

Б 80-36 / 378

Н. А. Беспалов

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СФЕРОИДИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ



МОСКВА «НЕДРА» 1980



УДК 528.23

Беспалов Н. А. Методы решения задач сфероидической геодезии.— М.: Недра, 1980.— 287 с.

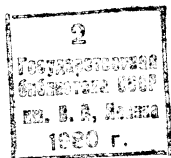
В книге дано систематическое изложение методов решения основных и некоторых специальных задач сфероидической геодезии, которые возникли в связи с применением новых средств геодезических измерений и выполнения работ на больших территориях.

Освещены вопросы выбора системы координат, решения главных геодезических задач на любые расстояния и задач, связанных с радиогеодезическими измерениями. Книга иллюстрируется примерами вычислений на эллипсоиде, а также схемами вычислений.

Для работников, занимающихся обработкой результатов геодезических измерений, преподавателей, аспирантов и студентов геодезических вузов.

Табл. 5, ил. 18, список лит. — 90 назв.

Рецензент: проф. д-р техн. наук Г. А. Мещеряков



Б 20701—401
043(01)—80 88—80

1902020000

© Издательство «Недра», 1980

Предисловие

Методы решения задач сфероидической геодезии усиленно развиваются в течение последних 10—15 лет в связи с прогрессом в освоении околоземного пространства. Запросы современной науки и техники привлекли внимание ученых к переработке старых традиционных методов решения задач сфероидической геодезии и разработке новых формул и методов, более пригодных для использования современной вычислительной техники.

Повысились требования как к общности решения, так и к алгоритмам; важны алгоритмы, которые при решении различного рода задач сфероидической геодезии требуют меньшего машинного и математического обеспечения.

Предлагаемая книга посвящена изложению ряда основных вопросов, относящихся к теории и практике решения задач сфероидической геодезии в их современной постановке.

Основное содержание книги составляют результаты работ, выполненных автором в течение последних десяти лет, а также работ, проведенных под его руководством.

Автор и издательство будут благодарны читателям за замечания и пожелания, высказанные относительно содержания и изложения материала.

Наш адрес: 103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, д. 1/19, издательство «Недра».

ВВЕДЕНИЕ

Сфероидическая геодезия — раздел высшей геодезии, в котором всесторонне изучаются математическая поверхность земного эллипсоида, а также методы вычисления взаимного положения точек на его поверхности.

Решение различных задач в сфероидической геодезии складывается из последовательного выполнения по крайней мере трех этапов, а именно: 1) из представления или формулировки задач на выбранной заранее поверхности (сфере, двухосном эллипсоиде или трехосном эллипсоиде); 2) из вывода дифференциальных уравнений той кривой, с помощью которой будет решаться та или иная задача; 3) из интегрирования полученных дифференциальных уравнений.

Г. А. Мещеряков содержание пункта два называет «геометрической частью», а содержание пункта три — «аналитической частью» всякого метода решения задач [51].

Если первый этап зависит от практической постановки задачи, то остальные два этапа являются этапами чисто математическими; причем этап второй требует основательных знаний по дифференциальной геометрии (особенно такого раздела, как теория поверхностей), а этап третий — знаний по численному анализу.

Авторы многих учебников по сфероидической геодезии к задачам сфероидической геодезии относят также построение и исследование различных проекций поверхности эллипсоида вращения на сфере и на плоскости для численной обработки результатов измерений. Вместе с тем общеизвестно, что построение плоских моделей Земли, тем более исследование различных проекций поверхности как двухосного, так и трехосного эллипсоида, является предметом математической картографии [53], [30]. Поэтому неслучайно, что в реферативном журнале ВИНТИ «Геодезия и аэросъемка» существует раздел «Сфероидическая геодезия и геодезические проекции», т. е. задачи сфероидической геодезии и вопросы построения плоских моделей Земли разделены [51].

В последние десятилетия развитие науки и техники

привело к необходимости решения новых задач сфероидической геодезии для нужд навигации как морской, так и воздушной, тем самым привлекло внимание геодезистов к разработке новых теоретических вопросов: проблемы «больших расстояний» и использования ЭВМ при выполнении расчетов. Все больше и больше появляется работ, в которых авторы стремятся переработать старые традиционные методы решения задач сфероидической геодезии и разработать новые формулы и методы, более пригодные для использования ЭВМ. Показательным в этом смысле является применение различных численных способов решения дифференциальных уравнений и вычисления эллиптических интегралов.

Большое значение приобретает теория, предоставляющая математический аппарат для решения задач в искривленных пространствах с неевклидовой метрикой. Известно, что многие формулы геодезии были частично выведены для произвольных поверхностей, причем среди этих формул находятся и такие, которые относятся к геодезическим треугольникам, длине произвольной кривой и т. д. [36], [26].

Конечно, для действительных уровенных поверхностей эти формулы лишены смысла. Тем не менее порядок, когда все выводы получают предварительно для произвольной поверхности, а потом уже для эллипсоида вращения, позволяет говорить не о «геодезии на сфероиде», а о «геодезии на произвольной поверхности». В этом отношении примечательны работы Н. Г. Шебуева, Ф. Миндинга и др. [68], [34]. Так, Ф. Миндинг отмечает [34]: «Вообще говоря, для изложения геодезии могло быть полезным производить вычисления, по крайней мере, в их основаниях, в форме, свободной от всякого определенного суждения о фигуре Земли». Ясно, что как Н. Г. Шебуев, так и Ф. Миндинг в своих работах следуют К. Гауссу.

Советским геодезистам принадлежит много трудов, важных для теории и практики сфероидической геодезии. Фундаментальное значение имеют книги Ф. Н. Красовского [45, 46], Н. А. Урмаева [78]. Исследованиям актуальных проблем теории и практики сфероидической геодезии посвящены работы В. П. Морозова [54], Г. В. Багратуни [2], А. В. Буткевича [29], В. Н. Ганьшина [35] и др. Отдельные вопросы сфероидической

геодезии рассмотрены в ряде статей в периодической печати.

Сфероидической геодезии посвящены также многие работы зарубежных авторов. Превосходный обзор литературы с соответствующими пояснениями составлен В. П. Морозовым [55].

К сожалению, еще нет книги, в которой излагался бы полный комплекс вопросов, связанных с теорией и практикой сфероидической геодезии. Между тем представляется возможным выделить определенный круг вопросов, относящихся к определению координат пунктов на планетной поверхности, и подойти к теоретическому обоснованию методов сфероидической геодезии с наиболее общих позиций, привлекая для описания необходимых аналитический аппарат.

Предлагаемая книга построена именно по такому плану. В ней дается краткое изложение идей гауссовых исследований по теории поверхностей. Гауссова «геометрия на поверхности» исследует свойства поверхности, инвариантные относительно изометрических отображений, т. е. внутренние свойства поверхности, зависящие лишь от метрических соотношений на самой поверхности и не зависящие от метрических свойств пространства, ее окружающего. Этот метод изучения поверхности возник на почве практики, именно из потребностей геодезии, где существенным является вопрос: что можно сказать о кривой поверхности Земли на основании измерений, сделанных на самой этой поверхности? [36].

Рассмотрены некоторые вопросы численного анализа, именно вопросы приближения функций с помощью цепных дробей и полиномов Чебышева. Заметим, что в последнем, 4-м издании книги П. С. Закатова «Курс высшей геодезии» (М., Недра, 1976, с. 31—32) дано краткое описание цепных дробей (с досадными опечатками, искажающими само понятие этих дробей) и приведены примеры их успешного использования в сфероидической геодезии; но в тексте учебника не указано, что использование такого математического аппарата в сфероидической геодезии принадлежит автору настоящей работы.

Единственной, или почти единственной, базой для приближения функций, из которой исходила сфероидическая геодезия, служило разложение функций в ряды Тейлора. На этот недостаток еще в 1961 г. указывал

Г. А. Мещеряков [51]. Можно считать, что Г. А. Мещеряков правильно ставил вопрос о том, что при решении различного рода геодезических задач «геодезисты должны брать новый, иногда несколько отвлеченный для них математический аппарат...» [51], так как методы вычислений опираются на довольно широкий круг математических знаний.

На основе цепных дробей дан новый способ вычисления эллиптических интегралов, с помощью которых выражается длина геодезической линии, нормального и центрального сечений. Приведено сравнение классических способов решения главных геодезических задач на большие расстояния, в которых используются классические методы вычисления эллиптических интегралов.

По всей вероятности, впервые изложен способ решения главных геодезических задач с помощью эллиптических функций Якоби.

Так, если предложено интегрировать функцию $f(x)$, то только лишь в редких случаях интеграл

$$\int f(x) dx \quad (a)$$

может быть выражен посредством известных из алгебры и тригонометрии функций. Случаи эти хорошо изучены и излагаются в курсах интегрального исчисления.

При произвольном виде функции $f(x)$ интеграл (а), вообще говоря, не берется в конечном виде (не выражается при помощи конечного числа элементарных функций) и представляет новую функцию от x . Таким образом, интегральное исчисление является богатейшим источником происхождения новых функций. Эллиптические интегралы и происходящие от них эллиптические функции [39] представляют собой так называемые высшие трансцендентные.

Эллиптические функции обычно встречаются в связи с интегралами или дифференциальными уравнениями, содержащими квадратные корни из многочленов третьей или четвертой степени (например, при вычислении длины дуги эллипса, при решении уравнения колебания маятника и т. д.). Для численных расчетов предпочтительнее эллиптические функции Якоби (имеются еще эллиптические функции Вейерштрасса), которые могут рассматриваться как обобщение тригонометрических функций.

В конце своих «Новых основ теории эллиптических функций» Якоби получил для введенных им эллиптических функций выражения вида [39], [72] [89]

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{H(u)}{\theta(u)}, \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{H(u+k)}{\theta(u)},$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\theta(u+k)}{\theta(u)}.$$

Здесь $H(u)$ и $\theta(u)$ — целые функции. θ -функции Якоби не являются эллиптическими функциями. Очень хорошая сходимость рядов для θ -функций позволяет вычислять различные эллиптические функции и эллиптические интегралы с помощью надлежащим образом составленных отношений θ -функций. По существу эти отношения θ -функций и решают задачу обращения эллиптических интегралов [72], [84].

Материал представлен в сравнительно сжатом виде, но с соблюдением последовательности изложения и сохранением требуемого уровня математического анализа. Основные работы по сфероидической геодезии, указанные в списке литературы, могут использоваться для более углубленного изучения отдельных вопросов.

Раздел I. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Глава I.

ОБЩИЕ ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. Введение

Как известно, в течение XIX в. был предпринят ряд математических исследований для решения задач высшей геодезии. К. Гаусс первоначально разработал «Общие исследования о кривых поверхностях» как раздел курса высшей геодезии, который он намеревался написать.

Изучение формы земной поверхности потребовало углубленного общего геометрического метода для исследования поверхностей. Выдвинутые К. Гауссом в этой области идеи получили выражение в работе «Общие исследования о кривых поверхностях» [36], которая легла в основу современной дифференциальной геометрии. Основная мысль этого труда заключается в том, что поверхность как гибкая бесконечно тонкая пленка определяется не конечными уравнениями аналитической геометрии Декарта и Монжа, а дифференциальными квадратичными формами и их инвариантами, с помощью которых выражаются все собственные свойства поверхности,—прежде всего ее кривизна в каждой точке. В развитии, которое этим идеям дал Риман, они в настоящее время развернулись чрезвычайно далеко за пределы замысла Гаусса [31], [41].

Свойства поверхностей можно разделить на два класса. К одному из них относятся свойства, которые тесно связаны с той или другой частной формой гибкой поверхности, изменяясь вместе с изменением этой формы. К другому классу можно отнести свойства, не зависящие от этой формы, не изменяющиеся при изгибании поверхности. Примером свойств первого класса могут служить главные радиусы кривизны, свойства линий кривизны или асимптотических и т. д. Ко второму классу относятся углы, длины линий, свойства геодезических линий, геодезическая кривизна, кривизна поверхности и т. д. Это, так сказать, абсолютные свойства поверхности,

отличные от первых, которые можно назвать относительными.

При изучении вопросов, касающихся изгибания, выясняется вся важность введения К. Гауссом криволинейных координат для раскрытия свойств поверхностей. Действительно, декартова система имеет тесную связь с положением и формой поверхности и потому совершенно непригодна для изучения ее абсолютных свойств. Между тем криволинейная координатная система и после изгибания поверхности остается координатной, определяя те же точки поверхности, которые она определяла до изгибания.

Основной фактор, не изменяющийся с изгибанием поверхности, — это длина линейного элемента поверхности. Все остальные абсолютные свойства — простые следствия этой неизменности длины линейного элемента. Другими словами, эти свойства должны зависеть только от одной первой дифференциальной формы поверхности.

С этой точки зрения теорию поверхности следует всегда разбивать на две части. С одной стороны, надо говорить о внутренней геометрии поверхности, рассматривая ее как тонкую нерастяжимую пленку. Это будет риманова геометрия двух измерений, т. е. геометрия с первой квадратичной формой. С другой стороны, надо говорить о внешней геометрии. Здесь существенную роль играют вторая и третья квадратичные формы. В первой части рассматриваются свойства, инвариантные относительно изгибания поверхности, во второй — свойства, инвариантные относительно группы движений в пространстве.

Какие же общие задачи стоят перед внутренней геометрией поверхностей? Пусть мы рассматриваем, например, класс выпуклых поверхностей Φ .

