А. М. МОЛЧАНОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

ε

Пущино
2013

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математических проблем биологии
Российской академии наук

А. М. МОЛЧАНОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Пущино
2013

УДК 517.9
ББК 22.161.6
М76

Молчанов А. М. Об устойчивости нелинейных систем / ред.-сост. И. В. Флоринский. – Электрон. книга. – Пущино : Институт математических проблем биологии РАН, 2013. – 103 с. – ISBN 978-5-9904237-2-5.

Molchanov, A. M. On Stability of Nonlinear Systems / ed. comp. I. V. Florinsky. – Electronic book. – Pushchino : Institute of Mathematical Problems of Biology, Russian Academy of Sciences, 2013. – 103 p. – ISBN 978-5-9904237-2-5.

Редактор-составитель
доктор технических наук И. В. Флоринский

В книге впервые публикуется докторская диссертация выдающегося российского математика А. М. Молчанова, защищённая 50 лет назад. В работе изучается устойчивость систем, нейтральных в линейном приближении.

Утверждено к печати Учёным советом ИМПБ РАН

ISBN 978-5-9904237-2-5

ОТ РЕДАКТОРА

Молчанов Альберт Макарьевич (1928–2011), выдающийся советский российский математик[1]. Ученик И. М. Гельфанда, А. Я. Хинчина, М. В. Келдыша и Н. В. Тимофеева-Ресовского. Автор более 200 научных работ в области функционального анализа, газодинамики, теории устойчивости, нелинейных колебаний и математического моделирования биологических процессов и систем. Основные научные результаты: критерий дискретности спектра оператора Шрёдингера (критерий Молчанова, 1952); расчёт точечного взрыва в неоднородной атмосфере (численное решение, совместно с К. И. Бабенко и В. В. Русановым, 1955), условие устойчивости нелинейных систем, нейтральных в линейном приближении (теорема Молчанова, 1961), гипотеза о роли колебательных процессов в эволюции (1967), гипотеза резонансной структуры Солнечной системы (гипотеза Молчанова, 1968), математическая модель иммунитета (1970), эргодическая гипотеза сукцессии (1975). Организатор и директор Научно-исследовательского вычислительного центра АН СССР – Института математических проблем биологии РАН (1972–1998). Организатор одиннадцати Всесоюзных школ по математическому моделированию сложных биологических систем (1974–1992).

В предлагаемой читателю книге впервые публикуется докторская диссертация[2], подготовленная А. М. Молчановым на рубеже 1950–1960-х гг., в период его работы в Отделе прикладной математики[3] Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (ОПМ МИАН). Диссертация была защищена 50 лет назад, 23 апреля 1963 г., и утверждена ВАК 10 октября 1964 г.

В диссертации изучается устойчивость систем, нейтральных в линейном приближении. Тема исследования прямо или косвенно свя-

---

[1] Подробную биографию А. М. Молчанова см.: Флоринский И.В. Биографическая справка // Молчанов Альберт Макарьевич: Библиографический указатель / сост. И. В. Флоринский. – Пущино: ИМПБ РАН, 2012. – С. 3–7.

[2] Молчанов А. М. Об устойчивости нелинейных систем : дис. … д.ф.-м.н. – М.: Мат. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР, 1962. – 115 с.

[3] С 1966 г. – Институт прикладной математики (ИПМ) АН СССР.

зана с другими работами её автора. Так, написанию диссертации предшествовало участие А. М. Молчанова в многолетних работах по математическому обеспечению создания советского термоядерного оружия. Эти работы не могли не повлиять на выбор темы. С другой стороны, вопросы колебательных движений, устойчивости, резонанса будут подниматься А. М. Молчановым вновь и вновь практически во всех его последующих работах – исследованиях строения Солнечной системы, колебательных процессов в химии и биологии, математического моделирования биологических процессов и систем.

Ранее материалы докторской диссертации А. М. Молчанова были опубликованы лишь фрагментарно (см. стр. 85). В книгу включена стенограмма защиты диссертации[4] в Учёном совете ОПМ МИАН. Стенограмма является интересным документом эпохи, а изложенные в ней отзывы официальных оппонентов В. В. Немыцкого, В. В. Румянцева и С. А. Гальперна можно рассматривать как комментарии к публикуемой работе.

Текст предлагаемых читателю материалов подвергся незначительному редактированию. Текст диссертации был сверен с двумя её машинописными экземплярами. Авторский стиль математических нотаций не изменён.

Благодарности

Книга подготовлена в рамках работ над научным наследием А. М. Молчанова, проводящихся в ИМПБ РАН. В подготовке материалов помощь оказали Г. Р. Смирнова (ИМПБ РАН), Р. В. Полозов (ИТЭБ РАН), А. Л. Афендиков, Н. В. Старикова, Н. А. Швецова (ИПМ РАН). Диссертация А. М. Молчанова публикуются с любезного разрешения Д. А. Молчановой.

И. В. Флоринский
iflor@mail.ru

[4] Хранится в личном деле А. М. Молчанова в ИПМ им. М. В. Келдыша РАН.

ВВЕДЕНИЕ

Основной приём точного естествознания состоит в замене реального явления абстрактной математической схемой. Возникающий при этом вопрос о соотношении явления и описывающей его схемы имеет много аспектов. Наиболее простая и, вместе с тем, очень важная сторона этого вопроса – внутренняя корректность математической схемы – приобретает в теории дифференциальных уравнений форму теории устойчивости решений. Довольно ясно, что если решение неустойчиво, то соответствующий ему режим имеет мало шансов на реальное осуществление. Любой случайный толчок может вызвать необратимый срыв режима. Сказанное вовсе не означает, что единственным предметом изучения могут быть только устойчивые решения – просто соответствующие режимы встречаются чаще всего и заставляют обратить на себя внимание. Однако неустойчивые режимы обладают иногда столь ценными свойствами, что имеет смысл создание таких «оранжерейных» условий, при которых эти режимы могут осуществляться. Примеры холодильника или управляемой термоядерной реакции достаточно полно, по-видимому, разъясняют существо вопроса.

Сформулированная точка зрения приводит к следующей постановке задачи теории устойчивости:

Изучить устойчивость по отношению *к возмущениям данного вида* решений *уравнений данного класса*.

Само собой разумеется, что выбор класса уравнений и вида возмущений обусловлен свойствами конкретного изучаемого явления.

Изучение естественно, при этом, вести для характерных представителей данного класса уравнений и вида возмущений. Так, например, если речь идёт о произвольных матрицах, то следует предполагать, что собственные значения различны, а детерминант отличен от нуля. Всякое уточнение – например, «собственные значения действительны» – следует рассматривать как определение *нового* класса. Это весьма существенный методологический принцип – принцип «общего положения», позволяющий внести ясность в постановку задачи и избежать безбрежного усложнения, связанного с наличием всё более тонких исключений.

Первая чёткая постановка задачи в теории устойчивости принадлежит А. М. Ляпунову [1], изучавшему устойчивость решений общих систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно возмущений начальных данных. Наиболее законченный вид его теория имеет для случая стационарных решений. Результат А. М. Ляпунова общеизвестен и состоит в том, что вопрос об устойчивости исходной системы эквивалентен вопросу об устойчивости линеаризованной системы. Для стационарной точки линеаризация приводит к системе с постоянными коэффициентами, и критерий устойчивости формируется чисто алгебраически: собственные значения матрицы системы должны лежать в левой полуплоскости.

Линейная теория устойчивости позволила решить многие проблемы, актуальные для времени её создания, но для современных задач она явно недостаточна. Попытаемся понять, почему это происходит.

Класс уравнений, рассматриваемых в линейной теории устойчивости, – это класс грубых систем, характерных тем, что их решения либо уходят на бесконечность, либо стремятся к устойчивой стационарной точке. Но это означает, что процесс, описываемый такими уравнениями, довольно быстро прекращается либо потому, что система приходит в равновесие, либо потому, что она распадается. Так, например, смесь химически активных веществ перестаёт существовать как смесь, то есть как система, независимо от того, взрывается она или сравнительно спокойно соединяется в новое вещество.

Поэтому в течение больших промежутков времени имеют шанс «выжить» только такие системы, процессы в которых происходят циклически с малым затуханием или медленной раскачкой[1]. Солнечная система, например, заведомо мало меняется за время многих миллионов оборотов. Другой пример – затухание звуковых колебаний, вызываемое вязкостью (а не просто увеличением объёма, захваченного движением). В линейном приближении вязкость уменьшает амплитуду

[1] Здесь автор впервые высказывает идею о роли колебательных процессов в эволюции, позднее сформулированную виде гипотезы в статье: Молчанов А. М. Возможная роль колебательных процессов в эволюции // Колебательные процессы в биологических и химических системах: Тр. Всесоюз. симп. по колебат. процессам в биол. и хим. системах, Пущино-на-Оке, 21–26 марта 1966 г. – М.: Наука, 1967. – С. 274–288. – *Прим. ред.*

вдвое за сотни миллионов периодов (при частоте 500 Гц и нормальных атмосферных условиях).

Характерной чертой всех таких систем является наличие малого параметра – отношения периода основного движения ко времени эволюции (время эволюции в устойчивых системах обычно называется временем релаксации).

Допуская некоторую вольность языка, можно сказать, что грубые системы давным-давно вымерли и если они ещё и встречаются, то только как вторичные спутники негрубых систем. Типичный пример такой ситуации – свободный кислород атмосферы, создающий возможность бурных химических реакций, но являющийся просто отходом жизнедеятельности морских водорослей. Интерес к сложным, негрубым системам, возникший первоначально на задачах из радиотехники, значительно вырос в связи с быстрым развитием биологии и проникновением в биологию математических методов исследования[2].

Наивное представление о сложности – чем больше ручек управления у машины, тем она сложнее – можно непосредственно перевести на язык математики, рассматривая системы уравнений, содержащие кроме неизвестных ещё свободные параметры – параметры регулирования. Ясно, что чем больше этих параметров, тем более сложные особенности можно устроить в системе уравнений.

Перед математикой возникает, таким образом, задача построения теории устойчивости сложных систем. Настоящая работа посвящена попытке сделать самый первый шаг в этом направлении. Рассмотрим системы, сложность которых, то есть число параметров регулирования, равна (или меньше) числу степеней свободы системы. Напомним, что число степеней свободы вдвое меньше размерности системы – числа неизвестных. Рассмотрим стационарную точку такой системы. Ясно, что подбором параметров регулирования такую точку можно сделать нейтральной в линейном приближении. Тогда устойчивость будет определяться высшими приближениями.

Изучение вопроса об устойчивости систем, нейтральных в линейном приближении, и составляет предмет настоящей работы.

---

[2] Здесь автор впервые упоминает о своём интересе к математическому моделированию биологических систем и обозначает связь между своими текущими исследованиями устойчивости нелинейных систем и будущими работами в области математической биологии. – *Прим. ред.*

Трудность изучения таких систем заключается, как уже было сказано, в том, что линейное приближение не даёт ответа на вопрос об устойчивости. Устойчивость или неустойчивость проявляется в том, что амплитуда колебаний уменьшается или увеличивается, но этот процесс происходит на протяжении громадного количества циклов. Поэтому поведение системы надо проследить на больших промежутках времени и суметь учесть влияние весьма малых факторов. Это обстоятельство делает теорию нелинейной устойчивости существенно труднее теории линейной устойчивости, так как добавляет новый этап – вывод уравнений, описывающих эволюцию системы.

Заметим, что задача о поведении систем на больших временах – задача об эволюции – представляет большой интерес сама по себе, безотносительно к более частной задаче об устойчивости. Этой задаче посвящено немало работ, но даже наиболее разработанные методы, изложенные в книге Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [2], относятся либо к многочастотным, но линейным системам, либо к системам нелинейным, но одночастотным. Между тем даже в задаче об устойчивости, а тем более в других интересных вопросах асимптотической теории дифференциальных уравнений, приходится иметь дело с нелинейными многочастотными колебаниями.

Эта трудность преодолевается в гл. I на основе идеи разложения движений, позволяющей в достаточно широких предположениях исключить быстрые переменные и написать уравнения, определяющие эволюцию системы. Выводу эволюционных уравнений посвящены первые три параграфа первой главы. В § 4 сформулирован приём «расщепления» параметра, позволяющий в некоторых случаях значительно упростить выкладки. Результаты этого параграфа находят, в частности, применение в гл. III при изучении уравнений в частных производных. Последний § 5 первой главы посвящён применению развитых ранее общих методов к тем уравнениям, которые встречаются в задаче об устойчивости движений.

Гл. II посвящена собственно задаче об устойчивости. В § 1 формулируется постановка задачи, в § 2 выводятся эволюционные уравнения и выписывается их главный член – модельная система. В следующих двух параграфах изучаются условия устойчивости модельной системы, а § 5, несколько выпадающий из контекста, посвящён доказательству одной теоремы о выпуклых конусах, играющей решающую роль в изучении свойств модельной системы. В § 6 на основании этой теоремы проводится построение функции Ляпунова модельной системы, которая используется в следующем § 7 для доказательства основной теоремы этой главы: *асимптотическая устойчивость модельной системы является необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости исходной системы*.

§ 8 посвящён разбору практической применимости доказанных условий устойчивости и формулировке более простых достаточных условий устойчивости. Последний § 9 гл. II посвящён разбору очень важного, по-видимому, аспекта понятия *метастабильности*. Это понятие заслуживает того, чтобы на нём несколько подробнее остановиться. Обычно физики называют метастабильными такие состояния, которые устойчивы относительно малых возмущений и неустойчивы относительно больших. Камень в кратере вулкана – вот типичный пример метастабильного состояния. Однако нелинейная теория устойчивости приводит к возможности существования принципиально других типов состояний, которые, быть может, в большей степени заслуживают наименования метастабильных. Рассмотрим *неустойчивое* состояние, но являющееся нейтральным в линейном приближении. Тогда это состояние рано или поздно будет покинуто системой. Но всё дело в том, что время ухода из неустойчивого состояния очень сильно – степенным образом – зависит от величины возмущения. Поэтому такие, строго неустойчивые, но с огромным временем раскачки, состояния практически будут восприниматься как метастабильные. Возможно, что лучевая болезнь даёт пример метастабильности такого рода.

В последней гл. III предложена попытка построения теории устойчивости константных решений систем уравнений в частных производных. Изложим кратко результаты этой главы.

На основании введённого понятия плотности энергии доказана тождественная нейтральность всех систем двух гиперболических уравнений, а также системы уравнений гидродинамики. Получены необходимые и достаточные условия нейтральности во втором порядке для систем трёх гиперболических уравнений. Последнее утверждение нуждается в некотором уточнении. При выводе необходимости условий выкладки проведены формально алгебраически, без доказательства сходимости возникших рядов.

Изучение вопроса об устойчивости в высших приближениях наталкивается на основную трудность в теории нелинейных гиперболических систем – отсутствие однозначных решений. Представляется весьма правдоподобным, что решение вопроса о правильном определении обобщённых решений тесно связано с другим аспектом теории устойчивости – теории устойчивости решений относительно возмущений правых частей, а не относительно возмущений начальных данных, что служило основной темой настоящей работы. Однако даже попытка постановки такой задачи выходит далеко за рамки избранной темы.

Заслуживает упоминания пример, приведённый в § 3 гл. III: там указана система гиперболических уравнений, содержащая параметр. Эта система тождественно нейтральна при любом положительном значении параметра и неустойчива, когда параметр равен нулю. Пример ещё раз показывает, что формальные условия устойчивости или нейтральности всегда должны быть дополнены простыми достаточными условиями, так как точные необходимые и достаточные условия устойчивости нередко разрешают такое возрастание начальной амплитуды, что система практически неотличима от неустойчивой.

В заключение ещё раз подчеркнём необходимость разных (для разных целей) теорий устойчивости, отличающихся друг от друга или классом уравнений, или видом возмущений, или тем и другим.

ГЛАВА I

РАЗДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ

Задача настоящей главы состоит в подготовке вычислительного алгоритма, при помощи которого можно проводить исследование на устойчивость. Такой алгоритм является весьма частным случаем общего метода разделения движений. Для наших целей нет необходимости в подробном разборе идеи разделения движений хотя бы потому, что в задаче об устойчивости достаточно асимптотической теории. Поэтому в дальнейшем изложении мы не будем стремиться к наиболее полным формулировкам в тех местах, где полнота достигается за счёт краткости и ясности.

§ 1. Системы, допускающие разделение движений

Рассмотрим систему уравнений, содержащую малый параметр:

$$\frac{dx}{dt} = A(x, \varepsilon). \tag{1.1}$$

Допустим, что решение невозмущённого уравнения, получающегося, если положить $\varepsilon = 0$,

$$\frac{dx}{dt} = A_0(x),$$

известно при всех значениях начальных данных

$$x = f(\xi, t).$$

Здесь ξ значение x при $t = 0$, то есть

$$\xi = f(\xi, 0). \tag{1.2}$$

Вполне естественна мысль, что знание решения невозмущённой системы должно помочь при решении близкой (для малых значений параметра ε) возмущённой системы (1.1). Однако могут быть разные точки зрения на способ использования этого знания. Наиболее известный подход состоит в разложении решения возмущённой системы в ряд по степеням малого параметра ε. Тогда решение невозмущённой системы есть просто главный член этого разложения. Этот способ плох тем, что первые члены полученного ряда не дают на больших временах – уже при $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$ – даже качественной картины правильного решения. В этом можно убедиться на простейших примерах, приведённых в [2, стр. 10]. Между тем поведение решения на временах $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$ важно во многих задачах, а в теории устойчивости нужно даже знать поведение решения на временах $t \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Ответ на такой вопрос можно получить, если полнее использовать знание решения невозмущённого уравнения. Основная идея восходит к широко известному методу вариации произвольных постоянных. Будем искать решение возмущённой системы в той же форме, в которой получено решение невозмущённой системы, но разрешим величине ξ зависеть от времени. Это означает, по существу, что мы используем знание не только предельной невозмущённой траектории, как при разложении в ряд, но и близких к предельной.

Итак, будем искать решение возмущённого уравнения, которое удобнее записать иначе, явно выделив невозмущённую часть,

$$\frac{dx}{dt} = A_0(x) + \varepsilon A_1(x, \varepsilon), \tag{1.3}$$

в виде

$$x = f(\xi(t), t). \tag{1.4}$$

Заметим, что переменное t входит в эту формулу дважды: один раз как аргумент вдоль траектории невозмущённого движения, а другой раз – как аргумент ξ. Это разделение функций времени выгодно отличает предлагаемый способ от разложения в ряд.

Если подставить выражение (1.4) в уравнение возмущённого движения, то главный член $A_0(f)$ пропадёт, так как функция f удовлетворяет невозмущённому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A_0(f).$$

Если решить получившееся уравнение относительно производной от ξ по времени, то мы получаем окончательно:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^{-1} A_1 (f, \varepsilon). \tag{1.5}$$

Правая часть этого уравнения пропорциональна ε. Этого следовало ожидать, так как при $\varepsilon = 0$ уравнение для ξ должно давать решения, не зависящие от времени. Важно, однако, отметить, что наличие малого множителя ε в правой части уравнения для ξ не означает *медленности* изменения ξ. Дело в том, что в правую часть входит функция $f(\xi,t)$. В наиболее часто встречающихся случаях зависимость f от времени носит колебательный характер. Поэтому и ξ будет совершать быстрые колебания той же частоты, что и f, хотя и малой амплитуды. Только в том, весьма редком, разумеется, случае, когда зависимость от времени $A_1(f,\varepsilon)$ компенсируется зависимостью от времени матрицы $\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^{-1}$, то есть когда правая часть уравнения для ξ не зависит явно от времени, только в этом случае изменения ξ будут не только малыми, но и медленными.

Свойства системы (1.3) в этом исключительном случае настолько замечательны, что на них стоит остановиться подробнее. Если, как мы предположим, правая часть уравнения (1.5) не зависит от времени, то её значение можно найти, полагая $t = 0$. Но тогда, согласно (1.2), мы получаем, что уравнение для ξ может быть записано в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon A_1 (\xi, \varepsilon). \tag{1.6}$$

Из формулы (1.4) вытекает, что в этом случае решение возмущённой системы получается следующим способом. Решаем уравнение невозмущённого движения. *Совершенно независимо* решаем уравнение (1.6), в правой части которого стоит *только* возмущающий член. Затем решение уравнения (1.6) подставляем в решение невозмущённого уравнения вместо начальных данных ξ.

Ясно, что если в системе имеет место такая ситуация, которую логично назвать *разделением движений*, то задача изучения поведения системы на больших временах становится очень простой. Действительно, невозмущённое уравнение описывает в этом случае быстрое движение точки x по траектории невозмущённого движения, а уравнение (1.6) – медленное изменение параметров этой траектории. Будем, поэтому, уравнение (1.6) называть *эволюционным* по отношению к уравнению (1.3). Существенно, что в уравнение (1.6) параметры быстрого движения никак не входят. Эволюционное изменение не зависит от фазовых движений. Это обстоятельство и делает оправданным термин «разделение движений». Необходимым и достаточным условием разделения движений является, как мы видели выше, независимость от времени правой часто уравнения (1.5). Проверка этого условия не очень проста, так как предполагает предварительное вычисление функции $f(\xi,t)$. Но это же условие можно записать иначе, в форме равенства нулю частной производной по времени. Нетрудно показать, что если для любой функции $z(x)$ построить функцию $\tilde{z}(\xi,t)$ подобно тому, как правая часть уравнения (1.5) построена по функции $A_1(x,\varepsilon)$, то есть

$$\tilde{z}(\xi,t)=\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{-1} z\left(f(\xi,t)\right), \tag{1.7}$$

то частная производная по времени этой новой функции даётся выражением

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}=\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{-1}\left[\frac{dz}{dx}A_0(x)-\frac{dA_0}{dx}z(x)\right], \tag{1.8}$$

где подразумевается, что вместо x надо подставить $f(\xi,t)$.

Из формулы (1.8) немедленно получается важный вывод:

Для того чтобы система (1.3) *допускала разделение движений, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\frac{dA_1}{dx}A_0-\frac{dA_0}{dx}A_1=0. \tag{1.9}$$

Правая часть условия (1.9) является, как легко видеть, естественным обобщением понятия коммутатора на случай нелинейных функций.

§ 2. Замена переменных, приводящая к разделению движений. Случай периодических решений

Из формулы (1.9) видно, что для реальных задач не будет, как правило, иметь место разделение движений, так как условие перестановочности накладывает слишком жёсткое ограничение на вид возможного возмущения. Тем не менее идея разделения движений оказывается полезной, если учесть, что в нашем распоряжении остаётся ещё замена переменных в изучаемом уравнении.

Оказывается, что при довольно широких предположениях можно найти замену переменных, приводящую заданное уравнение к виду, допускающему разделение движений. Более того, эту замену переменных можно найти среди преобразований бесконечно близких к тождественному при $\varepsilon \to 0$. Нашей ближайшей задачей будет отыскание такого преобразования.

