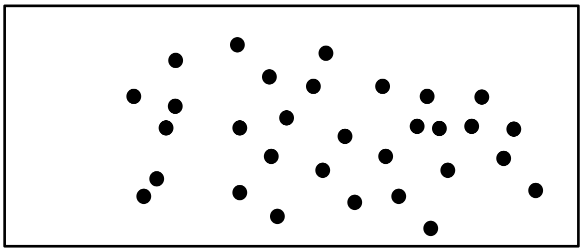
Zähle mündlich in 2er-Schritten vorwärts:	114, ……., ……., ……., ……., ……., ……., …….
Zähle mündlich in 10er-Schritten vorwärts:	456, ……., ……., ……., ……., ……., ……., …….
Zähle mündlich in 100er-Schritten rückwärts:	1321, ……., ……., ……., ……., ……., …....., ….....

Die Lernenden sollen mündlich mindestens sieben Schritte weiterzählen. Falls ein Fehler gemacht wird, kann abgebrochen werden.

8.1.2 Dezimalsystem

Beispiel:

Dezimalsystem, Bündeln|



a) Auf einem Tisch liegen 32 Kekse. Wie viele 6er-Packungen kannst du damit ganz füllen?

Antwort: ……………………………………………

Die Lernenden dürfen keine enaktiven Bündelungen vornehmen, d.h., sie sollten die Bündelungen gedanklich vollziehen.

Beispiel:

Dezimalsystem, Eigenschaft der Basis 10|Löse die Terme.

a) 100 x 10 = ………… b) 100 x 100 = ……………. c) 10‘000 : 100 = ……. d) 10‘000 : 1000 = ……

Es soll überprüft werden, ob die Lernenden bereits Einsichten in die Eigenschaft der Basis 10 erhielten.

8.1.3 Teil-Teil-Ganzes-Beziehung

Beispiel:

Teil-Teil-Ganzes-Beziehung| Löse die Terme.

a) 66 + …….. = 90 b) 1391 + …….. = 1400 c) 60 – …….. = 52 d) 1000 – …….. = 972

Die Aufgaben sind so aufgebaut, dass jeweils im Zahlenraum bis 100 und bis 10'000 ergänzt werden muss.

8.1.4 Addition

Beispiel:

Addition| Löse die Terme.

a) 126 + 60 = …….. b) 67 + 9 = …….. c) 38 + 26 = …….. d) 99 + 199 = ……..

a) Für die Aufgabe a müssen Stellenwerte addiert werden.

b) Die Aufgabe b beinhaltet einen Dezimalstellenübergang.

c) Aufgabe c) kombiniert die Aufgaben a und b.

d) Für die Aufgabe d müssen die Lernenden die Rechenstrategie des Vereinfachens anwenden.

8.1.5 Subtraktion

Beispiel:

Subtraktion| Löse die Terme.

a) 265 – 40 = …….. b) 83 – 7 = …….. c) 327 – 30 = …….. d) 325 – 127 = ……..

a) Für die Aufgabe a müssen Stellenwerte subtrahiert werden.

b) Die Aufgabe b beinhaltet einen *Dezimalstellenübergang*.

c) Aufgabe c) kombiniert die Aufgaben a und b.

d) Für die Aufgabe d müssen die Lernenden die Rechenstrategie des Schrittweisen Rechnens anwenden.

8.1.6 Multiplikation

Beispiel:

Multiplikation| Der Term lautet 3 x 7 = 21.

a) Erzähle eine Rechengeschichte. oder b) Stelle eine Multiplikation mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 5 x 7 = …….. d) 4 x 6 = …….. e) 6 x 13 = …….. f) 50 x 60 = …….. g) 120 x 20 = ……..

Die Aufgaben a und b prüfen jeweils das Operationsverständnis. Die Aufgaben c und d prüfen die Automatisierung. Hier ist auf die Geschwindigkeit der Lernenden zu achten. Die Aufgabe f prüft die Einsichten in die Eigenschaft der Basis 10 und die Aufgabe g, ob Lernende Zahlen zerlegt multiplizieren können (Distributivgesetz).

8.1.7 Division

Beispiel:

Division| Der Term lautet 9 : 3 = 3.

a) Erzähle eine Rechengeschichte. oder b) Stelle eine Division mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 32 : 8 = …….. d) 20 : 4 = …….. e) 91 : 7 = …….. f) 240 : 60 = …….. g) 600 : 5 = ……..

Die Aufgaben a und b prüfen jeweils das Operationsverständnis. Die Aufgaben c und d prüfen die Automatisierung. Hier ist auf die Geschwindigkeit der Lernenden zu achten. Die Aufgabe f prüft die Einsichten in die Eigenschaft der Basis 10 und die Aufgabe g, ob Lernende Zahlen zerlegt dividieren können (Distributivgesetz).

8.1.8 Mathematisieren

Beispiel:

Mathematisieren|

a) Petra hat dreimal so viele Fussballbildchen wie Mark. Er besitzt 20 Bildchen.

Wie lautet der Term? …………………………… Resultat: ……..

b) Gregor möchte einen Sack voll mit Sugus (Inhalt: 64 Stück) an sich und seine 3 Freunde verteilen.

Wie lautet der Term? …………………………… Resultat: ……..

Die Aufgaben zum Mathematisieren sind einfache Sachaufgaben, die beurteilen lassen, ob Lernende basale Modellbildungen entwickeln können.

8.2 Kopiervorlagen

Die Kopiervorlagen folgen ab Seite 77.

Basistest zum Kapitel 2a, Regeln und Gesetze

Basis Kompetenzen: Addition, Subtraktion; Multiplikation, Division, Mathematisieren

Addition| Löse die Terme.

a) 126 + 60 = …….. b) 67 + 9 = …….. c) 38 + 26 = …….. d) 99 + 199 = ……..

Subtraktion| Löse die Terme.

a) 265 – 40 = …….. b) 83 – 7 = …….. c) 327 – 30 = …….. d) 325 – 127 = ……..

Multiplikation| Der Term lautet 3 x 7 = 21.

a) Erzähle eine Rechengeschichte. oder b) Stelle eine Multiplikation mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 5 x 7 = …….. d) 4 x 6 = …….. e) 6 x 13 = …….. f) 50 x 60 = …….. g) 120 x 20 = ……..

Division| Der Term lautet 9 : 3 = 3.

a) Erzähle eine Rechengeschichte. oder b) Stelle eine Division mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 32 : 8 = …….. d) 20 : 4 = …….. e) 91 : 7 = …….. f) 240 : 60 = …….. g) 600 : 5 = ……..