Первая группа задач сводится к нахождению тех свойств, которые выделяют поверхности класса Φ из всех вообще возможных метрических пространств.

Вторая группа задач заключается в определении и изучении главных свойств основных геометрических величин: длин, углов, площадей.

Третья группа вопросов внутренней геометрии заключается в том, чтобы на основе решения двух первых задач развивать внутреннюю геометрию поверхностей класса Φ , получая в ней различные общие и доста-

точно содержательные теоремы. Например, общие теоремы о треугольниках, стороны которых являются кратчайшими линиями на поверхности, и др.

Четвертая группа вопросов состоит в том, чтобы указать общие методы решения различных задач внутренней геометрии. Частным случаем является метод предельного перехода от выпуклых многогранников к любым выпуклым поверхностям (см. § 44).

К пятой группе относятся вопросы выяснения связи внутренней геометрии поверхности с ее «внешней» геометрией, т. е. как сказываются внутренние геометрические свойства поверхности и фигур на ней на их пространственных свойствах.

Относительно изложения внутренней геометрии важно отметить следующее.

Известно, что при решении различных задач геометрии и физики широко применяется метод координат. Суть его, как известно, заключается в том, что с интересующим нас геометрическим или физическим объектом связывается некоторая система чисел, полностью характеризующих этот объект в трехмерном пространстве, т. е. декартовы координаты этой точки.

Если способ выбора этих чисел (координат) достаточно удачен, то различные соотношения между изучаемыми объектами удается записать в виде соотношений между их координатами, а тогда к изучению этих соотношений можно привлечь хорошо разработанный аппарат алгебры и математического анализа. Однако при этом нужно учесть следующие обстоятельства. Изучая соотношения между координатами, мы фактически изучаем свойства интересующих нас объектов не в «чистом виде», а в связи с системой координат, которая, вообще говоря, является посторонним объектом для решаемой задачи.

Например, то обстоятельство, что в прямоугольной декартовой системе координат вторая координата вектора $(3, 0, 5)$ равна нулю, является случайным и при изменении системы координат может исчезнуть, но в любой декартовой прямоугольной системе координат вектор a будет иметь координаты a_x, a_y, a_z , обладающие свойством

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 3^2 + 0^2 + 5^2 = 34.$$

Таким образом, сумма квадратов координат вектора есть величина, инвариантная относительно преобразований, приводящих декартову прямоугольную систему координат снова в декартову прямоугольную систему.

Целью тензорного исчисления является построение такого аппарата, который позволил бы легко отделять инвариантные свойства изучаемых объектов от неинвариантных.

Сначала строятся некоторые величины (тензоры), изменяющиеся при переходе от одной системы координат к другой, по простому закону. Затем рассматриваются такие взаимоотношения между этими величинами, которые одинаково проявляются в любой системе координат, или, иначе говоря, строятся такие операции над тензорами, которые не нарушаются при переходе от одной системы координат к другой.

Точно так же при изучении внутренних свойств поверхности координатная система играет только вспомогательную роль. Она используется лишь для того, чтобы выразить изучаемые геометрические объекты при помощи величин, к которым можно применять аппарат математического анализа. С принципиальной точки зрения все координатные системы совершенно равноправны. Окончательные выводы, имеющие непосредственный геометрический смысл, должны выражаться в форме, инвариантной относительно выбора системы координат.

Как указывалось выше, цель тензорного исчисления и состоит в том, чтобы придать формулам, выражающим различные геометрические свойства, инвариантный вид, т.е. освободить эти формулы от специального выбора координатной системы. Но это вовсе не означает, что при изучении конкретных задач выбор системы координат всегда безразличен. Часто благодаря удачному выбору координатной системы значительно упрощаются выкладки, соотношения приобретают простую и легко обозримую структуру, и это облегчает установление искомого свойства у изучаемых объектов.

§ 2. Три основные формы поверхности и их инварианты

1. Положим, что на некоторой поверхности установлена координата (u^1, u^2) ; пусть \bar{r}_1 и \bar{r}_2 будут соответствующие ей координатные векторы в обыкновенной ее точке

M (рис. 1). Из точки M проведем нормаль к поверхности; пусть P — точка на этой нормали. Если через z обозначим расстояние MP , то u^1, u^2, z определяют положение точки P .

Пусть $\bar{r}(u^1, u^2)$ будет радиус-вектор точки M на поверхности, \bar{m} — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности в ту или иную сторону. Тогда

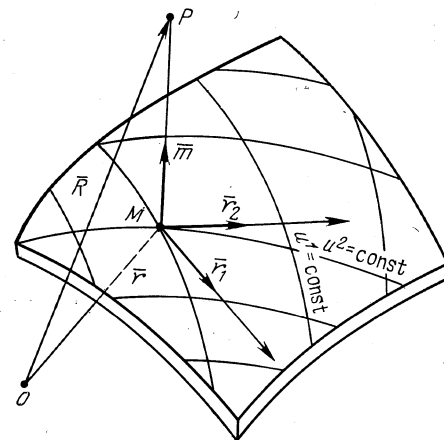


Рис. 1

радиус-вектор точки P в пространстве должен иметь значение

$$\bar{R} = \bar{r}(u^1, u^2) + \bar{m}z(u^1, u^2). \quad (I.1)$$

Формула (I.1) позволяет выразить метрическую форму пространства в координатах (u^1, u^2, z) .

На основании уравнения (I.1) имеем

$$d\bar{R} = d\bar{r} + z d\bar{m} + \bar{m}dz. \quad (I.2)$$

Тогда, с одной стороны, квадрат элемента длины в пространстве

$$dS^2 = d\bar{R}^2 = (d\bar{r})^2 + z^2 (d\bar{m})^2 + dz^2 + 2z d\bar{r} d\bar{m}, \quad (I.3)$$

так как $\overline{m}d\overline{r}=0$, $\overline{m}d\overline{m}=0$. С другой стороны,

$$d\overline{m}^2 = (\overline{m}_\alpha du^\alpha)^2 = \overline{m}_\alpha \overline{m}_\beta du^\alpha du^\beta, \quad (I.4)$$

$$d\overline{r}d\overline{m} = (\overline{r}_\alpha du^\alpha)(\overline{m}_\beta du^\beta) = \overline{r}_\alpha \overline{m}_\beta du^\alpha du^\beta. \quad (I.5)$$

Следовательно,

$$dS^2 = \overline{r}_\alpha \overline{r}_\beta du^\alpha du^\beta + 2z \overline{r}_\alpha \overline{m}_\beta du^\alpha du^\beta + z^2 \overline{m}_\alpha \overline{m}_\beta du^\alpha du^\beta + dz^2, \quad (I.6)$$

где $\overline{r}_\alpha \overline{r}_\beta = g_{\alpha\beta}$; это первый основной дифференциальный тензор поверхности. Можно показать, что

$$\overline{m}_i \overline{r}_j = \overline{m}_j \overline{r}_i. \quad (I.7)$$

Действительно, $\overline{m}_j \overline{r}_j = 0$; дифференцируя это уравнение по u_j , получаем

$$\overline{m}_j \overline{r}_i = -\overline{m}_i \overline{r}_{ij}; \quad (I.8)$$

правая часть симметрична относительно индексов i и j .

Положим

$$\overline{m}_i \overline{r}_{ij} = -\overline{m}_j \overline{r}_i = -\overline{m}_j \overline{r}_i = \pi_{ij}, \quad (I.9)$$

$$\overline{m}_i \overline{m}_j = \overline{m}_j \overline{m}_i = \nu_{ij} (\nu_{ij} = \nu_{ji}), \quad (I.10)$$

и тогда форма (I.6) примет вид

$$dS^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta - 2z \pi_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta + z^2 \nu_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta + dz^2. \quad (I.11)$$

Как видно, в уравнение (I.11) входят три симметричные квадратичные формы, которые связаны с поверхностью,

$$I = d\overline{r}^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \quad (I.12)$$

$$II = -d\overline{r}d\overline{m} = \pi_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \quad (I.13)$$

$$III = d\overline{m}^2 = \nu_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta. \quad (I.14)$$

Коэффициенты каждой из этих форм представляют собой функции координат u^1 , u^2 точки на поверхности.

Все три формы образуются ковариантными тензорами $g_{\alpha\beta}$, $\pi_{\alpha\beta}$, $\nu_{\alpha\beta}$, и поэтому они инвариантны относительно преобразования координат поверхности [6].

Коэффициенты второй формы выражаются уравнениями (I.9).

На основании выражения

$$\overline{m} = \frac{[r_1 r_2]}{\sqrt{g}}$$

нормального вектора имеем

$$\pi_{ij} = \frac{\varepsilon (\overline{r}_1 \overline{r}_2 \overline{r}_{ij})}{\sqrt{g}}, \quad (I.15)$$

в ортогональных декартовых координатах

$$\pi_{ij} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_{ij} & y_{ij} & z_{ij} \end{vmatrix}. \quad (I.16)$$

Заметим, что коэффициенты второй формы вполне определены, если установлена положительная сторона поверхности; при обращении нормали в противоположную сторону она меняет знак, чаще всего нормаль \overline{m} считают обращенной в сторону векторного произведения $[\overline{r}_1 \overline{r}_2]$, и тогда множитель равен $+1$.

Три формы (I.12), (I.13) и (I.14) принято называть основными дифференциальными формами поверхности — первой, второй и третьей. Вся теория поверхности тесно связана с этими тремя формами, к которым впоследствии целесообразно присоединить четвертую.

Первая и вторая формы введены К. Гауссом [36]. Даже принятые им обозначения E , F , G для коэффициентов первой формы и D , D' , D'' для коэффициентов второй формы во многих работах сохраняются до настоящего времени. Отметим, кстати, что коэффициенты π_{ij} отличаются от D , D' и D'' множителем \sqrt{g} :

$$D = \sqrt{g} \pi_{11}, \quad D' = \sqrt{g} \pi_{12}, \quad D'' = \sqrt{g} \pi_{22}.$$

По существу в [36] фигурирует и третья форма, однако она не столь отчетливо выражена.

В некоторых руководствах по дифференциальной геометрии правую часть равенства (I.12) называют первой квадратичной формой поверхности, или основной метрической формой поверх-

ности. Соответственно с этим и тензор g_{ij} , с помощью которого она образуется, называется основным метрическим тензором поверхности. Метрическая форма

$$I = g_{ij} du^i du^j = g_{11} (du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22} (du^2)^2 \quad (\text{I.17})$$

инвариантна относительно преобразования координат; аналитически эта инвариантность обуславливается тем, что она получается свертыванием ковариантного тензора g_{ij} с контравариантным $du^i du^j$; геометрически это объясняется значением формы как квадрата элемента дуги.

К. Гаусс первую квадратичную форму поверхности записывал в виде

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \quad (\text{I.18})$$

2. Значение, которое имеет метрическая форма поверхности, а также решение ряда связанных с нею геометрических вопросов (см. раздел III) делает, во-первых, необходимым предварительное аналитическое исследование тех преобразований, которые допускает квадратичная дифференциальная форма (редукция бинарной квадратичной формы), во-вторых, для практического использования выгодно взять такую параметризацию поверхности, линейный элемент ds в которой имеет наименьшее число коэффициентов. Однако необходимо иметь в виду, что при решении практических задач выбор систем координат часто бывает весьма ограничен и зависит от формы поверхности (эллипсоид вращения, трехосный эллипсоид).

К системам криволинейных координат на поверхности относятся, в частности [41]:

а) полугеодезические

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2, \quad (\text{I.19})$$

б) в форме Дарбу

$$ds^2 = A^2 du^2 + 2AC \cos \omega dudv + C^2 dv^2, \quad (\text{I.20})$$

в) чебышевские

$$ds^2 = \tilde{d}u^2 + 2d\tilde{u}d\tilde{v} \cos \omega + \tilde{d}v^2, \quad (\text{I.21})$$

г) изотермические

$$ds^2 = \lambda^2(u, v) [du^2 + dv^2], \quad (\text{I.22})$$

д) римановы (нормальные)

$$ds^2 = du^2 + dv^2, \quad (\text{I.23})$$

е) в форме Монжа

$$ds^2 = (1 + p^2) dx^2 + 2pqxy + (1 + q^2) dy^2. \quad (\text{I.24})$$

Однако в начале нашего столетия вид первой квадратичной формы, или что то же самое, квадрат элемента дуги на поверхности ds^2 в виде (I.17) приобретает также

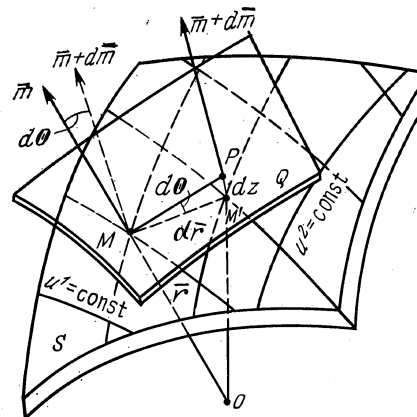


Рис. 2

стандартный характер. Его дал Риччи, итальянский геометр. Вид (I.17) имеет наибольшую общность и наиболее употребителен в тех случаях, когда координаты не специфированы. Известно, что в геометрии ведущую роль играет координатный метод, который вносит некоторую условность, заключающуюся в произвольном выборе координатной системы. Поэтому при изучении геометрического образа получаются не только результаты, отражающие истинную картину, которая характеризует объект, но и лишние сведения, которые связаны с произвольностью выбранной системы.