Пусть исходное уравнение, подлежащее исследованию, имеет вид

$$\frac{du}{dt} = F_0(u) + \varepsilon F_1(u, \varepsilon) \equiv F(u, \varepsilon)$$

Введём новое переменное x так, чтобы при $\varepsilon = 0$ новое переменное совпадало со старым:

$$u = x + \varepsilon Q_1(x, \varepsilon) \equiv Q(x, \varepsilon) \tag{1.10}$$

Уравнение для x запишется тогда в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(x, \varepsilon), \tag{1.11}$$

где правая часть $A(x,\varepsilon)$ выражается через правую часть исходного уравнения и функцию Q следующим образом:

$$A(x, \varepsilon) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)^{-1} F(Q, \varepsilon), \tag{1.12}$$

Функция $Q_1(x,\varepsilon)$ полностью в нашем распоряжении, и нужно подобрать её таким образом, чтобы уравнение (1.11) допускало разделение движений. Требование разделения движений приводит, как мы видели, к равенству (1.9), которое удобнее для наших целей записать в виде:

$$\frac{dA}{dx} A_0 - \frac{dA_0}{dx} A = 0 .$$

Это условие отличается от (1.9) заменой A_1 на A, что вполне допустимо, ввиду перестановочности A с самим собой.

У нас получилась, таким образом, система двух уравнений с двумя неизвестными A и Q. Функция F задана, а функция $A_0(x)$ выражается через F, так как из (1.10) и (1.12) вытекает, что при $\varepsilon = 0$, $u = x$ и

$$A_0(x) = A(x,0) = F(x,0) = F_0(x) .$$

Система уравнений для A и Q – это система нелинейных уравнений в частных производных. Исследование разрешимости такой системы в общем виде – задача весьма сложная. Однако в нашем случае вопрос существенно упрощается, так как для задачи об устойчивости достаточно получения решения с любой точностью по ε, то есть построения асимптотического ряда по степеням ε. Реально используется всего три члена асимптотического ряда, то есть решение достаточно получить с точностью до ε^4.

При построении асимптотических рядов главное – это доказать, что члены ряда можно последовательно определить один за другим. Так как вопрос о сходимости не ставится, то единственное, что подлежит доказательству – это разрешимость систем, получаемых на каждом этапе. Фактически дело сводится к решению нелинейного уравнения, получающегося при ε = 0 и исследованию линейной системы первого приближения, так как линейные системы, получающиеся в более высоких порядках, отличаются от системы первого порядка только правыми частями. Технически удобно получать уравнения для коэффициентов асимптотических рядов последовательным дифференцированием системы уравнений по параметру ε. В связи с этим в разложении искомой функции по степеням полезно выделить факториальные множители:

$$\left.\begin{aligned} A(x,\varepsilon) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} A_k(x) \\ Q(x,\varepsilon) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} Q_k(x) \end{aligned}\right\}. \tag{1.13}$$

Для дальнейших выкладок систему уравнений удобнее записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dQ}{dx} A(x,\varepsilon) - F(Q,\varepsilon) = 0 \\ &\frac{dA}{dx} A_0(x) - \frac{dA_0}{dx} A(x,\varepsilon) = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{1.14}$$

Как мы видели выше, решение этой системы при ε = 0 существует и имеет очень простой вид:

$$\left.\begin{aligned} A_0(x) &= F_0(x) \\ Q_0(x) &= x \end{aligned}\right\}. \tag{1.15}$$

Выпишем систему уравнений для A_1 и Q_1. Для получения этой системы нужно продифференцировать по ε уравнения (1.14), а затем положить ε = 0. Выпишем сначала систему, получающуюся после дифференцирования, обозначая штрихом производные по ε:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dQ'}{dx}A - \frac{dF}{du}Q' + \frac{dQ}{dx}A' = F'(Q,\varepsilon) \\ &\frac{dA'}{dx}A_0 - \frac{dA_0}{dx}A' \qquad\quad = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Если теперь положить ε = 0, то, учитывая (1.13) и (1.15), получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dQ_1}{dx}A_0 - \frac{dA_0}{dx}Q_1 + A_1 = G_1(x) \\ &\frac{dA_1}{dx}A_0 - \frac{dA_0}{dx}A_1 \qquad\quad = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Нетрудно доказать по индукции, что система уравнений для A_n и Q_n имеет аналогичный вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dQ_n}{dx}A_0 - \frac{dA_0}{dx}Q_n + A_n = G_n \\ &\frac{dA_n}{dx}A_0 - \frac{dA_0}{dx}A_n \qquad\quad = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{1.16}$$

В этот системе функция G_n выражается через функции Q_i и A_i с номерами, меньшими, чем n. Эти функции найдены на предыдущих шагах. Кроме того, в функцию G_n входят, конечно, коэффициенты заданной функции $F(u,\varepsilon)$. Приведём выражения, которые нам потребуются в дальнейшем:

$$\left.\begin{aligned} &G_1(x) = F_1(x) \\ &G_2(x) = F_2(x) + 2\frac{dF_1}{dx}Q_1 - 2\frac{dQ_1}{dx}A_1 + \frac{d^2A_0}{dx^2}Q_1^2 \end{aligned}\right\}. \tag{1.17}$$

Как уже отмечалось выше, системы уравнений (1.16) при разных n отличаются только правыми частями, что позволяет выяснить условия разрешимости таких систем при любых n. Так как система (1.16) есть система линейных уравнений с частными производными, то её решение можно получить интегрированием вдоль характеристик. Нетрудно убедиться, что характеристики совпадают с траекториями невозмущённого движения. Такой общий путь годится для любых линейных систем. Однако в нашем случае можно получить решение системы (1.16) более просто, используя специфику её строения. Построение решения опирается на формулу (1.8), уже использованную нами при выводе критерия разделения движений. Для дальнейшего полезно выяснить простой геометрический смысл преобразования (1.7). Это преобразование осуществляет «параллельный перенос» векторного поля $z(x)$ вдоль траекторий невозмущённого движения. Если бы $z(x)$ была скалярной функцией, то достаточно было бы вместо x подставить функцию $f(\xi,t)$, показывающую, в какую точку x придёт траектория из начальной точки ξ за время t. Но так как z – вектор, то после переноса точки приложения нужно ещё повернуть сам вектор. Этот поворот осуществляется матрицей $\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{-1}$. Для формального построения решения все эти наводящие соображения несущественны, и можно просто сказать, что всякая функция $z(x)$ в пространстве порождает функцию $\tilde{z}(\xi,t)$ на траекториях. Если известна функция $\tilde{z}(\xi,t)$, то найти порождающую её функцию $z(x)$ можно просто, положив $t = 0$:

$$z(\xi) = \tilde{z}(\xi,0).$$

Заметим только, что далеко не любая функция от ξ и t может быть представлена в форме (1.7).

Выше мы видели (1.7 и 1.8), что взятие коммутатора от функции z равносильно дифференцированию по времени функции $\tilde{z}$. Это обстоятельство подсказывает переход к функциям вдоль траектории в системе (1.16). Действительно, если умножить оба уравнения на $\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{-1}$, то мы приходим к такой системе уравнений для функций на траекториях (индекс n опущен, чтобы не загромождать выкладок):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tilde{Q}}{dt} + \tilde{A} &= \tilde{G} \\ \frac{d\tilde{A}}{dt} \qquad &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (1.18)$$

Преобразование (1.7) означает, таким образом, переход к характеристике системы (1.16). Заметим, что в системе (1.18) функция $\tilde{G}$ задана, а искомыми являются функции $\tilde{Q}$ и $\tilde{A}$. При этом нас устраивают только такие решения системы (1.18), которые представимы в виде (1.7), так как нашей окончательной целью является решение системы (1.16) для порождающих функций. В частности, из второго уравнения системы (1.18) вытекает, что $\tilde{A}$ не зависит от времени и, следовательно,

$$\tilde{A}(\xi, t) = A(\xi). \tag{1.19}$$

Но в качестве $A(\xi)$ можно взять далеко не любую функцию, а только такую, которая порождает $\tilde{A}$, постоянную вдоль траекторий. На первый взгляд получается порочный круг. Однако это не так, ибо мы ещё не использовали первого из уравнений системы, которое и доставляет недостающие сведения о функции $A(\xi)$.

Так как ситуация несколько необычна, то имеет смысл разобрать с начала до конца простой случай, когда все решения невозмущённого уравнения для x периодичны по времени. В этом случае любая функция $z(x)$ порождает периодическую по времени функцию $\tilde{z}(\xi, t)$. Будет, в частности, периодичной и функция $\tilde{Q}$. Поэтому первое слагаемое в первом из уравнений системы (1.18) даёт нуль при интегрировании по периоду, и мы получаем ещё одно соотношение для $\tilde{A}$, которое вместе с равенством (1.19) определяет $A(\xi)$ уже однозначно:

$$A(\xi) = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{-1} G(f)\,dt. \tag{1.20}$$

Предыдущее рассуждение является, как всегда, доказательством единственности решения, а не его существования. Но если обычно проверка того, что полученное решение действительно удовлетворяет уравнению, осуществляется просто подстановкой, то в нашем случае положение несколько сложнее. Дело в том, что, как уже было выше отмечено, решением является вовсе не любая функция $A(\xi)$, а только такая, которая коммутирует с $A_0(\xi)$.

Докажем, что функция $A(x)$, определяемая формулой (1.20), коммутирует с $A_0(x)$. Выше мы видели, что вместо перестановочности какой-либо функции $z(x)$ с $A_0(x)$ можно проверить постоянство вдоль траекторий функции $\tilde{z}(\xi,t)$, порождённой функцией $z(x)$. Из формул (1.7) и (1.8) вытекает, что для дифференцируемых функций $z(x)$ эти два свойства равносильны. Достаточно, поэтому, доказать, что функция $\tilde{A}(\xi,t)$ не зависит от t. Решающую роль в доказательстве играет групповое свойство функции $f(\xi,t)$:

$$f(\xi,t+\tau)=f\left(f(\xi,t),\tau\right),$$

которое вытекает из автономности (то есть, независимости от времени правой части) невозмущённого уравнения.

Перейдём к доказательству. Рассмотрим произвольную функцию $G(y)$ и образуем от неё интеграл типа (1.20):

$$\mathscr{P}[G]=A(x)=\frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1}G(y)d\tau\ , \tag{1.21}$$

где

$$y=f(x,\tau). \tag{1.22}$$

Умножая обе части формулы (1.21) на $\left(\dfrac{\partial x}{\partial\xi}\right)^{-1}$, где

$$x=f(\xi,t),$$

получим:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^{-1}A(x)=\frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^{-1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1}G(y)d\tau\,.$$

Матрицу $\left(\dfrac{\partial x}{\partial\xi}\right)^{-1}$ можно, очевидно, внести под знак интеграла, так как она не зависит от переменного интегрирования τ. Так как, кроме того, произведение матриц можно упростить:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^{-1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1}=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^{-1}=\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^{-1},$$

то получается, что

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^{-1}A(x)=\frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^{-1}G(y)d\tau\,, \tag{1.23}$$

где y можно выразить прямо через ξ, как это вытекает из группового свойства функции $f(\xi,t)$:

$$y = f(\xi, t + \tau).$$

Если учесть периодичность по τ подынтегрального выражения в формуле (1.23) и перейти к новому переменному

$$s = t + \tau\,,$$

то получим:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1} A(x) = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^{-1} G(y)\,ds\,,$$

где

$$y = f(\xi, s).$$

Но в правой части этого соотношения стоит, согласно формулам (1.21) и (1.22), просто $A(\xi)$. Поэтому окончательно получается, что

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1} A(x) = A(\xi)\,.$$

А это равенство означает независимость от времени $\tilde{A}(\xi, t)$, что и требовалось доказать.

Нетрудно видеть, что проведённое рассуждение является естественным обобщением на нелинейный случай известной техники построения инвариантной квадратичной формы.

Итак, мы показали, что по любой функции $G(x)$ можно построить функцию $A(x)$, коммутирующую с $A_0(x)$. Если функция $G(x)$ коммутирует с $A_0(x)$, то при вычислении интеграла (1.21) получится сама функция $G(x)$. Следовательно, правую часть формулы (1.21) можно рассматривать как оператор проектирования на подпространство функций, коммутирующих с $A_0(x)$. Но всякий оператор проектирования $\mathscr{P}$ порождает разложение всего пространства в прямую сумму подпространства, инвариантного относительно $\mathscr{P}$, и подпространства, аннулируемого оператором $\mathscr{P}$. В дальнейшем будет видно, что это разложение имеет прямую связь с задачей отыскания функции $Q(x)$, к которой мы сейчас и должны перейти.

Подобно тому, как при отыскании A мы начали с решения уравнения для $\tilde{A}$, определению Q предшествует интегрирование уравнения для $\tilde{Q}$. Так как $\tilde{G}$ – заданная функция, а функция $\tilde{A}$ уже найдена, то решение уравнения для $\tilde{Q}$ сводится просто к интегрированию по t обеих частей первого из уравнений системы (1.18):

$$\tilde{Q}(\xi,t)-\tilde{Q}(\xi,0)=\int_0^t \left(\tilde{G}-\tilde{A}\right)d\tau .$$

Так как $\tilde{Q}(\xi,0)=\tilde{Q}(\xi)$, то полученное равенство можно переписать в виде:

$$Q(\xi)=\tilde{Q}(\xi,t)-\int_0^t \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1}\left[G(z)-A(z)\right]d\tau , \qquad (1.24)$$

где

$$z=f(\xi,\tau).$$

Перед тем, как двигаться дальше, необходимо заметить, что, в отличие от $A(x)$, функция $Q(x)$ не определяется однозначно системой (1.16). Действительно, Q входит только в первое из уравнений системы, и сразу видно, что функция Q определена только с точностью до произвольного слагаемого, коммутирующего с A_0. Но выше мы видели, что любую функцию можно представить в виде суммы двух слагаемых, первое из которых коммутирует с A_0, а второе аннулируется проекционным оператором (1.21). Поэтому, если решение уравнения для Q вообще существует, то существует, в частности, такое решение, для которого интеграл (1.21) – то есть среднее по траектории – равен нулю. Будем искать именно такое решение. Из формулы (1.24) следует тогда, что

$$Q(\xi)=-\frac{1}{T}\int_0^T\left\{\int_0^s \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^{-1}\left[G(z)-A(z)\right]d\tau\right\}ds , \qquad (1.25)$$

где z по-прежнему означает функцию ξ и τ:

$$z=f(\xi,\tau).$$

Итак, мы показали, что если существует решение, для которого среднее по траектории равно нулю, то это решение задаётся формулой (1.25). Так же, как и раньше, необходимо проверить, что полученная функция действительно является решением. Докажем это. Доказательство аналогично уже проведённому доказательству для A, но в одном пункте несколько сложнее.

Для упрощения выкладок при доказательстве введём обозначение:

$$N(x,s)=\int_0^s\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1}\left[G(z)-A(z)\right]d\sigma, \tag{1.26}$$

где

$$z=f(x,\sigma). \tag{1.27}$$

Заметим, прежде всего, что функция N периодична по s с периодом T, так как подынтегральное выражение периодично и имеет среднее по периоду, равное нулю. Мы уже видим, что в доказательстве важную роль играют формулы, показывающие поведение функций при сдвиге вдоль траектории. Выведем теперь формулу для функции N. Пусть

$$x=f(\xi,t). \tag{1.28}$$

Рассмотрим сдвиг функции N из ξ в x:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1}N(x,s)=\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1}\int_0^s\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1}\left[G(z)-A(z)\right]d\sigma=$$

$$=\int_0^s\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^{-1}\left[G(z)-A(z)\right]d\sigma\,.$$

Выкладки, при помощи которых получен этот результат, вполне аналогичны выкладкам, проводившимся при выводе формулы для A. Получившееся выражение похоже на формулу (1.26), определяющую $N(\xi,s)$, но пределы интегрирования не соответствуют аргументу функции z. Действительно, из (1.27) и (1.28) видно, что

$$z=f(x,\sigma)=f\left(f(\xi,t),\sigma\right)=f(\xi,t+\sigma).$$

Поэтому надо ввести новое переменное $\tau = t + \sigma$, и тогда получается:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1}N(x,s)=\int_t^{t+s}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^{-1}\left[G(z)-A(z)\right]d\tau=$$

$$=N(\xi,t+s)-N(\xi,t). \tag{1.29}$$

Это и есть формула, которую мы хотели получить. Опираясь на неё, нетрудно получить доказательство того факта, что формула (1.25) даёт решение уравнения для Q. Выразим, прежде всего, Q через N. Из формул (1.25) и (1.26) вытекает, что

$$Q(x) = -\frac{1}{T}\int_0^T N(x,s)ds.$$

Вычислим теперь $\tilde{Q}(\xi,t)$, используя формулу (1.29) и считая, что x задаётся формулой (1.28):

$$\tilde{Q}(\xi,t) = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1} Q(x) =$$

$$= -\frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1} N(x,s)ds = -\frac{1}{T}\int_0^T \left[N(\xi,t+s) - N(\xi,t)\right]ds.$$

Так как функция N периодична по s, то в первом интеграле можно сдвинуть аргумент на t назад. Второе слагаемое просто выносится за знак интеграла, так как оно не зависит от переменного интегрирования. Поэтому мы получаем, что

$$\tilde{Q}(\xi,t) = -\frac{1}{T}\int_0^T N(\xi,s)ds + N(\xi,t).$$

Из полученной формулы очевидно, прежде всего, что среднее от $\tilde{Q}$ вдоль траектории равно нулю. Кроме того, обе части этого равенства можно продифференцировать по t, так как первое слагаемое в правой части не зависит от t, а второе, в силу формулы (1.26), есть интеграл по времени от функции $\tilde{G} - \tilde{A}$. Но если правая часть равенства дифференцируема по t, то и левая часть также дифференцируема. Выполняя дифференцирование, мы придём к первому из уравнений системы (1.18), что и требовалось доказать. Следует отметить, что теорема доказана для общего нелинейного случая.

§ 3. Замена переменных. Общий случай

Рассуждения предыдущего параграфа решают вопрос для случая периодического невозмущённого движения. Довольно ясно, как обобщить полученные формулы на тот случай, когда невозмущённое движение является движением почти периодическим. Как всегда в такой ситуации, нужно перейти к пределу при $T \to \infty$. Получаются следующие формулы, содержащие, разумеется, выведенные выше формулы как частный случай:

$$\left.\begin{aligned} A_n(x) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1} G_n(z)\,dt \\ Q_n(x) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T t\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1}\left[G_n(z)-A_n(z)\right]dt \end{aligned}\right\}. \qquad (1.30)$$

В этих формулах буквой z обозначено решение невозмущённого уравнения, принимающее значение x при $t = 0$:

$$z = f(x,t).$$

Несколько сложнее (из-за наличия в формулах (1.30) предельного перехода), но в принципе так же, как и для периодических решений, проверяется, что функции $A_n(x)$ и $Q_n(x)$, определяемые формулами (1.30), порождают функции $\tilde{A}_n$ и $\tilde{Q}_n$, являющиеся решениями системы (1.18). Однако наша основная задача состоит в решении системы (1.16). Используя формулы (1.7) и (1.8), нетрудно показать, что если функции $Q_n(x)$ и $A_n(x)$ дифференцируемы и порождают функции $\tilde{Q}_n$ и $\tilde{A}_n$, удовлетворяющие системе (1.18), то сами функции Q_n и A_n удовлетворяют системе (1.16). Именно таково положение вещей в случае периодичности решений невозмущённого уравнения, когда функции Q_n и A_n дифференцируемы, так как получаются интегрированием гладких функций по конечному интервалу. (Подразумевается, конечно, что период T дифференцируемым образом зависит от ξ). Иное дело – почти периодический случай. В формулы (1.30) входит предельный переход, и получающиеся функции не обязаны быть дифференцируемыми. Более того, они не обязаны быть даже непрерывными. Такая ситуация реально осуществляется для многочастотных колебаний, когда функция $A_n(x)$, вычисленная по формуле (1.30), оказывается разрывной во всех точках x, которые соответствуют соизмеримым частотам.

Выход в этом случае подсказывается эргодической теоремой, согласно которой среднее по времени на полной мере совпадает со средним по метрически неразложимому многообразию, содержащему данную траекторию. Во многих практически интересных случаях оказывается, что пространственное среднее является дифференцируемой функцией, а временно́е среднее разрывно на всюду плотном множестве. Но так как эти средние совпадают на полной мере, то становится ясным, что в тех точках, где они не совпадают, предпочтение следует отдавать пространственному среднему. Стоит заметить, что если взять временнóе среднее и свернуть его с размазанной положительной δ-функцией, то при переходе к пределу получится пространственное среднее. Таким образом, пространственное среднее можно рассматривать как регуляризованное временнóе среднее.

Дальнейшее обсуждение этого интересного вопроса увело бы нас слишком далеко от нашей основной задачи – теории устойчивости. В нашем случае достаточной для построения асимптотического ряда оказывается следующая теорема:

<u>Теорема I.</u>

Если пределы, участвующие в формулах (1.30)*, существуют, а функции, определяемые этими формулами, дифференцируемы, то функции* $Q_n(x)$ *и* $A_n(x)$ *удовлетворяют системе* (1.16).

Заметим, что в сформулированной теореме не требуется почти периодичность решения невозмущённого уравнения, так как анализ доказательства показывает, что суть дела в существовании пределов, а не в специальных свойствах решений невозмущённого уравнения.

§ 4. Метод «расщепления» параметра

Тем не менее теорема I не является ещё достаточно удобной для использования. Более гибкую формулировку можно получить следующим несложным, но весьма полезным приёмом. Предположим, что уравнение (1.3) зависит не только от параметра ε, но и от параметра δ:

$$\frac{du}{dt} = F_0(u, \delta) + \varepsilon F_1(u, \varepsilon, \delta). \tag{1.31}$$

Рассмотрим «невозмущённое» уравнение, которое в этом случае более разумно именовать *основным* уравнением

$$\frac{dx}{dt} = F_0(x, \delta).$$

Если нам известно решение *основного* уравнения

$$x = f(\xi, t, \delta), \qquad f(\xi, 0, \delta) = \xi \tag{1.32}$$

при всех интересующих нас значениях параметра δ, то всё изложенное выше проходит почти без изменений, и мы получаем эволюционное уравнение:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon A_1(\xi, \varepsilon, \delta). \tag{1.33}$$

Решение исходной системы (1.31) получается, так же как и раньше, заменой переменных и наложением движений:

$$u = x + \varepsilon Q_1(x, \varepsilon, \delta),$$

где x даётся формулой (1.32), а ξ есть решение эволюционного уравнения (1.33)

Правая часть эволюционного уравнения и функция, дающая замену переменных, имеют асимптотические разложения:

$$\left.\begin{aligned} A_1(x, \varepsilon, \delta) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} A_n(x, \delta) \\ Q_1(x, \varepsilon, \delta) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} Q_n(x, \delta) \end{aligned}\right\}, \tag{1.34}$$

коэффициенты которых вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} A_n(x, \delta) &= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{-1} G_n(z) dt \\ Q_n(x, \delta) &= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T t \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{-1} \left[G_n(z) - A_n(z) \right] dt \end{aligned}\right\}, \tag{1.35}$$

Буква z означает решение основного уравнения

$$z = f(x, t, \delta),$$

принимающее значение x при $t = 0$:

$$f(x, 0, \delta) = x .$$

Функции G_n, входящие в правые части формул (1.35), рекуррентно вычисляются через A_i, Q_i и F_i по формулам типа (1.17) и будут, разумеется, зависеть от параметра δ.

Условия применимости изложенной схемы сформулированы в следующей теореме:

Теорема II.