Mathematisieren|

a) Petra hat dreimal so viele Fussballbildchen wie Mark. Er besitzt 20 Bildchen.

Wie lautet der Term? …………………………… Resultat: ……..

b) Gregor möchte einen Sack voll mit Sugus (Inhalt: 64 Stück) an sich und seine 3 Freunde verteilen.

Wie lautet der Term? …………………………… Resultat: ……..

Basistest zum Kapitel 2b, Variablen

Basis Kompetenzen: Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Subtraktion; Multiplikation, Division, Mathematisieren

Addition| Löse die Terme.

a) 118 + 40 = …….. b) 48 + 7 = …….. c) 25 + 39 = …….. d) 201 + 298 = ……..

Subtraktion| Löse die Terme.

a) 356 – 50 = …….. b) 67 – 9 = …….. c) 442 – 70 = …….. d) 242 – 44 = ……..

Teil-Teil-Ganzes-Beziehung| Löse die Terme.

a) 66 + …….. = 90 b) 1391 + …….. = 1400 c) 60 – …….. = 52 d) 1000 – …….. = 972

Multiplikation| Der Term lautet 4 x 3 = 12.

a) Erzähle eine Rechengeschichte. oder b) Stelle eine Multiplikation mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 3 x 8 = …….. d) 7 x 3 = …….. e) 8 x 14 = …….. f) 4 x 300 = …….. g) 14 x 20 = ……..

Division| Der Term lautet 15 : 3 = 5.

a) Erzähle eine Rechengeschichte. oder b) Stelle eine Division mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 42 : 7 = …….. d) 18 : 3 = …….. e) 54 : 3 = …….. f) 270 : 9 = …….. g) 440 : 4 = ……..

Mathematisieren|

a) Am Mittwoch hat Felix 2 Stunden Mathematik und 2 Stunden Deutsch. Am Donnerstag hat er doppelt so viele Lektionen.

Wie lautet der Term? …………………………………. Resultat: ……..

b) Bettina kaufte 3 Schokoriegel für 3.90 Fr. Wie viel kostet ein Riegel?

Wie lautet der Term? ………………………………… Resultat: ……..

Basistest zum Kapitel 2c, Teiler, Vielfache und Primzahlen

Basis Kompetenzen: Multiplikation, Division

Multiplikation|

a) Erzähle eine Rechengeschichte. oder b) Stelle eine Multiplikation mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 5 x 8 = …….. d) 6 x 9 = …….. e) 6 x 19 = …….. f) 60 x 70 = …….. g) 110 x 30 = ……..

Division|

a) Erzähle eine Rechengeschichte. oder b) Stelle eine Division mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 36 : 9 = …….. d) 28 : 7 = …….. e) 63 : 3 = …….. f) 200 : 20 = …….. g) 460 : 5 = ……..

Basistest zum Kapitel 3a, Daten darstellen

Basis Kompetenzen: Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Division, Multiplikation, Dezimalsystem

Addition| Löse die Terme.

a) 243 + 50 = …….. b) 74 + 7 = …….. c) 46 + 27 = …….. d) 198 + 98 = ……..

Subtraktion| Löse die Terme.

a) 288 – 60 = …….. b) 54 – 8 = …….. c) 324 – 40 = …….. d) 251 – 56 = ……..

Teil-Teil-Ganzes-Beziehung| Löse die Terme.

a) 72 + …….. = 100 b) 1286 + …….. = 1300 c) 70 – …….. = 61 d) 1000 – …….. = 984

Mengenerfassen und Zählkompetenz|

Zähle mündlich in 2er-Schritten vorwärts: 114, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Zähle mündlich in 10er-Schritten vorwärts: 456, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Zähle mündlich in 100er-Schritten rückwärts: 1321, …….., …….., …….., …….., …….., …....

Dezimalsystem, Eigenschaft der Basis 10|Löse die Terme.

a) 19 x 10 = ………… b) 139 x 1000 = ……………. c) 1‘200 : 10 = ……… d) 12‘600 : 100 = ………

Multiplikation| Der Term lautet 6 x 4 = 24.

a) Erzähle eine Rechengeschichte oder b) Stelle eine Multiplikation mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 8 x 7 = …….. d) 6 x 9 = …….. e) 11 x 15 = …….. f) 900 x 2 = …….. g) 150 x 30= ……..

Division| Der Term lautet 14 : 7 = 2.

a) Erzähle eine Rechengeschichte. oder b) Stelle eine Division mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 35 : 5 = …….. d) 12 : 3 = …….. e) 26 : 2 = …….. f) 180 : 2 = …….. g) 1220 : 4 = ……..

Basistest zum Kapitel 3b, Grössen und Prozente im Alltag

Basis Kompetenzen: Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Dezimalsystem, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Mathematisieren

Addition| Löse die Terme.

a) 122 + 30 = …….. b) 29 + 8 = …….. c) 56 + 5 = …….. d) 99 + 99 = ……..

Subtraktion| Löse die Terme.

a) 356 – 40 = …….. b) 84 – 7 = …….. c) 579 – 90 = …….. d) 465 – 69 = ……..

Teil-Teil-Ganzes-Beziehung| Löse die Terme.

a) 56 + …….. = 100 b) 1378 + …….. = 1400 c) 50 – …….. = 46 d) 1400 – …….. = 1391

e) $\frac{1}{5}$ von 10 = …….. f) $\frac{3}{4}$ von 60 = ……..

Mengenerfassen und Zählkompetenz|

Zähle mündlich in 5er-Schritten vorwärts: 121, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

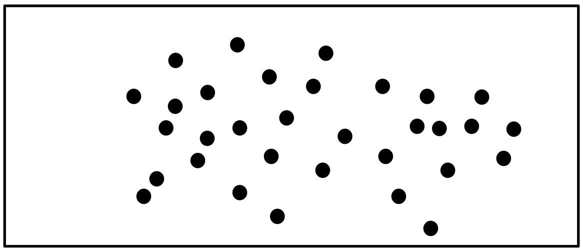
Zähle mündlich in 10er-Schritten rückwärts: 341, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Zähle mündlich in 100er-Schritten vorwärts: 726, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Dezimalsystem, Eigenschaft der Basis 10|Löse die Terme.