Тензорное же исчисление позволяет отделить это лишнее от важного, связанного только с изучаемым объектом.

3. На рис. 2 показана геометрическая интерпретация основных дифференциальных форм поверхности.

Отметим, что $I = (d\bar{r})^2$ — первая квадратичная форма — квадрат бесконечно малого расстояния ds^2 между точкой M и бесконечно близкой точкой M' ; $III = d\theta^2 = (d\bar{m})^2$ — третья квадратичная форма — квадрат бесконечно малого угла θ между нормалью в точке M и смежной нормалью $\bar{m} + d\bar{m}$ в точке M' ; $II = -2dz$ — вторая квадратичная форма — в пределах бесконечно малых 2-го порядка выражает удвоенный «подъем касательной плоскости» над поверхностью (отрезок $M'P$). Но $dz = dsd\theta$, следовательно, $II = -2\tilde{d}s d\theta$.

Если первая форма — лонгометрическая, третья — гонометрическая, то вторая форма — смешанная (произведение длины на угол).

4. Если к координатам (u^1, u^2) отнесена поверхность, имеющая в этих координатах метрическую форму (I.17), то длина дуги на этой поверхности выражается интегралом

$$s = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{g_{\alpha\beta} u'^{\alpha} u'^{\beta}} du, \quad (I.25)$$

где u — параметр, через который выражены координаты точки кривой.

В частном случае уравнение (I.25) может представлять и координатные линии

$$\text{— для линии} \quad ds_{u^1} = \sqrt{g_{22}} du^2, \quad (I.26)$$

$$u^1 = \text{const}$$

— для линии

$$ds_{u^2} = \sqrt{g_{11}} du^1, \quad (I.27)$$

$$u^2 = \text{const}.$$

Если из точки (u^1, u^2) на поверхности выходят две кривые $u^i = u^i(u)$ и $u^i = u^i(\tilde{u})$, то касательные к ним векторы принадлежат поверхности. Угол между ними определяется по формуле

$$\cos \theta = \frac{g_{\alpha\beta} du^{\alpha} \delta u^{\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta}} \sqrt{g_{\alpha\beta} \delta u^{\alpha} \delta u^{\beta}}}, \quad (I.28)$$

где du^1, du^2 — дифференциалы координат по первой кривой, а $\delta u^1, \delta u^2$ — по второй кривой в общей точке (u^1, u^2) .

В гауссовых обозначениях формула (I.28) примет вид

$$\cos \theta = \frac{Edu du + F(du dv + dv du) + Gdv dv}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2} \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u \delta v + G\delta v^2}}. \quad (I.29)$$

Если эту формулу отнести к координатным линиям в точке (u, v) поверхности, т.е. положить $dv = \delta u = 0$ и

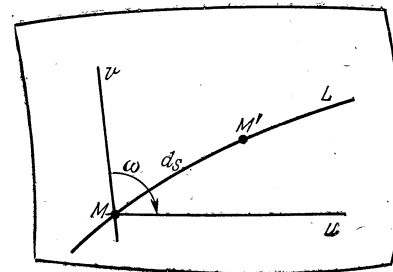


Рис. 3

обозначить через ω «координатный угол» (рис. 3), т.е. угол между координатными линиями в точке (u, v) поверхности, то

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \quad (I.30)$$

Это свидетельствует, что координация — ортогональная, если $F=0$.

Очень большое значение имеет также частный случай, когда дифференциалы du, dv соответствуют продвижению по некоторой кривой MN от точки $M(u, v)$ к точке $M'(u+du, v+dv)$, а дифференциалы $\delta u, \delta v$ соответствуют продвижению из той же точки M по той или другой координатной линии. Обозначим через α и β углы, которые кривая MN образует с положительными направлениями координатных линий u и v (см. рис. 3). Для вычисления угла α нужно в формулах (I.28) и (I.29) принять соответственно $\delta u=0$ или $\delta v=0$.

Обозначая через ds длину элемента MM' кривой, получим

$$ds \cos \alpha = \sqrt{E} du + \sqrt{G} \cos \omega dv = \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{E}}, \quad (I.31)$$

$$ds \sin \alpha = \sqrt{G} \sin \omega dv = \frac{\sqrt{EG + F^2}}{\sqrt{E}} dv. \quad (I.32)$$

Формулы (I.31) и (I.32) получены К. Гауссом [36]. В случае ортогональной координации $F=0$, так что

$$ds \cos \alpha = \sqrt{E} du, \quad (I.33)$$

$$ds \sin \alpha = \sqrt{G} dv. \quad (I.34)$$

Полученные формулы (I.33) и (I.34) играют большую роль в высшей геодезии. Принципиальное их значение раскрывается при рассмотрении двух основных вопросов: 1) при выводе дифференциального уравнения геодезической линии в форме Гаусса; 2) при преобразовании координат на поверхности.

Начнем с последнего. Формулы (I.33) и (I.34) представляют собой дифференциальные соотношения между различными переменными величинами на поверхности и в совокупности дают выражение линейного элемента поверхности

Возьмем линейный элемент ds в качестве независимой переменной. При перемещении вдоль произвольно взятой линии на поверхности из точки M в точку M' (см. рис. 3) будут изменяться все переменные, связанные с положением этого элемента. Характер изменений этих переменных в случае ортогональной координации выражается формулами, полученными из соотношений (I.33) и (I.34).

$$\frac{du}{ds} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{E}}, \quad (I.35)$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{G}}. \quad (I.36)$$

Для поверхности эллипсоида вращения в координатах B, L формулы (I.35) и (I.36) переходят в следующие:

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M}, \quad (I.37)$$

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B}, \quad (I.38)$$

где $M = \frac{C}{v^3}$ — радиус кривизны меридиана; $N = \frac{C}{V}$ — радиус кривизны первого вертикала; $\alpha = A$ — геодезический азимут.

В дальнейшем необходимо учесть следующее.

На трехосном эллипсоиде и на более сложных поверхностях системы координатных линий не ортогональны и, следовательно, коэффициент F в формуле (I.18) не равен нулю [41]. В результате этого возникает необходимость рассмотрения значительного числа семейств ортогональных параметрических линий. В § 10 это положение будет разобрано более подробно. Здесь лишь отметим, что, по исследованиям Л. М. Бугаевского [30], геодезические широты точек трехосного эллипсоида практически равны геодезическим для эллипсоида вращения. Так, формула связи широт при этом будет иметь вид

$$\sin B = \sin B^\circ (1 - 1/2 z^2 \cos^2 B^\circ).$$

Например, для лунного трехосного эллипсоида на параллели $B = 45^\circ 1/2 z^2 \cos^2 B^\circ = 0,0000004$.

Для получения уравнений (I.31) и (I.32), выражающих изменение широты B и долготы L , в случае трехосного эллипсоида необходимо учесть то обстоятельство, что линии $L = \text{const}$ и $B = \text{const}$ не совпадают с направлениями локсодром: ζ (север — юг) и η (восток — запад) (см. § 10, рис. 8).

Обозначим азимуты кривой $L = \text{const}$ через μ , а кривой $B = \text{const}$ через ν . Тогда связь между углами $\alpha, \mu, \nu, \theta, \omega$ можно представить так (рис. 4):

$$\alpha - \theta_{(L)} = \mu, \quad (I.39)$$

$$\nu - \mu = \omega. \quad (I.40)$$

По теореме синусов найдем (см. рис. 4)

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\sin(\nu - \alpha)}{\sqrt{E} \sin \omega}, \quad (I.41)$$

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\sin(\alpha - \mu)}{\sqrt{G} \sin \omega}. \quad (I.42)$$

В заключение отметим, что среди систем (I.37), (I.38) и (I.41), (I.42) отсутствуют выражения, характе-

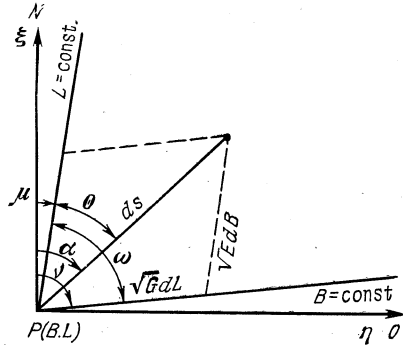


Рис. 4

ризирующие изменение угла α в зависимости от перемещения вдоль линии на величину ds . И это неслучайно. Дело в том, что эта зависимость не будет одинаковой для всех линий, тогда как приведенные выше равенства (I.37), (I.38) и (I.41) (I.42) относятся к любой линии на поверхности.

5. Первая и вторая дифференциальные формы поверхности имеют два совместных скалярных инварианта. Эти два инварианта обычно обозначают через K и $2H$:

$$K = \frac{\pi}{g}, \quad (I.43)$$

$$2H = \pi_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = \pi^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}. \quad (I.44)$$

Два инварианта (I.43) и (I.44) называются кривизнами поверхности в данной точке (u^1, u^2) : инвариант K — гауссовой кривизной, инвариант H — средней кривизной.

Меду квадратичными формами I, II, III имеется линейная зависимость

$$K \cdot I - 2H \cdot II + III = 0, \quad (I.45)$$

которую можно записать

$$(d\bar{m})^2 + 2Hd\bar{m}d\bar{r} + Kd\bar{r}^2 = 0. \quad (I.46)$$

Она распадается на три уравнения, связывающих соответствующие компоненты основных тензоров [8],

$$\nu_{ij} = 2H\pi_{ij} - Kg_{ij} \quad (i, j = 1, 2). \quad (I.47)$$

6. К трем основным формам поверхности (I.12), (I.13) и (I.14) полезно присоединить и четвертую, которая записывается в виде

$$IV = (d\bar{m}, d\bar{r}, \bar{m}) = \rho_{ij} du^i du^j. \quad (I.48)$$

Тензор ρ_{ij} называется четвертым основным тензором поверхности. Тензор ρ_{ij} составляется из компонент первого и второго тензора; отдельные его составляющие имеют значения

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\pi_{12} g_{11} - \pi_{11} g_{12}), \\ \rho_{12} &= \frac{1}{2\sqrt{g}} (\pi_{22} g_{11} - \pi_{11} g_{22}), \\ \rho_{22} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\pi_{22} g_{12} - \pi_{12} g_{22}). \end{aligned} \right\} \quad (I.49)$$

В развернутом виде уравнение (I.48) записывается следующим образом:

$$IV = \frac{e}{\sqrt{g}} (\pi_{12} g_{11} - \pi_{11} g_{12}) (du^1)^2 + (\pi_{22} g_{11} - \pi_{11} g_{22}) \times \\ \times du^1 du^2 + (\pi_{22} g_{12} - \pi_{12} g_{22}) (du^2)^2. \quad (I.50)$$

Между всеми четырьмя формами существует взаимосвязь

$$(IV)^2 = I \cdot III - (II)^2. \quad (I.51)$$

В заключение отметим, что три квадратичные формы поверхности как результат полного свертывания тензоров являются инвариантами преобразования криволи-

нейных координат на поверхности, а тензоры g_{ij} , π_{ij} , ν_{ij} — инвариантами движения поверхности в пространстве или преобразования прямоугольных декартовых координат. Первая квадратичная форма является, кроме того, инвариантом изгиба поверхности, чего нельзя сказать о второй и третьей квадратичных формах.

Из формулы (I.43) видно, что полная, или гауссова, кривизна поверхности вычисляется через коэффициенты как первой, так и второй квадратичных форм. Согласно теореме Гаусса, полную кривизну поверхности можно выразить через коэффициенты только первой квадратичной формы и их производные. Напишем окончательную формулу для гауссовой кривизны

$$K = \frac{\pi}{g} = \frac{1}{g} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{2,11}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{2,12}}{\partial u^1} + \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{\alpha,12} - \Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{\alpha,22} \right\}. \quad (I.52)$$

Выражение (I.52) предложено К. Гауссом [41]. Формула Бибераха следующая:

$$\sqrt{g} K = -\frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{g}{g_{22}} \Gamma_{21}' \right) + \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{g}{g_{22}} \Gamma_{22}' \right). \quad (I.53)$$

Величины $\Gamma_{i\alpha\beta}$ и $\Gamma_{\alpha\beta}^i$, входящие в формулы, называются символами Христофеля (см. § 6).

§ 3. Кривые на поверхности

Если кривая расположена на поверхности, то это приводит к ортогональному триэдру, который в каждой точке кривой определяется не только самой кривой, но и ее расположением на поверхности. За первое ребро этого триэдра (рис. 5) в точке M кривой принимается ее тангенциальный вектор \bar{t} ; за второе ребро принимается вектор, нормальный к поверхности, \bar{m} ; если присоединить к этому вектору $\bar{k} = [\bar{t}\bar{m}]$, который называется тангенциальной нормалью к кривой, то получается единичный ортогональный триэдр $\{\bar{t}, \bar{m}, \bar{k}\}$ — основной триэдр кривой на поверхности.