*Если правые части формул (*1.35) *существуют, а функции, ими определяемые, дифференцируемы, то существует замена переменных* (1.34)*, приводящая уравнение* (1.31) *к виду, допускающему разложение* *движений.*

Существование замены переменных понимается здесь в смысле асимптотической теории, то есть отрезок ряда (1.34), содержащий n членов, производит разделение движений с точностью до ε^{n+1}. Заметим также, что для замены с точностью до ε^{n+1} достаточно, чтобы существовали первые n членов. Так как для получения результата достаточно обычно иметь один или, самое большее, два члена разложения, то последнее замечание может заметно сократить труд по выяснению законности разложения.

Теорема II об уравнениях с двумя параметрами подсказывает полезный практический приём исследования уравнений с одним параметром. Ясно, что теорема останется справедливой, если, в частности $\delta = \varepsilon$ (или, например, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$). Теорема II означает, поэтому, что в качестве основы для теории возмущений можно брать не только предельное уравнение, получающееся при $\varepsilon = 0$.

Любое уравнение, которое мы умеем решить и которое имеет одинаковое с изучаемым невозмущённое уравнение, может служить в качестве основного уравнения.

Это замечание очень полезно, если невозмущённое уравнение оказывается «вырожденным» в том смысле, что, исходя из него, не удаётся построить асимптотического разложения – либо потому, что не существуют пределы типа (1.35), либо пределы существуют, но получающиеся функции разрывны. В таких случаях нередко удаётся снять вырождение, если оставить, кроме невозмущённых, также и некоторые возмущающие члены. Сформулируем более точно этот *приём «расщепления» параметра*:

Пусть изучаемое уравнение имеет вид:

$$\frac{du}{dt} = F(u, \varepsilon),$$

а основное, которое также зависит от ε:

$$\frac{du}{dt} = F_0(u, \varepsilon).$$

В этом случае исходную систему можно переписать следующим образом:

$$\frac{du}{dt} = F_0(u, \varepsilon) + \varepsilon F_1(u, \varepsilon), \tag{1.36}$$

так как, согласно предположению, функции $F(u,\varepsilon)$ и $F_0(u,\varepsilon)$ имеют одинаковый главный член $F_0(u) = F(u,0) = F_0(u,0)$ и отличаются, следовательно, на величину, по крайней мере, первого порядка по ε.

Рассмотрим наряду с уравнением (1.36), которое зависит от одного параметра ε, уравнение с двумя параметрами:

$$\frac{du}{dt} = F_0(u,\delta) + \varepsilon F_1(u,\delta). \tag{1.37}$$

Если мы сумеем провести исследование уравнения (1.37), то результат для уравнения (1.36) получится автоматически при $\delta = \varepsilon$.

Ниже будет проведен один важный пример применения метода расщепления параметра, а сейчас заметим только, что этот метод может с пользой употребляться и в случае хорошего невозмущённого движения с целью упрощения выкладок. Пример такого использования метода расщепления параметра будет дан в гл. III.

§ 5. Прямые методы в разделении движений. Случай линейности невозмущённого уравнения

Первые параграфы настоящей главы были посвящены разбору нелинейных систем уравнений. Рассмотрение основывалось на специальной форме (1.30) решения системы уравнений в частных производных, к которым приводят требование разделения движений. Но сам метод разделения движений является существенно более общим, чем метод осреднения, возникающий только как способ решения системы уравнений (1.16). Этот способ наиболее удобен для случая периодичности решений невозмущённого уравнения. Однако во многих других случаях способ осреднения непригоден, так как может приводить к расходящимся интегралам. В этих случаях надо искать другие способы решения системы уравнений (1.16). Один из таких способов – метод неопределённых коэффициентов – особенно удобен в том случае, когда невозмущённое уравнение линейно. Настоящий параграф посвящён изложению этого метода, который автоматически приводит, в частности, к теореме Дюлака [3, стр. 233].

Итак, наша ближайшая задача состоит в решении системы (1.16) для того случая, когда $A_0(x)$ есть линейная функция x. Основное соображение состоит в том, чтобы правую часть $G_n(x)$ разложить в сумму однородных многочленов и решать задачу для каждого многочлена независимо.

Иначе это соображение можно высказать следующим образом. Если рассматривать левую часть системы (1.16) как линейный оператор в пространстве функций Q, A, то любое подпространство однородных многочленов данной степени инвариантно относительно этого оператора. Полезно заметить, что все эти подпространства конечномерны.

Для того чтобы не загромождать изложения, решим задачу для того случая, когда функция G является квадратичным многочленом относительно x. Согласно сказанному, функции A_n и Q_n следует искать также в виде квадратичных многочленов.

Перепишем систему (1.16) в тензорных обозначениях, опустив нетензорные индексы n и 0 и обозначив временно A_n через B, чтобы не путать его с A_0. Важно заметить, что все функции Q, A, G и B являются векторами с точки зрения их тензорной размерности:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q^\alpha}{\partial x^\lambda}A^\lambda - \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\lambda}Q^\lambda + B^\alpha &= G^\alpha \\ \frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\lambda}A^\lambda - \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\lambda}B^\lambda \qquad &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{1.38}$$

Согласно предположению

$$\left.\begin{aligned} A^\alpha &= A^\alpha_\beta x^\beta \\ G^\alpha &= G^\alpha_{\gamma\delta} x^\gamma x^\delta \end{aligned}\right\}. \tag{1.39}$$

Решение B и Q следует искать в виде:

$$\left.\begin{aligned} B^\alpha &= A^\alpha_{\gamma\delta} x^\gamma x^\delta \\ Q^\alpha &= Q^\alpha_{\gamma\delta} x^\gamma x^\delta \end{aligned}\right\}. \tag{1.40}$$

Здесь мы снова вернулись к обозначению A для A_n, так как опасность перепутать A_n и A_0 теперь исключена, благодаря тому, что A_n трёхиндексный тензор, а A_0 – двухиндексный. Подставляя (1.39) и (1.40) в (1.38) и сравнивая коэффициенты, получаем:

$$\left.\begin{aligned} Q^\alpha_{\beta\lambda}A^\lambda_\gamma + Q^\alpha_{\gamma\lambda}A^\lambda_\beta - A^\alpha_\lambda Q^\lambda_{\beta\gamma} + A^\alpha_{\beta\gamma} &= G^\alpha_{\beta\gamma} \\ A^\alpha_{\beta\lambda}A^\lambda_\gamma + A^\alpha_{\gamma\lambda}A^\lambda_\beta - A^\alpha_\lambda A^\lambda_{\beta\gamma} \qquad &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Эта система уравнений для $Q^\alpha_{\beta\gamma}$ и $A^\alpha_{\beta\gamma}$ выглядит особенно просто в системе координат, в которых матрица A_γ^λ диагональна. Обозначив через $\Lambda(\alpha)$ собственные значения этой матрицы, мы получим такие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\left[\Lambda(\beta)+\Lambda(\gamma)-\Lambda(\alpha)\right]Q_{\beta\gamma}^{\alpha}+A_{\beta\gamma}^{\alpha}&=G_{\beta\gamma}^{\alpha}\\ \left[\Lambda(\beta)+\Lambda(\gamma)-\Lambda(\alpha)\right]A_{\beta\gamma}^{\alpha}&=0\end{aligned}\right\}. \tag{1.41}$$

Индексы собственных значений взяты в скобки для того, чтобы подчеркнуть их нетензорный характер. Уже из вида получившейся системы легко заключить, что решающую роль играют комбинации собственных значений:

$$\Lambda(\alpha\beta\gamma)=\Lambda(\beta)+\Lambda(\gamma)-\Lambda(\alpha).$$

Если для данной тройки индексов эта комбинация отлична от нуля:

$$-\Lambda(\alpha)+\Lambda(\beta)+\Lambda(\gamma)\neq 0,$$

то из системы (1.41) получаем:

$$\left.\begin{aligned}A_{\beta\gamma}^{\alpha}&=0\\ Q_{\beta\gamma}^{\alpha}&=\frac{1}{\Lambda(\beta)+\Lambda(\gamma)-\Lambda(\alpha)}G_{\beta\gamma}^{\alpha}\end{aligned}\right\}. \tag{1.42}$$

Предположим теперь, что имеет место *внутренний резонанс второго порядка*, то есть для некоторой тройки индексов выполнено равенство:

$$\Lambda(\beta)+\Lambda(\gamma)-\Lambda(\alpha)=0.$$

Теперь из системы (1.41) вытекает, что

$$\left.\begin{aligned}A_{\beta\gamma}^{\alpha}&=G_{\beta\gamma}^{\alpha}\\ Q_{\beta\gamma}^{\alpha}&-\text{произвольно}\end{aligned}\right\}.$$

Мы доказали, таким образом, что задача о разделении движений в нашем случае всегда разрешима. Решение, при этом, однозначно, если внутренний резонанс отсутствует. Если же внутренний резонанс есть, то однозначно определяется (в главном члене) правая часть эволюционного уравнения. Замена переменных допускает в этом случае произвол, который может быть использован для упрощения членов более высокого порядка.

Формулы (1.42) дают решение для случая многочленов второго порядка. Для многочленов k-го порядка обобщение очевидно:

$$\left.\begin{aligned} &A^{\alpha}_{\beta_1\beta_2..\beta_k} = 0 \\ &Q^{\alpha}_{\beta_1\beta_2..\beta_k} = \frac{1}{\Lambda(\beta_1) + \Lambda(\beta_2) + \cdots + \Lambda(\beta_k) - \Lambda(\alpha)} G^{\alpha}_{\beta_1\beta_2..\beta_k} \end{aligned}\right\}.$$

Решение для случая внутреннего резонанса k-го порядка,

$$\Lambda(\beta_1) + \Lambda(\beta_2) + \cdots + \Lambda(\beta_k) - \Lambda(\alpha) = 0\,,$$

получается совершенно аналогично решению при резонансе второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} &A^{\alpha}_{\beta_1\beta_2..\beta_k} = G^{\alpha}_{\beta_1\beta_2..\beta_k} \\ &Q^{\alpha}_{\beta_1\beta_2..\beta_k} \quad - \text{произвольно} \end{aligned}\right\}.$$

Если функция G в правой части системы (1.38) не является многочленом, то решение получается в виде формального ряда по однородным многочленам. Для дальнейшего достаточно, впрочем, разобранного выше случая многочленов. Упомянем, поэтому, только одно обстоятельство, связанное с общей задачей. Если собственные значения $\Lambda(\alpha)$ лежат в полуплоскости, не содержащей начала координат, то можно доказать сходимость полученных формальных рядов. Если же это требование не выполнено, то можно показать на простых примерах, что ряды будут, вообще говоря, расходящимися.

В заключение одно замечание, важное для дальнейшего. Формулы, выведенные в настоящем параграфе, опираются на возможность приведения матрицы A_0 к диагональной форме. Но если исходная система действительна, то собственные значения будут, вообще говоря, комплексны, и приведение к диагональной форме возможно только в комплексной области. Из этого положения возможны два выхода. Можно оставаться в действительной области, но тогда взамен формул (1.38) нужно вывести более сложные, которые получатся, если привести матрицу A_0 к действительной канонической форме. Применительно к теории устойчивости предпочтительнее другой путь – выход в комплексную область. Нужно только при этом иметь в виду следующее обстоятельство: Так как исходная система действительна, то собственные векторы будут попарно сопряжёнными. Поэтому при выходе в комплексную область новые переменные распадаются на пары, элементы которых отличаются друг от друга только сопряжённостью коэффициентов в замене переменных. Будем обозначать индексом α^* переменное, сопряжённое к переменному x^α. Нетрудно проверить, что вследствие действительности исходной системы, коэффициенты тензоров, например, $G^{\alpha}_{\beta\gamma}$ будут удовлетворять условиям *сопряжённости*:

$$G^{\alpha^*}_{\beta^*\gamma^*} = \overline{G}^{\alpha}_{\beta\gamma}\ . \tag{1.43}$$

Можно показать, что и обратно, если коэффициенты тензоров удовлетворяют условиям сопряжённости, то система заменой переменных может быть приведена к действительной форме. Условия типа (1.43) являются, таким образом, необходимыми и достаточными условиями действительности системы. Для дальнейшего очень важно отметить, что при замене переменных, приводящей к разделению движений, сопряжённые переменные переходят в сопряжённые. Это легко вывести из вида формул (1.42), так как проверить нужно, согласно вышесказанному, только условия сопряжённости.

ГЛАВА II
ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ. ОБЫКНОВЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dv}{dt} = F(v). \tag{2.1}$$

Пусть v_0 стационарная точка этой системы, то есть

$$F(v_0) = 0 .$$

Наша задача состоит в исследовании поведения решений этой системы вблизи точки v_0. Так как нас интересует, по самому смыслу вопроса, только достаточно малая окрестность v_0, то задача эта является, по существу, задачей с малым параметром. Однако параметр этот не входит явно в правую часть изучаемой системы. Для того чтобы привести задачу к обычной форме, введём малый параметр ε явно, рассматривая замену переменных:

$$v = v_0 + \varepsilon u ,$$

$$u = \frac{1}{\varepsilon}(v - v_0) .$$

Исходная система является в новых переменных следующим образом:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} F(v_0 + \varepsilon u).$$

Разложение правой части получившейся системы по степеням ε равносильно, как легко проверить, разложению в ряд Тейлора функции $F(v)$. Поэтому коэффициентами при степенях ε оказываются однородные многочлены:

$$\frac{du}{dt} = F_0(u) + \varepsilon F_1(u) + \varepsilon^2 F_2(u) + \cdots . \tag{2.2}$$

Задача об устойчивости сводится таким образом к задаче об асимптотическом, при ε→0, поведении решений системы (2.2) весьма специального вида. Специфичность этой системы состоит именно в том, что $F_n(u)$ – однородные многочлены переменного u порядка $(n+1)$.

Невозмущённое уравнение, получающееся при этом, оказывается, следовательно, линейным:

$$\frac{du}{dt} = F_0 u, \tag{2.3}$$

и вопрос об устойчивости *невозмущённого* уравнения сводится к чисто алгебраической задаче отыскания собственных чисел матрицы F_0.

Если действительные части собственных чисел отрицательны – система (2.3) устойчива. Если же хотя бы один из корней имеет положительную действительную часть, то система неустойчива.

В случае устойчивости невозмущённого уравнения можно доказать, что исходная система (2.2) также устойчива.

Дело, однако, заключается в том, что во многих важных случаях система (2.3) оказывается частично или полностью нейтральной. Уже А. М. Ляпунов разбирал случай, когда система (2.3) имеет одну пару чисто мнимых корней, а позднее в работах И. Г. Малкина [4] были разобраны случаи двух пар чисто мнимых корней и пары мнимых и одного нулевого корня.

Попытаемся понять, почему интересны такие критические случаи. Предположим, что изучаемая система имеет параметр регулирования. Это значит математически, что правая часть (2.1) зависит не только от v, но и от некоторого параметра μ. В этом случае, как положение равновесия v_0, так и значения производных в точке v_0 будут, разумеется, функциями этого параметра. Корни матрицы F_0, в частности, также будут зависеть от параметра μ. При всех значениях параметра, кроме исключительных, действительные части корней отличны от нуля, и вопрос об устойчивости решается линейной теорией. Нетрудно, однако, сообразить, что наиболее интересными являются как раз исключительные, критические значения параметра. Именно в этих точках происходит переход от устойчивости к неустойчивости, например, самовозбуждение генератора.

Если система содержит несколько параметров μ, то собственные числа и, в частности, их действительные части ρ_i будут функциями этих параметров:

$$\rho_i = \rho_i(\mu_1, \ldots, \mu_s).$$

Равенство нулю какого-нибудь из ρ_i можно рассматривать как уравнение, связывающее значения параметра. Ясно, что, вообще говоря, можно обратить в нуль столько чисел ρ_i, сколько параметров μ имеется в нашем распоряжении.

Изучение таких, максимально вырожденных ситуаций представляет решающий интерес ещё и потому, что в любой, сколь угодно малой окрестности критической точки (в пространстве параметра) найдутся все типы систем, которые могут встретиться при данном наборе параметров регулирования. Часто удобно вместо исходных параметров выбрать другие, но так, разумеется, чтобы имело место взаимно однозначное соответствие между старыми и новыми. Если, в частности, в качестве параметров можно выбрать просто действительные части корней, то строение окрестности максимально вырожденное точки выглядит особенно просто.

Итак, при достаточном числе параметров в системе есть все основания ожидать существования такой стационарной точки, что все корни в этой точке будут чисто мнимыми. Отсюда видно, что положения равновесия в достаточно сложных системах будут, в интересных случаях, нейтральными в линейном приближении. Если число параметров превосходит число степеней свободы (равное половине числа уравнений), то в максимально вырожденной точке, кроме равенства нулю действительных частей корней, могут возникнуть резонансные соотношения между частотами. В нашу задачу не входит изучение таких ситуаций. Мы ограничимся случаем, когда число параметров регулирования не больше числа степеней свободы. Математически это означает, что будут изучаться стационарные точки, в которых все корни являются чисто мнимыми, но между частотами нет целочисленных соотношений.

§ 2. Вывод эволюционного уравнения

Если все корни матрицы F_0 чисто мнимые, то линейное приближение оказывается нейтральным и поведение системы определяется членами более высокого порядка. Заранее ясно, что устойчивость в этом случае существенно отличается по своему характеру от линейной устойчивости хотя бы потому, что затухание происходит значительно медленнее. Нашей ближайшей задачей является вывод уравнений, определяющих это затухание.

Из результатов § 5 гл. I вытекает, что в правой части эволюционного уравнения присутствуют только резонансные члены. Это означает, в частности, что члены, квадратичные относительно переменных, равны нулю, ибо основное наше предположение состоит в отсутствии целочисленных соотношений между частотами. Однако это предположение нуждается в уточнении в одном весьма существенном пункте. Дело состоит в том, что рассматриваются действительные системы, корни которых всегда попарно сопряжены, что для случая чисто мнимых корней приводит к соотношению:

$$\omega_{\alpha^*} = -\omega_\alpha .$$

Нетрудно видеть, что соотношения такого типа автоматически приводят к возникновению внутренних резонансов нечетного порядка. Условимся называть такие резонансы *тождественными*.

Если, в частности, рассмотреть четверку частот ω_α, ω_β, ω_γ, ω_δ и соответствующую комбинационную частоту

$$\omega_{\alpha\beta\gamma\delta} = \omega_\beta + \omega_\gamma + \omega_\delta - \omega_\alpha ,$$

причём индексы выбрать следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} \beta = \alpha \\ \delta = \gamma^* \end{array}\right\}, \qquad (2.4)$$

то получается *тождественный резонанс третьего порядка*:

$$\omega_\alpha + \omega_\gamma + \omega_{\gamma^*} - \omega_\alpha = 0 .$$

После этого замечания становится ясным, что следует сформулировать

<u>Основное предположение:</u>

Рассматриваются только такие системы, в которых отсутствуют все внутренние резонансы, кроме тождественных.

Из этого предположения вытекает, что эволюционное уравнение начинается с членов третьего порядка, так как тождественного резонанса второго порядка не существует:

$$\frac{d\xi^\alpha}{dt} = \varepsilon^2 A^\alpha_{\beta\gamma\delta}\xi^\beta\xi^\gamma\xi^\delta + \cdots .$$

Среди коэффициентов $A^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ отличны от нуля только резонансные, то есть те, индексы которых удовлетворяют соотношениям (2.4). Нетрудно проверить, что такое строение тензора A позволяет понизить вдвое порядок системы введением новых переменных, являющихся квадратом модуля старых

$$\rho^{\alpha} = \left|\xi^{\alpha}\right|^{2} = \xi^{\alpha}\xi^{\alpha^*} .$$

Дело в том, что изучаемые системы действительны и, значит, удовлетворяют условиям сопряжённости. Вместе с отмеченной выше особенностью строения тензора $A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$, это приводит к тому, что правые части уравнения для ρ^k содержат только такие комбинации переменных ξ, которые выражаются через переменные ρ. Если оставить в уравнениях для ρ главные члены, которые нас только и интересуют, то получим следующую систему:

$$\frac{d\rho^k}{dt} = \varepsilon^2 \mathcal{E}^k_{\alpha}\rho^{\alpha}\rho^k . \tag{2.5}$$

При записи системы (2.5) принято соглашение, которого удобно придерживаться и в дальнейшем, состоящее в том, что суммирование производится по греческим индексам, а по латинским не производится.

Мы получили, таким образом, вместо каждой пары уравнений для ξ^{α} и ξ^{α^*} одно уравнение для ρ^{α}, коэффициенты которого выражаются через коэффициенты тензора $A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ следующим образом:

$$\mathcal{E}^k_{\alpha} = A^k_{k\alpha\alpha^*} + A^{k^*}_{k^*\alpha^*\alpha} .$$

Из условий сопряжённости вытекает, что числа $\mathcal{E}^k_{\alpha}$ суть действительные числа.

Для дальнейшего удобно ещё ввести «медленное» время:

$$\tau = \varepsilon^2 t ,$$

после чего вопрос об устойчивости сводится к изучению системы уравнений весьма специального вида:

$$\frac{d\rho^k}{d\tau} = \rho^k \mathcal{E}^k_{\alpha}\rho^{\alpha} . \tag{2.6}$$

§ 3. Собственные направления модельной системы

В предыдущем параграфе была выведена система, которая при изучении нелинейной устойчивости играет такую же роль, какую система линейных уравнений играет при изучении линейной устойчивости. Но если для линейной системы решение может быть записано в явном виде, интегрирование модельной системы (2.6) сводится к квадратурам только в исключительных случаях. Это можно сделать, в частности, в случае, разобранном в работах И. Г. Малкина [4], когда число уравнений в модельной системе равно двум. Если же число уравнений равно трём или больше, то прямое интегрирование невозможно. Задача настоящего параграфа заключается в изучении поведения решений модельной системы для общего случая. При этом мы будем изучать модельную системы саму по себе, не заботясь о её происхождении и, в частности, будем рассматривать поведение решений при отрицательных значениях ρ^α. Отсутствие противоречия с первоначальной задачей – где переменные ρ^α были квадратами модулей переменных ξ^α и, значит, величинами заведомо неотрицательными – обеспечивается следующим свойством модельной системы:

Если какое-нибудь переменное ρ^k равно рулю хотя бы в одной точке траектории, то оно равно нулю тождественно.

Это утверждение получается сразу, если заметить, что при обращении в нуль какого-нибудь переменного, обращается в нуль его производная по времени, так как каждое переменное входит множителем в правую часть своего собственного уравнения. Из указанного свойства вытекает, что вдоль любой траектории модельной системы любое переменное ρ^k сохраняет знак. Отсюда, в частности, следует, что траектория, имеющая одну точку внутри конуса $\rho^k \geq 0$, лежит целиком внутри этого конуса. Если же траектория имеет с какой-нибудь гранью положительного конуса хотя бы одну общую точку, то вся траектория лежит на этой грани.

Заметим, что система уравнений, определяющих траекторию, лежащую на какой-нибудь грани, имеет тот же вид, что и полная система. Рассмотрим, например, грань $\rho' = 0$. Первое уравнение сводится к тождеству $0 = 0$, а в остальных можно вычеркнуть первый член. Вообще система уравнений на грани получается, если в матрице ε^k_α вычеркнуть все строки и столбцы, имеющие те же номера, что и переменные, обращающиеся в нуль на рассматриваемой грани.