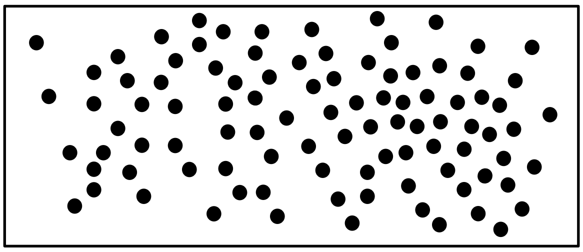
a) 10 x 10 = ………… b) 100 x 1000 = ……………. c) 1‘000 : 10 = ………. d) 10‘000 : 100 = ………

Dezimalsystem, Bündeln|



a) Auf einem Tisch liegen 32 Kekse. Wie viele 6er-Packungen kannst du damit ganz füllen?

Antwort: ……………………………………………



b) Auf einem Tisch liegen 96 Kekse. Wie viele 10er-Packungen kannst du damit ganz füllen?

Antwort: ……………………………………………

Multiplikation| Der Term lautet 3 x 6 = 18.

a) Erzähle eine Rechengeschichte oder b) Stelle eine Multiplikation mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 5 x 8 = …….. d) 4 x 7 = …….. e) 9 x 15 = …….. f) 400 x 5 = …….. g) 110 x 50 = ……..

Division| Der Term lautet 24 : 8 = 3.

a) Erzähle eine Rechengeschichte. oder b) Stelle eine Division mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 25 : 5 = …….. d) 28 : 4 = …….. e) 96 : 8 = …….. f) 160 : 2 = …….. g) 930 : 3 = ……..

Mathematisieren|

a) Kim isst jeden Morgen zwei Brötchen mit Konfitüre. Wie viele Konfi-Brötchen isst sie

- in einer Woche? Term: …………………….. Antwort: ………
- in einem Monat? Term: …………………….. Antwort: ………
- in einem Jahr? Term: …………………….. Antwort: ………

b) Moritz bekam von seinen Grosseltern eine Packung mit 24 Pralinen. Er ass jeden Tag drei Stück – jetzt ist sie leer. Wie lange hielt die Packung?

Term: …………………….. Antwort: ………

Basistest zum Kapitel 3c, Flächen und Volumen

Basis Kompetenzen: Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Dezimalsystem, Multiplikation, Division, Mathematisieren

Teil-Teil-Ganzes-Beziehung| Löse die Terme.

a) 45 + …….. = 100 b) 1291 + …….. = 1300 c) 90 – …….. = 85 d) 1200 – …….. = 1190

e) $\frac{1}{4}$ von 8 = …….. f) $\frac{3}{7}$ von 42 = ……..

Mengenerfassen und Zählkompetenz|

Zähle mündlich in 2er-Schritten weiter: 105, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Zähle mündlich in 10er-Schritten weiter: 268, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Zähle mündlich in 100er-Schritten rückwärts: 1320, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Dezimalsystem, Eigenschaft der Basis 10| Löse die Terme.

a) 100 x 10 = ………… b) 100 x 100 = ……………. c) 10‘000 : 100 = ……. d) 10‘000 : 1000 = ……

Multiplikation| Der Term lautet 5 x 4 = 20.

a) Erzähle eine Rechengeschichte oder b) Stelle eine Multiplikation mit Material dar.
(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 4 x 3 = …….. d) 5 x 6 = …….. e) 11 x 11 = …….. f) 20 x 7 = …….. g) 220 x 30 = ……..

Division| Der Term lautet 18 : 2 = 9.

a) Erzähle eine Rechengeschichte. oder b) Stelle eine Division mit Material dar.
(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 24 : 3 = …….. d) 24 : 4 = …….. e) 72 : 6 = …….. f) 140 : 7 = …….. g) 660 : 6 = ……..

Mathematisieren|

a) Markos Schulweg misst 2 km. Er geht am Morgen zur Schule, über Mittag nach Hause und am Nachmittag wieder zur Schule. Wie weit musste er, bis er wieder am Abend zu Hause ist, Velo fahren?

Term: …………………………. Antwort: ………….

b) Zoé schrieb in einer Lektion (45 Minuten) einen Aufsatz von 3 Seiten. Wie lange brauchte sie, um eine Seite zu schreiben?

Term: …………………………. Antwort: ………….

Basistest zum Kapitel 5, Regelmässigkeiten des Zufalls

Basis Kompetenzen: Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Multiplikation, Division, Mathematisieren

Addition| Löse die Terme.

a) 137 + 40 = …….. b) 26 + 8 = …….. c) 63 + 29 = …….. d) 98 + 199 = ……..

Teil-Teil-Ganzes-Beziehung| Löse die Terme.

a) 67 + …….. = 100 b) 1356 + …….. = 1400 c) 40 – …….. = 32 d) 1400 – …….. = 1350

e) $\frac{1}{6}$ von 12 = …….. f) $\frac{3}{5}$ von 50 = ……..

Mengenerfassen und Zählkompetenz|

Zähle mündlich in 5er-Schritten vorwärts: 112, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Zähle mündlich in 10er-Schritten rückwärts: 268, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Zähle mündlich in 100er-Schritten vorwärts: 724, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Multiplikation| Der Term lautet 3 x 5 = 15.

a) Erzähle eine Rechengeschichte oder b) Stelle eine Multiplikation mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 7 x 9 = …….. d) 6 x 4 = …….. e) 11 x 12 = …….. f) 30 x 8 = …….. g) 110 x 40 = ……..

Division| Der Term lautet 28 : 7 = 4.

a) Erzähle eine Rechengeschichte. oder b) Stelle eine Division mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 12 : 2 = …….. d) 36 : 6 = …….. e) 52 : 4 = …….. f) 160 : 4 = …….. g) 720 : 6 = ……..

Basistest zum Kapitel 6a, Negative Zahlen oder das «Unter-Null»

Basis Kompetenzen: Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Dezimalsystem, Addition, Subtraktion, Mathematisieren

Teil-Teil-Ganzes-Beziehung| Löse die Terme.

a) 45 + …….. = 100 b) 1291 + …….. = 1300 c) 90 – …….. = 85 d) 1200 – …….. = 1190

e) $\frac{1}{4}$ von 8 = …….. f) $\frac{3}{7}$ von 42 = ……..

Mengenerfassen und Zählkompetenz|

Zähle mündlich in 2er-Schritten weiter: 105, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Zähle mündlich in 10er-Schritten weiter: 268, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Zähle mündlich in 100er-Schritten rückwärts: 1320, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Dezimalsystem, Eigenschaft der Basis 10|Löse die Terme.

a) 100 x 10 = ………… b) 100 x 100 = …………… c) 10‘000 : 100 = …… d) 10‘000 : 1000 = ……

Multiplikation| Der Term lautet 5 x 4 = 20.

a) Erzähle eine Rechengeschichte oder b) Stelle eine Multiplikation mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 4 x 3 = …….. d) 5 x 6 = …….. e) 11 x 11 = …….. f) 20 x 7 = …….. g) 220 x 30 = ……..