Вместе с тем имеют место соотношения

$$\bar{t}^2 = \bar{m}^2 = \bar{k}^2 = 1, \quad (\bar{t}\bar{m}) = (\bar{m}\bar{k}) = (\bar{k}\bar{t}) = 0, \quad (I.54)$$

$$\bar{k} = [\bar{t}\bar{m}], \quad \bar{t} = [\bar{m}\bar{k}], \quad \bar{m} = [\bar{k}\bar{t}], \quad (\bar{t}\bar{m}\bar{k}) = 1. \quad (I.55)$$

По своему строению триэдр $\{\bar{t}, \bar{m}, \bar{k}\}$ имеет сходство с триэдром Френе $\{\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}\}$ и совпадает с ним в том случае, если нормальный вектор поверхности \bar{m} совпадает с главным нормальным вектором кривой \bar{n} . Угол между этими векторами обозначим через θ :

$$(\bar{m}\bar{n}) = \cos \theta. \quad (I.56)$$

Если кривая отнесена к лонгальному параметру s , то все три вектора $\bar{t}, \bar{m}, \bar{k}$ представляют собою функции от s . Производные этих векторов выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{t}}{ds} &= \nu\bar{m} - \gamma\bar{k}, \\ \frac{d\bar{m}}{ds} &= -\nu\bar{t} + \delta\bar{k}, \\ \frac{d\bar{k}}{ds} &= \gamma\bar{t} - \delta\bar{m}. \end{aligned} \right\} \quad (I.57)$$

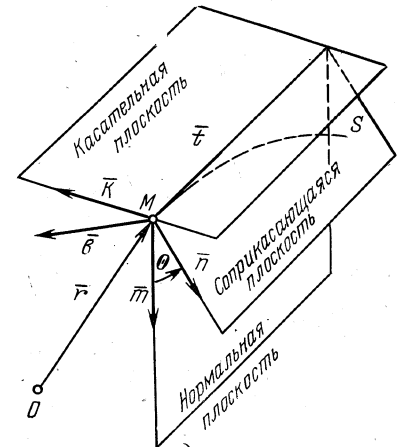


Рис. 5

Эти уравнения носят деривационный (derivation — составление производной) характер в том смысле, что выражают производные векторов $\bar{t}, \bar{m}, \bar{k}$ через эти векторы. В этом виде уравнения (I.57) впервые установлены Кноблаухом. Они приводят к следующим выражениям для скаляров ν, δ, γ :

$$\left. \begin{aligned} 1. \nu &= \bar{t}\bar{m}' = -\bar{t}'\bar{m}, \\ 2. \delta &= \bar{m}\bar{k}' = -\bar{m}'\bar{k}, \\ 3. \gamma &= \bar{k}\bar{t}' = -\bar{k}'\bar{t}. \end{aligned} \right\} \quad (I.58)$$

Скаляры ν, δ, γ , определяемые произведениями (I.58), с координатой в пространстве или на поверхности не связаны.

ν — называют нормальной кривизной кривой на поверхности; γ — геодезической кривизной кривой на поверхности; δ — геодезическим кручением кривой на поверхности. Точки кривой, в которых γ обращается в нуль, называются геодезическими точками; кривая, на которой геодезическая кривизна равна нулю во всех точках (все точки которой геодезические), называется геодезической линией поверхности.

Выражения (I.58) можно переписать в таком виде:

$$\nu = -\bar{t} \bar{m}, \quad \delta = \bar{m} \bar{t} \bar{m}. \quad (\text{I.59})$$

Таким образом, оба скаляра ν и δ определяются в каждой точке тремя векторами: тангенциальным вектором \bar{t} , определяющим направление кривой в точке M ; нормальным вектором \bar{m} , имеющим определенное значение в данной точке поверхности, и вектором \bar{m} — производной, взятой по параметру s в направлении вектора \bar{t} .

Вектор \bar{m} называют вектором Родрига.

Как нормальная кривизна ν , так и геодезическое кручение δ кривой в точке (u^1, u^2) зависят только от дифференциального отношения $\frac{du^1}{du^2}$, определяющего направление кривой на поверхности в этой точке; уравнение кривой в выражения для ν и δ не входят. Следовательно, все кривые на поверхности, имеющие в данной точке одну и ту же касательную, имеют в ней одни и те же ν и δ . В этом результате содержится два вывода, из которых один принадлежит М. Менье, а другой — Оссиане Бонне.

Совершенно иначе, однако, обстоит дело в отношении геодезической кривизны γ кривой на поверхности. Выражение (I.58; 3) можно записать в виде

$$\gamma = -\bar{t} \bar{k} = -\bar{t} \bar{t} \bar{m}, \quad (\text{I.60})$$

откуда следует, что γ зависит не только от \bar{t} , но и от вектора \bar{t} , меняющегося от одной кривой к другой в зависимости от \bar{t} , т. е. геодезическая кривизна связана

с самой кривой, а не только с направлением на поверхности.

§ 4. Главные направления и главные радиусы кривизны в точке поверхности

Кривизна нормального сечения ν в точке (du^1, du^2) поверхности S , плоскость которого проходит через бесконечно близкую точку этой поверхности $(u^1 + du^1, u^2 + du^2)$, будет

$$\nu = \frac{\pi_{11} (du^1)^2 + 2\pi_{12} du^1 du^2 + \pi_{22} (du^2)^2}{g_{11} (du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22} (du^2)^2}. \quad (\text{I.61})$$

Точка поверхности, в которой ν имеет одно и то же значение для всех нормальных сечений

$$\pi_{11} : \pi_{12} : \pi_{22} = g_{11} : g_{12} : g_{22}, \quad (\text{I.62})$$

называется омбилической точкой. В каждой неомбилической точке (u^1, u^2) существуют два нормальных сечения (главные нормальные сечения), которым соответствуют наибольшая величина ν_1 и наименьшая величина ν_2 кривизны ν [главные кривизны поверхности S в точке (u^1, u^2)]. Плоскости главных нормальных сечений взаимно перпендикулярны; для любого нормального сечения в точке (u^1, u^2) , плоскость которого образует угол ϕ с плоскостью первого главного нормального сечения,

$$\nu = \nu_1 \cos^2 \phi + \nu_2 \sin^2 \phi \quad (\text{теорема Эйлера}). \quad (\text{I.63})$$

Величины ν_1 и ν_2 являются корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \pi_{11} - \nu g_{11} & \pi_{12} - \nu g_{12} \\ \pi_{12} - \nu g_{12} & \pi_{22} - \nu g_{22} \end{vmatrix}. \quad (\text{I.64})$$

Симметрические функции

$$K(u^1, u^2) \equiv \nu_1 \cdot \nu_2, \quad (\text{I.65})$$

$$H(u^1, u^2) \equiv \frac{1}{2} (\nu_1 + \nu_2) \quad (\text{I.66})$$

называются соответственно средней и полной (гауссовой) кривизной поверхности S в точке (u^1, u^2) ; они

следующим образом выражаются через коэффициенты основных квадратичных форм (см. § 1):

$$K \equiv \nu_1 \cdot \nu_2 \equiv \frac{\pi_{11} \pi_{22} - \pi_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}, \quad (I.67)$$

$$H \equiv \frac{1}{2} (\nu_1 + \nu_2) \equiv \frac{g_{11} \pi_{22} - 2\pi_{12} g_{12} - \pi_{11} g_{22}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}. \quad (I.68)$$

Таким образом, в неомбилической точке поверхности средняя ее кривизна равна полусумме кривизн ее главных нормальных сечений, а гауссова кривизна равна произведению этих кривизн. Нужно только иметь в виду, что ν_1 и ν_2 суть пространственная кривизна сечений, взятая с надлежащим знаком.

Отметим, что необходимым и достаточным условием того, чтобы координатные линии в данной точке поверхности были направлены по главным направлениям, является

$$g_{12} = \pi_{12} = 0. \quad (I.69)$$

Кривая L на поверхности S называется линией кривизны, если она в каждой точке направлена по какому-нибудь главному направлению. Другими словами, в любой точке линии кривизны касательная направлена по главному направлению поверхности в этой точке.

На поверхности вращения линиями кривизны являются меридианы и параллели, при этом меридианы в каждой своей точке есть одно из главных нормальных сечений.

Уравнение

$$(\pi_{12} g_{11} - \pi_{11} g_{12}) (du^1)^2 + (\pi_{22} g_{11} - \pi_{11} g_{22}) du^1 du^2 + (\pi_{22} g_{12} - \pi_{12} g_{22}) (du^2)^2 = 0$$

определяет в каждой точке поверхности отношения дифференциалов $du^1 : du^2$, соответствующих главным направлениям, т.е. линиям кривизны. Поэтому это уравнение следует рассматривать как дифференциальное уравнение линий кривизны. Таким образом, четвертая квадратичная форма (I.48) является дифференциальным уравнением линии кривизны.

§ 5. Определение трех кривизн ν , δ , γ кривой на поверхности

Формулы (I.59) допускают другое выражение для инвариантов ν и δ . Согласно формуле (I.58;1), имеем

$$\nu = -\bar{t} \bar{m} = -\frac{d\bar{r} d\bar{m}}{ds^2} = \frac{II}{I} = \frac{\pi_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}{g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}. \quad (I.70)$$

Соответственно, согласно формуле (I.58;2)

$$\delta = \bar{m} \bar{k}, \quad (I.71)$$

но

$$\bar{k} = [\bar{t} \bar{m}].$$

Поэтому

$$\delta = \bar{m} \bar{t} \bar{m}, \quad (I.72)$$

или

$$\delta = \frac{d\bar{m} d\bar{r} \bar{m}}{ds^2} = \frac{IV}{I} = \frac{\rho_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}{g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}. \quad (I.73)$$

Геодезическое кручение δ кривой, расположенной на поверхности, находится в простой связи с обыкновенным кручением:

$$\delta = \sigma + \frac{d\theta}{ds}. \quad (I.74)$$

Эта формула была получена Оссиане Бонне.

Для геодезической линии во всех ее точках $\theta=0$, поэтому

$$\delta = \sigma_{г.л.}, \quad (I.75)$$

т.е. геодезическое кручение любой кривой на поверхности равно кручению геодезической линии, имеющей общую касательную с данной кривой. Для плоской же кривой $\sigma=0$. Поэтому во всех точках плоского сечения поверхности $\delta = \frac{d\theta}{ds}$.

Итак, нормальная кривизна на поверхности есть отношение второй квадратичной формы к первой, а геодезическое кручение — отношение третьей квадратичной формы к первой.

зическое кручение — отношение четвертой квадратичной формы поверхности к первой.

Для выражения геодезической кривизны γ были предложены различные выражения. При задании поверхности квадратичной формой (I.18) $F=0$ геодезическая кривизна кривой, пересекающей координатные линии u под углом α , дается выражением [41]

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds} + \gamma_1 \cos \alpha_1 + \gamma_2 \sin \alpha_2, \quad (I.76)$$

где γ_1 и γ_2 — геодезическая кривизна координатных линий:

$$\gamma_1 = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \quad (I.77)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}. \quad (I.78)$$

Для геодезической линии во всех ее точках $\gamma=0$. Поэтому из равенства (I.76) будем иметь следующее дифференциальное уравнение геодезической линии:

$$\frac{d\alpha}{ds} + \gamma_1 \cos \alpha + \gamma_2 \sin \alpha = 0. \quad (I.79)$$

На основании формул (I.76) и (I.79) можно написать дифференциальное уравнение любой линии на поверхности

$$\frac{d\alpha}{ds} = \left(\frac{d\alpha}{ds} \right)_{г.л} + \gamma. \quad (I.80)$$

§ 6. Квадратичные формы основных моделей планет

Трехосный эллипсоид. Пусть $\Phi, L, \rho(\Phi, L)$ планетоцентрические (геоцентрические) координаты, с помощью которых задается положение точки на поверхности трехосного эллипсоида, а $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ — прямоугольные координаты вмещающего трехмерного пространства.

Преобразование координат $\Phi, L, \rho(\Phi, L)$ в X, Y, Z дается тождествами

$$\left. \begin{aligned} X &= \rho(\Phi, L) \cos \Phi \cos L, \\ Y &= \rho(\Phi, L) \cos \Phi \sin L, \\ Z &= \rho(\Phi, L) \sin \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (I.81)$$

Подставляя выражения (I.81) в уравнение трехосного эллипсоида

$$\alpha^2 X^2 + \beta^2 Y^2 + \gamma^2 Z^2 = 1,$$

где $\frac{1}{\alpha} = a, \frac{1}{\beta} = b, \frac{1}{\gamma} = c,$

получаем выражение для радиуса-вектора

$$\rho(\Phi, L) = [(\alpha \cos \Phi \cos L)^2 + (\beta \cos \Phi \sin L)^2 + (\gamma \sin \Phi)^2]^{-1/2}. \quad (I.82)$$

Отметим, что для составления первой квадратичной формы поверхности часто бывает целесообразно воспользоваться следующим выражением:

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2. \quad (I.83)$$

Так, если уравнение поверхности приведено к виду

$$X = X(u^1, u^2), \quad Y = Y(u^1, u^2), \quad Z = Z(u^1, u^2),$$

то, обозначив через X, Y, Z производные координат по соответствующему параметру, найдем

$$\left. \begin{aligned} dX &= X_1 du^1 + X_2 du^2, \\ dY &= Y_1 du^1 + Y_2 du^2, \\ dZ &= Z_1 du^1 + Z_2 du^2 \end{aligned} \right\} \quad (I.84)$$

и, следовательно,

$$ds^2 = g_{11} (du^1)^2 + 2g_{12} (du^1 du^2) + g_{22} (du^2)^2, \quad (I.85)$$

где

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad g_{22} = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \\ g_{12} &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \end{aligned} \right\} \quad (I.86)$$

Компоненты ковариантного метрического тензора g_{ij} можно записать тогда в таком виде:

$$g_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^j} \quad (i, j = 1, 2). \quad (I.87)$$

Для расчета g_{ij} необходимо вычислить частные производные $\frac{\partial x_k}{\partial x_k}$ и подставить их в уравнение (I.87).