Как было выше показано, интересующие нас траектории заполнят положительный конус. Тем не менее при изучении свойств модельной системы полезно знать поведение решений во всём пространстве. Так же, как и для линейных систем, особое значение имеют, в частности, инвариантные прямые системы, то есть решения вида:

$$\rho^k(\tau) = r^k \rho(\tau), \tag{2.7}$$

где r^k зависит от k и не зависит от τ, а ρ(τ) – функция одного только τ.

Подставляя (2.7) в (2.6), получаем, как всегда при использовании метода Фурье, что

$$\frac{d\rho}{dt} = E\rho^2, \tag{2.8}$$

$$r^k\left[\mathcal{E}_\alpha^k r^\alpha - E\right] = 0\ . \tag{2.9}$$

В этой системе E играет роль собственного значения. Однако в отличие от линейных систем, где собственные значения имеют размерность, обратную времени, величина E зависит также и от масштаба ρ. Существенным является, поэтому, знак E, а не величина, так как изменением масштаба ρ, E всегда можно привести к одному из трёх значений: единица, нуль и минус единица. Из уравнения (2.8) ясно, что эти три возможности соответствуют неустойчивому решению, нейтральному и устойчивому.

Важно заметить, что следует говорить об устойчивых лучах, а не о прямых. Действительно, если некоторый инвариантный луч устойчив, то противоположный ему луч будет, конечно, тоже инвариантным, но уже неустойчивым, так как при изменении знака у всех величин r^α величина E также меняет знак. Поэтому инвариантные прямые бывают двух сортов – одни состоят из устойчивого и неустойчивого луча, а у других оба луча нейтральны, то есть состоят из неподвижных точек.

Для того чтобы найти все инвариантные лучи, надо найти все решения системы (2.9). Эта система эквивалентна совокупности $2n$ линейных систем, ибо в каждом из n уравнений можно приравнять нулю либо первый, либо второй множитель. Ясно, что эта процедура соответствует описанной выше процедуре проектирования уравнений на различные грани. Таким образом на каждой грани (любой размерности) положительного конуса – или, точнее говоря, в линейном подпространстве, порождённом этой гранью – найдётся инвариантная прямая.

Найдём инвариантную прямую, соответствующую только полной матрице $\mathcal{E}_\alpha^k$, так как процесс отыскания инвариантных прямых, соответствующих «урезанным» матрицам совершенно аналогичен, не считая упрощений, проистекающих от уменьшения числа переменных.

Рассмотрим основную систему линейных уравнений:

$$\mathcal{E}_{\alpha}^{k} r^{\alpha} = E .$$

Могут представиться два случая:

1. Детерминант $\mathcal{E}_{\alpha}^{k}$ не равен нулю.

Тогда при каждом значении E можно найти решение

$$r^{\alpha} = E r_0^{\alpha} .$$

Точка r^{α} при изменении E от $-\infty$ до $+\infty$ пробегает инвариантную прямую. Отрицательным значениям E соответствуют точки, лежащие на устойчивом луче, положительным – неустойчивый луч.

2. Детерминант $\mathcal{E}_{\alpha}^{k}$ равен нулю.

Положив в этом случае $E = 0$, мы найдём нетривиальное решение однородной системы, которое определено с точностью до произвольного множителя.

Следовательно и в этом случае мы получили инвариантную прямую, но только на этот раз состоящую из двух нейтральных лучей.

Стоит отметить, что отыскание инвариантных лучей линейной системы существенно сложнее. Действительно, в случае линейной системы необходимо, прежде всего, найти собственные значения, что приводят к отысканию корней многочлена. Эта стадия отсутствует при отыскания собственных направлений в нелинейной системе.

Следующий этап – решение системы линейных алгебраических уравнений – одинаков в обоих случаях.

§ 4. Условия устойчивости модельной системы

В предыдущем параграфе указан способ отыскания инвариантных лучей модельной системы. Целью настоящего параграфа является установление необходимых и достаточных условий устойчивости. Здесь и в дальнейшем, если не оговорено противное, имеется в виду *асимптотическая* устойчивость.

Введённое выше понятие инвариантного луча позволяет сформулировать простое необходимое условие устойчивости:

Условие K.

Модельная система называется K-системой, если все её нейтральные и неустойчивые лучи лежат вне положительного конуса

K ($\rho^{\alpha} \geq 0$).

Необходимость этого условия очевидна. Замечательно, что это условие оказывается также и достаточным условием устойчивости. Доказательство последнего утверждения проводится, как обычно, построением функции Ляпунова. Однако это построение настолько громоздко – хотя и просто по своей основной идее, что представляется целесообразным наметить сначала общий план доказательства.

Существенно облегчает доказательство возможность разбиения его на два этапа. На первом этапе мы не будем стремится непосредственно построить функцию Ляпунова. Её основное свойство состоит в том, что она убывает в силу уравнений движения. Нетрудно сообразить, что это свойство является локальным. Могут, поэтому, существовать такие функции, которые в одних точках убывают (в силу уравнений движения), а в других возрастают. Сами по себе такие функции бесполезны для теории устойчивости, так как при их помощи нельзя доказать устойчивость системы, но они служат основными элементами, из которых конструируется настоящая функция Ляпунова. Следующие два параграфа посвящены реализации намеченной программы.

Для упрощения дальнейшего изложения полезно уже сейчас ввести некоторые обозначения и условиться о терминологии.

Мы будем записывать модельную систему, обозначая буквой $\mathcal{E}$ функцию, задающую правую часть:

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{E}(\rho).$$

Эта запись является сокращённой, её полный вариант имеет вид:

$$\frac{d\rho^k}{dt} = \mathcal{E}^k_{\alpha\beta}\rho^{\alpha}\rho^{\beta}.$$

Следует иметь в виду (см. (2.6)), что трёхиндексный тензор $\mathcal{E}^k_{\alpha\beta}$ имеет весьма специальное строение. У этого тензора – симметричного, конечно, по нижним индексам α и β – отличны от нуля только те компоненты, у которых верхний индекс равен одному из нижних. Иногда бывает необходимо подчеркнуть эту особенность – наличие множителя ρ^k в правой части уравнения для $\dfrac{d\rho^k}{dt}$. В этом случае удобно записывать систему в виде:

$$\frac{d\ln|\rho|}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}\rho\,. \tag{2.10}$$

Здесь введено обозначение $\ln|\rho|$ для вектора, компоненты которого суть логарифмы модулей компонент вектора ρ. Символ $\boldsymbol{\varepsilon}$ обозначает уже матрицу $\boldsymbol{\varepsilon}^k_\alpha$, и полная запись в координатах выглядит следующим образом:

$$\frac{d\ln|\rho^k|}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}^k_\alpha \rho^\alpha\,.$$

Нетрудно проверить, что компоненты тензора $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{\alpha\beta}$ выражаются через компоненты матрицы $\boldsymbol{\varepsilon}^k_\alpha$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^k_{k\alpha} = \boldsymbol{\varepsilon}^k_{\alpha k} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^k_\alpha\,,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^k_{kk} = \boldsymbol{\varepsilon}^k_k\,.$$

Все остальные компоненты тензора $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{\alpha\beta}$ равны нулю.

По поводу терминов «матрица» и «тензор» необходимо сделать следующие замечания. Обычно эти термины связываются с характером преобразования соответствующей функции при линейной замене переменных. В нашем случае линейные преобразования лишены всякого смысла – вспомним хотя бы происхождение переменных ρ^k, которые суть *квадраты* модулей исходных переменных. Однако термины «матрица» и «тензор» могут также указывать на тип однородности соответствующей функции. Именно в этом смысле они употребляются в дальнейшем. Использование одной и той же буквы $\boldsymbol{\varepsilon}$ для обозначения разных величин не может вызвать недоразумений, так как из контекста всегда ясно, о чём идёт речь – о матрице или о тензоре.

В заключение параграфа дадим формальное определение локальной функции Ляпунова. Пусть $l(\rho)$ скалярная функция векторного аргумента. Найдём производную этой функции в силу уравнений движения:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{d\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{dl}{d\rho}\boldsymbol{\varepsilon}(\rho)\,.$$

Определение I.

Функция $l(\rho)$ называется локальной функцией Ляпунова *в точке* ρ_0, сокращённо l-функцией, если существует окрестность точки ρ_0 такая, что в этой окрестности:

1. $l(\rho) > 0$,
2. $\frac{dl}{d\rho}\mathcal{E}(\rho) < 0$.

В дальнейшем полезно также естественное обобщение этого определения:

Определение II.

Функция $l(\rho)$ называется локальной функцией Ляпунова *на множестве* $\mathcal{F}$, если она является локальной функцией Ляпунова в каждой точке этого множества.

§ 5. Локальные функции Ляпунова. Теорема о конусе

Нашей ближайшей задачей является построение локальных функций Ляпунова для K-систем. Вид l-функции подсказывается формулой уравнения (2.10). Применим к обеим частям этого равенства функционал $\eta = \{\eta_k\}$, все компоненты которого положительны. Мы получим соотношение:

$$\frac{d}{dt}(\eta, \ln\rho) = (\eta, \mathcal{E}\rho). \tag{2.11}$$

Преобразование $\mathcal{E}$, действующее в пространстве векторов ρ, порождает сопряжённое преобразование $\mathcal{E}^*$, действующее в пространстве функционалов. Введём обозначение:

$$\zeta = \mathcal{E}^*\eta.$$

Если нам удастся найти *положительный* функционал η, который становится *отрицательным* после преобразования $\mathcal{E}^*$, то мы решим задачу построения l-функции для всех внутренних точек конуса K.

Действительно, допустим, что существует функционал η такой, что

$$\left.\begin{aligned} \eta > 0 \\ \mathcal{E}^*\eta = \zeta < 0 \end{aligned}\right\}. \tag{2.12}$$

Рассмотрим функцию l, равную ρ в степени η:

$$l = \rho^{\eta} = \left(\rho^1\right)^{\eta_1}\left(\rho^2\right)^{\eta_2}\ldots\left(\rho^n\right)^{\eta_n}.$$

Эта функция положительна во всех точках конуса *K*, а её логарифмическая производная в силу уравнений движения отрицательна, ибо равенство (2.11) можно переписать в виде:

$$\frac{d}{dt}(\ln l) = (\zeta, \rho).$$

Так как согласно (2.12) функционал ζ отрицателен, а вектор η положителен, то требуемая отрицательность получена.

Поэтому для построения *l*-функции нам нужно доказать следующую теорему:

Теорема А.

Если система удовлетворяет условию K, то существует η > 0 *такой, что* $\mathcal{E}^*\eta < 0$.

Доказательство этой теоремы основано на другой, чисто алгебраической теореме о конусах, которая представляет интерес и сама по себе, независимо от приложений. Сформулируем и докажем эту теорему.

Теорема В.

Пусть K – положительный конус, а $\mathcal{E}$ *– линейное преобразование. Пусть образ конуса* $\mathcal{E}K$ *имеет непустое пересечение с самим конусом K:*

$$\mathcal{E}K \cap K \neq 0.$$

Тогда на одной из граней PK конуса K преобразование $P\mathcal{E}P$ *либо вырождается:*

$$P\mathcal{E}P\rho_0 = 0,$$

либо, наоборот, образ конуса содержит конус:

$$P\mathcal{E}PK \supset PK.$$

Эта теорема означает, что уравнение

$$\mathcal{E}\rho = \lambda e$$

(*e* – вектор, состоящий из единиц) всегда имеет решение хотя бы на одной из граней: либо при λ = 1, либо при λ = 0.

Теорема очевидна для одномерного случая. Общее доказательство проведём индукцией по числу измерений. Рассмотрим образы граней *PK* при отображении $\mathcal{E}$. Если эти образы не пересекаются с конусом *K*, то это значит, что граница конуса $\mathcal{E}K$ лежит вне конуса K. Это возможно только в том случае, когда конус K целиком лежит внутри конуса $\mathcal{E}K$, так как по условию эти тела имеют общие точки. Теорема в таком предположении, следовательно, доказана и можно переходить к обсуждению другой возможности, когда существует непустое пересечение:

$$\mathcal{E}PK \cap K \neq 0 .$$

Возьмём точку из этого пересечения и спроектируем на грань P. Если получается ненулевой вектор, то он принадлежит PK, и мы получаем, что имеет место соотношение:

$$P\mathcal{E}PK \cap PK \neq 0 .$$

Полученное условие воспроизводит формулировку теоремы, но уже в меньшем числе измерений, и теорема доказана по предположению индукции. Если же при проектировании получится нуль, то это значит, что найдено неотрицательное решение уравнения

$$P\mathcal{E}P\rho_0 = 0 .$$

Это решение заведомо не нуль, так как выше мы видели, что $\mathcal{E}P\rho_0 \neq 0$, а значит и $\rho_0 \neq 0$.

Теорема B, таким образом, полностью доказана. Она означает, что если условие $\mathcal{E}K \cap K \neq 0$ выполнено, то конус K содержит либо неустойчивый, либо нейтральный луч. Если же система удовлетворяет условию K, то пересечение $\mathcal{E}K \cap K$ в силу этой теоремы совпадает с нулём. Но если два выпуклых замкнутых конуса не имеют кроме нуля никаких общих точек, то существует гиперплоскость, разделяющая эти конусы. Иными словами, существует функционал η, принимающий строго положительные значения на одном конусе, скажем K, и строго отрицательные на другом.

Итак,

$$(\eta, \rho) > 0 , \ (\eta, \mathcal{E}\rho) < 0$$

для любого $\rho \subset K$. Следовательно,

$$\eta > 0, \quad \mathcal{E}^{*}\eta < 0 ,$$

и теорема A доказана, а тем самым доказано и существование l-функции для K-систем.

§ 6. Построение функции Ляпунова

Основная задача настоящего параграфа – построение функции Ляпунова для модельной системы. Это построение проводится при помощи локальных функций Ляпунова – *l*-функций, существование которых было доказано в предыдущем параграфе. Введём некоторые обозначения, полезные для дальнейшего изложения.

Обозначим через Γ^n симплекс, получающийся в пересечении положительного конуса *K*,

$$K = \mathcal{M}\left(\rho^{(1)} \geq 0, \rho^{(2)} \geq 0, \ldots, \rho^{(n)} \geq 0\right),$$

с гиперплоскостью *E*,

$$E = \mathcal{M}\left(\rho^{(1)} + \rho^{(2)} + \ldots + \rho^{(n)} = 1\right).$$

Обозначим далее через Γ^{k-1} границу симплекса Γ^n размерности (k–1). Γ^0, в частности, есть нульмерная граница и состоит из вершин:

$$\Gamma^0 = \Gamma_1^0 + \cdots + \Gamma_n^0 .$$

Вообще Γ^{k-1} состоит из (k–1)-мерных граней:

$$\Gamma^{k-1} = \cup \Gamma_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{k-1} .$$

Индексы $i_1, i_2, \ldots, i_k$ указывают, какие переменные могут быть отличны от нуля на соответствующей грани. Уравнение грани получается, поэтому, если приравнять нулю все переменные, номера которых *не указаны* в обеспечении грани. Так, например, уравнение грани $\Gamma_{12\ldots k}^{k-1}$ имеет вид:

$$\rho^{(k+1)} = 0, \ \ \rho^{(k+2)} = 0, \ \ \ldots \ \ \rho^{(n)} = 0 .$$

Результат предыдущего параграфа состоит в том, что для любой грани существует *l*-функция вида

$$l_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{k-1} = \rho^{(i_1)^{\eta_1}} \ldots \rho^{(i_k)^{\eta_k}} ,$$

причём числа $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, …, $\eta_k > 0$, зависящие, конечно, от грани, удовлетворяют условию нормировки:

$$\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_k = 1.$$

Перечислим свойства *l*-функций граней, важные для дальнейшего:

(a) *l*-функция непрерывна всюду на симплексе Γ^n.
    Вытекает из положительности показателей.

(b) Логарифмическая производная *l*-функции в силу уравнений движения есть линейная функция переменных $\rho^{(k)}$ и непрерывна, поэтому, во всех точках симплекса Γ^n.

Доказывается прямой проверкой.

(c) l-функция какой-нибудь грани обращается в нуль на любой другой грани той же размерности.

Это видно из того, что все показатели строго положительны и, значит, l-функция обязательно содержит множитель, обращающийся в нуль на «чужой» грани.

(d) Производная l-функции в силу уравнения движения обращается в нуль на любой чужой грани той же размерности.

Вытекает из (b), (c) и того факта, что

$$\frac{dl}{dt} = l\,\frac{d\ln l}{dt}.$$

Сформулируем теперь основную идею построения L-функции. Функции $\rho^{(1)},\ldots,\rho^{(n)}$ являются l-функциями вершин $\Gamma_1^0,\cdots,\Gamma_n^0$. Так как согласно свойствам (c) и (d) эти функции «не мешают» друг другу, то их сумма

$$\mathcal{L}_0 = \rho^{(1)} + \ldots + \rho^{(n)}$$

является l-функцией нульмерной границы Γ^0. Более того, из свойств (a) и (b) вытекает, что функция $\mathcal{L}_0$ есть l-функция и некоторой достаточно малой окрестности множества Γ^0.

Рассмотрим теперь Γ^1. Функция $\mathcal{L}_0$ не является, вообще говоря, l-функцией Γ^1, так как вдали от Γ^0 её производная в силу уравнений движения не обязана сохранять знак. Но у неё есть ценное свойство – она положительна всюду на Γ^n.

Рассмотрим другую функцию:

$$\tilde{\mathcal{L}}_1 = \sum_{ik} l_{ik}^1 .$$

Эта функция является l-функцией любой внутренней точки Γ^1, так как она есть сумма l-функций ребер, не мешающих друг другу в силу свойств (c) и (d). Но для всей одномерной границы Γ^1 эта функция, к сожалению, не годится, так как она обращается в нуль в любой точке нульмерной границы Γ^0.

Вполне естественна, поэтому, мысль объединить полезные свойства функций $\mathcal{L}_0$ и $\tilde{\mathcal{L}}_1$. Интуитивно довольно ясно, как это сделать – надо к функции $\mathcal{L}_0$ прибавить функцию $\tilde{\mathcal{L}}_1$, умноженную на достаточно большой множитель:

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 + N_1\tilde{\mathcal{L}}\,.$$

Функция $\mathcal{L}_1$ не обращается в нуль нигде на Γ^n, более того, она не меньше единицы. Остаётся подобрать множитель N_1 так, чтобы $\mathcal{L}_1$ всюду обладала нужной производной в силу уравнений движения.

Оставим теперь наводящие соображения и докажем формальную теорему, позволяющую осуществить построение функции Ляпунова.

Теорема.

Дано многообразие $\Gamma^k \subset \Gamma^n$ и замкнутое множество Γ^{k-1} на этом многообразии. Даны две функции $\mathcal{L}_{k-1}$ и $\tilde{\mathcal{L}}_k$, а также их производные в силу уравнений движения Ψ_{k-1} и $\tilde{\Psi}_k$. Все эти функции заданы на всём симплексе Γ^n, непрерывны на нём и обладают следующими свойствами:

1. $\mathcal{L}_{k-1} \ge 1$ на Γ^n.
2. $\Psi_{k-1} < 0$ на Γ^{k-1}.
3. $\tilde{\mathcal{L}}_k \ge 0$ на Γ^n, $\tilde{\mathcal{L}}_k > 0$ на $\Gamma^k - \Gamma^{k-1}$ и $\tilde{\mathcal{L}}_k = 0$ на Γ^{k-1}.
4. $\tilde{\Psi}_k < 0$ на $\Gamma^k - \Gamma^{k-1}$ и $\tilde{\Psi}_k = 0$ на Γ^{k-1}.

Требуется доказать, что существует константа $N_k > 0$ такая, что функция

$$\mathcal{L}_k = \mathcal{L}_{k-1} + N_k\tilde{\mathcal{L}}_k$$

и её производная в силу уравнений движения

$$\Psi_k = \Psi_{k-1} + N_k\tilde{\Psi}_k\,,$$

заданные и непрерывные на всём симплексе Γ^n, обладают следующими свойствами:

1. $\mathcal{L}_k \ge 1$ на Γ^n.
2. $\Psi_k < 0$ на Γ^k.

Доказательство.

Так как функция Ψ_{k-1} непрерывна на Γ^n и отрицательна на бикомпакте Γ^{k-1}, то существует такая окрестность U^{k-1} бикомпакта Γ^{k-1}, что Ψ_{k-1} остаётся строго отрицательной на замыкании окрестности U^{k-1}.

Рассмотрим теперь множество

$$\Gamma^k - \Gamma^k \cap U^{k-1} = \Gamma^k \cap \left[\Gamma^n - U^{k-1}\right].$$

Это замкнутое множество, во всех точках которого отрицательна функция $\tilde{\Psi}_k$. Поэтому нижняя грань модуля функции $\tilde{\Psi}_k$ по указанному множеству не равняется нулю. Обозначим через μ_k эту грань:

$$\mu_k = \inf_{\Gamma^k \cap \left[\Gamma^n - U^{k-1}\right]} \left|\tilde{\Psi}_k\right| .$$

Введём, кроме того, обозначение ν_k для максимума модуля функции Ψ_{k-1} по множеству Γ^k:

$$\nu_k = \sup_{\Gamma_k} \left|\Psi_k\right| .$$

Нетрудно проверить, что в качестве константы N можно выбрать следующее число:

$$N_k = 2\frac{\nu_k}{\mu_k} .$$

Ясно, что, применив эту теорему n раз, мы придём к настоящей функции Ляпунова модельной системы. Так как на каждом этапе построения функции $\mathcal{L}_k$ и Ψ_k были однородными функциями переменных ρ с показателями однородности единица и двойка соответственно, то и функция Ляпунова будет обладать теми же свойствами.

Сформулируем окончательный результат:

Если модельная система есть K-система, то она имеет функцию Ляпунова $L(\rho)$, однородную относительно ρ с показателем единица, производная которой в силу уравнений движения отрицательна и является однородной функцией с показателем два.

Можно записать этот результат в следующем виде:

$$\frac{dL}{dt} = -\Phi ,$$

где функции L и Φ удовлетворяют неравенствам:

$$\rho \le L(\rho) \le c\rho ,$$

$$m\rho^2 \le \Phi(\rho) \le M\rho^2 .$$

Разделив обе части уравнения для L на минус L^2, мы получаем соотношение:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{\Phi}{L^2},$$

интегрируя которое в пределах от 0 до t, имеем:

$$\frac{1}{L(t)} - \frac{1}{L(0)} = \int_0^t \frac{\Phi}{L^2} dt .$$

Заметим, что в силу неравенств, которым удовлетворяют функции L и Φ, под знаком интеграла стоит величина, ограниченная сверху и снизу положительными константами $a = \frac{m}{c^2}$ и $A = M$. Поэтому из теорем о свойствах интеграла немедленно получаем:

$$at \le \frac{1}{L(t)} - \frac{1}{L(0)} \le At,$$

откуда вытекают неравенства для функции $L(t)$:

$$\frac{L(0)}{1 + AL(0)t} \le L(t) \le \frac{L(0)}{1 + aL(0)t} .$$

Из этого неравенства видно, что $L(t)$ стремится к нулю со скоростью $\frac{1}{t}$. Ясно, что аналогичная оценка имеет место и для ρ:

$$\frac{L(0)}{c(1 + AL(0)t)} \le \rho \le \frac{L(0)}{1 + aL(0)t} .$$

Эти неравенства не только доказывают асимптотическую устойчивость системы, но и дают порядок стремления решения к нулю.