Division| Der Term lautet 18 : 2 = 9.

a) Erzähle eine Rechengeschichte. oder b) Stelle eine Division mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 24 : 3 = …….. d) 24 : 4 = …….. e) 72 : 6 = …….. f) 140 : 7 = …….. g) 660 : 6 = ……..

Mathematisieren|

a) Markos Schulweg misst 2 km. Er geht am Morgen zur Schule, über Mittag nach Hause und am Nachmittag wieder zur Schule. Wie weit musste er, bis er wieder am Abend zu Hause ist, Velo fahren?

Term: …………………………. Antwort: ………….

b) Zoé schrieb in einer Lektion (45 Minuten) einen Aufsatz von 3 Seiten. Wie lange brauchte sie, um eine Seite zu schreiben?

Term: …………………………. Antwort: ………….

Basistest zum Kapitel 6b, Koordinaten

Basiskompetenzen: Mengenerfassen und Zählkompetenz, Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Dezimalsystem, Addition, Subtraktion, Multiplikation

Teil-Teil-Ganzes-Beziehung| Löse die Terme.

a) 88 + …….. = 100 b) 992 + …….. = 1000 c) 60 – …….. = 51 d) 1700 – …….. = 1692

Mengenerfassen und Zählkompetenz|

Zähle mündlich in 2er-Schritten weiter: 107, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

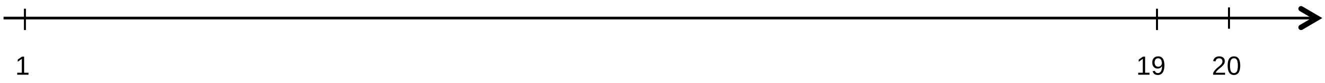
Zähle mündlich in 10er-Schritten weiter: 371, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Zähle mündlich in 100er-Schritten rückwärts: 1281, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Dezimalsystem, Eigenschaft der Basis 10|Löse die Terme.

a) 10 x 1000 = ………… b) 100 x 1000 = …………… c) 10‘000 : 10 = …… d) 10‘000 : 100 = ……

Dezimalsystem, Zahlenstrahl| Zeichne die folgenden Zahlen ein: 5, 16, 19.8



Addition| Löse die Terme.

a) 136 + 60 = …….. b) 87 + 9 = …….. c) 48 + 26 = …….. d) 199 + 199 = ……..

Subtraktion| Löse die Terme.

a) 245 – 40 = …….. b) 53 – 7 = …….. c) 347 – 40 = …….. d) 426 – 128 = ……..

Multiplikation| Der Term lautet 5 x 5 = 25.

a) Erzähle eine Rechengeschichte oder b) Stelle eine Multiplikation mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 9 x 3 = …….. d) 4 x 6 = …….. e) 12 x 15 = …….. f) 30 x 8 = …….. g) 120 x 20 = ……..

Basistest zum Kapitel 6c, Grundoperationen

Basiskompetenzen: Dezimalsystem, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Mathematisieren

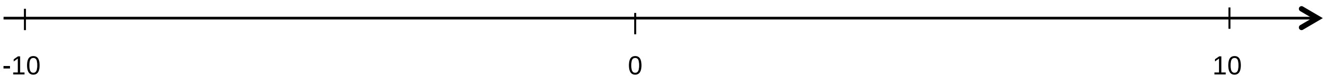
Addition| Löse die Terme.

a) 136 + 60 = …….. b) 87 + 9 = …….. c) 48 + 26 = …….. d) 199 + 199 = ……..

Subtraktion| Löse die Terme.

a) 245 – 40 = …….. b) 53 – 7 = …….. c) 347 – 40 = …….. d) 426 – 128 = ……..

e) Zeichne die folgenden Zahlen ein: -5, 8, -8



b) Wie gross ist die Differenz zwischen -8 und 8? Antwort: ……

Multiplikation| Der Term lautet 5 x 5 = 25.

a) Erzähle eine Rechengeschichte oder b) Stelle eine Multiplikation mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 5 x 7 = …….. d) 4 x 6 = …….. e) 11 x 15 = …….. f) 50 x 6 = …….. g) 130 x 30 = ……..

Division| Der Term lautet 18 : 2 = 9.

a) Erzähle eine Rechengeschichte. oder b) Stelle eine Division mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 16 : 8 = …….. d) 81 : 9 = …….. e) 39 : 3 = …….. f) 180 : 9 = …….. g) 204 : 4 = ……..

Mathematisieren|

a) Am Dienstag war es 5 Grad warm. Am Mittwoch tauchte eine Kaltfront auf, das Thermometer zeigte nur noch -3 Grad an. Wie hoch ist der Temperaturunterschied?

Term: …………………………. Antwort: …………

b) Karl geht für den Pausenkiosk einkaufen. Für ein Sandwich werden 4 Scheiben Käse benötigt. Es müssen 15 Sandwiches hergestellt werden.

Term: …………………………. Antwort: …………

Basistest zum Kapitel 7a, Umfang und Flächeninhalt von Rechtecken

Basiskompetenzen: Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Mengenerfassen und Zählkompetenz, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division

Mengenerfassen und Zählkompetenz|

Zähle mündlich in 5er-Schritten vorwärts: 126, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Zähle mündlich in 10er-Schritten rückwärts: 336, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Zähle mündlich in 100er-Schritten vorwärts: 819, …….., …….., …….., …….., …….., ……..

Teil-Teil-Ganzes-Beziehung| Löse die Terme.

a) 64 + …….. = 70 b) 1373 + …….. = 1400 c) 70 – …….. = 63 d) 1100 – …….. = 1005

Addition| Löse die Terme.

a) 132 + 40 = …….. b) 89 + 9 = …….. c) 62 + 27 = …….. d) 99 + 99 = ……..

Subtraktion| Löse die Terme.

a) 342 – 30 = …….. b) 58 – 9 = …….. c) 334 – 50 = …….. d) 561 – 262 = ……..

Multiplikation| Der Term lautet 4 x 6 = 24.

a) Erzähle eine Rechengeschichte oder b) Stelle eine Multiplikation mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 8 x 7 = …….. d) 6 x 9 = …….. e) 12 x 15 = …….. f) 70 x 9 = …….. g) 110 x 50 = ……..