После необходимых преобразований найдем

$$\left. \begin{aligned} g_{\Phi\Phi} &= \rho^2 + \rho_\Phi^2, \quad g_{LL} = \rho_L^2 + \rho^2 \cos^2 \Phi, \\ g_{\Phi L} &= g_{L\Phi} = \rho_\Phi \rho_L, \end{aligned} \right\} \quad (I.88)$$

а также

$$g = g_{\Phi\Phi} g_{LL} - g_{\Phi L}^2 = \rho^2 [\rho_L^2 + (\rho^2 + \rho_\Phi^2) \cos^2 \Phi]. \quad (I.89)$$

Символы Христоффеля. Для определения Γ_{kij} воспользуемся выражением [41]

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right). \quad (I.90)$$

Определив частные производные $\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}$ из уравнений (I.88) и подставив их в формулу (I.90), найдем выражения для символов Христоффеля 1-го рода

$$\Gamma_{\Phi,\Phi\Phi}, \Gamma_{\Phi,\Phi L} = \Gamma_{\Phi,L\Phi}, \Gamma_{\Phi,LL};$$

$$\Gamma_{L,\Phi\Phi}, \Gamma_{L,\Phi L} = \Gamma_{L,L\Phi}, \Gamma_{L,LL}.$$

Наряду с g_{ij} компонентами для последующего вычисления потребуются компоненты g^{ij} контравариантного метрического тензора, а также символы Христоффеля 2-го рода Γ_{ij}^k .

Опустив соответствующие преобразования, приведем окончательные выражения

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\Phi,\Phi\Phi} &= \rho_\Phi (\rho + \rho_\Phi), \quad \Gamma_{L,LL} = \rho_L (\rho_{LL} + \rho \cos^2 \Phi), \\ \Gamma_{\Phi,\Phi L} &= \rho_\Phi \rho_{L\Phi} + \rho \rho_L, \quad \Gamma_{\Phi,LL} = \rho_\Phi \rho_{LL} - \rho \delta \cos \Phi, \\ \Gamma_{L,\Phi L} &= \rho_L \rho_{\Phi L} + \rho \delta \cos \Phi, \quad \Gamma_{L,\Phi\Phi} = \rho_L (\rho_{\Phi\Phi} - \rho), \\ g^{\Phi\Phi} &= \frac{1}{g} [(\rho_L)^2 + \rho^2 \cos^2 \Phi], \quad g^{\Phi L} = g^{L\Phi} = \\ &= -\frac{1}{g} \rho_\Phi \rho_L, \quad g^{LL} = \frac{1}{g} (\rho_\Phi^2 + \rho^2). \\ \Gamma_{\Phi\Phi}^\Phi &= \frac{1}{H} \rho_\Phi [2\rho_L^2 + \rho (\rho + \rho_\Phi) \cos^2 \Phi], \\ \Gamma_{\Phi L}^\Phi &= \frac{1}{H} [\rho_L^2 + \rho (\rho_\Phi \rho_{L\Phi} + \rho \rho_L) \cos^2 \Phi - \end{aligned} \right\} \quad (I.91)$$

$$- \rho_\Phi \rho_L \delta \cos \Phi],$$

$$\Gamma_{LL}^\Phi = \frac{1}{H} [\rho_\Phi ((\rho_{LL}) - \rho_L^2) \cos^2 \Phi - (\rho_L^2 + \rho^2 \cos^2 \Phi) \delta \cos \Phi],$$

$$\Gamma_{\Phi\Phi}^L = -\frac{\rho_L}{H} [2\rho_\Phi^2 + \rho (\rho - \rho_{\Phi\Phi})],$$

$$\Gamma_{\Phi L}^L = \frac{\rho_L}{H} (\rho \rho_{\Phi L} - \rho_\Phi \rho_L) + (\rho^2 + \rho_\Phi^2) \delta \cos \Phi,$$

$$\Gamma_{LL}^L = \frac{1}{H} \rho_L \rho_{LL} + (\rho^2 + \rho_\Phi^2) \cos^2 \Phi + \rho_\Phi \delta \cos \Phi,$$

где

$$H = \rho [\rho_L^2 + (\rho^2 + \rho_\Phi^2) \cos^2 \Phi],$$

$$\delta = \rho_\Phi \cos \Phi - \rho \sin \Phi.$$

Символы Христоффеля не являются тензорами. Они полностью определяются метрическим тензором; декартовы координаты X, Y, Z из них исключены.

Вторая квадратичная форма поверхности определена в § 1 формулой (I.13)

$$\Pi = \pi_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta.$$

Компоненты ковариантного тензора $\pi_{\alpha\beta}$ в ортогональной декартовой системе координат выражаются формулой (I.16).

Определив из уравнения (I.81) частные производные x_i, y_i, z_i , а также вторые производные x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} , найдем значения компонент тензора π_{ij} . Имеем

$$\pi_{\Phi\Phi} = \frac{1}{D} (\rho^2 + 2\rho_\Phi^2 - \rho \rho_{\Phi\Phi}) \cos \Phi,$$

$$D = \sqrt{\rho_L^2 + (\rho^2 + \rho_\Phi^2) \cos^2 \Phi},$$

$$\pi_{\Phi L} = \frac{1}{D} [2\rho_\Phi \rho_L \cos \Phi - \rho (\rho_L \cos \Phi + \rho_{\Phi L} \cos \Phi)],$$

$$\pi_{LL} = \frac{1}{D} [2\rho_L^2 - \rho \rho_{LL} + \rho (\rho_\Phi \sin \Phi + \rho \cos \Phi) \cos \Phi]. \quad (I.92)$$

В § 2 было указано, что тензор ρ_{ij} —четвертый основной тензор поверхности, составляется из компонент первого и второго тензоров, т. е. из g_{ij} и π_{ij} . Принимая во внимание формулы (I.88), а также (I.92) из уравнений (I.49), получаем значения отдельных составляющих тензора ρ_{ij} . Имеем

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\Phi\Phi} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\pi_{\Phi L} g_{\Phi\Phi} - \pi_{\Phi\Phi} g_{\Phi L}), \\ \rho_{LL} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\pi_{LL} g_{\Phi L} - \pi_{\Phi L} g_{LL}), \\ \rho_{\Phi L} &= \frac{1}{2\sqrt{g}} (\pi_{LL} g_{\Phi\Phi} - \pi_{\Phi\Phi} g_{LL}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.93})$$

Следовательно, четвертая квадратичная форма поверхности трехосного эллипсоида записывается таким образом:

$$\begin{aligned} \text{IV} &= (\pi_{\Phi L} g_{\Phi\Phi} - \pi_{\Phi\Phi} g_{\Phi L}) (du^1)^2 + \\ &+ (\pi_{LL} g_{\Phi\Phi} - \pi_{\Phi\Phi} g_{LL}) du^1 du^2 + \\ &+ (\pi_{LL} g_{\Phi L} - \pi_{\Phi L} g_{LL}) (du^2)^2. \end{aligned} \quad (\text{I.94})$$

Следует отметить, что в формулах (I.88) и (I.92) имеются величины ρ_L , поэтому на трехосном эллипсоиде условие (I.69) § 3 не может быть выполнено.

Эллипсоид вращения. Для эллипсоида вращения имеем $a=b$ ($\alpha=\beta$). Следовательно, радиус-вектор ρ_Φ запишется в таком виде:

$$\rho_\Phi = (\alpha^2 \cos^2 \Phi + \gamma^2 \sin^2 \Phi)^{-1/2}. \quad (\text{I.95})$$

После несложных преобразований уравнение (I.95) можно привести к виду

$$\rho_\Phi = a(1 - \alpha \sin^2 \Phi); \quad e^2 \approx 2\alpha. \quad (\text{I.96})$$

Поскольку теперь $\frac{\partial \rho}{\partial L} = 0$, из выражений (I.88) получим значения компонент метрического тензора

$$\left. \begin{aligned} g_{\Phi\Phi} &= \rho^2 + \rho_\Phi^2, \\ g_{LL} &= \rho^2 \cos^2 \Phi, \\ g_{\Phi L} &= g_{L\Phi} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.97})$$

Если же учесть, что

$$\rho_\Phi = -\alpha \sin 2\Phi,$$

то формулы (I.97) можно переписать в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} g_{\Phi\Phi} &= a^2(1 - 2\alpha \sin^2 \Phi), \\ g_{LL} &= a^2(1 - 2\alpha \sin^2 \Phi) \cos^2 \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.98})$$

Символы Христофеля. Если в выражениях (I.91) учесть, что $\rho_L = 0$, то получим значения символов Христофеля

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\Phi, \Phi\Phi} &= \rho_\Phi (\rho + \rho_{\Phi\Phi}), \\ \Gamma_{\Phi, LL} &= -\rho \delta \cos \Phi, \\ \Gamma_{L, \Phi L} &= \rho \delta \cos \Phi, \\ \Gamma_{\Phi\Phi}^\Phi &= \frac{\rho_\Phi (\rho + \rho_{\Phi\Phi})}{\rho^2 + \rho_\Phi^2}, \\ \Gamma_{\Phi L}^L &= \frac{\delta}{\rho \cos \Phi}, \\ \Gamma_{LL}^\Phi &= -\frac{\rho \delta \cos \Phi}{\rho^2 + \rho_\Phi^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.99})$$

Но величины ρ_Φ , $\rho_{\Phi\Phi}$, δ соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} \rho_\Phi &= -\alpha \sin 2\Phi, \\ \rho_{\Phi\Phi} &= -2\alpha \cos 2\Phi, \\ \delta &= \rho_\Phi \cos \Phi - \rho \sin \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.100})$$

Следовательно, предыдущие формулы в окончательном виде запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\Phi, \Phi\Phi} &= -a^2 \alpha \sin 2\Phi, \\ \Gamma_{L, \Phi L} &= -a^2 [1 + 2\alpha(1 - 2\alpha \sin^2 \Phi)] \sin \Phi \cos \Phi, \\ \Gamma_{\Phi, LL} &= a[1 + 2\alpha(1 - 2\alpha \sin^2 \Phi)] \sin \Phi \cos \Phi, \\ \Gamma_{LL}^\Phi &= [1 + 2\alpha(1 - 3\alpha \sin^2 \Phi)] \sin \Phi \cos \Phi, \\ \Gamma_{\Phi L}^L &= -[\alpha \sin 2\Phi + \text{tg } \varphi], \\ \Gamma_{\Phi\Phi}^\Phi &= \alpha \sin 2\Phi, \\ \Gamma_{\Phi, \Phi L} &= \Gamma_{L, LL} = \Gamma_{L, \Phi\Phi} = \Gamma_{\Phi L}^\Phi = \Gamma_{\Phi\Phi}^L = \\ &= \Gamma_{LL}^L = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.101})$$

Сфера. Для сферы $\rho = a$, $\alpha = 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial u^i} = 0$, поэтому многие составляющие в предыдущих выражениях пропадут и останутся только

$$\left. \begin{aligned} g_{\Phi\Phi} &= a^2, & g_{LL} &= a^2 \cos^2 \Phi, \\ \Gamma_{\Phi,LL} &= \frac{1}{2} a^2 \sin 2\Phi, \\ \Gamma_{L,\Phi L} &= \Gamma_{L,L\Phi} = -\frac{1}{2} a^2 \sin 2\Phi, \\ g^{\Phi\Phi} &= \frac{1}{a^2}, & g^{LL} &= \frac{1}{a^2 \cos^2 \Phi}, \\ \Gamma_{LL}^{\Phi} &= \frac{1}{2} \sin 2\Phi, & \Gamma_{\Phi L}^L &= \Gamma_{L\Phi}^L = -\operatorname{tg} \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.102})$$

Компоненты тензоров π_{ij} и ρ_{ij} будут иметь значения

$$\left. \begin{aligned} \pi_{\Phi\Phi} &= a, & \rho_{\Phi\Phi} &= 0, \\ \pi_{\Phi L} &= \pi_{L\Phi} = 0, & \rho_{\Phi L} &= \rho_{L\Phi} = 0, \\ \pi_{LL} &= a \cos^2 \Phi, & \rho_{LL} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.103})$$

Метрические свойства пространства, описываемые компонентами g_{ik} , определяют характер геодезических линий в этом пространстве. Поэтому вычисленные значения g_{ik} и Γ_{ij}^k могут использоваться при решении уравнений геодезических линий и анализе их свойств.

Глава II.

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ НА ПОВЕРХНОСТИ

§ 7. Введение

Геодезические линии вошли в науку в конце XVII в. как решение проблемы о кратчайшем расстоянии между двумя точками на поверхности и послужили поводом к изобретению вариационного исчисления.

Вопросами теории геодезических линий занимались крупнейшие математики Яков и Иоанн Бернуллы, Якоби, Эйлер, Клеро, Гаусс, Лагранж и др.