§ 7. Устойчивость систем, нейтральных в линейном приближении

Рассмотрим систему уравнений, линеаризация которых приводит к нейтральной системе. Предположим далее, что модельная система третьего порядка оказывается устойчивой. Наша задача состоит в доказательстве устойчивости полной системы. Доказательство этого предположения принципиально ничем не отличается от соответствующего доказательства в линейной теории устойчивости. Запишем изучаемую систему в виде:

$$\frac{du}{dt} = A_1(u) + A_2(u) + A_3(u) + \mathfrak{A}_4(u),$$

где A_1, A_2, A_3 – однородные многочлены первой, второй и третьей степени, а функция $\mathfrak{A}_4$ начинается с членов не ниже четвертой степени. Рассмотрим построенную выше функцию Ляпунова модельной системы и подставим в неё вместо эволюционных переменных, в которых она записана, исходные переменные. Нетрудно проверить, что функция $L(u)$ квадратична в исходных переменных, и что её производную в силу уравнений движения можно записать так:

$$\frac{dL}{dt} = -\Phi + O\left(|u|^5\right).$$

Из этой формулы сразу же вытекает устойчивость всей системы ввиду того, что функция Φ в главном члене есть функция четвертого порядка (в исходных переменных), а поправка – следующего, пятого порядка. Достаточно рассмотреть столь малую окрестность начала координат, чтобы Φ было главным членом в этой окрестности. Соответствующее рассуждение настолько стандартно, что его нет надобности повторять здесь.

Проведённое построение полностью решает вопрос о системах, нейтральных в линейном приближении.

Переходя к системам, имеющим в линейном приближении не только нейтральную, но и устойчивую компоненту, автор обязан, прежде всего, исправить ошибочное утверждение, содержащееся в одной заметке [5] и являющейся частью предложенной работы. В этой заметке предлагался способ исследования таких смешанных систем, основанный на отбрасывании в уравнениях, соответствующих нейтральной компоненте, переменных из устойчивой компоненты. Покажем на примере, что этот способ может привести к неверным результатам.

Рассмотрим систему трёх уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = -x + a\left(y^2 + z^2\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = -z - \left(y^3 + yz^2\right) + bxy\,,$$

$$\frac{dz}{dt} = y - \left(y^2 z + z^3\right) + bxz\,.$$

Способ, предложенный в указанной заметке, состоит в том, чтобы откинуть члены, содержащие x в последних двух уравнениях, исследовать получающуюся систему, и, на основании этого исследования, судить об устойчивости исходной системы. Мы покажем сейчас, что предложенный способ даёт устойчивость системы, в то время как сама система далеко не всегда устойчива. Заметим только, что для данной системы приём состоит в том, чтобы по свойствам системы при $b = 0$ судить о свойствах системы при $b \neq 0$.

Вводя новое переменное

$$\xi = y^2 + z^2,$$

сведём нашу систему к системе двух уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = -x + a\xi,$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\xi^2 + b\xi x.$$

Нетрудно проверить, что если положить $b = 0$, то получается асимптотически устойчивая система. Однако при $b \neq 0$ система не обязана быть устойчивой. Мы докажем это, указав способ построения неустойчивого решения. Из уравнений системы можно вывести следующее следствие:

$$x = a\xi - \left(\xi^2 + bx\xi\right)\frac{dx}{d\xi},$$

которое даёт, что при малых x и ξ существует решение с асимптотическим разложением:

$$x = a\xi - (1 - ab)\xi^2 + O\left(\xi^3\right).$$

Подставляя это разложение в уравнение для ξ, мы получаем, что

$$\frac{d\xi}{dt} = (ab - 1)\xi^2 + O\left(\xi^3\right).$$

Из этого равенства вытекает, что устойчивость решения имеет место только, если $ab < 1$. Если же $ab > 1$, то указанное решение неустойчиво.

Мы видим, таким образом, что взаимодействие квадратичных членов нейтральной и устойчивой компонент может приводить к неустойчивости. Пример наводит также на мысль, что при достаточно малом взаимодействии, то есть при достаточно малых коэффициентах перед «перекрестными» членами, устойчивость системы вытекает из устойчивости нейтральной компоненты. Такую теорему действительно можно доказать. Это доказательство не приводится здесь, ввиду того, что не очень ясна ценность подобного рода утверждения.

§ 8. Достаточные условия монотонной устойчивости

Найденные в предыдущих параграфах условия устойчивости модельной системы являются необходимыми и достаточными. Нужно, однако, иметь в виду, какой характер носит эта устойчивость. Небольшая первоначально амплитуда может очень сильно вырасти перед тем, как начать затухать. Простой пример системы двух уравнений показывает, как это происходит:

Пусть

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi(-\xi + \alpha\eta),$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \eta(\beta\xi - \eta).$$

Нетрудно установить, пользуясь критерием устойчивости, что необходимое и достаточное условие устойчивости состоит в том, чтобы (при положительных α и β)

$$\alpha\beta < 1.$$

Рассмотрим случай, когда α очень велико, а β соответственно очень мало, так что выполнено условие устойчивости. Можно, например, положить $\beta = 0$ и решить получившуюся систему при начальных данных $\xi = 1$, $\eta = 1$. Решение для η можно явно выписать:

$$\eta = \frac{1}{1+t},$$

после чего уравнение для ξ приобретает вид:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\alpha}{1+t}\xi - \xi^2, \qquad \xi(0) = 1.$$

Несложное исследование асимптотики этого уравнения при $\alpha \to \infty$ показывает, что функция ξ за очень короткое время – $t \sim \frac{\ln\alpha}{\alpha}$ – выходит на кривую

$$\xi = \frac{\alpha}{1+t}$$

и затем медленно убывает, оставаясь немного ниже этой кривой.

Довольно ясно, что при больших значениях α такое поведение ξ немногим лучше неустойчивости.

Возникает поэтому потребность сформулировать простые достаточные условия устойчивости модельной системы. Обычно самое удобное условие устойчивости состоит в монотонном убывании начальной амплитуды. Оказывается, что для нашей модельной системы существуют очень простые достаточные условия *монотонной* устойчивости. Эти условия мы получим, если сложим все уравнения системы

$$\frac{d\rho^k}{dt} = \rho^k \mathcal{E}^k_\alpha \rho^\alpha$$

и потребуем, чтобы производная величины $\mathcal{L}_0$,

$$\mathcal{L}_0 = \rho^{(1)} + \rho^{(2)} + \ldots + \rho^{(n)},$$

была отрицательной при любых значениях ρ^α:

$$\frac{d\mathcal{L}_0}{dt} = \mathcal{E}_{\alpha\beta}\rho^\alpha\rho^\beta.$$

Ясно, что если матрица $A_{\alpha\beta}$,

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{\mathcal{E}_{\alpha\beta} + \mathcal{E}_{\beta\alpha}}{2},$$

оказывается положительно определённой, то система *монотонно устойчива*. Заметим, что положительная определённость матрицы A не является необходимым условием монотонной устойчивости. Дело в том, что числа ρ^α по смыслу положительны и поэтому монотонная устойчивость эквивалентна положительной определённости формы

$$(A\rho, \rho) > 0$$

для ρ, входящих в положительный конус. Это требование существенно более слабое, чем положительная определённость квадратичной формы во всём пространстве. Известно, что условие дефинитности квадратичной формы эквивалентно системе неравенств на коэффициенты. Эти неравенства записываются в виде неотрицательности угловых детерминантов матрицы. Если в этих условиях заменить знак неравенства знаком равенства, то получим алгебраические поверхности в пространстве коэффициентов, отделяющие множество дефинитных матриц.

Представляется весьма правдоподобной следующая гипотеза:

Для того чтобы получить области слабой дефинитности – дефинитности при положительных значениях переменных, достаточно *стереть часть границ, определяемых условиями обычной дефинитности.*

Такая гипотеза, во всяком случае, подтверждается для квадратичной формы двух переменных

$$(Ax,x)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2 .$$

Нетрудно проверить непосредственно, что условие слабой дефинитности записывается в виде:

$$a_{11}>0, \quad a_{22}>0, \quad a_{12}<\sqrt{a_{11}a_{22}},$$

в то время как условие обычной дефинитности имеет вид:

$$a_{11}>0, \quad a_{22}>0, \quad -\sqrt{a_{11}a_{22}}<a_{12}<\sqrt{a_{11}a_{22}} .$$

Если сформулированная выше гипотеза верна, то она даёт *необходимые* и *достаточные* условия монотонности устойчивости модельной системы.

В заключение сформулируем полученный выше результат:

Положительная определённость (в обычном смысле) матрицы $A_{\alpha\beta}$,

$$A_{\alpha\beta}=-\frac{\varepsilon_\beta^\alpha+\varepsilon_\alpha^\beta}{2},$$

является достаточным условием монотонной устойчивости модельной системы.

§ 9. Метастабильные состояния

В разных вопросах физики важную роль играет понятие метастабильности. Обычное определение метастабильного состояния (см., например, [6, стр. 80]) состоит в том, что это – состояние, устойчивое относительно малых возмущений и неустойчивое относительно больших. Примером такого состояния может служить точка $x = 0$ в уравнении

$$\frac{dx}{dt}=-\varepsilon x+x^3 .$$

При малых отклонениях $|x|<\sqrt{\varepsilon}$ система возвращается в исходное положение, а при отклонениях $|x|>\sqrt{\varepsilon}$ координата x неограниченно растёт.

Нелинейная теория устойчивости подсказывает другую возможность определения метастабильности. Рассмотрим указанную выше систему при ε = 0:

$$\frac{dx}{dt} = x^3 .$$

Точка $x = 0$ есть точка неустойчивости. Разберем, однако, ближе характер этой неустойчивости. Уравнение допускает решение, которое мы и выпишем:

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2x_0^2 t}} .$$

Будем считать, что неустойчивость стала заметной при достижении величиной x некоторого малого значения δ, и вычислим время, необходимое для достижения этого значения:

$$t_\delta = \frac{1 - \dfrac{x_0^2}{\delta^2}}{2x_0^2} .$$

Мы считаем, разумеется, что начальный толчок x_0 существенно меньше уровня δ, поэтому формулу для t_δ можно упростить:

$$t_\delta =\sim \frac{1}{2x_0^2} .$$

Сравним полученный результат с тем, который получается в случае линейной неустойчивости:

$$\frac{dx}{dt} = x , \qquad x = x_0 e^t ,$$

$$t_\delta = \ln\frac{\delta}{x_0} = \ln\delta + \ln\frac{1}{x_0} \sim \ln\frac{1}{x_0} .$$

Бросается в глаза кардинальное отличие полученных результатов. Изменим, а именно уменьшим, в обоих случаях начальное отклонение x_0, скажем, в тысячу раз. В случае линейной неустойчивости к t_δ *прибавится* величина ln1000, а в случае нелинейной неустойчивости время *возрастёт в миллион раз*.

Довольно ясно, что такие состояния, являющиеся формально математически строго неустойчивыми, будут восприниматься как *метастабильные* из-за того, что уменьшение начального возмущения резко увеличивает время потери устойчивости. Напрашивается предположение, что даже в случае уравнения, с которого мы начали обсуждение вопроса, дело совсем не в наличии формально устойчивой точки $x = 0$, а в том, что время ухода из этого положения велико. В самом деле, изменим знак у ε:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x + x^3 .$$

Точка $x = 0$ стала формально неустойчивой, но при достаточно малом ε состояние $x = 0$ всё равно будет восприниматься как метастабильное, так как время раскачки определяется числом x^3 и оно велико при достаточно малых x_0.

Всё сказанное приводит к предложению называть метастабильными такие *неустойчивые* (либо слабо устойчивые – это безразлично) состояния, время раскачки для которых степенным образом зависит от начального отклонения. Заметим, что уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^3$$

является типичным примером эволюционного уравнения для системы, нейтральной в линейном приближении.

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 1. Постановка задачи

Так же, как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, далеко не всякое решение уравнений с частными производными имеет физический смысл. Если малые отклонения вызывают резкий отход от изучаемого режима, то этот режим практически реализовываться не будет. Вопрос об устойчивости в уравнениях с частными производными ещё более актуален и труден, нежели в обыкновенных уравнениях. Это видно, например, из того, что до сих пор нет даже удовлетворительной постановки этого вопроса. Забегая вперед, укажем, что трудность решения задачи тесно связана с *нейтральностью* линеаризованных уравнений. В настоящей главе будет разобрана простейшая задача такого типа.

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений:

$$\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial t} = V^{\alpha}_{\beta} \frac{\partial v^{\beta}}{\partial x}. \tag{3.1}$$

Матрицу коэффициентов V^{α}_{β} мы предполагаем аналитически зависящей от переменных v^{α}. Так как система (3.1) однородна по производным, то любая точка пространства переменных v^{α} есть стационарная точка изучаемой системы:

$$v^{\alpha} = v^{\alpha}_{0}. \tag{3.2}$$

Следует отметить, что если матрица V^{α}_{β} не вырождена, то указанные решения представляют собой полный набор стационарных решений системы (3.1). Если же $\det V^{\alpha}_{\beta}$ может обращаться в нуль, то добавляются новые стационарные решения, но только в том случае, когда детерминант системы имеет нуль кратности выше первой.

Поставим задачу об изучении устойчивости *константных* решений (3.2) системы (3.1). Совершенно аналогично тому, как мы это делали в обыкновенных уравнениях, рассмотрим малые отклонения от стационарного режима

$$v^{\alpha} = v_0^{\alpha} + \varepsilon u^{\alpha}$$

и сведём задачу об устойчивости к изучению системы с малым параметром:

$$\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial t} = V_{\beta}^{\alpha} \frac{\partial u^{\beta}}{\partial x}, \tag{3.3}$$

где коэффициенты V_{β}^{α} зависят как от u, так и от ε:

$$V_{\beta}^{\alpha} = U_{\beta}^{\alpha} + \varepsilon U_{\beta\gamma}^{\alpha} u^{\gamma} + \cdots . \tag{3.4}$$

В этом последнем равенстве величины U_{β}^{α}, $U_{\beta\gamma}^{\alpha}$ – постоянные числа – производные функций V_{β}^{α}, вычисленные в изучаемой точке v_0^{α}.

Мы уже видели, какую важную роль играют в вопросе об устойчивости свойства линеаризованной системы. Выпишем главный член – «невозмущённое» уравнение для изучаемого случая:

$$\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial t} = U_{\beta}^{\alpha} \frac{\partial u^{\beta}}{\partial x} . \tag{3.5}$$

Уравнения с постоянными коэффициентами подробно изучены, и здесь нет надобности повторять хорошо известные рассуждения. Ограничимся окончательным выводом:

Если собственные значения матрицы U_{β}^{α} *действительны и различны, то все решения системы* (3.5) *ограничены. Если же среди собственных значений есть комплексные, то система имеет решения, которые экспоненциально растут со временем.*

Этот результат позволяет интерпретировать обычное деление уравнений на гиперболические и эллиптические системы как классификацию систем *по устойчивости линейного приближения*. Заметим, что с этой точки зрения более последовательно классифицировать уравнения по устойчивости *константных* решений. Такой подход сразу выясняет неудовлетворительность понятия «гиперболическая система» для общих квазилинейных систем, так как нейтральность линейного приближения не гарантирует ещё устойчивость или даже нейтральность константных решений.

Подчеркнём важнейшее свойство систем уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Такие системы либо *нейтральны*, либо *неустойчивы*. Это обстоятельство существенно отличает такие системы с чисто алгебраической точки зрения от обыкновенных линейных уравнений, где, в зависимости от собственных значений, системы либо *устойчивы*, либо *неустойчивы*. Причина такого резкого различия заключается, конечно, в свойствах оператора дифференцирования, наличие которого равнозначно умножению собственных значений на чисто мнимые числа. Поэтому, с алгебраической точки зрения, уравнения в частных производных нужно сравнивать с линейными системами, матрица которых состоит из чисто мнимых чисел.

Это обстоятельство имеет решающее значение во всей теории устойчивости. Если для обыкновенных уравнений появление чисто мнимых корней и связанной с ними нейтральности линейного приближения могло казаться случайностью и экзотикой, то для уравнений в частных производных нейтральность является нормальной ситуацией. Уравнения в частных производных отличаются, конечно, от обыкновенных и с другой, не менее важной точки зрения – они заданы в бесконечномерном пространстве и их правые части неограничены. Это последнее обстоятельство настолько важно, что приводит к необходимости введения обобщённых решений, так как нелинейность вызывает появление многозначности у функций $u^{\alpha}(x)$, являющихся решениями общей квазилинейной системы.

В нашу задачу не входит анализ явлений, происходящих от неограниченностей всякого рода. По счастью, можно, по крайней мере, частично, изучать вопрос об устойчивости уравнений в рамках классических аналитических решений. Это важное утверждение нуждается в некотором разъяснении.

Дело в том, что при достаточно малом ε решение остаётся классическим (однозначным) на временах порядка $\frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому ещё имеет смысл написание уравнений в первом порядке теории возмущений. Этого оказывается, как мы увидим, достаточно, чтобы выделить гиперболические системы, неустойчивые в первом порядке. Вопрос об *ус-*

тойчивых системах не может быть, по-видимому, исследован без рассмотрения обобщённых решений, так как устойчивость может проявиться только на временах порядка $\frac{1}{\varepsilon^2}$, тогда как уже на временах $\frac{1}{\varepsilon}$ решение перестаёт быть однозначным. Это означает, что само рассмотрение решений гиперболической системы на временах порядка $\frac{1}{\varepsilon^2}$ лишено смысла до тех пор, пока нет определения обобщённого решения.

В настоящее время нет общего способа определения обобщённого решения для произвольной гиперболической системы. Наибольшее распространение получило предложение рассматривать гиперболические системы как предел параболических (так называемый метод «размазывания»). Однако это предложение, несомненно, разумное, когда речь идёт об уравнениях гидродинамики, никем фактически не было проведено в жизнь для сколь-нибудь общих систем. Между тем есть все основания подозревать, что одна и та же гиперболическая система приводит к совершенно различным обобщённым решениям, в зависимости от того, пределом какой параболической системы она считается. Это совершенно очевидно для такого, например, уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \mu v^n \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

которое имеет разные предельные (при $\mu \to 0$) решения, в зависимости от показателя n. Строились аналогичные примеры и более сложной природы.

Всё это показывает, что построение теории устойчивости гиперболических систем имеет смысл только в первом порядке. Формально говоря, можно строить теорию устойчивости в любом порядке – метод такого построения даётся разделением движений. Он позволяет, рассматривая только классические решения, выписывать эволюционные уравнения любого порядка по ε. Однако эти уравнения не будут иметь никакого практического значения. Действительно, на тех временах, на которых систему можно ещё рассматривать как классическую гиперболическую систему, поправки, даваемые этими уравнениями, пренебрежимо малы. На тех же временах, когда эти поправки могли бы стать значительны, куда большую роль играют диссипативные факторы. Сказанное не относится только к первому нелинейному члену теории возмущения, так как он становится существенным на временах того же порядка, что и члены, вызывающие «градиентную катастрофу».

Изложенные соображения приводят к следующей постановке задачи:

Рассматривается система (3.3) *с коэффициентами, задаваемыми формулой* (3.4). *Требуется выяснить, является ли решение* $u^{\alpha} = 0$ *нейтральным или неустойчивым в первом порядке теории возмущений.*

Следует отметить, что для полной определённости задачи необходимо задать граничные условия для системы (3.3). Результат может, разумеется, изменяться при изменении граничных условий. Наибольший интерес представляют два случая, рассмотрением которых мы и ограничимся:

1. Функции заданы на отрезке. Граничные условия – условия периодичности:

$$0 \le x \le l\,,$$
$$u^{\alpha}(0) = u^{\alpha}(l).$$

2. Функции заданы на всей прямой. Граничные условия – условия ограниченности функций на ∞, приводящие к почти периодическим решениям:

$$-\infty < x < +\infty\,,$$
$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|u^{\alpha}(x)\right| < +\infty\,.$$

Ниже мы увидим, что граничные условия важны только постольку, поскольку они определяют спектр невозмущённого уравнения (3.5). Поэтому в дальнейшем речь всюду идёт именно о спектре, а не о граничных условиях.

§ 2. Тождественно нейтральные системы

Как уже говорилось выше, исследование не устойчивость в высших порядках теории возмущений носит, в значительной мере, формальный характер. Тем не менее такое исследование оправдано в некоторых случаях большим значением изучаемых систем.

Целью настоящего параграфа является введение понятия тождественно нейтральной системы и доказательство следующей теоремы:

Теорема.

Все гиперболические системы двух уравнений, а также система уравнений гидродинамики являются тождественно нейтральными системами.

Изложение для определённости ведётся для случая периодических граничных условий, но результат верен и для почти периодического случая. Сформулируем, прежде всего, необходимое для дальнейшего определение плотности энергии системы.

Определение I.

Функция $h(v)$ *называется плотностью «энергии» системы, если существует другая функция* $g(v)$ *такая, что из уравнений системы вытекает тождество:*

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Это тождество естественно назвать *законом сохранения*, так как из него вытекает, что полная «энергия»,

$$H = \int_0^l h dx, \tag{3.6}$$

постоянна во времени:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

Однако введённое выше понятие плотности «энергии» является слишком общим и бесполезно во многих случаях. Дадим поэтому следующее определение:

Определение II.

Плотность энергии $h(v)$ *называется дефинитной в точке* v_0, *если её разложение в ряд Тейлора в этой точке начинается с положительно определённой квадратичной формы*

$$h(v) = h(v_0) + \left(A(v - v_0), v - v_0\right) + \cdots. \tag{3.7}$$

Теперь ясно, как сформулировать определение тождественно нейтральной системы:

Определение III.

Система называется тождественно нейтральной в точке v_0, *если она обладает плотностью энергии, дефинитной в этой точке.*

Мы не останавливаемся на доказательстве очевидной теоремы о том, что в этом случае из сохранения величины H следует ограниченность колебаний нормы решения в обычном смысле этого слова. Это сразу видно из того обстоятельства, что при достаточно малых u^α величина H и интеграл квадрата модуля u^α оцениваются друг через друга, что легко вытекает из формулы (3.7).

Изменения, которые необходимо внести, чтобы получить аналогичное утверждение для случая почти периодических решений, почти очевидны. Надо вместо величины, определяемой формулой (3.6), ввести соответствующую полную «энергию» по формуле:

$$H = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \int_{-N}^{+N} h dx.$$

Из сказанного вытекает, что всё дело сводится к построению функции $h(v)$ для изучаемой системы. Особенно просто такая функция строится для одного уравнения. Проведём это построение, тем более что все принципиальные соображения могут быть проиллюстрированы на этом примере.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = V(v)\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Умножим обе части этого уравнения на $(v - v_0)$:

$$(v - v_0)\frac{\partial v}{\partial t} = (v - v_0)V(v)\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Нетрудно видеть, что это уравнение может быть переписано в виде закона сохранения:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x},$$

где функции h и g задаются следующими формулами:

$$h = \frac{1}{2}(v - v_0)^2,$$

$$g = \int_{v_0}^{v} (v - v_0)V(v)dv.$$

Построение функции h для уравнений гидродинамики несколько сложнее, но основная идея остаётся неизменной – отыскание интегрирующей комбинации. Проведём подробно это построение.