Division| Der Term lautet 20 : 4 = 5.

a) Erzähle eine Rechengeschichte.   oder   b) Stelle eine Division mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 56 : 8 = ……..   d) 27 : 3 = ……..   e) 52 : 4 = ……..   f) 120 : 6 = ……..   g) 155 : 5 = ……..

Basistest zum Kapitel 8a, Rechnen mit Variablen

Basiskompetenzen: Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Mathematisieren

Teil-Teil-Ganzes-Beziehung| Löse die Terme.

a) 43 + …….. = 50   b) 1263 + …….. = 1300   c) 40 – …….. = 36   d) 1800 – …….. = 1797

Addition| Löse die Terme.

a) 116 + 80 = ……..   b) 74 + 7 = ……..   c) 39 + 56 = ……..   d) 299 + 98 = ……..

Subtraktion| Löse die Terme.

a) 489 – 60 = ……..   b) 65 – 8 = ……..   c) 216 – 30 = ……..   d) 451 – 153 = ……..

Multiplikation| Der Term lautet 8 x 2 = 16.

a) Erzähle eine Rechengeschichte   oder   b) Stelle eine Multiplikation mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 4 x 8 = ……..   d) 8 x 5 = ……..   e) 11 x 13 = ……..   f) 80 x 6 = ……..   g) 140 x 20 = ……..

Mathematisieren|

a) Die fünfköpfige Familie Müller bestellt in einem Restaurant für alle ein Glas Wasser. Ein Glas kostet 5 Franken.

Term: ………………………….   Antwort: …………

b) Am Schluss steht auf der Rechnung: 4 x Pizza Margherita = 60 Franken. Wie viel kostet eine Pizza?

Term: ………………………….   Antwort: …………

Basistest zum Kapitel 8b, Gleichungen

Basiskompetenzen: Teil-Teil-Ganzes-Beziehung, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division Mathematisieren

Teil-Teil-Ganzes-Beziehung| Löse die Terme.

a) 16 + …….. = 30　　b) 1128 + …….. = 1200　　c) 70 – …….. = 61　　d) 1500 – …….. = 1494

Addition| Löse die Terme.

a) 227 + 70 = ……..　　b) 53 + 9 = ……..　　c) 24 + 28 = ……..　　d) 199 + 98 = ……..

Subtraktion| Löse die Terme.

a) 156 – 40 = ……..　　b) 67 – 9 = ……..　　c) 154 – 30 = ……..　　d) 532 – 133 = ……..

Multiplikation| Der Term lautet 7 x 3 = 21.

a) Erzähle eine Rechengeschichte　　oder　　b) Stelle eine Multiplikation mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 6 x 7 = ……..　　d) 8 x 4 = ……..　　e) 12 x 11 = ……..　　f) 60 x 4 = ……..　　g) 110 x 80 = ……..

Division| Der Term lautet 32 : 4 = 8.

a) Erzähle eine Rechengeschichte.　　oder　　b) Stelle eine Division mit Material dar.

(z.B. mit Wendepunkten, Hunderterfeld & Malwinkel)

c) 16 : 4 = ……..　　d) 72 : 8 = ……..　　e) 96 : 8 = ……..　　f) 150 : 5 = ……..　　g) 372 :6 = ……..

Mathematisieren|

a) Eine Lehrerin möchte mit ihrer Schulklasse (12 Schülerinnen und Schüler) eine Klassenfahrt auf den Uetliberg machen. Ein Zugticket für die Kinder kostet 9 Franken. Das Ticket der Lehrerin kostet 12 Franken.

Term: …………………………. Antwort: ………….

b) Auf dem Uetliberg bezahlt sie zusätzlich allen Schülerinnen und Schüler ein Glacé. Das kostet sie 48 Franken. Wie teuer ist das Glacé?

Term: …………………………. Antwort: ………….

Basistest Protokollbogen für alle Basiskompetenzen

Notizen Addition

Notizen Subtraktion

Notizen Multiplikation

Notizen Division

Notizen Mengenerfassen und Zählkompetenz

Notizen Mengenerfassen und Zählkompetenz

Notizen Dezimalsystem

Notizen Mathematisieren

9 Ergänzende Methoden für den Aufbau von Basiskompetenzen

9.1 Mengenerfassen und Zählkompetenz

Tabelle 44: *Unterstützende Methoden, Beispiele und Hilfsmittel zur Basiskompetenz Zählen*

unterstützende Methoden	**Beispiele und Hilfsmittel**
▪ Zählprinzipien	▪ Gegenstände abzählen, Mengen unterschiedlicher Gegenstände und Anordnungen vergleichen
▪ Thematisierung verschiedener Zahlaspekte	Zählsituationen zu unterschiedlichen Aspekten schaffen: ▪ Kardinalzahlaspekt (wie viele?) ▪ Ordinalzahlaspekt (die wievielte?) ▪ Masszahlaspekt (wie lange?) ▪ Operatoraspekt (wie oft?) ▪ Rechenzahlaspekt (z.B. schriftl. Verfahren) ▪ Codierungsaspekt (Gegenstände mit Zahlen benennen, vgl. S-Bahn)
▪ Strukturiertes Zählen	▪ Gegenstände zählen und Mengen auf Zahlenstrahlen einzeichnen (Kardinalzahlaspekt) ▪ Gegenstände zählen und Mengen in Stellenwerttabellen notieren (Kardinalzahlaspekt) ▪ Gegenstände in zweier-, fünfer- und Zehnergruppen bündeln ▪ mündlich und schriftlich in zweier-, fünfer-, und Zehnerschritten Zählen
▪ Übungen zum Arbeitsgedächtnis	▪ Zahlenmemory (anfangs gleiche Zahlen, dann Zahlen, welche addiert, eine bestimmte Zahl ergeben)
▪ visuell-räumliche Übungen	▪ Objekte mit Bausteinen nachbilden, Tangram, Memory, Puzzles