В 1697 г. Иоанн Бернуллы, поставив задачу о кратчайшем расстоянии между двумя точками на поверхности, пришел к дифференциальному уравнению второго порядка, которое на поверхностях вращения легко интегрируется. Иоанн Бернуллы обнаружил механическое значение геодезических линий, как формы равновесия гибкой и нерастяжимой нити, натянутой на поверхности. Он же нашел и геометрическое свойство кратчайших линий, для которых плоскость, проходящая через три соседние точки (соприкасающаяся плоскость), перпендикулярна к касательной плоскости поверхности. По предложению Лиувилля это геометрическое свойство взято за определение геодезической линии, так как «кратчайшие» линии, как впервые доказал Якоби в 1837 г., обладают свойством минимума только в ограниченной области. Лаплас впервые «кратчайшую линию» назвал «геодезической». Он употребил этот термин для случая земного сфероида (Небесная механика, т. II, Париж, 1798—1799). В дальнейшем этот термин был распространен Лиувиллем на любые поверхности.

Теория геодезических линий развивалась особенно быстро с середины XVIII в. в связи с градусными геодезическими измерениями, в которых большую роль играли геодезические треугольники. Исследования Клеро, Лежандра, Гаусса, Миндинга, Христофеля и других ученых выявили много свойств геодезических линий.

На любой поверхности в некоторой ограниченной области можно построить геометрию, в которой целый ряд свойств прямых из плоской геометрии может быть перенесен на геодезические линии поверхности. Прямая линия на плоскости определяется двумя точками; в регулярной достаточно малой области, окружающей некоторую точку, между двумя точками также проходит только одна геодезическая линия, которая является кратчайшим расстоянием между этими точками. Кривизна плоской кривой, представляющая предел отношения угла между бесконечно близкими касательными кривой к элементу дуги кривой, может быть заменена для поверхности геодезической кривизной, т. е. пределом отношения угла между бесконечно близкими геодезическими линиями, касательными к кривой в соседних точках, к элементу дуги кривой. Аналогично полярной сис-

теме координат на плоскости на поверхности существует геодезическая система координат, образованная пучком геодезических линий и их ортогональных траекторий — замкнутых кривых, равноудаленных от центра. Вследствие аналогии с кругом плоскости некоторые авторы (Bianchi) дают последним название геодезических кругов (окружностей). Подобно параллельным кривым, имеющим общие нормали и отстоящим друг от друга на равном расстоянии, на поверхности существуют семейства кривых, называемых геодезическими параллелями.

В теории геодезических треугольников теорема о сумме углов треугольника заменяется формулой Гаусса; разность между суммой углов треугольника и π равна curvatura integra геодезического треугольника [36].

Дифференциальное уравнение геодезических линий является уравнением Эйлера для вариационной проблемы кратчайшего расстояния между двумя точками на поверхности.

Хотя общее решение задачи принадлежит Бернулли, приоритет в части опубликования дифференциального уравнения геодезической линии принадлежит Л. Эйлеру, который руководствовался при этом законами механики. Вывод дифференциального уравнения геодезической линии из геометрического ее определения принадлежит Лагранжу. Конечно, этот первый вывод не был основан на общих уравнениях вариационного исчисления, известных под названием уравнений Эйлера—Лагранжа.

В современной постановке это значит разыскать кривую, которая, будучи отнесена к параметру t , сообщает наименьшее значение интегралу

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{T(t)} dt,$$

где T — функция элемента.

Обращаясь к вопросу нахождения в конечном виде уравнения геометрических линий на поверхности, заметим, что задача интегрирования дифференциального уравнения второго порядка геодезических линий в общем виде невыполнима. Вследствие невозможности проинтегрировать общее уравнение геодезических ли-

ний стали ставить задачу нахождения линейного элемента, для которого проблема геодезических линий допускает первый интеграл заданного типа.

§ 8. Дифференциальные уравнения геодезических линий

Найдем дифференциальное уравнение геодезической линии на произвольной поверхности, причем возьмем случай, когда параметрическая сеть не является ортогональной.

Длина кривой s между точками A и B поверхности выражается интегралом

$$s = \int_A^B \sqrt{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2}. \quad (\text{II.1})$$

Условие экстремальности требует, чтобы вариация δ этого интеграла, происходящая от бесконечно малого изменения длины этой кривой, равнялась нулю. Рассматривая u как функцию v , найдем

$$\delta s = \delta \int_A^B ds = \int_A^B \delta ds = 0. \quad (\text{II.1a})$$

Вариация для выражения (II.1) дает

$$\delta s = \int_A^B \frac{(E_u du^2 + 2F_u du dv + G_u dv^2) \delta u + (2E du + 2F dv) d\delta v}{2ds} \quad (\text{II.2})$$

где, например, положено $E_u = \frac{\partial E}{\partial u}$.

Далее имеем

$$\delta s = \frac{Edu + Fdv}{ds} \delta u + \int_A^B \left[\frac{(E_u du^2 + 2F_u du dv + G_u dv^2)}{2ds} - d \left(\frac{Edu + Fdv}{ds} \right) \right] \delta u. \quad (\text{II.3})$$

Известно, что подынтегральная величина должна равняться нулю независимо от δu . Таким образом,

$$E_u du^2 + 2F_u du dv + G_u dv^2 = 2d \left(\frac{Edu + Fdv}{ds} \right) ds. \quad (\text{II.4})$$

Формулы (I.31) и (I.32) можно записать в таком виде:

$$\cos \theta = \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{E} ds},$$

$$\sin \theta = \frac{Fdv}{\sqrt{E} ds},$$

где

$$D = \sqrt{EG - F^2}. \quad (\text{II.5})$$

После этого уравнение (II.4) примет вид

$$E_u du^2 + 2F_u du dv + G_u dv^2 = 2d(\sqrt{E} \cos \theta) ds =$$

$$= \frac{Edu + Fdv}{E} dE - 2D dv d\theta.$$

Окончательно

$$Dd\theta = \frac{FE_u}{2E} du + \frac{FE_v}{2E} dv + \frac{E_v}{2} du - F_u du - \frac{G_u}{2} dv. \quad (\text{II.6})$$

Это и есть дифференциальное уравнение геодезической линии в форме Гаусса [36].

Важно отметить, что К. Гаусс получил уравнения геодезической линии и в другой форме, не используя величины E, F, G . Он определяет положение точки на поверхности с помощью координат X, Y, Z . Далее полагает, что кривая линия претерпевает бесконечно малое изменение, так что координаты отдельных точек получают изменения $\delta X, \delta Y, \delta Z$. Используя принцип вариационного исчисления, описанный выше, Гаусс получает уравнения геодезической линии в таком виде:

$$\rho d \frac{dX}{ds} = (\xi X) ds; \quad \rho d \frac{dY}{ds} = (\xi Y) ds;$$

$$\rho d \frac{dZ}{ds} = (\xi Z) ds, \quad (\text{II.7})$$

где ρ — радиус кривизны геодезической линии в точке $P(X, Y, Z)$, а $(\xi X), (\xi Y), (\xi Z)$ — косинусы углов, которые образует нормаль к поверхности с осями X, Y, Z .

Отсюда заключаем, что соприкасающаяся плоскость кривой должна содержать в себе нормаль к поверхности, т. е. кривая должна быть геодезической. Бессель

[26], используя формулы Гаусса (II.7), получил дифференциальное уравнение геодезической линии в таком виде:

$$d\alpha = \sin B dL. \quad (\text{II.8})$$

Дана поверхность $f(X, Y, Z) = 0$ и на ней точка с координатами X, Y, Z . Возьмем на этой поверхности точку $P_1 (B_1 L_1)$. Примем ее за начало новой системы координат, в которой ось ξ направлена по меридиану этой точки к северу; ось η к ней перпендикулярна и направлена на восток; ось ζ направлена по нормали к поверхности. В касательной плоскости точки P_1 образуем полярную систему координат τ и α , которая связана с прямоугольными координатами ξ и η формулами

$$\xi = \tau \cos \alpha, \quad \eta = \tau \sin \alpha. \quad (\text{II.9})$$

Системы координат (X, Y, Z) и (ξ, η, ζ) связаны между собой уравнениями

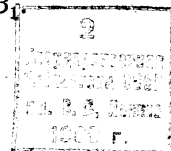
$$\left. \begin{aligned} X &= X_1 + (X\xi)\xi + (X\eta)\eta + (X\zeta)\zeta, \\ Y &= Y_1 + (Y\xi)\xi + (Y\eta)\eta + (Y\zeta)\zeta, \\ Z &= Z_1 + (Z\xi)\xi + (Z\eta)\eta + (Z\zeta)\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.10})$$

При таком расположении осей координат имеем

$$\left. \begin{aligned} \cos(X\xi) &= -\sin B_1 \cos L_1, \\ \cos(Y\xi) &= -\sin B_1 \sin L_1, \\ \cos(Z\xi) &= \cos B_1, \\ \cos(X\eta) &= -\sin L_1, \\ \cos(Y\eta) &= +\cos L_1, \\ \cos(Z\eta) &= 0, \\ \cos(X\zeta) &= -\cos B_1 \cos L_1, \\ \cos(Y\zeta) &= -\cos B_1 \sin L_1, \\ \cos(Z\zeta) &= -\sin B_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.11})$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} X &= X_1 - \xi \sin B_1 \cos L_1 - \eta \sin L_1 - \\ &\quad - \zeta \cos B_1 \cos L_1, \\ Y &= Y_1 - \xi \sin B_1 \sin L_1 + \eta \cos L_1 - \\ &\quad - \zeta \cos B_1 \sin L_1, \\ Z &= Z_1 + \xi \cos B_1 - \zeta \sin B_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.12})$$



Формулы обратной связи систем (X, Y, Z) и (ξ, η, ζ) можно записать таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -(X - X_1) \sin B_1 \cos L_1 - \\ &- (Y - Y_1) \sin B_1 \sin L_1 + (Z - Z_1) \cos B_1, \\ \eta &= -(X - X_1) \sin L_1 + (Y - Y_1) \cos L_1, \\ \zeta &= -(X - X_1) \cos B_1 \cos L_1 - \\ &- (Y - Y_1) \cos B_1 \sin L_1 - (Z - Z_1) \sin B_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.13})$$

Полярная система координат (τ, α) связана с системой (X, Y, Z) следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} (X\tau) &= (X\xi)(\xi\tau) + (X\eta)(\eta\tau), \\ (Y\tau) &= (Y\xi)(\xi\tau) + (Y\eta)(\eta\tau), \\ (Z\tau) &= (Z\xi)(\xi\tau) + (Z\eta)(\eta\tau) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.14})$$

или

$$\left. \begin{aligned} (X\tau) &= -\sin B_1 \cos L_1 \cos \alpha - \sin L_1 \sin \alpha, \\ (Y\tau) &= -\sin B_1 \sin L_1 \cos \alpha + \cos L_1 \sin \alpha, \\ (Z\tau) &= +\cos B_1 \cos \alpha_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.15})$$

Линейный элемент геодезической линии, выходящей из пункта $P_1(B_1L_1)$ под азимутом α , будет [см. формулу (1.83)]

$$ds = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}.$$

Принимая во внимание выражения

$$\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= (X\tau), & \frac{dY}{ds} &= (Y\tau), \\ \frac{dZ}{ds} &= (Z\tau), \end{aligned}$$

можно записать уравнения геодезической линии (II.7) в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \rho_\alpha d(X\tau) &= (\xi X) ds, \\ \rho_\alpha d(Y\tau) &= (\xi Y) ds, \\ \rho_\alpha d(Z\tau) &= (\xi Z) ds. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.16})$$

Приняв во внимание полученные выше соотношения, уравнения (II.16) запишем так:

$$\begin{aligned} \rho_\alpha [-\cos B \cos L \cos \alpha dB + (\sin B \sin L \cos \alpha - \cos L \sin \alpha) dL + \\ + (\sin B \cos L \sin \alpha - \sin L \cos \alpha) d\alpha] &= -\cos B \cos L ds, \\ \rho_\alpha [-\cos B \sin L \cos \alpha dB - (\sin B \cos L \cos \alpha + \\ \sin L \sin \alpha) dL + (\sin B \sin L \sin \alpha + \cos L \cos \alpha) d\alpha] &= \\ = -\cos B \sin L ds, \end{aligned}$$

$$\rho_\alpha [-\sin B \cos \alpha dB - \cos B \sin \alpha d\alpha] = -\sin B ds.$$

Исключив из этих уравнений dB и ds , найдем

$$d\alpha = \sin B dL. \quad (\text{II.17})$$

Теперь, исключив $d\alpha$, получим

$$\rho_\alpha (\cos \alpha dB + \sin \alpha \cos B dL) ds. \quad (\text{II.18})$$

Следует отметить, что дифференциальные уравнения геодезической линии в той или иной форме выводятся в курсах по сфероидической геодезии [2], [45], [54]. К сожалению, авторы учебников не упоминают о том, что именно Гаусс, а позднее Бессель дали подробный вывод дифференциальных уравнений геодезической линии.