Система уравнений гидродинамики в лагранжевых координатах записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}\\&\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\\&\frac{\partial s}{\partial t}=0\end{aligned}\right\}. \qquad (3.8)$$

Здесь u – скорость, v – удельный объём, s – удельная энтропия, а p – давление, которое есть функция переменных v и s:

$$p=p(v,s).$$

Нетрудно проверить, что условие гиперболичности системы записывается в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial v}<0\,.$$

Вид системы (3.8) подсказывает следующий простой способ отыскания функции h. Умножим первое уравнение на $(u-u_0)$, второе – на $(p-p_0)$, третье – на неопределённый пока множитель κ, и сложим все три уравнения:

$$\kappa\frac{\partial s}{\partial t}-(p-p_0)\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{(u-u_0)^2}{2}=\frac{\partial}{\partial x}(p-p_0)(u-u_0).$$

В правой части стоит полная производная. Для того, чтобы и в левой части была полная производная, необходимо и достаточно, чтобы выражение

$$d\mathcal{E}=\kappa ds-(p-p_0)dv \qquad (3.9)$$

было полным дифференциалом. Соотношение (3.9) эквивалентно двум равенствам:

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial s}=\kappa, \qquad \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial v}=-(p-p_0),$$

второе из которых мы используем для нахождения функции $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}(v,s)=\mathcal{E}_0(s)-\int\limits_{v_0}^{v}(p-p_0)dv\,, \tag{3.10}$$

а первое будем рассматривать как определение множителя к.

Итак, мы получили закон сохранения

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial g}{\partial x}\,,$$

где

$$h(u,v,s)=\frac{1}{2}(u-u_0)^2+\mathcal{E}(v,s)\,,$$

$$g(u,v,s)=-(p-p_0)(u-u_0)\,.$$

Однако для доказательства тождественной нейтральности системы нам нужно построить дефинитную плотность h. Из вида функции h заключаем, что всё дело в построении дефинитной функции $\mathcal{E}(v,s)$. Так как функция $\mathcal{E}_0(s)$ произвольна, то мы можем распорядиться ею таким образом, чтобы получить дефинитную функцию $\mathcal{E}(v,s)$.

Покажем, что *условие гиперболичности является необходимым и достаточным условием возможности построения дефинитной функции* $\mathcal{E}$.

Прежде всего из формулы (3.10) вытекает, что если положить $\mathcal{E}_0(s_0)=0$ и $\mathcal{E}_0'(s_0)=0$, то разложение функции $\mathcal{E}(v,s)$ в точке (v_0,s_0) начинается с членов второго порядка. Найдём матрицу вторых производных функции $\mathcal{E}(v,s)$ в точке (v_0,s_0). Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial s^2} & \dfrac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial s\partial v} \\ \dfrac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial v\partial s} & \dfrac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial v^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathcal{E}_0''(s_0) & -\dfrac{\partial p}{\partial s} \\ -\dfrac{\partial p}{\partial s} & -\dfrac{\partial p}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Необходимым условием положительной определённости этой матрицы является условие:

$$-\frac{\partial p}{\partial v}>0\,,$$

совпадающее с условием гиперболичности. Если это условие выполнено, то матрицу всегда можно сделать положительно определённой выбором достаточно большого числа $\mathcal{E}_0''(s_0)$. Более точно $\mathcal{E}_0''$ должно удовлетворять неравенству:

$$\mathcal{E}_0''(s_0) > \frac{1}{\left(-\dfrac{\partial p}{\partial v}\right)_0}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0^2.$$

Итак, теорема о тождественной нейтральности системы уравнений гидродинамики доказана.

Перейдём к доказательству тождественной нейтральности любой системы двух гиперболических уравнений:

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} = V_\beta^\alpha \frac{\partial v^\beta}{\partial x}. \tag{3.11}$$

Доказательство удобно провести в два этапа.

На первом этапе покажем, что систему двух уравнений всегда можно привести к диагональной форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}\right\}. \tag{3.12}$$

Этот факт хорошо известен, но для полноты картины имеет смысл привести его доказательство, тем более что оно несложно. Найдём функцию $\varphi(v^1,v^2)$ такую, чтобы она удовлетворяла первому из уравнений системы (3.12). Подставляя производные в силу системы (3.11), мы получим для φ следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} V_1^1 \frac{\partial \varphi}{\partial v^1} + V_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v^2} &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial v^1} \\ V_2^1 \frac{\partial \varphi}{\partial v^1} + V_2^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v^2} &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial v^2} \end{aligned}\right\}. \tag{3.13}$$

Эта система уравнений однородна, поэтому имеет нетривиальное решение только в том случае, если её детерминант равен нулю. Поэтому система (3.13) равносильна системе, в которой одно уравнение дифференциальное, а второе – конечное:

$$\left.\begin{array}{c}\left(V_1^1-\lambda\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v^1}+V_1^2\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial v^2}=0\\[2ex] \begin{vmatrix}V_1^1-\lambda & V_1^2\\ V_2^1 & V_2^2-\lambda\end{vmatrix}=0\end{array}\right\}. \qquad (3.14)$$

Эту систему можно решить, например, сведением к обыкновенным уравнениям, или, в случае аналитических коэффициентов, применением теоремы Коши–Ковалевской. Суть дела состоит в том, что порядок системы из-за однородности понижается на единицу, что приводит к *одному* уравнению в частных производных.

Ещё одно замечание полезно для дальнейшего. Так как начальные данные для системы (3.14) в нашем распоряжении, то функции φ и ψ всегда можно выбрать так, чтобы изучаемой точке (v_0^1, v_0^2) соответствовало начало координат в переменных φ, ψ.

Мы получили, следовательно, такую задачу:
Дана система уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=\lambda(\varphi,\psi)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial t}=\mu(\varphi,\psi)\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\end{array}\right\}.$$

Требуется доказать, что эта система имеет в точке ($\varphi = 0$, $\psi = 0$) дефинитную плотность энергии $h(\varphi,\psi)$. При этом предполагается, конечно, что

$$\lambda(0,0)\neq\mu(0,0).$$

Выпишем уравнение, которому удовлетворяет функция h, и постараемся доказать, что это уравнение имеет дефинитное решение:

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial h}{\partial\varphi}\lambda\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial\psi}\mu\,\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Для того, чтобы функция h была плотностью, необходимо и достаточно, чтобы в правой части стояла полная производная некоторой функции g. Это требование приводит к системе двух уравнений с двумя неизвестными функциями:

$$\left.\begin{aligned}\lambda\frac{\partial h}{\partial\varphi}&=\frac{\partial g}{\partial\varphi}\\ \mu\frac{\partial h}{\partial\psi}&=\frac{\partial g}{\partial\psi}\end{aligned}\right\}.$$

Нетрудно проверить, что эта система эквивалентна система интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\lambda h-g-\int_0^{\varphi}h\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}d\varphi&=a(\psi)\\ \mu h-g-\int_0^{\psi}h\frac{\partial\mu}{\partial\psi}d\psi&=b(\varphi)\end{aligned}\right\},$$

где a и b – произвольные функции своих аргументов. Из полученной системы можно исключить g и получить одно уравнение только для h при условии, что $\lambda\neq\mu$:

$$(\lambda-\mu)h=a(\psi)-b(\varphi)+\int_0^{\varphi}h\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}d\varphi-\int_0^{\psi}h\frac{\partial\mu}{\partial\psi}d\psi\,.$$

Доказательство существования решения этого уравнения проводится совершенно трафаретно методом последовательных приближений. Этот метод сходится, во всяком случае, для достаточно малых φ и ψ, а только это и нужно для наших целей. Единственное, что нужно проследить при доказательстве – это малость интегральных членов по сравнению с первыми двумя. Если теперь положить

$$a(\psi)=\frac{\psi^2}{\lambda_0-\mu_0},$$

$$b(\varphi)=\frac{\varphi^2}{\mu_0-\lambda_0},$$

то нетрудно показать, что члены, содержащие интеграл, будут, по крайней мере, третьего порядка и, значит, главный член в h есть положительно определённая квадратичная форма:

$$h=\varphi^2+\psi^2+\cdots.$$

Функция h является, следовательно, дефинитной плотностью энергии, и теорема, сформулированная в начале этого параграфа, полностью доказана.

§ 3. Системы, нейтральные во втором порядке

В § 1 этой главы было уже указано, что гиперболичность системы уравнений означает с точки зрения теории устойчивости ничто иное, как нейтральность линейного приближения.

В § 2 мы видели, что для специальных классов систем можно доказать тождественную нейтральность при помощи дефинитной плотности. Довольно ясно, что далеко не все гиперболические системы обладают дефинитной плотностью. Более того, у большинства систем не обязана существовать какая бы то ни была плотность. Однако небольшое размышление показывает, что во многих случаях нет необходимости в существовании *точной* плотности. Если исследование ведётся во втором порядке теории возмущений, то и плотность должна сохраняться с точностью до членов соответствующего порядка. Эти соображения приводят к идее *асимптотической плотности*.

Определение.

Функция $h(v)$ *называется асимптотической плотностью порядка* n *в точке* v_0, *если имеет место тождество – в силу уравнений системы –*

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x} + G\,\frac{\partial v}{\partial x}\,, \tag{3.15}$$

где функция G *есть бесконечно малая величина порядка* $(n + 1)$:

$$\left|G(v)\right| < C\left|v - v_0\right|^{n+1}. \tag{3.16}$$

Для оправдания целесообразности введения этого понятия покажем, что, в частности, гиперболичность системы есть необходимое и достаточное условие существования дефинитной асимптотической плотности второго порядка. В одну сторону это очевидно. Если система гиперболична, то её можно линейной заменой переменных привести в главном члене к диагональной форме и тогда сумма квадратов новых переменных является искомой плотностью второго порядка. Несколько более интересно обратное утверждение. Допустим, что система имеет плотность второго порядка, и докажем, что такая система гиперболична. Разлагая функции h, g и V_β^α в ряд Тейлора в точке v_0 и вспоминая условие обозначать буквой U производные V в точке v_0, мы получаем, как следствие уравнений (3.15) и (3.16), следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} g_\beta &= U_\beta^\alpha h_\alpha \\ g_{\beta\gamma} &= U_{\beta\gamma}^\alpha h_\alpha + U_\beta^\alpha h_{\alpha\gamma} \end{aligned}\right\}. \tag{3.17}$$

Так как функция h дефинитна в точке v_0, то её первые производные h_α, равны нулю, а вторые образуют симметричную, положительно определённую матрицу. Мы получаем, следовательно, что

$$g_{\beta\gamma} = U_\beta^\alpha h_{\alpha\gamma}. \tag{3.18}$$

Так как матрица $g_{\beta\gamma}$ симметричная по индексам β и γ, то формула (3.18) означает, что матрица U_β^α есть матрица самосопряжённого преобразования, если за скалярное произведение выбрать форму $h_{\alpha\gamma}$. Но, согласно общей теореме линейной алгебры, собственные значения такой матрицы являются действительными числами. Единственно, что нельзя доказать, ибо это просто неверно, что собственные значения не только действительны, но и различны. С точностью до этой оговорки доказано, что гиперболичность системы и наличие у неё плотности второго порядка равнозначные вещи.

Наша ближайшая задача состоит в выяснении условий, при которых система обладает дефинитной асимптотической плотностью *третьего* порядка. Как нетрудно сообразить, эти условия будут одновременно достаточными условиями нейтральности системы во втором порядке.

Итак, предположим, что система обладает плотностью третьего порядка. Тогда, кроме соотношений (3.17), будут иметь место ещё равенства между коэффициентами следующего порядка:

$$g_{\beta\gamma\delta} = U_{\beta\gamma\delta}^\alpha h_\alpha + U_{\beta\gamma}^\alpha h_{\alpha\delta} + U_{\beta\delta}^\alpha h_{\alpha\gamma} + U_\beta^\alpha h_{\alpha\gamma\delta}.$$

Если учесть, что $h_\alpha = 0$, то получаем:

$$g_{\beta\gamma\delta} = U_\beta^\alpha h_{\alpha\gamma\delta} + U_{\beta\gamma}^\alpha h_{\alpha\delta} + U_{\beta\delta}^\alpha h_{\alpha\gamma}. \tag{3.19}$$

Так как производная не зависит от порядка дифференцирования, то коэффициенты $g_{\beta\gamma\delta}$ и $h_{\beta\gamma\delta}$ остаются неизменными при любой перестановке индексов. Таким образом, из соотношения (3.19) можно получить ещё пять аналогичных соотношений. Если учесть симметрию $h_{\alpha\delta}$

и $h_{\alpha\gamma}$ по их индексам, то из шести соотношений остаётся независимых только три, соответствующие циклической перестановке индексов β, γ, δ. Выпишем эти соотношения:

$$\left.\begin{aligned} g_{\beta\gamma\delta} &= U^{\alpha}_{\beta} h_{\alpha\gamma\delta} + U^{\alpha}_{\beta\gamma} h_{\alpha\delta} + U^{\alpha}_{\beta\delta} h_{\alpha\gamma} \\ g_{\gamma\delta\beta} &= U^{\alpha}_{\gamma} h_{\alpha\delta\beta} + U^{\alpha}_{\gamma\delta} h_{\alpha\beta} + U^{\alpha}_{\gamma\beta} h_{\alpha\delta} \\ g_{\delta\beta\gamma} &= U^{\alpha}_{\delta} h_{\alpha\beta\gamma} + U^{\alpha}_{\delta\beta} h_{\alpha\gamma} + U^{\alpha}_{\delta\gamma} h_{\alpha\beta} \end{aligned}\right\}. \tag{3.20}$$

Для упрощения дальнейших выкладок предположим, что система координат выбрана таким образом, что матрица U^{α}_{β} приведена к диагональной форме. Заметим, что из (3.18) вытекает тогда, что и матрица $h_{\alpha\beta}$ также диагональна. Будем обозначать через $U(\alpha)$ и $h(\alpha)$ диагональные элементы этих матриц. Система (3.20) упрощается и приобретает вид:

$$\left.\begin{aligned} g_{\beta\gamma\delta} &= U(\beta) h_{\beta\gamma\delta} + h(\delta)\Phi^{\delta}_{\beta\gamma} + h(\gamma)\Phi^{\gamma}_{\beta\delta} \\ g_{\beta\gamma\delta} &= U(\gamma) h_{\beta\gamma\delta} + h(\beta)\Phi^{\beta}_{\gamma\delta} + h(\delta)\Phi^{\delta}_{\gamma\beta} \\ g_{\beta\gamma\delta} &= U(\delta) h_{\beta\gamma\delta} + h(\gamma)\Phi^{\gamma}_{\delta\beta} + h(\beta)\Phi^{\beta}_{\delta\gamma} \end{aligned}\right\}. \tag{3.21}$$

Трёхиндексные величины обозначены буквой Ф для того, чтобы подчеркнуть, что эти соотношения имеют место только в специальной системе координат, в отличие от (3.20), которые выполнены в любой системе.

Заметим, что из системы (3.21) вытекает, что величины $h(\alpha)$ не произвольны. Условие разрешимости системы (3.21) относительно двух неизвестных $g_{\beta\gamma\delta}$ и $h_{\beta\gamma\delta}$ даёт связь:

$$\begin{pmatrix} 1 & U(\beta) & h(\delta)\Phi^{\delta}_{\beta\gamma} + h(\gamma)\Phi^{\gamma}_{\beta\delta} \\ 1 & U(\gamma) & h(\beta)\Phi^{\beta}_{\gamma\delta} + h(\delta)\Phi^{\delta}_{\gamma\beta} \\ 1 & U(\delta) & h(\gamma)\Phi^{\gamma}_{\delta\beta} + h(\beta)\Phi^{\beta}_{\delta\gamma} \end{pmatrix} = 0 .$$

Это соотношение линейно относительно величин $h(\alpha)$ и может быть записано в виде:

$$h(\beta)Z^{\beta}_{\gamma\delta}+h(\gamma)Z^{\gamma}_{\delta\beta}+h(\delta)Z^{\delta}_{\beta\gamma}=0\,, \tag{3.22}$$

если ввести обозначения:

$$Z^{\beta}_{\gamma\delta}=[U(\beta)-U(\delta)]\Phi^{\beta}_{\gamma\delta}-[U(\beta)-U(\gamma)]\Phi^{\beta}_{\delta\gamma}\,. \tag{3.23}$$

Следует отметить, что величины $Z^{\beta}_{\gamma\delta}$ антисимметричны по паре нижних индексов:

$$Z^{\beta}_{\gamma\delta}=-Z^{\beta}_{\delta\gamma}\,.$$

Отсюда вытекает, что соотношение (3.22) обращается в тождество при совпадении хотя бы двух индексов. Это следствие уже известного нам факта тождественной нейтральности систем двух уравнений.

Системы трёх уравнений уже далеко не всегда обладают дефинитной плотностью третьего порядка. Действительно, если все три числа Z^1_{23}, Z^2_{31}, Z^3_{12} одного знака, то при любых $h(1)>0$, $h(2)>0$, $h(3)>0$ уравнение (3.22) выполняться не будет и, следовательно, у такой системы не существует дефинитной* плотности третьего порядка.

---

* Приведём пример, показывающий, что в таком случае система может стать неустойчивой. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{\partial(uv)}{\partial x}\end{array}\right\}. \tag{3.24}$$

Рассмотрим точку $u_0=0$, $v_0=0$, $w_0=0$. В этой точке система уже приведена к диагональной форме (в главном члене) и, поэтому, нетрудно найти необходимые для вычисления $Z^{\beta}_{\gamma\delta}$ величины:

$$U(1)=1,\qquad U(2)=-1,\qquad U(3)=0,$$

$$\Phi^1_{23}=\Phi^1_{32}=0,\qquad \Phi^2_{31}=\Phi^2_{13}=0,\qquad \Phi^3_{12}=\Phi^3_{21}=1.$$

Отсюда вытекает, что $Z^1_{23}=0$, $Z^2_{31}=0$, $Z^3_{12}=2$.

Условие существования не выполнено. Покажем, что система физически неустойчива. Рассмотрим начальные данные:

$$u_0(x)=\varepsilon\sin x\,,\ v_0(x)=\varepsilon\sin x\,,\ w_0(x)=0\,.$$

Нетрудно решить систему (3.24) и убедиться, что при сколь угодно малом ε решение неограниченно растёт:

Несколько слов о системах четырёх и более уравнений.

Если системы трёх уравнений обладают, как мы увидим, дефинитной плотностью, так сказать, в «половине случаев», то системы четырёх уравнений крайне редко имеют не только дефинитную, но и вообще просто плотность третьего порядка. Чтобы придать точный смысл этому утверждению, надо каждой системе сопоставлять порождённые ею системы чисел $Z^{\beta}_{\gamma\delta}$, что означает, по существу, введение системы координат в пространство систем.

Любая система трёх уравнений обладает плотностью третьего по-

---

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= \varepsilon \sin(x+t) \\ v(x,t) &= \varepsilon \sin(x+t) \\ w(x,t) &= \varepsilon^2 t \sin 2x \end{aligned}\right\}.$$

Следует отметить, что эта система находится на границе нейтральности. Сколь угодно малым возмущением её можно сделать тождественно нейтральной. Рассмотрим, действительно, систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial (vw)}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial v}{\partial x} + a\frac{\partial (wu)}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= +\frac{\partial (uv)}{\partial x} \end{aligned}\right\}. \tag{3.25}$$

Нетрудно проверить, что при $a > 0$ эта система тождественно нейтральна, так как из уравнений (3.25) вытекает тождество:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x},$$

если положить

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + aw^2\right) \\ g &= \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right) + 2auvw \end{aligned}\right\}. \tag{3.26}$$

Рассмотренная выше система (3.24) получается из (3.25), если положить $a = 0$. Неустойчивость возникает, конечно, благодаря тому, что одна из полуосей эллипсоида вращения $h = 1$ стремится к бесконечности при $a \to 0$. При таком предельном переходе эллипсоид превращается в цилиндр, вытянутый вдоль оси W и решению ничто не мешает быть неограниченным вдоль этой оси.

рядка. Действительно, в случае трёх уравнений имеется единственное условие, которому должны удовлетворять коэффициенты функции h:

$$h(1)Z^1_{23} + h(2)Z^2_{31} + h(3)Z^3_{12} = 0\,. \tag{3.27}$$

Так как в нашем распоряжении три члена $h(1)$, $h(2)$ и $h(3)$, то мы всегда можем удовлетворить этому условию. Однако при этом может не получиться дефинитной плотности. Нетрудно сообразить, что это будет только в том случае, когда все три числа Z^1_{23}, Z^2_{31}, Z^3_{12} одного знака. В этом случае нельзя удовлетворить условию (3.27) *положительными* числами $h(1) > 0$, $h(2) > 0$, $h(3) > 0$. Мы приходим, таким образом, к основной теореме настоящего параграфа:

Теорема.

Система трёх уравнений обладает дефинитной плотностью третьего порядка в том и только том случае, когда среди чисел Z^1_{23}, Z^2_{31}, Z^3_{12} *есть числа противоположных знаков.*

Иное дело системы четырёх и более уравнений. Рассмотрим для определённости системы четырёх уравнений. Если система задана, то заданы числа $Z^{\beta}_{\gamma\delta}$, входящие в уравнения (3.22). Нетрудно подсчитать, что в этом случае уравнения (3.22) порождают четыре независимых условия. Для того, чтобы удовлетворить этим условиям, мы располагаем всего *четырьмя числами* $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$, $h(4)$.

Выпишем все независимые условия:

$$\left.\begin{aligned} h(2)Z^2_{34} + h(3)Z^3_{42} + h(4)Z^4_{23} &= 0 \\ h(1)Z^1_{34} + h(3)Z^3_{41} + h(4)Z^4_{13} &= 0 \\ h(1)Z^1_{24} + h(2)Z^2_{41} + h(4)Z^4_{12} &= 0 \\ h(1)Z^1_{23} + h(2)Z^2_{31} + h(3)Z^3_{12} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.28}$$

Это система четырёх *однородных* уравнений. Поэтому она имеет нетривиальное решение только в том случае, если её детерминант равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & Z_{34}^2 & Z_{42}^3 & Z_{23}^4 \\ Z_{34}^1 & 0 & Z_{41}^3 & Z_{13}^4 \\ Z_{24}^1 & Z_{41}^2 & 0 & Z_{12}^4 \\ Z_{23}^1 & Z_{31}^2 & Z_{12}^3 & 0 \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (3.29)$$

Но даже, если условие (3.29) и выполнено, то *дефинитность* плотности ещё не гарантирована. Поэтому, кроме условия типа равенства, необходимо выписать ещё три условия типа неравенств, обозначающие существование положительных решений системы (3.28):

$$h(1) > 0, \qquad h(2) > 0, \qquad h(3) > 0, \qquad h(4) > 0.$$

Ещё более редки системы с дефинитной плотностью среди систем пяти и более уравнений. Речь идёт, разумеется, об относительной редкости, а более точно – о числе условий типа равенств, которым должна удовлетворять система, чтобы иметь дефинитную плотность третьего порядка. Весь этот вопрос поддаётся, в принципе, полному решению. За недостатком места мы не будем больше разбирать общие системы n уравнений, а ограничимся более подробным разбором систем трёх уравнений. Это оправдано тем обстоятельством, что основные особенности систем нескольких уравнений, отличающие их от сравнительно простых систем двух уравнений, проявляются уже при переходе от двух к трём. Дальнейшие усложнения не носят принципиального характера.