9.2 Dezimalsystem

Tabelle 45: *Unterstützende Methoden, Beispiele und Hilfsmittel zur Basiskompetenz Dezimalsystem*

unterstützende Methoden	**Beispiele und Hilfsmittel**
▪ Bündeln und Entbündeln von Stellenwerten	▪ mit kleinen Basen: Verpackungen (vgl. Keks-Beispiel) ▪ mit der Basis 10: Dienes-Material in Verbindung mit Stellenwerttabellen ▪ Zahlen in Stellenwerttabellen eintragen – „*Die Zahl besteht aus 11H, 3Z und 13E – trage in die Stellenwerttabelle ein und stelle mit Dienes-Material dar.*“ ▪ Additionen und Subtraktionen mit Dienes-Material darstellen und in Stellenwerttabellen notieren.
▪ Stellenwert	▪ Zahlen mit Dienes-Material darstellen und in Stellenwerttabellen eintragen
▪ Multiplikative Eigenschaft	▪ Operationsverständnis Multiplikation (s. Multiplikation, Kapitel 9.4) ▪ Multiplikationen mit den Multiplikanden 1, 10, 100, 1000
▪ Eigenschaft der Basis 10	▪ Multiplikationen und Divisionen mit Zehnerpotenzen in Verbindung mit Stellenwerttabellen ▪ Einheiten umrechnen und mit Grössentabellen validieren
▪ Additive Eigenschaft	▪ Stellenwerte zu vollständigen Zahlen addieren (4T + 3H + 1E), auch handelnd darstellen
▪ Strukturiertes Zählen	▪ Gegenstände zählen und Mengen auf Zahlenstrahlen einzeichnen (Kardinalzahlaspekt) ▪ Gegenstände zählen und Mengen in Stellenwerttabellen notieren (Kardinalzahlaspekt) ▪ Gegenstände in Zweier-, Fünfer- und Zehnergruppen bündeln ▪ mündlich und schriftlich in Zweier-, Fünfer-, und Zehnerschritten zählen ▪ Gegenstände in zweier-, fünfer- und Zehnergruppen bündeln

	▪ mündlich und schriftlich in zweier-, fünfer-, und Zehnerschritten Zählen
▪ Einsichten in das Verfahren der schriftlichen Addition	▪ Prinzip des Bündelns ▪ Prinzip des Übertrags ▪ Rückgriff auf kleines Einspluseins ▪ Beachtung des Stellenwertes ▪ schriftliche Additionen in Stellenwerttabellen ausführen

9.3 Addition und Subtraktion

Tabelle 46: *Unterstützende Methoden, Beispiele und Hilfsmittel zu den Basiskompetenzen Addition und Subtraktion*

unterstützende Methoden	**Beispiele und Hilfsmittel**
▪ Vernetzung der Repräsentationsebenen	▪ Terme zu Rechengeschichten finden und Rechengeschichten zu Termen erfinden (in Kombination mit enaktiven Aktivitäten, z.B. Wendeplättchen) ▪ Terme mit Material darstellen (z.B. Wendeplättchen, passende Verpackungen gegebenen Termen zuordnen, Dienes-Material)
▪ Loslösung vom zählenden Rechnen forcieren	▪ Strukturiertes Zählen ▪ Tauschaufgaben ▪ Analogieaufgaben ▪ Nachbaraufgaben ▪ schrittweises Rechnen ▪ gegensinniges Verändern ▪ stellenweises Rechnen ▪ Umkehroperationen ▪ Eins-plus-eins-Aufgaben memorisieren ▪ Verdoppelungsaufgaben memorisieren
▪ Training der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung	▪ Schüttelboxen (kleine Mengen in Teilmengen auf enaktiver Ebene unterteilen) ▪ Abaco (Mengen bis 100 in Teilmengen auf enaktiver Ebene zerlegen) ▪ Wendeplättchen (beliebige Mengen in Teilmengen auf enaktiver Ebene zerlegen)

	▪ Hunderterfeld (Mengen in Teilmengen auf ikonischer Ebene unterteilen) ▪ Zahlenhäuser (Zahlen auf symbolischer Ebene in unterschiedliche Additionen zerlegen) ▪ Zahlenmauern

9.4 Multiplikation

Tabelle 47: *Unterstützende Methoden, Beispiele und Hilfsmittel zur Basiskompetenz Multiplikation*

unterstützende Methoden	**Beispiele und Hilfsmittel**
▪ räumlich-simultane und zeitlich-sukzessive Modelle thematisieren	▪ Verpackungsmaterialien ▪ Hunderterfeld mit Malwinkel ▪ Verpackungen und Bilder (Felddarstellungen) mit multiplikativen Strukturen ▪ Multiplikationen mit Wendeplättchen darstellen ▪ Multiplikationen in fortlaufende Additionen umformen ▪ Sachaufgaben mit räumlich-simultanen und zeitlich-sukzessiven Modellen
▪ Vernetzung der Repräsentationsebenen	▪ Terme zu Rechengeschichten finden und Rechengeschichten zu Termen erfinden (in Kombination mit enaktiven Aktivitäten, z.B. Wendeplättchen) ▪ Terme mit Material darstellen (z.B. Wendeplättchen, passende Verpackungen gegebenen Termen zuordnen, Dienes-Material)
▪ Rechengesetze thematisieren (Kommutativgesetz)	▪ Tauschaufgaben
▪ Vernetzung verschiedener Multiplikationsaufgaben	▪ halbieren, verdoppeln, Tauschaufgaben, Nachbarsaufgaben, Schlüsselaufgaben, gegensinniges Verändern

9.5 Division

Tabelle 48: *Unterstützende Methoden, Beispiele und Hilfsmittel zur Basiskompetenz Division*

unterstützende Methoden	Beispiele und Hilfsmittel
▪ rechnerische Sicherheit bis 100 trainieren	▪ Übungen zu Dezimalsystem und Grundoperationen (s. Kapitel 9.1 – 9.4)
▪ Aufteilen (enaktive, ikonische und symbolische Ebene)	▪ Gegenstände enaktiv auf- und verteilen
▪ Verteilen (enaktive, ikonische und symbolische Ebene)	▪ ikonisch dargestellte Gegenstände auf- und verteilen
▪ Vernetzung der Repräsentationsebenen	▪ Terme zu Rechengeschichten finden und Rechengeschichten zu Termen erfinden (in Kombination mit enaktiven Aktivitäten, z.B. Wendeplättchen) ▪ Terme mit Material darstellen (z.B. Wendeplättchen, passende Verpackungen gegebenen Termen zuordnen, Dienes-Material)
▪ Division als Umkehrfunktion der Multiplikation	▪ Multiplikationen zu Divisionen umformen
▪ Fortlaufende Subtraktion	▪ Divisionen zu fortlaufenden Subtraktionen umformen
▪ multiplikativer Vergleich	▪ Aufgaben, die mit multiplikativem Verglich lösbar sind (vgl. theoretische Auseinandersetzung, Kapitel 4.5.1)