Христофель [41] предложил дифференциальное уравнение геодезической линии в форме

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{du^\alpha}{ds} \cdot \frac{du^\beta}{ds} = 0. \quad (\text{II.19})$$

Мы имеем нормальную систему двух дифференциальных уравнений 2-го порядка, где искомые функции u^1 и u^2 , а s — аргумент. Функции $u^1(s)$ и $u^2(s)$ должны удовлетворять добавочному соотношению

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta.$$

Уравнение (II.19) обычно получают из условия равенства нулю геодезической кривизны [41], [7]. Его можно записать в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^1}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du^1}{ds} \right)^2 + \Gamma_{12}^1 \frac{du^1}{ds} \cdot \frac{du^2}{ds} + \\ + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{du^2}{ds} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

$$\frac{d^2 u^2}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du^1}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du^1}{ds} \cdot \frac{du^2}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{du^2}{ds} \right)^2 = 0. \quad (\text{II.21})$$

Величины $\Gamma_{\alpha\beta}^i$, входящие в уравнения (II.19), т. е. символы Христофеля 2-го рода, вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2g} \left(g_{22} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + g_{12} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} - 2g_{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right), \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2g} \left(2g_{11} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - g_{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} - g_{12} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.22})$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2g} \left(g_{22} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} - g_{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right), \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2g} \left(g_{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - g_{12} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.23})$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2g} \left(2g_{22} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - g_{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - g_{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \right), \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2g} \left(g_{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + g_{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - 2g_{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.24})$$

Общая формула для символов Христофеля 2-го рода следующая:

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{t=1}^k g^{kt} \Gamma_{t,ij} \quad (\text{II.25})$$

$$g^{ik} = \frac{1}{g} G_{ki}, \quad (\text{II.26})$$

где G_{ki} — адъюнкта элемента g_{ki} .

§ 9. Полугеодезические координаты на поверхности

Прежде всего приведем два важных замечания, касающихся названия систем координат.

Во-первых, из теории поверхности [41] известно, что с геодезическими линиями на поверхности в большинстве случаев так или иначе связаны специальные коор-

динаты, которыми пользуются при исследовании поверхности.

Чтобы координаты линии $u^1=c^1$ и $u^2=c^2$ на поверхности были геодезическими линиями, а геодезическая сеть — ортогональной, необходимым условием является развертывание поверхности на плоскость. Это утверждение ведет свое начало от Риччи [41].

На поверхностях, не развертывающихся на плоскость, возможна только полугеодезическая система координат, так как только одно из двух семейств координатных линий состоит из геодезических.

Во-вторых, общие формулы (I.52) и (II.6), выведенные для изменения угла направления геодезической линии и гауссовой кривизны, будут значительно проще, если величины u^1 и u^2 (u и v) подобраны так, что линии первой системы повсюду пересекают линии второй системы под прямым углом, т. е. $\omega=90^\circ$ при $F=0$. Следовательно, формулы (I.52) и (II.6) примут вид

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \cdot \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \cdot \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2} \right) \right], \quad (\text{II.28})$$

$$\sqrt{EG} d\theta = \frac{1}{2} E_v du - \frac{1}{2} G_u dv. \quad (\text{II.29})$$

В различных случаях выполнения этого условия ортогональности первое место занимает случай, когда все линии одной из систем, например первой, суть геодезические линии, т. е. координация полугеодезическая.

Метод установления полугеодезических координат (полярных и прямоугольных сфероидических) на поверхности впервые был предложен К. Гауссом [36].

В основе теории полярных сфероидических координат лежит теорема, данная К. Гауссом: если на поверхности от некоторой начальной точки провести бесчисленное множество геодезических линий равной длины, то кривая, соединяющая их концы, будет для каждой геодезической линии ортогональна.

Указанная в теореме ортогональная траектория $u = \text{const}$ называется геодезической окружностью, которая не может быть геодезической линией.

Понятие прямоугольных координат на поверхности содержится в теореме, предложенной также К. Гауссом: если на поверхности находится какая-нибудь линия, от отдельных точек которой направляются под прямым углом в одну и ту же сторону бесчисленные геодезические линии равной длины, то кривая, соеди-

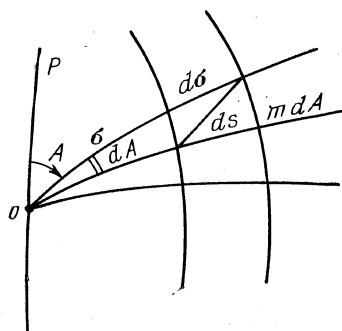


Рис. 6

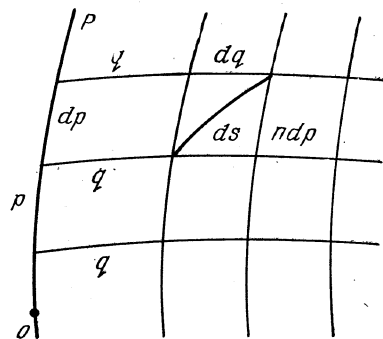


Рис. 7

нящая их другие концы, пересекает каждую из них под прямым углом.

Указанная в теореме ортогональная траектория называется геодезической параллелью, которая также не может быть геодезической линией.

Первые квадратичные формы поверхности в полярной и прямоугольной сфероидической системах координат записываются соответственно таким образом (рис. 6 и 7):

$$ds^2 = d\sigma^2 + m_{12} dA^2, \quad (II.30)$$

$$ds^2 = n_{12}^2 dp^2 + dq^2. \quad (II.31)$$

Для линейных элементов координатных линий имеем

$$ds_\sigma = d\sigma, \quad ds_A = m_{12} dA, \quad (II.32)$$

$$ds_p = n_{12} dp, \quad ds_q = dq. \quad (II.33)$$

Величина m в формуле (II.30) называется приведенной длиной геодезической линии. Для получения величин m и n воспользуемся формулой Гаусса (II.28).

Так, из выражения (II.30) найдем

$$u^1 = \sigma, \quad u^2 = A,$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = m^2.$$

Подставив эти значения в формулы (II.28), получим

$$K = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial \sigma^2}. \quad (II.34)$$

Из выражения (II.31) найдем $u^1 = p, u^2 = q, g_{11} = n^2, g_{22} = 1$.

Подставив эти значения в формулу (II.28), получим

$$K = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\partial^2 n}{\partial q^2}. \quad (II.35)$$

Если учесть, что для эллипсоида вращения $k = \frac{1}{MN}$, то для вычисления величин m и n получим следующие уравнения:

$$m = R_1 \sin \frac{\sigma}{R_1} = \sigma - \frac{1}{6R_1^2} \sigma^3 + \dots, \quad (II.36)$$

$$n = \cos \frac{q}{R_1} = 1 - \frac{1}{2R_1^2} q^2 + \dots, \quad (II.37)$$

где R_1 — радиус сферы, которая аппроксимирует часть эллипсоида вокруг точки I .

Глава III.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Значительный прогресс в освоении околоземного пространства благодаря использованию ИСЗ обусловил использование методов дифференциальной геометрии трехмерного пространства при исследовании регулярных поверхностей сложной структуры и прежде всего геопотенциальной поверхности. Для установления всесторонних математических связей на таких поверхностях декартовы координаты трехмерного пространства неприемлемы (см. § 1).

Впервые геодезическое применение методов дифференциальной геометрии, расширенных на три и большее число измерений, было выполнено в 1949 г. Маруссе, который разработал основы абсолютной дифференциальной геометрии на поверхности земного потенциала [90].

Наиболее полное и последовательное описание методов трехмерной геодезии дал Hotin [85] в монографии «Математическая геодезия», содержание которой представляет собой в сущности геометрию гравитационного поля.

Использование методов дифференциальной геометрии для изучения более сложных поверхностей, чем эллипсоид вращения, содержится в работах Trombetta [55], Fondelli [55], Kostelesky [55], Беспалова [18], Osada [55], Шебшаевича [80].

§ 10. Дифференциальные уравнения различных сетей на поверхности трехосного эллипсоида

Прежде всего дадим определение геодезической широты и долготы на трехосном эллипсоиде, ибо с понятием долготы тесно связано понятие меридиана, а последний здесь может быть определен двояким образом. Эти понятия сформулированы А. Кларком [42] следующим образом: «В трехосном эллипсоиде широта остается дополнением до 90° угла между нормалью к поверхности и осью вращения. Меридиан можно определить двояко: 1) как геометрическое место точек, зениты которых находятся на таком большом круге сферы, что полюсы его лежат на экваторе, т. е. меридиан есть кривая, в точках которой все нормали к эллипсоиду перпендикулярны к некоторой, для каждого меридиана постоянной, прямой в плоскости экватора); 2) как кривую, касательные к которой в любой ее точке направляются на север (или на юг). Мы сейчас увидим, что эти два определения неотжественны, и поэтому, оставляя за первым определением название меридиана, линию, характеризующую вторым определением, для краткости назовем линией северного направления».

В. В. Витковский добавляет: «Определение этой кривой (меридиана) можно сделать проще и короче, заим-

ствуя его из астрономии; это будет кривая равных времен» [32, с. 319].

Далее А. Кларк отмечает: «Если допустить, что фигура Земли трехосный эллипсоид, то ее главные нормальные сечения не будут совпадать ни с направлением меридиана, ни с линией северного направления, ни, наконец, с параллелью [42, с. 322].

Таким образом, на поверхности трехосного эллипсоида следует различать сети, составленные из: а) координатных линий ($B = \text{const}$, $L = \text{const}$); б) линий кривизны ($u = \text{const}$, $v = \text{const}$); в) сопряженных линий; г) локсодром, т. е. линий постоянного азимута 0 или $\pi/2$ ($r = \text{const}$, $\bar{t} = \text{const}$).

Как известно [41], к основным уравнениям теории поверхностей принадлежат также уравнения систем линий, которые могут быть проведены на поверхности: это системы координатных линий, линий кривизны, сопряженных линий и т. д. Относительно самой поверхности предполагается, что даны основные дифференциальные формы — первая и вторая (I.12), (I.13):

$$I = dS^2 = g_{11} (du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22} (du^2)^2,$$

$$II = \pi_{11} (du^1)^2 + 2\pi_{12} du^1 du^2 + \pi_{22} (du^2)^2.$$

Дифференциальное уравнение системы координатных линий на поверхности записывается в виде

$$du^1 du^2 = 0. \quad (\text{III.1})$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$u^1 = \text{const} \text{ или } u^2 = \text{const}.$$

Дифференциальное уравнение линий кривизны дается уравнением (I. 48)

$$\rho_{ij} du^i du^j = IV.$$

Дифференциальное уравнение сопряженных направлений можно записать в двух видах:

$$\pi_{11} du^1 \delta u^1 + \pi_{12} (du^1 \delta u^2 + du^2 \delta u^1) + \pi_{22} du^2 \delta u^2 = 0 \quad (\text{III.2})$$

или

$$(\pi_{11} du^1 + \pi_{12} du^2) \delta u^1 + (\pi_{12} du^1 + \pi_{22} du^2) \delta u^2 = 0, \quad (\text{III.3})$$

т. е. условием сопряженности двух направлений является обращение в нуль билинейной формы, полярной относительно второй квадратичной формы. Формула (III.2) позволяет по данному направлению $\delta u^1; \delta u^2$ найти сопряженное $du^1; du^2$.

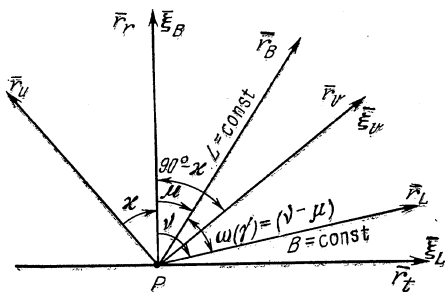


Рис. 8.

Обозначено: $\vec{r}(u, v)$ — радиус-вектор точки M , расположенной на поверхности S ; \vec{r}_u и \vec{r}_v — касательные векторы к линиям кривизны $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$; $\vec{\xi}$ — вектор, нормальный к поверхности в точке M ; \vec{r}_B и \vec{r}_L — касательные векторы к координатным линиям $B = \text{const}$ и $L = \text{const}$; \vec{r}_r и \vec{r}_t — касательные векторы к линиям $\alpha = 0$ (локсодромия север—юг) и $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (локсодромия восток—запад); $\vec{\xi}_u$ и $\vec{\xi}_v$ — производные вектора $\vec{\xi}$, нормального к поверхности S в точке M по параметрам u и v ; $\vec{\xi}_B$ и $\vec{\xi}_L$ — производные вектора $\vec{\xi}$ по B и L ; $\vec{\xi}_r$ и $\vec{\xi}_t$ — производные вектора $\vec{\xi}$ по r и t ; μ — азимут линии $L = \text{const}$; ν — азимут линии $B = \text{const}$; κ и $\kappa + \frac{\pi}{2}$ — азимуты линий кривизны; R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны; ω — угол между линиями $B = \text{const}$ и $L = \text{const}$

Если, например, определяется направление, сопряженное с направлением координатной линии $u^2 = \text{const}$, то приняв $\delta u^1 = 1, \delta u^2 = 0$, находим

$$\pi_{11} du^1 + \pi_{12} du^2 = 0 \quad (\text{III.4})$$

и точно так же для направления, сопряженного с $u^1 = \text{const}$, имеем

$$\pi_{12} du^1 + \pi_{22} du^2 = 0. \quad (\text{III.5})$$

В случае, если $\pi_{12} = 0$, направление координатных линий всюду взаимно перпендикулярно, т. е. координатные линии образуют сопряженную сеть. Условие сопряженности через компоненты тензора π_{ij} может быть представлено в виде

$$\pi_{ij} = -\vec{r}_i \vec{\xi}_j = -\vec{r}_j \vec{\xi}_i = 0. \quad (\text{III.6})$$

Можно показать, что линия $B = \text{const}$ и локсодромия север—юг, а также линия $L = \text{const}$ и локсодромия восток—запад — сопряженные друг с другом (рис. 8).