§ 4. Необходимые условия устойчивости

Предыдущий параграф был посвящён выводу достаточных условий устойчивости, точнее нейтральности, во втором порядке. В настоящем параграфе будут разобраны некоторые необходимые условия устойчивости. Изложение ведётся в чисто алгебраическом плане, без какого бы то ни было изучения сходимости рассматриваемых рядов и, в этом смысле, носит формальный характер. Можно, однако, такому изложению придать и точный смысл, если рассматривать не сами уравнения в частных производных, а смоделировать эти уравнения обыкновенными уравнениями и изучать получившиеся модели. В конце параграфа мы обсудим одну возможность построения такой модели, а сейчас перейдём к формальному изложению.

Рассмотрим систему уравнений в частных производных следующего вида:

$$\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial t}=\left(\Phi^{\alpha}_{\beta}+\varepsilon\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}\varphi^{\gamma}\right)\frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial x}\,. \tag{3.30}$$

Здесь введены новые обозначения для того, чтобы подчеркнуть, что система изучается в точке $\varphi^{\alpha}_{0}=0$, что изучение ведётся только во втором порядке теории возмущений, и что переменные φ^{α} выбраны так, чтобы система была диагональна в главном члене:

$$\Phi^{\alpha}_{\beta}=0 \text{ при } \alpha\neq\beta,$$

$$\Phi^{\alpha}_{\beta}=U(\alpha).$$

Наша непосредственная задача состоит в выводе для этой системы эволюционных уравнений. Для облегчения выкладок используем сформулированный в § 4 гл. I приём расщепления параметра, включив в основное уравнение не только линейные члены Φ^{α}_{β}, но и те нелинейные члены $\varepsilon\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}\varphi^{\gamma}$, у которых есть пара совпадающих индексов. Из результатов предыдущего параграфа вытекает, что такое основное движение будет нейтральным в двух порядках. Поэтому вклад в эволюционное уравнение могут дать только те нелинейные члены, у которых все три индекса α, β, γ различны. Заметим теперь, что при выводе эволюционного уравнения для нас будет важен только главный член в решении, ибо зависимость решения от ε скажется только в следующем порядке теории возмущений. Окончательно мы можем считать, что в системе уравнений (3.30) равны нулю все трёхиндексные величины $\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}$, у которых есть хотя бы пара совпадающих индексов. Это замечание экономит значительный труд по вычислению правых частей эволюционного уравнения.

Переходя к выводу эволюционного уравнения, заметим, что уравнения в частных производных отличаются от обыкновенных уравнений в двух важнейших пунктах. Об одном уже шла речь выше, когда выяснилось, что в частных производных нормальной ситуацией является *нейтральность* линейного приближения. Сейчас настала пора указать на другое важное отличие. Дело в том, что спектр линейного приближения также устроен весьма специальным образом. Как уже говорилось, спектр зависит, разумеется, от граничных условий. Так, например, если граничные условия периодичны, то спектр состоит из целочисленных кратных основных частот. Если же рассматривается почти периодический случай, то спектр непрерывен и возможны резонансы любого типа. Вот эта, если можно так выразиться, «высокая резонансность» уравнений в частных производных и является их отличительной чертой.

Мы видели выше, что проще всего эволюционные уравнения записываются в той системе координат, в которой линеаризованная система диагональна. Применительно к случаю уравнений в частных производных это означает, что надо перейти к преобразованию Фурье и писать эволюционные уравнения для коэффициентов Фурье. Итак, пусть

$$\varphi^{\alpha}(x,t)=\sum_{\kappa}\eta_{\kappa}^{\alpha}(t)e^{i\kappa x}.$$

Подставляя это выражение в уравнения (3.30), можно найти уравнения для величин η_{κ}^{α}:

$$\frac{\partial\eta_{\kappa}^{\alpha}}{\partial t}=i\kappa\Phi_{\beta}^{\alpha}\eta_{\kappa}^{\beta}+\varepsilon\sum_{\lambda+\mu=\kappa}i\lambda\Phi_{\beta\gamma}^{\alpha}\eta_{\mu}^{\gamma}\eta_{\lambda}^{\beta}. \tag{3.31}$$

Заметим уже сейчас, что написанная система является, по существу, одной из возможных конечномерных моделей системы уравнений с частными производными. Для того, чтобы перейти к такой модели, нужно просто считать, что набор частот конечен, и тогда отпадает вопрос о сходимости рядов. Мы поступим именно таким образом. Поэтому, чтобы быть вполне строгим, следует сказать, что всё дальнейшее изложение посвящено изучению вопроса об устойчивости систем обыкновенных уравнений вида (3.31). Переменные η_{κ}^{α} мы будем считать, вообще говоря, комплексными числами, а коэффициенты Φ_{β}^{α} и $\Phi_{\beta\gamma}^{\alpha}$ действительными числами, так же, как и частоты κ, λ. Систему (3.31) мы будем рассматривать на произвольном, вообще говоря, наборе частот κ, но одно условие должно быть непременно выполнено. Вместе с каждой частотой обязательно входит противоположная по знаку: $\kappa^* = -\kappa$. Нетрудно проверить, что в этом случае система (3.31) остаётся, в некотором смысле, действительно системой. Точно это значит следующее: если при $t = 0$ имеют место равенства

$$\eta^{\alpha}_{\kappa^*} = \bar{\eta}^{\alpha}_{\kappa},$$

то они выполняются тождественно, что приводит к действительности функций $\varphi^{\alpha}(x,t)$.

Напишем эволюционную систему, соответствующую системе (3.31). Для этого нужно, как было показано в гл. I, решить невозмущённое уравнение и определить затем возмущающие члены вдоль невозмущённых траекторий. Обозначим через ξ^{α}_{κ} эволюционное переменное, соответствующее переменному η^{α}_{κ}. Несложные выкладки приводят к следующему результату:

$$\frac{\partial \xi^{\alpha}_{\kappa}}{\partial t} = \varepsilon \sum_{\beta,\gamma,\lambda,\mu} i\lambda \Phi^{\alpha}_{\beta\gamma} \xi^{\beta}_{\lambda} \xi^{\gamma}_{\mu} \delta[\kappa - \lambda - \mu] \delta[\kappa U(\alpha) - \lambda U(\beta) - \mu U(\gamma)].$$

Здесь символ $\delta[z]$ означает единицу при $z = 0$ и нуль при $z \neq 0$.

Для дальнейшего удобнее переписать полученную систему иначе. Во-первых, мы напишем уравнение для $\xi^{\alpha}_{\kappa^*}$, а во-вторых, правую часть симметризуем по индексам β и γ. В результате получаем:

$$\frac{\partial \xi^{\alpha}_{\kappa^*}}{\partial t} = \frac{i\varepsilon}{2} \sum_{\beta,\gamma,\lambda,\mu} \left[\lambda \Phi^{\alpha}_{\beta\gamma} + \mu \Phi^{\alpha}_{\gamma\beta} \right] \times$$

$$\times \xi^{\beta}_{\lambda} \xi^{\gamma}_{\mu} \delta[\kappa + \lambda + \mu] \delta[\kappa U(\alpha) + \lambda U(\beta) + \mu U(\gamma)]. \qquad (3.32)$$

Эта весьма громоздкая запись существенно упрощается, если заметить, что символы δ обращают в нуль большинство слагаемых в правой части. Отличными от нуля будут только те члены, для которых выполнено одновременно два соотношения:

$$\kappa + \lambda + \mu = 0,$$

$$U(\alpha)\kappa + U(\beta)\lambda + U(\gamma)\mu = 0.$$

Нетрудно выписать общее решение этих уравнений. Оно имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \kappa &= [U(\beta) - U(\gamma)]\nu \\ \lambda &= [U(\gamma) - U(\alpha)]\nu \\ \mu &= [U(\alpha) - U(\beta)]\nu \end{aligned}\right\}. \qquad (3.33)$$

В этих формулах ν – произвольный параметр. Однако если нас интересует определённая частота κ, то мы должны выразить ν через κ и, подставив в формулы для λ и μ, найти те две частоты, которые только и могут резонировать с данной частотой κ. Заметим, что в частотном спектре системы могут отсутствовать частоты λ и μ. Это значит, что соответствующая частота κ не резонирует ни с какой другой, и поэтому величина $\xi^{\alpha}_{\kappa^*}$ остаётся постоянной, так как правая часть уравнения (3.32) обращается в нуль в этом случае. Формулы (3.33) показывают, что весь спектр системы распадается на тройки частот.

Однако в случае четырёх и более уравнений эти тройки могут весьма сложным образом взаимодействовать друг с другом. Это происходит потому, что тройки, имеющие общую вершину, не обязательно совпадают. Если же речь идёт о системе трёх уравнений, то нетрудно понять, что из совпадения вершины одной тройки с вершиной другой тройки вытекает совпадение троек. Более точно следует говорить, конечно, не о тройках, а о шестёрках частот, так как уравнение написано не для частоты κ, а для частоты $\kappa^* = -\kappa$.

Остановимся подробнее на случае трёх уравнений. В этом случае система уравнений (3.32), как уже было сказано, распадается на независимые системы. Правые части этих систем отличаются друг от друга только множителем ν. Поэтому задача об исследовании на устойчивость сводится к исследованию одной-единственной системы уравнений. Несложные вычисления показывают, что эту систему можно написать в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi^{(1)}}{dt} &= iZ^{1}_{23}\xi^{(2)}\xi^{(3)} \\ \frac{d\xi^{(2)}}{dt} &= iZ^{2}_{31}\xi^{(3)}\xi^{(1)} \\ \frac{d\xi^{(3)}}{dt} &= iZ^{3}_{12}\xi^{(1)}\xi^{(2)} \end{aligned}\right\}, \qquad (3.34)$$

где величины $Z^{\alpha}_{\beta\gamma}$ имеют тот же смысл, что и в формулах (3.22), (3.23), а величины ξ^{α} отличаются от величины ξ^{α}_{κ} в уравнениях (3.32) только нормировочным множителем $\frac{1}{2}\varepsilon\nu$. Забегая вперед, укажем окончательный результат исследования системы (3.34):

Для того чтобы система (3.34) *была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы в ряду чисел* $Z_{23}^{1},\ Z_{31}^{2},\ Z_{12}^{3}$ *была хотя бы одна перемена знака.*

Сравнивая этот результат с теоремой о дефинитной плотности, сформулированной в § 3 гл. III, мы приходим к следующему окончательному *критерию нейтральности*:

Критерий нейтральности.

Для того чтобы система трёх уравнений была нейтральна во втором порядке, необходимо и достаточно, чтобы она обладала дефинитной плотностью третьего порядка.

Аналитически этот критерий может быть сформулирован так:

Для нейтральности во втором порядке необходимо и достаточно, чтобы в ряду чисел $Z_{23}^{1},\ Z_{31}^{2},\ Z_{12}^{3}$ *была хотя бы одна перемена знака.*

Следует ещё раз подчеркнуть, что такой результат получен в предположении, что существует хотя бы одна тройка частот, задаваемых формулой (3.33) и принадлежащих спектру системы. Это всегда имеет место для граничных условий второго типа, когда спектр системы непрерывен. Если ту же самую систему рассматривать на отрезке, то, как правило, не существует тройки частот вида (3.33), принадлежащих спектру. Все частоты в этом случае суть целые кратные основной частоты. Но при несоизмеримых разностях

$$U(\alpha)-U(\beta), \qquad U(\beta)-U(\gamma), \qquad U(\gamma)-U(\alpha)$$

нельзя найти ν такого, чтобы κ, λ и μ были *целыми* кратными основной частоты все три одновременно. В таком случае мы получим, формально говоря, нейтральность во втором порядке.

Однако дело в том, что замена переменных, приводящая нашу систему к нейтральной, будет задаваться *расходящимся* рядом из-за наличия малых знаменателей. Ситуация эта типична для изучаемых вопросов и хорошо иллюстрируется примером (3.24). При любых положительных a эта система, как мы видим, тождественно нейтральна. Это значит, что траектории этой системы лежат на некоторой ограниченной замкнутой поверхности типа эллипсоида. Как мы видели, при достаточно малых a этот эллипсоид оказывается сильно вытянутым, и система, оставаясь формально нейтральной, становится практически неустойчивой. Эти соображения показывают, что при изучении вопросов устойчивости следует налагать возможно более жёсткие условия на систему. В частности, при изучении гиперболических систем следует рассматривать общие почти периодические возмущения, чтобы не получить иллюзорного вывода о нейтральности системы.

Следует ещё раз подчеркнуть весьма простую аналитическую природу подобного рода ситуаций. Рассмотрим функцию

$$y = \frac{1}{\varepsilon} \sin \varepsilon x .$$

Эта функция является периодической. Но период её настолько велик, что при рассмотрении даже довольно больших значений переменного x, например, $x \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, она практически неотличима от функции $y = x$. Довольно ясно, что во многих вопросах появление решений такого типа свидетельствует о практической неустойчивости системы.

В заключение проведём формальное доказательство критерия устойчивости системы (3.34). Перепишем эту систему в других обозначениях, чтобы не загромождать изложения множеством индексов:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= iAvw \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= iBwu \\ \frac{d\bar{w}}{dt} &= iCuv \end{aligned}\right\} .$$

Эта система допускает решение в квадратурах, но для наших целей проще провести формальное доказательство.

Итак, пусть в ряду чисел A, B, C есть перемена знака. Без ограничения общности можно считать, что $A > 0$, $B > 0$, $C < 0$. Докажем, что система тождественно нейтральна. Прямой проверкой нетрудно убедиться, что функция

$$H = p|u|^2 + q|v|^2 + r|w|^2$$

является интегралом системы, если только выполнено условие:

$$pA + qB + rC = 0\,. \tag{3.35}$$

Но если среди чисел *A*, *B*, *C* есть и положительные, и отрицательные, то всегда можно найти *положительные* числа *p*, *q*, *r*, удовлетворяющие равенству (3.35).

Если в ряду чисел *A*, *B*, *C* нет перемены знака, то доказать неустойчивость системы проще всего построением неустойчивого решения. Положим, прежде всего

$$u = ix,\ v = iy\,,\ w = iz\,,$$

и рассмотрим действительные решения системы для *x*, *y*, *z*:

$$\frac{dx}{dt} = Ayz,$$

$$\frac{dy}{dt} = Bzx,$$

$$\frac{dz}{dt} = Cxy.$$

Если все три числа отличны от нуля и положительны (при отрицательных достаточно поменять знаки у неизвестных), то прямой проверкой убеждаемся в существовании неустойчивого решения:

$$x = \frac{1}{\sqrt{BC}}\frac{1}{1-t}\,, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{CA}}\frac{1}{1-t}\,, \qquad z = \frac{1}{\sqrt{AB}}\frac{1}{1-t}\,.$$

Если одно из чисел равно нулю, $C = 0$, то неустойчивость более слабая:

$$x = \sqrt{A}e^{\sqrt{AB}t}\,, \qquad y = \sqrt{B}e^{\sqrt{AB}t}\,, \qquad z = 1\,.$$

Если же два числа равны нулю, то неустойчивость всего лишь линейная:

$$x = At\,, \quad y = 1\,, \quad z = 1\,.$$

Таким образом, неустойчивость обнаружена во всех трёх случаях, что и завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения (диссертация и статьи), 2-е изд. – М.-Л.: ОНТИ, 1935. – 386 с.

2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.-Л.: Гостехиздат, 1955. – 448 с.

3. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 448 с.

4. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. – М.-Л.: Гостехиздат, 1952. – 431 с.

5. Молчанов А. М. Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 141. – № 1. – С. 24-27.

6. Ландау Л., Лифшиц Е. Статистическая физика. – М.-Л.: Гостехиздат, 1951. – 480 с.

7. Молчанов А. М. Разделение движений и асимптотические методы в теории нелинейных колебаний // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 136. – № 5. – С. 1030-1033.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СТЕНОГРАММА

заседания Учёного совета Отделения прикладной математики Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР 23/IV 1963 г.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ – чл.-корр. АН СССР А. Н. ТИХОНОВ.

Позвольте открыть заседание Учёного совета.

У нас сегодня на повестке дня защита диссертации на соискание учёной степени доктора физико-математических наук Альбертом Макарьевичем Молчановым на тему «Об устойчивости нелинейных систем».

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор В. В. Немыцкий, доктор физико-математических наук, профессор В. В. Румянцев, доктор физико-математических наук, профессор С. А. Гальперн.

Прошу Учёного секретаря Н. Н. Ченцова доложить содержание всех представленных материалов.

ЧЕНЦОВ Н. Н.

(*Зачитывает личное дело А. М. Молчанова*).

На внешний отзыв диссертация была послана в Вычислительный центр Академии наук СССР. Получен отзыв положительного содержания.

Все остальные документы имеются в полном порядке.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ.

Есть ли вопросы к Учёному секретарю по поводу оглашенных материалов?

(*Вопросов нет*).

Если вопросов нет, тогда позвольте предоставить слово диссертанту, Альберту Макарьевичу Молчанову.

МОЛЧАНОВ А. М.

(*Кратко излагает содержание диссертации*).

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ.

Кому угодно задать вопрос диссертанту по поводу содержания диссертации?

Слово имеет профессор Виктор Владимирович Немыцкий.

НЕМЫЦКИЙ В. В.

Когда Вы изучаете монотонную устойчивость, то нельзя ли было бы вместо установления монотонности, попытаться оценить эту величину?

МОЛЧАНОВ А. М.

Вот в чём дело. Представьте себе, что Вы желаете, чтобы величина отскоков была не слишком большой. Тогда наиболее правильный способ, видимо такой.

Всегда эти условия будут всё-таки достаточными. Вот интересующая Вас точка (*показывает на доске*). Вы желаете, чтобы в этом направлении она устанавливалась не больше, чем на 10, а здесь – не больше, чем на 4. Тогда сделайте замену переменных, чтобы это превратилось в окружность, и потребуйте, чтобы в новых координатных системах была монотонная устойчивость.

Поэтому в значительной степени вопрос монотонной устойчивости содержит вот такой заданный отскок. Кроме того, монотонная устойчивость, мне кажется, интересна сама по себе. Тем не менее это не снимает вопроса о том, что, если можно такое условие получить, то это интересно.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ.

Есть ли ещё вопросы к диссертанту?

(*Вопросов нет*).

Тогда позвольте предоставить слово Учёному секретарю для оглашения поступивших письменных отзывов.

ЧЕНЦОВ Н. Н.

Я уже сказал, что отзыв был получен от Вычислительного центра Академии наук СССР, подписанный профессором Н. Н. Моисеевым и утверждённый исполняющим обязанности директора Вычислительного центра, профессором В. А. Диткиным.

(*Оглашается отзыв*)[1].

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ.

Позвольте перейти к выступлениям официальных оппонентов.

[1] В архиве ИПМ им. М. В. Келдыша не найден. – *Прим. ред.*

Слово предоставляется доктору физико-математических наук, профессору Виктору Владимировичу Немыцкому.

НЕМЫЦКИЙ В. В.

Автор применяет для исследования критического случая чисто мнимых корней характеристического уравнения прямой метод Ляпунова.

Известно со времени работ А. М. Ляпунова [1], что решение вопроса об устойчивости, о положении равновесия в критическом случае, не может решаться, учитывая лишь первое линейное приближение и, мало того, можно построить такие примеры, в которых этот вопрос решается рассмотрением членов любого сколь угодно высокого порядка.

Учитывая это обстоятельство, теорию устойчивости можно строить по двум путям. Первый путь – это создание определённого алгоритма, применение которого к индивидуально заданному уравнению, на том или ином шаге, приводит к решению вопроса об устойчивости или неустойчивости. Такие алгоритмы для случая пары чисто мнимых корней можно, следуя некоторым идеям А. М. Ляпунова, создать, как это показано, например, И. Г. Малкиным [4].

В книге В. И. Зубова[2] указана возможность построения алгоритма и в случае любого числа пар чисто мнимых корней, между которыми нет линейной зависимости. Помимо того, что этот алгоритм мало эффективный, он всё же не приводит к окончательному решению вопроса, а сводит его решение к решению вопроса об устойчивости модельной системы уравнений

$$\frac{d\rho_s}{dt} = R_s(\rho_1, \ldots, \rho_k), \qquad s = 1, 2, \ldots, k,$$

где R_s – форма порядка $n \geq 3$.

В той же книге В. И. Зубова указывается на метод решения вопроса об устойчивости положения равновесия модельного уравнения, с помощью решения системы нелинейных алгебраических уравнений. Однако это решение сопровождается целой системой оговорок, которые далеко не всегда и не просто позволяют решить вопрос об устойчивости решения модельного уравнения.

Однако можно пойти по другому пути. Разумно ограничить задачу, но зато прийти к окончательным выводам. По этому пути и пошел А. М. Молчанов. Он ограничил себя таким классом уравнений, для ко-

[2] Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1957. – 241 с. – *Прим. ред.*

торого вопрос об устойчивости решается членами третьего порядка.

Он показал, что в этом случае модельная система уравнений может быть построена эффективным путем. Она получается специального вида и благодаря этому вопрос об устойчивости положения равновесия этого модельного уравнения решается путём рассмотрения линейных систем уравнений.

Всё это вместе взятое представляет собой существенный успех в классической проблеме исследования критических случаев. А если к этому присоединить оригинальность метода исследования и заложенные в нём, в этом методе, возможности решения и более сложных вопросов устойчивости и даже некоторых вопросов устойчивости для систем уравнений с частными производными, то можно сказать, что диссертация представляет собой существенный вклад в математику, и поэтому её автор достоин присуждения ему степени доктора физико-математических наук.

Однако представленное к защите изложение результатов страдает целым рядом недостатков, которые должны быть устранены при подробной публикации результатов.

В чём эти недостатки?

1. Автор игнорирует достижения своих предшественников. Например, во введении он пишет: «Перед математикой возникает … задача построения теории устойчивости сложных систем. Настоящая работа посвящена попытке сделать самый первый шаг в этом направлении» (стр. 7 – *И.Ф.*). Такая высокая оценка пионерского характера проведённого исследования кажется не только не скромной, но просто в данном случае неправильной, даже в применении к теории критических случаев. Некоторые работы, например книга В. И. Зубова, не упоминаются даже в библиографии. Не упоминается и исследование Г. В. Каменкова[3].

2. Изложение результатов не доводится до конца. Нет окончательных, чётко сформулированных выводов, и не дано никакого примера, позволяющего оценить степень сложности предлагаемого алгоритма решения.

3. Автор претендует на точные математические выводы, а между тем часто использует терминологию теории первого приближения. Он часто пишет: «Мы ограничимся только главными членами, так как они только нас и интересуют» (стр. 38, 78 – *И.Ф.*), не давая обоснования этой фразе. Между тем, если в случае сходящихся рядов такое безапел-

[3] Каменков Г. В. Об устойчивости движения // Труды Казан. авиац. ин-та. – 1939. – № 9. – 136 с. – *Прим. ред.*

ляционное заявление и может быть оправдано, то в случае применения асимптотических расходящихся разложений, его, конечно, следует подробно обосновать.

Все эти редакционные недостатки, не затрагивающие основных выводов, и автор работы Альберт Макарьевич Молчанов, по моему мнению, достоин степени доктора физико-математических наук.

Председатель.

Альберт Макарьевич, Вы желаете сразу ответить оппоненту?

Молчанов А. М.

Я полностью согласен с замечаниями Виктора Владимировича.

Председатель.

Слово имеет второй официальный оппонент, доктор физико-математических наук, профессор Валентин Витальевич Румянцев.

Румянцев В. В.