9.6 Mathematisieren

Tabelle 49: *Unterstützende Methoden, Beispiele und Hilfsmittel zur Basiskompetenz Mathematisieren*

unterstützende Methoden	**Beispiele und Hilfsmittel**
▪ Operationsverständnis	▪ Übungen zum Operationsverständnis der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (s. Kapitel 9.3 – 9.5)
▪ Struktur des Kontextes klären	▪ Strukturwörter identifizieren und im Unterricht klären ▪ Nachspielen des Kontextes ▪ Diagramme oder Skizzen zeichnen ▪ Beispiele mit kleineren oder gerundeten Zahlen
▪ Validieren durch Schätzungen, Überprüfungen der Modellbildungen und Rechnungen, Überschlagen	▪ Modellbildungen mit Skizzen, Grafiken, Handlungen vergleichen, weitere Modelle bilden, mit gerundeten Zahlen rechnen

10 Beispiele von typischen Hilfsmitteln und Materialien

enaktive Ebene

Schüttelboxen sind kleine Kunststoffboxen, welche mit einer beliebigen Anzahl kleiner Kügelchen gefüllt werden können. Sie veranschaulichen die Teil-Teil-Ganzes-Beziehung. In der Mitte befindet sich ein Steg, der verhindert, dass sich die Kügelchen der rechten Seite mit jenen der linken Seite vermischen. Da dieser Steg jedoch nicht durchgehend ist, werden nach jedem Schüttelvorgang unterschiedliche Anzahlen von Kügelchen getrennt. Während Schülerinnen und Schüler zu Beginn mit nur zehn Kügelchen arbeiten und beide Abteile sichtbar bleiben, um z.B. Rechnungen zu notieren (vgl. Abbildung 2), kann die Anzahl der Kügelchen später variiert werden und die eine Seite abgedeckt werden (vgl. Abbildung 3). Generell eignen sich eher kleine Zahlenräume, da die Kügelchen gezählt werden müssen. Alternativ können Schüttelboxen auch aus Zündholzschachteln selber hergestellt werden.

Abbildung 2: *Schüttelbox mit Kügelchen. Bildquelle: Montessori-Material.de*

Abbildung 3: *Schüttelbox mit Abdeckung. Bildquelle: Montessori-Material.de*

enaktive Ebene

Wendeplättchen können wie Schüttelboxen zum Zerlegen von kleinen Zahlen dienen. Die Schülerinnen und Schüler erhalten eine Anzahl von Wendeplättchen, einen Teil davon drehen sie um und notieren sich die passende Rechnung sowie die dazugehörige Lösung. Abbildung 4 zeigt beispielhaft fünf Wendeplättchen, von denen drei zur Rechnung 2 + 3 = 5 gewendet wurden. Natürlich können auch grössere Zerlegungen bzw. Summen gebildet werden.

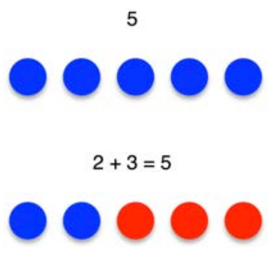


Abbildung 4: *enaktive Zahlzerlegung mit Plättchen*

ikonische Ebene

Um lernende beim Rechnen zu unterstützen, können **Rechenstriche** helfen. Die Lernenden können Additionen schrittweise vollziehen, indem sie die zu addierende oder die zu subtrahierende Zahl zerlegen und in Schritten addieren bzw. subtrahieren.

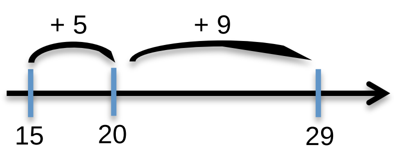


Abbildung 5: *Rechenstrich mit der Rechnung 15 + 14*

ikonische Ebene

Ikonische oder symbolische Darstellungen von Wendeplättchen oder Schüttelboxen ermöglichen Zahlzerlegungen auf ikonischer Ebene und bilden somit eine Brücke zum Arbeiten auf symbolischer Ebene (Teil-Teil-Ganzes-Beziehung)

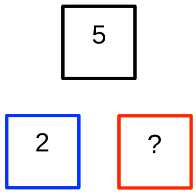


Abbildung 6: *Beispiel einer Aufgabenstellung auf symbolischer Ebene*

symbolische Ebene

Zahlenhäuser bieten den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit eigene Zahlzerlegungen (vgl. Teil-Teil-Ganzes-Beziehung) vorzunehmen. Gegenüber den weiter oben vorgestellten enaktiven Aufgabenstellungen verfügen solche auf symbolischer Ebene über den Vorteil, dass sie sowohl kleine wie auch deutlich grössere Zahlenräume zulassen.

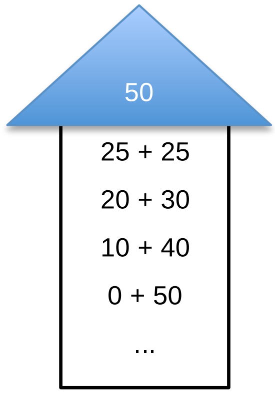


Abbildung 7: *Zahlenhaus zur Zahl 50*

symbolische Ebene

Zahlenkarten können dazu benutzt werden, ein Memory zu spielen. Karten von 0 bis 30 (oder mit beliebig grösseren Zahlen) werden verdeckt auf dem Tisch oder dem Boden verteilt. Die Spielenden dürfen zwei Karten aufdecken, ergeben die Karten zusammen 30, dürfen sie die Karten behalten. Wer am Ende mehr Karten hat, gewinnt.

Abbildung 8: *Ligrettokarten. Bildquelle: www.schmidtspiele.de*

symbolische Ebene

Zahlenmauern lassen die Teil-Teil-Ganzes-Beziehung anwenden und festigen sowie die Addition und Subtraktion trainieren. Die Lernenden müssen im Beispiel (vgl. Abbildung 6) herausfinden, welche Zahlen es zur Ergänzung auf 42 bzw. 41 braucht.

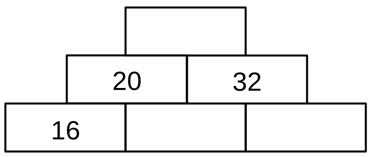


Abbildung 9: *Zahlenmauer, welche das Verständnis der Teil-Teil-Ganzes-Beziehung trainiert und voraussetzt*

ikonische Ebene

Einmaleins-Tafeln, Hundertertafeln, Hunderterfelder (Punktfelder), sind verschiedene Felddarstellungen.