Рецензируемая работа состоит из введения и трёх глав. Небольшая по объёму (115 стр. машинописи), она написана лаконично, чем отчасти определяются трудности, возникающие при её чтении. Надо сказать, что рассказывает Альберт Макарьевич гораздо лучше, чем пишет.

Введение содержит краткое изложение результатов работы, а также взглядов автора на задачи устойчивости. Изучение вопроса об устойчивости систем, нейтральных в линейном приближении – вот задача, которую ставит перед собой автор.

Принято, как правило, давать в диссертации обзор литературы по вопросам, более или менее близким к рассматриваемым в диссертации. К сожалению, в данной работе обзора нет, да и список цитированной литературы состоит лишь из семи наименований.

Нельзя пройти мимо некоторых замечаний автора. Так, на стр. 6 он пишет, что для случая стационарных решений «результат А. М. Ляпунова … состоит в том, что вопрос об устойчивости исходной системы эквивалентен вопросу об устойчивости линеаризованной системы». Поставив после этой фразы точку и ни слова не сказав об установлении и исследовании А. М. Ляпуновым критических случаев, когда вопрос об устойчивости не решается первым приближением, автор тем самым исказил, отчасти и преуменьшил, результаты А. М. Ляпунова.

Далее, он отмечает, что для современных задач нелинейная теория устойчивости явно недостаточна и что «перед математикой возникает, таким образом, задача построения теории устойчивости сложных систем» (стр. 7 – *И.Ф.*). После этой фразы читатель вправе ожидать хотя бы краткого указания на работы, посвящённые решению названной задачи, тем более что в этой области трудами, главным образом, советских ученых уже получены фундаментальные результаты, и имеется обширная литература. Однако никаких указаний такого рода в работе нет.

В особенности странно, что автор нигде ни словом не упоминает о работе Г. В. Каменкова[4] по исследованию устойчивости в критических случаях, хотя диссертация самым непосредственным образом примыкает к исследованиям Г. В. Каменкова. Более того, на стр. 35 написано, что «случаи двух пар чисто мнимых корней и пары мнимых и одного нулевого корня» были разобраны в работах И. Г. Малкина, хотя хорошо известно, что впервые эти задачи решены Г. В. Каменковым, о чем, кстати говоря, вполне чётко сказано самим И. Г. Малкиным на стр. 416 и 418 его книги [4], имеющейся в списке цитированной литературы.

Эти недостатки работы тем более досадны, что результаты, полученные автором, сами по себе заслуживают высокой оценки.

Перейдём к рассмотрению результатов диссертации.

Гл, I посвящена интересному вопросу о разделении движений. Рассматривается автономная система уравнений, содержащая малый параметр ε; пусть известно общее решение системы при $\varepsilon = 0$. В развитие идеи метода вариации произвольных постоянных, автор разыскивает решение исходной системы в такой же форме, что и решение при $\varepsilon = 0$, считая теперь фигурирующие в последнем начальные данные ξ функциями времени.

Для этих функций дифференциальные уравнения имеют вид (1.5). Если правые части уравнений не зависят явно от времени, то они принимают вид (1.6) и их можно интегрировать независимо от невозмущённых уравнений (при $\varepsilon = 0$), то есть имеет место разделение движений. Необходимым и достаточным условием последнего является равенство (1.9).

Так как это условие, как правило, не выполняется, автор ставит своей задачей разыскание такого преобразования переменных, которое приведёт к разделению движений. Вопрос приводится к решению двух уравнений в частных производных. Не исследуя вопроса о разрешимости этих уравнений в общем случае, автор ограничивается разысканием решения в виде асимптотического ряда по степеням ε и устанавливает, применяя способ усреднения, разрешимость систем, получаемых поэтапно, если существуют пределы в формулах (1.30), а функции, опре-

[4] См. прим. 3. – *Прим. ред.*

деляемые ими, дифференцируемы.

Более гибкий подход удаётся получить так называемым «расщеплением» параметра, состоящим в том, что некоторые члены, содержащие параметр, включаются в «основное» уравнение.

Гл. I заканчивается рассмотрением линейного невозмущённого уравнения. В этом случае асимптотическое разделение движений можно провести независимо от способа усреднения.

Гл. II носит претенциозное название «Теория устойчивости. Обыкновенные уравнения». В действительности же здесь изучается устойчивость положения равновесия автономной системы в критическом случае, когда характеристическое уравнение линейного приближения имеет только чисто мнимые корни, между которыми нет целочисленных соотношений.

Ограничиваясь рассмотрением только систем, в которых отсутствуют все внутренние резонансы, кроме тождественных, автор получает эволюционные уравнения, правые части которых начинаются с членов третьего порядка. Так как из коэффициентов последних отличны от нуля только резонансные, то это позволяет понизить вдвое порядок системы введением новых переменных ρ^{α}, равных квадратам модулей старых.

Оставляя только члены наинизшего измерения, автор получает уравнения (2.6), с правыми частями, представляющими собой произведения соответствующего переменного ρ^{α} на линейные функции остальных переменных. Полученная система уравнений названа модельной. Далее разыскиваются инвариантные лучи последней, то есть решения вида (2.7).

В зависимости от знака собственного значения E, решения оказываются устойчивыми, нейтральными или неустойчивыми. Под термином «устойчивость» автор понимает асимптотическую устойчивость по А. М. Ляпунову. Он называет модельную систему K-системой, если все её нейтральные и неустойчивые лучи лежат вне положительного конуса $K(\rho^{\alpha} \geq 0)$; эти условия необходимы и достаточны для устойчивости модельной системы.

Доказательство достаточности осуществляется построением функции Ляпунова. Сначала даётся определение локальной l-функции Ляпунова и доказывается важная теорема о косинусах, из которой следует существование l-функций для систем, удовлетворяющих условию K. Затем строится функция Ляпунова, однородная относительно ρ^{α}, с показателем, равным единице, производная по времени от которой, в силу уравнений модельной системы, отрицательна и однородна, с показателем, равным двум.

Далее доказывается, что построенная для модельной системы функция Ляпунова является таковой и для полной системы – тем самым установлены достаточные условия асимптотической устойчивости невозмущённого движения.

Этот результат является, на мой взгляд, основным достижением автора; проведённое им построение функции Ляпунова весьма остроумно и изящно.

Однако никак нельзя согласиться с утверждением автора на стр. 52, что «проведённое построение полностью решает вопрос о системах, нейтральных в линейном приближении». Это неверно, если даже оставаться в рамках предположений, сделанных выше автором: в частности, не исследован случай, когда модельная система не удовлетворяет условию *K*. Содержащееся в диссертации утверждение, что для асимптотической устойчивости системы необходима асимптотическая устойчивость модельной системы – нигде в работе не только не доказывается, но и не обсуждается.

Серьезный упрек надо сделать автору и в связи с отсутствием в этой главе каких-либо примеров на применение его теоремы.

Далее автор указывает на ошибочность утверждения, содержащегося в его заметке [5], что устойчивость систем, содержащих линейно устойчивую и нейтральную компоненты, определяется только свойствами нейтральной компоненты, и приводит соответствующий пример. По поводу этого примера можно заметить, что он относится к случаю пары чисто мнимых корней, полностью рассмотренному А. М. Ляпуновым. В связи с отсутствием в работе соответствующих ссылок, не очень ясен смысл замечания автора на стр. 8 автореферата[5] и в конце § 7.

В гл. III рассматриваются однородные квазилинейные уравнения в частных производных гиперболического типа, коэффициенты которых предполагаются аналитическими функциями искомых переменных. Ставится задача изучения устойчивости константных решений такой системы уравнений в первом порядке теории возмущений.

Автор даёт определение дефинитной плотности энергии и называет систему уравнений тождественно нейтральной в точке, если она обладает плотностью энергии, дефинитной в этой точке.

Далее строятся дефинитные плотности энергии для одного уравне-

[5] Молчанов А. М. Об устойчивости нелинейных систем : автореф. дис. … д.ф.-м.н. – М.: Мат. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР, 1963. – 12 с. – *Прим. ред.*

ния, для системы уравнений одномерного изэнтропического движения идеального газа (эти уравнения в диссертации почему-то названы системой уравнений гидродинамики), для систем двух уравнений. Из сохранения «энергии» системы H в этом случае следует ограниченность колебаний нормы решений u^{α}.

Следует отметить, что в механике успешно применяется понятие устойчивости движения сплошной среды по отношению к некоторым величинам, интегральным образом характеризующим её движение.

Далее вводится определение асимптотической плотности и доказывается, что гиперболичность системы есть необходимое и достаточное условие существования дефинитной асимптотической плотности второго порядка.

Система трёх уравнений обладает дефинитной плотностью третьего порядка в том и только в том случае, когда среди некоторых трёх чисел $Z^{\alpha}_{\beta\gamma}$ имеются числа противоположных знаков; это условие необходимо и достаточно для нейтральности системы трёх уравнений во втором порядке.

Таково содержание работы. Как видно из вышеизложенного, основными достижениями автора являются:

1) Развитие идеи о разделении движений.

2) Установление достаточных условий асимптотической устойчивости в случае чисто мнимых корней характеристического уравнения, между которыми нет целочисленных соотношений.

3) Установление нейтральности для некоторых гиперболических систем уравнений в частных производных первого порядка.

Идея об асимптотическом разделении движений, обсуждавшаяся во многих работах, получила наиболее полное развитие, насколько мне известно, в данной диссертации. Второй из указанных результатов представляет собой существенный вклад в теорию критических случаев устойчивости движения и заслуживает самой высокой оценки.

Помимо отмеченных выше серьезных недостатков работы следует указать также на небрежность в написании работы, выражающуюся в отсутствии формулировок условий на правые части уравнений в первых двух главах, списках и формулах (например, на стр. 52, 56) и т.д.

Результаты первых двух глав опубликованы в двух заметках в ДАН СССР, результаты гл. III не опубликованы. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Полученные автором серьезные научные результаты в трудной области устойчивости движения свидетельствуют, что он является сложившимся научным работником, обладающим, несомненно, незаурядными творческими способностями.

Считаю, что А. М. Молчанов вполне достоин присвоения ему учёной степени доктора физико-математических наук.

Председатель.

Альберт Макарьевич, Вы желаете сейчас ответить официальному оппоненту?

Молчанов А. М.

Если можно, я отвечу потом.

Председатель.

Пожалуйста.

Слово имеет официальный оппонент, доктор физико-математических наук, профессор Самарий Александрович Гальперн.

Гальперн С. А.

Работа, в основном, посвящена исследованию устойчивости в смысле Ляпунова автономных систем дифференциальных уравнений.

Хорошо известен классический результат А. М. Ляпунова 1893 г. [1], что если линейные члены автономной системы обладают матрицей, у которой все собственные значения имеют отрицательную действительную часть, то нулевое решение асимптотически устойчиво.

Значительно более трудным является разбор случаев, когда среди корней характеристического уравнения линейного приближения, кроме корней с отрицательной действительной частью, появляются корни с нулевой действительной частью.

А. М. Ляпунов разобрал вопрос об асимптотической устойчивости в случае одной пары чисто мнимых корней или одного нулевого корня. Затем только в 1939 г. Г. В. Каменков[6], а потом И. Г. Малкин [4] разобрали вопрос об асимптотической устойчивости в случае двух пар чисто мнимых корней или одного двойного нулевого корня характеристического уравнения.

Таким образом, оставался открытым вопрос об асимптотической устойчивости решения системы с произвольным числом пар чисто мнимых корней. Некоторые условные критерии в решении этого вопроса были получены В. И. Зубовым[7].

В работе автор устанавливает алгебраический критерий того, что

---

[6] См. прим. 3. – *Прим. ред.*

[7] См. прим. 2. – *Прим. ред.*

нулевое решение системы, имеющей любое число различных пар чисто мнимых корней характеристического уравнения – асимптотически устойчиво. Отметим, что этот критерий является необходимым, если предположить, что система содержит члены не выше третьего порядка. Конечно, автор, как и всегда, предполагает, что между мнимыми корнями нет некоторых линейных соотношений с целыми коэффициентами.

Для получения этой теоремы автор строит функцию Ляпунова. Для этого сначала приходится исследовать поведение специальной системы, названной автором модельной:

$$\frac{d\rho^{\alpha}}{dt} = \rho^{\alpha} \sum_{\beta=1}^{n} \mathcal{E}^{\alpha}_{\beta} \rho^{\beta}, \qquad \alpha = 1,2,..., n .$$

Здесь величины $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta}$ выражаются через коэффициенты первоначальной системы, а ρ^{α} являются квадратами модулей искомых функций некоторой преобразованной системы.

Сначала исследуются «инвариантные лучи» этой системы, то есть решения вида $\rho^{\alpha} = r^{\alpha}\rho(t)$, где r^{α} – постоянные, а $\rho(t)$ – функция.

Уравнение для определения $\rho(t)$ имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = E\rho^{2},$$

где E можно считать всегда либо +1, либо –1, либо 0. Луч будет асимптотически устойчивым, если $E = -1$, нейтральным, если $E = 0$, и неустойчивым, если $E = +1$.

Оказывается, что необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости модельной системы является отсутствие нейтральных и неустойчивых лучей в угле $\rho^{k} \geq 0$ (при всех k). Для установления этого факта, оказывается, достаточно найти решения некоторого числа систем линейных уравнений.

Затем автор доказывает предварительно геометрическую лемму об аффинном отображении угла $\rho^{k} \geq 0$ и с её помощью строит функцию Ляпунова для модельной системы.

Эта функция Ляпунова оказывается функцией Ляпунова и для полной системы. Затем не трудно уже показать, что условия асимптотической устойчивости автора справедливы и для системы, имеющей кроме некоторого числа различных пар чисто мнимых корней характеристического уравнения ещё и корни с отрицательной действительной частью.

Эта теорема является, как мне кажется, существенным достижением в теории дифференциальных уравнений. Она имеет и несомненный практический интерес, так как исследование вопроса об асимптотической устойчивости в случае чисто мнимых корней характеристического уравнения сводится к решению нескольких систем линейных уравнений.

Этому посвящена гл. II работы.

В гл. I автор предлагает метод, названный им методом разделения движения. Метод заключается в следующем:

Для решения системы уравнений

$$\frac{du}{dt} = A_0(u) + \varepsilon A_1(u, \varepsilon),$$

где A_0, A_1, u – векторы, сначала находим решения укороченной системы

$$\frac{du}{dt} = A_0(u); \qquad u = f(\xi, t); \qquad f(\xi, 0) = \xi.$$

Затем, полагая $\xi = \varphi(t)$, стараемся подобрать $\varphi(t)$ так, чтобы вектор-функция $u = f(\varphi(t), t)$ удовлетворяла полной системе.

Интерес представлял бы случай, когда система для определения $\varphi(t)$ не зависела бы от t. Тогда система для определения φ оказывалась бы автономной.

Этот случай автор называет разделением движений. Конечно, разделение движений осуществляется для очень частного класса систем, но автор показывает, что в случае, когда нет точного разделения движений, то, разлагая правую часть по степеням ε и производя замену переменных, вопрос сводится к последовательному решению систем уравнений с частными производными первого порядка специального вида.

Автор доказывает, что эффективное решение этих систем уравнений с частными производными возможно, если существуют средние по траекториям укороченной системы, от некоторых, вычисленных автором, комбинаций членов разложения правых частей. В частности, такое решение всегда находится, если укороченная система имеет периодические решения.

В последнем параграфе этой главы для разделения движений применен метод неопределённых коэффициентов. Для этого правые части системы и формулы замены переменных разлагаются по степеням переменных.

Этот метод, как указывает автор, применялся А. Дюлаком в его работе 1912 г.[8] для упрощения систем уравнений. Результаты этого параграфа необходимы для доказательства основных теорем в гл. II.

Последняя гл. III посвящена вопросу устойчивости решения квазилинейных систем гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = U(u)\frac{\partial u}{\partial x},$$

где $U(u)$ – матрица, u – вектор, причём рассматриваются решения, удовлетворяющие условию:

$$u(0,t) = u(l,t).$$

Если для этой системы существует функция $h(u)$ такая, что

$$\frac{dH(t)}{dt} = 0,$$

где $H(t) = \int_0^l h(u)dx$ и, кроме того,

$$h(u) = \sum a_{ij}u_i u_j + K,$$

где K – члены порядка выше двух, а квадратичная форма $\sum a_{ij}u_i u_j$ положительно определена, то решение $u = 0$ называется тождественно нейтральным.

Легко заметить, что нейтральность решения – это устойчивость по Ляпунову в норме L_2. Однако следует иметь в виду, что здесь имеет смысл говорить о нейтральности лишь на отрезке времени, пока решение существует.

Автор доказывает, что система двух гиперболических уравнений рассматриваемого вида всегда тождественно нейтральна. Также тождественно нейтральна система уравнений гидродинамики для одномерного течения газа с постоянной по времени энтропией.

Однако гиперболическая система из трёх уравнений уже не всегда тождественно нейтральна даже во втором порядке приближения. Автор находит условия для этих систем, обеспечивающих нейтральность во втором порядке (то есть, если пренебречь членами третьего порядка).

К недостаткам работы следует отнести некоторую небрежность изложения; формулировки не всегда отточены, а иногда даже допускают

---

8 Dulac H. Solutions d’un système d’équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières // Bulletin de la Société mathématique de France. – 1912. – T. 40. – P. 324–383. – *Прим. ред.*

разночтения. В некоторых местах следует более подробно провести выкладки. Но всё это требует лишь редакционных исправлений.

С другой стороны, автор иногда приводит слишком длинные пояснения, не вызванные существом дела, а только эмоциями автора. Например, в гл. II помещён § 9 о метастабильности, в котором не сделано ни одного математического утверждения или вывода. Здесь автор с кем-то полемизирует по поводу понятия метастабильности, в то время как само это понятие прямого отношения к работе не имеет.

Однако эти недостатки никак не могут повлиять на общую оценку работы. Должен отметить, что работы по устойчивости движения, начиная с работ А. М. Ляпунова, всегда отличаются громоздкостью выкладок. Автору этой работы удалось этой громоздкости полностью избежать, удачно использовав для этого матрицы и тензоры.

Работа является ценным вкладом в теорию дифференциальных уравнений, содержит весьма значительный научный результат в классической теории устойчивости по А. М. Ляпунову, изложенный в гл. II диссертации. Большой научный интерес представляют также теоремы гл. I о разделении движений.

Гл. III посвящена трудному вопросу устойчивости решений квазилинейной гиперболической системы I порядка с двумя независимыми переменными. Хотя и здесь получены интересные теоремы, однако, как мне кажется, эти результаты пока носят ещё несколько частный характер. Ряд возникающих здесь вопросов требуют дальнейших исследований.

В целом работа вполне удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на степень доктора физико-математических наук, а её автор, безусловно, достоин присуждения ему этой степени.

Председатель.

Слово имеет Альберт Макарьевич Молчанов для ответа официальному оппоненту.

Молчанов А. М.

Я сделаю только несколько замечаний. Конечно, я полностью признаю все эти соображения и замечания, которые были высказаны по поводу стиля изложения, и единственное, что я прошу принять во внимание – что это не от злого умысла.

На одно замечание я хотел бы ответить по существу – это относительно того, что я пользуюсь асимптотическими формулами и не доказываю сходимости.

Я бы хотел отметить, что в задаче об устойчивости действительно не нужно никакого доказательства сходимости. В том варианте, который содержится в диссертации, в той замене переменных, которые я даю – мне надо всегда три члена. Я пишу систему для u, а строю функцию Ляпунова для y, но отображения u в y и y в u взаимно однозначны.

Поэтому это, вместе с тем, есть и функция u. И я доказываю, что в достаточно малой окрестности эта функция, которая построена по трём членам, является функцией Ляпунова любой системы.

Больше того, в этих членах нам важна только оценка. Мне важно только, что это есть $O\left(|u|^4\right)$ и непрерывность нужна. Если это имеет место, то построенная функция Ляпунова доказывает теорему об устойчивости полной системы.

Вот это единственное замечание по существу.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ.

Кто желает взять слово для обсуждения диссертации?

Слово имеет профессор В. В. Румянцев.

РУМЯНЦЕВ В. В.

Когда рассматриваете модель системы, то она доказывает, что для того, чтобы эта система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию K. Это правильно, и это сделано.

Но на стр. 9 введения указывается, и даже подчёркнуто, что для доказательства основной теоремы этой главы асимптотическая устойчивость модельной системы является необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости системы. Так вот, достаточность доказывается, а необходимость не обсуждалась.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ.

Есть ещё какие-нибудь вопросы диссертанту или оппонентам, или кто желает взять слово?

Работа Альберта Макарьевича неоднократно докладывалась на наших семинарах и в институтах, и известна. Значит, нет желающих взять слово? Тогда позвольте предоставить заключительное слово А. М. Молчанову.

МОЛЧАНОВ А. М.

Я, разумеется, прежде всего, должен поблагодарить моих официальных оппонентов за их тяжелую и, по-видимому, весьма неблагодарную работу по чтению моей диссертации и написанию рецензии.

Я очень благодарен всему коллективу отдела, в котором я работаю.

Мне очень хорошо было работать, и сейчас очень хорошо работать.

Особенно я благодарен товарищу Э. Э. Шнолю, с которым обсуждались все вообще работы, которые я пытался писать и которые я написал, а ему было не в пример труднее, чем оппонентам, потому что оппоненты читали с моей точки зрения написанную работу, а ему приходилось обсуждать и работы, которые, даже с моей точки зрения, не были толком написаны.

Очень благодарен всем моим друзьям в Институте, которые мне сильно помогали в работе над диссертацией.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ.

Защита диссертации закончена.

Нам надо избрать счётную комиссию. Предлагается следующий состав счётной комиссии: В. В. Русанов, Н. Н. Ченцов и Т. М. Энеев. Какие будут замечания? Есть предложение утвердить.

(*Счётная комиссия утверждается единогласно*).

Прошу приступить к тайному голосованию.

(*Происходит голосование и подсчёт голосов*).

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ.

Слово предоставляется председателю счётной комиссии для оглашения протоколов счётной комиссии.

ЭНЕЕВ Т. М.

(*Зачитывает протокол № 1, по распределению обязанностей между членами счётной комиссии*).

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ.

Ставлю на голосование: кто за то, чтобы утвердить протокол № 1 счётной комиссии?

(*Утверждается единогласно*).

ЭНЕЕВ Т. М.

(*Зачитывает протокол № 2*).

Протокол № 2 по присуждению учёной степени доктора физико-математических наук Альберту Макарьевичу Молчанову за диссертацию на тему «Об устойчивости нелинейных систем».

Утверждённых членов Учёного совета – 25 чел. Присутствовало – 18, отсутствовало по уважительным причинам – 7.

Выдано бюллетеней – 8, в урне оказалось бюллетеней – 18, из них действительных – 17, недействительных – 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В результате тайного голосования по присуждению А. М. Молчанову учёной степени доктора физико-математических наук, голоса распределились таким образом: за – 17, против – 0, недействительных бюллетеней – 1.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ.

Позвольте поставить на утверждение протокол счётной комиссии.

(*Утверждается единогласно*).

Позвольте Вас поздравить с успешной защитой докторской диссертации.

(*Аплодисменты*).

Зам. председателя Учёного совета
чл.-корр. АН СССР — А. Н. Тихонов

Учёный секретарь
к.ф.-м.н. — Н. Н. Ченцов

СОДЕРЖАНИЕ

ISBN 978-5-9904237-2-5

9 785990 423725