Punktfelder oder **Hunderterfelder** werden als ikonisches Material für alle Grundrechenarten eingesetzt. Deckt man mit einem Kartonwinkel alle Punkte bis auf 25 ab, entsteht aufgrund der Anordnung die Malrechnung 5 x 5. Die Division kann ebenfalls mit einem Winkel dargestellt werden (gleiche Methode). Für Additionen können Punktgruppen zusammengefasst werden, für Subtraktionen werden Punkte weggestrichen.

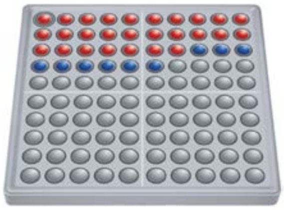


Abbildung 10: *Auch der Abaco arbeitet mit einer Hunderterfelddarstellung. Bildquelle: www.schubi.com*

Einmaleinstafeln zeigen Beziehungen zwischen verschiedenen Malrechnungen auf und werden in verschiedenen Formen angeboten.

Abbildung 11: *Einmaleinstabelle von Klett. Oben links ist ein Hunderterfeld mit Malwinkel abgebildet. Bildquelle: www.mathe2000.de*

Hundertertafeln sind Tabellen mit den Zahlen von 1 – 100 (10 Zeilen mit je 10 Zahlen). Auch sie zeigen Zusammenhänge auf, aber jene des Dezimalsystems. Typische Aufgaben sind, dass passende Zahlen in leere Felder geschrieben werden müssen, dass Sprünge von einer Zeile zur nächsten oder übernächsten gemacht werden müssen (10er-Sprung, 20er-Sprung) oder auch diagonale Bewegungen mathematisch beschrieben werden müssen.

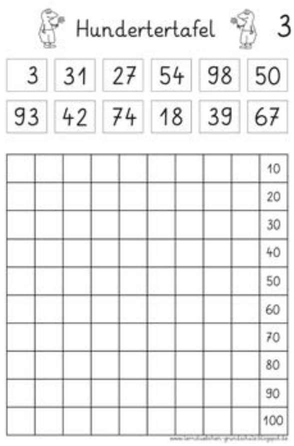


Abbildung 12: *Aufgabe für Primarschüler mit der Hundertertafel. Wichtig wäre, dass neben dem Eintragen auch Netzwerke und Beziehungen der Zahlen thematisiert werden. Bildquelle: www.lernstuebchen-grundschule.blogspot.de*

Lernuhren werden normalerweise in der Primarschule dazu benutzt, um Zeiten darzustellen. Es können aber auch Minuten zu Stunden gebündelt werden. D.h. sie eignen sich ebenso zur Addition und Subtraktion von Zeiten. Wird der Stundenzeiger auf 12 Uhr gestellt, können auch Minuten- und Sekundenbeträge zusammengezählt werden. Mit dem Stundenzeiger werden die Minuten bzw. Sekunden zu Stunden oder Minuten gebündelt.

Abbildung 13: Lernuhr.
Bildquelle: www.betzold.ch

10.1 Grössentabellen

Für Grössen, welche auf dem dezimalen Stellenwertsystem aufbauen, können Grössentabellen erstellt werden. Sind sie laminiert, können sie mit einem Folienstift beschrieben werden. Ein Radiergummi reicht, um die eingetragenen Daten zu löschen. Es folgt das Beispiel einer Tabelle für Längenmasse, Gewichte und Hohlmasse:

Längenmasse

km	m	m	m	dm	cm	mm

Gewichte

t	kg	kg	kg	g	g	g	mg	mg	mg

Hohlmasse

hl	l	l	dl	cl	ml

10.2 Taschenrechner

Obwohl viele Lehrpersonen dem Taschenrechner mit Skepsis gegenüberstehen, kann er als Hilfsmittel im Unterricht sinnvoll eingesetzt werden. Unterschiedliche Untersuchungen und Meta-analysen zeigen, „*dass der Taschenrechnereinsatz sich per se nicht schädlich oder kontraproduktiv auswirkt auf die allgemeinen Rechenfertigkeiten, die Problemlösefähigkeiten und die Konzeptentwicklung*“ (Krauthausen & Scherer, 2007, S. 265). Kontraproduktiv wäre der Einsatz, wenn er als Hilfsmittel keine didaktische Funktion erfüllen, d.h., unüberlegt eingesetzt würde. Sollen Rechenfertigkeiten trainiert werden, wäre der Taschenrechner falsch eingesetzt. Haben Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten bei der Ausführung von Aufgaben aufgrund mangelndem Operationsverständnis oder anderer basalen Kompetenzen, müssen diese Aufgaben anderweitig differenziert werden. Krauthausen und Scherer empfehlen deswegen eine vorrangige Ausbildung von Zahlvorstellungen, zuverlässigen Kopfrechenfertigkeiten, halbschriftlichen Strategien und von einem tragfähigen Gefühl für Grössenordnungen (vgl. 2007, S. 269).
Einsatzgebiete für den Taschenrechner werden vor allem

- in der Ergebnisermittlung von anwendungsorientierten Aufgaben (Sachaufgaben),
- in der Ergebniskontrolle, in der Auseinandersetzung,
- in der Auseinandersetzung mit eher metakognitiven Fragestellungen zum Einsatz des Taschenrechners und
- in der Entdeckung von Gesetzmässigkeiten

gesehen (vgl. Krauthausen & Scherer, 2007, S. 268 f.). Als Beispiele werden Aufgaben genannt, welche der Aufgabe 5 des Kapitels 3b im Lehrmittel Mathematik I ähnlich sind: „*Wie oft schlägt das Herz im Leben? Wie viele Tage bin ich alt*? (Krauthausen & Scherer, 2007, S. 272).

11 Abbildungsverzeichnis

12 Tabellenverzeichnis

13 Quellenverzeichnis

13.1 Literaturverzeichnis

Keller, F., Bollmann B., Rohrbach, C. & Schelldorfer, R. (2011a). *Mathematik 1. Themenbuch*. Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Keller, F., Bollmann B., Rohrbach, C. & Schelldorfer, R. (2011b). *Mathematik 1. Arbeitsheft*. Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Keller, F., Bollmann B., Rohrbach, C. & Schelldorfer, R. (2011c). *Mathematik 1. Handbuch*. Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Moser Opitz, E. (2009). Grundschulmathematik als Voraussetzung für Mathematiklernen in der Sek. I. In: Fritz, A., Schmidt, S. (Hrsg.). *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I* (S. 29 – 43). Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Storz, R. (2014). *Mathematik differenziert und individualisiert unterrichten. Mit vielen Beispielen aus der Sekundarstufe I*. Hallbergmoos: Aulis Verlag.

Krauthausen G., Scherer P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. 3. neu bearbeitete Auflage. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.