В первом случае имеем

$$\pi(B, \vec{t}_i) = -\vec{r}_t \vec{\xi}_B = -\vec{r}_B \vec{\xi}_t = 0, \quad (\text{III.7})$$

соответственно во втором случае

$$\pi(L, \vec{r}) = -\vec{r}_r \vec{\xi}_L = -\vec{r}_L \vec{\xi}_r = 0. \quad (\text{III.8})$$

Для определения азимутов μ, ν, κ воспользуемся уравнением (III.6), которое рассмотрим для различных векторов. Имеем (см. рис. 8):

$$\vec{r}_B \cdot \vec{r}_L = g_{12},$$

$$\sqrt{g_{11} g_{22}} \cos(\nu - \mu) = g_{12},$$

$$\vec{r}_B \vec{\xi}_L = \vec{r}_L \vec{\xi}_B,$$

$$\sqrt{g_{11}} \cos B \sin \mu = \sqrt{g_{22}} \cos \nu,$$

$$\vec{r}_u \vec{\xi}_B = \vec{r}_B \vec{\xi}_u,$$

$$-R_1 \cos \kappa = \sqrt{g_{11}} \cos(\mu - \kappa),$$

$$\vec{r}_u \vec{\xi}_L = \vec{r}_L \vec{\xi}_u,$$

$$-R_1 \cos B \sin \kappa = \sqrt{g_{22}} \cos(\nu - \kappa),$$

$$\vec{r}_v \vec{\xi}_B = \vec{r}_B \vec{\xi}_v,$$

$$-R_2 (-\sin \kappa) = \sqrt{g_{11}} \sin(\mu - \kappa),$$

$$\vec{r}_v \vec{\xi}_L = \vec{r}_L \vec{\xi}_v,$$

$$-R_2 \cos B \cos \kappa = \sqrt{g_{22}} \sin(\nu - \kappa).$$

(III.9)

Из различных сочетаний уравнений (III.9) получим окончательно формулу для вычисления азимутов μ, ν, κ :

$$\text{tg } \mu = \frac{g_{12}}{g_{11} \cos B + g}, \quad (\text{III.10})$$

$$\text{ctg } \nu = \frac{g_{12}}{g_{22} \sec B + g}, \quad (\text{III.11})$$

$$\text{tg } 2\kappa = \frac{2g_{12}}{g_{11} \cos B - g_{22} \sec B}. \quad (\text{III.12})$$

Дифференциальное уравнение локсодромии можно найти следующим образом.

На основании рис. 4 напишем:

$$\frac{\sqrt{E} dB}{\sqrt{G} dL} = \frac{\sqrt{g_{11}} dB}{\sqrt{g_{22}} dL} = \frac{\sin(\nu - \alpha)}{\sin(\alpha - \mu)}, \quad (\text{III.13})$$

или

$$\frac{dB}{dL} = \frac{\sqrt{g_{22}} \sin \nu \cos \alpha - \sqrt{g_{22}} \cos \nu \sin \alpha}{-\sqrt{g_{11}} \sin \mu \cos \alpha + \sqrt{g_{11}} \cos \mu \sin \alpha}, \quad (\text{III.14})$$

отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{g_{11}} \sin \mu dB + \sqrt{g_{22}} \sin \nu dL}{\sqrt{g_{11}} \cos \mu dB + \sqrt{g_{22}} \cos \nu dL}. \quad (\text{III.15})$$

Но

$$\sqrt{g_{11}} \cos B \sin \mu = \sqrt{g_{22}} \cos \nu, \quad (\text{III.16})$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{g_{11}} \sin \mu dB + \sqrt{g_{11}} \cos B \sin \mu \operatorname{tg} \nu dL}{\sqrt{g_{11}} \cos \mu dB + \sqrt{g_{11}} \cos B \sin \mu dL}. \quad (\text{III.17})$$

Принимая во внимание формулы (III.10) и (III.11), последнее выражение перепишем следующим образом:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{g_{12} dB + (g_{22} + g \cos B) dL}{(g_{11} \cos B + g) dB + g_{12} \cos B dL}. \quad (\text{III.18})$$

Следовательно, дифференциальное уравнение локсодромии в общем виде будет

$$\frac{g_{12} dB + (g_{22} + g \cos B) dL}{(g_{11} \cos B + g) dB + g_{12} \cos B dL} = \operatorname{const}. \quad (\text{III.19})$$

Из формулы (III.18) следует уравнение локсодромии север—юг ($\alpha = 0$)

$$g_{12} dB + (g_{22} + g \cos B) dL = 0, \quad (\text{III.20})$$

а также уравнение локсодромии восток—запад ($\alpha = 90^\circ$)

$$(g_{11} \cos B + g) dB + g_{12} \cos B dL = 0. \quad (\text{III.21})$$

Выведем дифференциальное уравнение геодезической линии. На основании рис. 4 [см. формулу (I.42)] имеем

$$\frac{\sqrt{g_{22}} dL}{ds} = \frac{\sin(\alpha - \mu)}{\sin \omega}.$$

Принимая во внимание формулы (III.10), (I.30) и (II.5), уравнение (I.42) можно переписать в таком виде:

$$\frac{dL}{ds} = \frac{(g_{11} + g \sec B) \sin \alpha - g_{12} \sec B \cos \alpha}{g \sqrt{g_{11} + 2g \sec B + g_{22} \sec^2 B}}. \quad (\text{III.22})$$

Умножив выражение (III.22) на (III.14) и учтя формулу (III.11), получим выражение для $\frac{dB}{ds}$ в таком виде:

$$\frac{dB}{ds} = \frac{(g_{22} \sec B + g) \cos \alpha - g_{12} \sin \alpha}{g \sqrt{g_{11} + 2g \sec B + g_{22} \sec^2 B}}. \quad (\text{III.23})$$

Из уравнения (III.22), принимая во внимание основное уравнение геодезической линии (II.17), окончательно находим

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{(g_{11} \sin B + g \operatorname{tg} B) \sin \alpha - g_{12} \operatorname{tg} B \cos \alpha}{g \sqrt{g_{11} + 2g \sec B + g_{22} \sec^2 B}}. \quad (\text{III.24})$$

§ 11. Эллиптическо-тригонометрические координаты на поверхности трехосного эллипсоида

Квадрат декартовых координат X, Y, Z точек трехосного эллипсоида

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{III.25})$$

выражается через координаты u, v линией кривизны следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} X^2 &= a^2 \frac{(a^2 - u)(a^2 - v)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \\ Y^2 &= b^2 \frac{(b^2 - u)(b^2 - v)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}, \\ Z^2 &= c^2 \frac{(c^2 - u)(c^2 - v)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.26})$$

Величины u , v называются эллиптическими координатами, их предложил Ляме [41].

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \cos^2 u &= \frac{u-b^2}{a^2-b^2}, \\ \cos^2 v &= \frac{b^2-v}{b^2-c^2}. \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Из системы (III.26) найдем

$$Y^2 = b^2 \cos^2 u \cos^2 v; \quad (\text{III.28})$$

из уравнений (III.27) следует

$$\begin{aligned} u &= b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 u, \\ v &= b^2 - (b^2 - c^2) \cos^2 v. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} a^2 - u &= (a^2 - b^2) \sin^2 u, \quad a^2 - v = (a^2 - b^2) - \\ &- (b^2 - c^2) \cos^2 v. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$X^2 = a^2 \sin^2 u \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} + \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} \cos^2 v \right). \quad (\text{III.29})$$

Если обозначить

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} &= \lambda^2, \quad \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} = \lambda_1^2, \\ \lambda^2 + \lambda_1^2 &= 1, \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

то выражение (III.29) примет вид

$$X^2 = a^2 \sin^2 u (1 - \lambda_1^2 \sin^2 v). \quad (\text{III.31})$$

Аналогичным образом получим

$$Z^2 = c^2 \sin^2 v (1 - \lambda^2 \sin^2 u). \quad (\text{III.32})$$

Таким образом, связь координат X , Y , Z и u , v можно представить следующей системой формул:

$$\left. \begin{aligned} X &= a \sin u \Delta', \\ Y &= b \cos u \cos v, \\ Z &= c \sin v \Delta, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.33})$$

где положено

$$\begin{aligned} \Delta' &= \sqrt{1 - \lambda_1^2 \sin^2 v}, \\ \Delta &= \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}. \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Те же декартовы координаты X , Y , Z выражаются через геодезические координаты B , L следующим образом [46]:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{a \cos B \cos L}{W}, \\ Y &= \frac{a (1 - e_a^2) \cos B \cos L}{W}, \\ Z &= \frac{a (1 - e^2) \sin B}{W}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.35})$$

где

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B - e_a^2 \cos^2 B \sin^2 L}. \quad (\text{III.36})$$

Известно [2], что, кроме того,

$$W = \frac{p}{a}. \quad (\text{III.37})$$

Формула (III.37) дает геометрическое представление функции W — это есть отношение длины перпендикуляра p , опущенного из центра эллипсоида на касательную плоскость, проведенную в точке поверхности трехосного эллипсоида, к большой полуоси этого эллипсоида.

Из сопоставления систем (III.26) и (III.35) получим связь между геодезическими и эллиптическими координатами. Имеем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} B &= \frac{\sqrt{1 - e_a^2} \operatorname{tg} \varphi \cdot \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \psi}}{\sqrt{1 - e^2} \cdot \sqrt{1 + k^2 \cos^2 \psi} [(1 - e_a^2) \operatorname{tg}^2 \varphi - e^2]}, \\ \operatorname{tg} L &= \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1 - e_a^2} \cdot \sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.38})$$

где

$$k = \frac{e_a}{e}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{b^2 - u}{b^2 - c^2}, \quad \sin^2 \psi = \frac{b^2 - v}{b^2 - a^2}. \quad (\text{III.39})$$

Величины φ , ψ называются эллиптическо-тригонометрическими и координатами.

Естественно, что из сравнения систем (III.33) и (III.35) можно получить связь между геодезическими и эллиптическими координатами.

Из уравнений (III.38) легко получить формулы обратной связи координат B , L и φ , ψ . Имеем:

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 - e_a^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 - e_a^2 \cos^2 L}}{\sqrt{1 - e_a^2 \frac{\cos^2 L}{e^2 \cos^2 \beta}}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 - e_a^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 - e_a^2 \cos^2 \psi_1}}{\sqrt{1 - e_a^2 \frac{\cos^2 \psi_1}{e^2 \cos^2 \beta}}},$$

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \sqrt{1 - e_a^2} \operatorname{tg} L \sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_1},$$

$$\operatorname{tg} \psi_2 = \sqrt{1 - e_a^2} \cdot \operatorname{tg} L \sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_2}.$$

Как было показано в § 6, компоненты ковариантного метрического тензора g_{ij} можно вычислить по формуле (I.87)

$$g_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^j}.$$

Вычислив частные производные $\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^k}$ из (III.35) и подставив их значения в формулу (I.87), после несложных преобразований найдем:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad g_{BB} &= \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{W^6} [1 - 2e_a^2 \cos^2 L + \\ &+ e_a^4 \sin^2 L (1 - \cos^2 B \cos^2 L)], \\ 2) \quad g_{BL} &= \frac{a^2 (1 - e^2) e_a^2 \sin 2B \sin 2L}{4W^6} [(1 - \\ &- e_a^2)(1 - e^2 \sin^2 B)], \\ 3) \quad g_{LL} &= \frac{a^2 \cos^2 B}{W^6} [(1 - e^2 \sin^2 B - \\ &- e_a^2 \cos^2 B)^2 \sin^2 L], \\ g &= \sqrt{g_{BB} g_{LL} - g_{BL}^2} = \\ &= \frac{a^2 (1 - e^2)(1 - e_a^2) \cos B}{W^4}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.40})$$

§ 12. Геодезические линии на трехосном эллипсоиде

Дифференциальное уравнение геодезической линии (II.6) в эллиптическо-тригонометрических координатах примет вид

$$2Dd\theta = E_\psi d\varphi - G_\varphi d\psi, \quad (\text{III.41})$$

где

$$E_\psi = \frac{\partial E(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \quad G_\varphi = \frac{\partial G(\varphi, \psi)}{\partial \varphi}, \quad D = \sqrt{E(\varphi, \psi) G(\varphi, \psi)}.$$

Следовательно,

$$2d\theta = \frac{E_\psi}{\sqrt{EG}} d\varphi - \frac{G_\varphi}{\sqrt{EG}} d\psi. \quad (\text{III.42})$$

Но

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}} \cdot \frac{d\psi}{d\varphi},$$

поэтому

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{EG}} = \operatorname{ctg} \theta \frac{d\psi}{E},$$

$$\frac{d\psi}{\sqrt{EG}} = \operatorname{tg} \theta \frac{d\varphi}{G}.$$

Окончательно получим

$$2d\theta = -\frac{G_\varphi}{G} \operatorname{tg} \theta d\varphi + \frac{E_\psi}{E} \operatorname{ctg} \theta d\psi. \quad (\text{III.43})$$

Коэффициенты E , G первой квадратичной формы можно найти из уравнений (III.26) и (III.39). Опуская преобразования, окончательно имеем:

$$\left. \begin{aligned} E &= a^2 [(e^2 - e_a^2) \cos^2 \varphi + e_a^2 \sin^2 \varphi] \times \\ &\times \frac{1 - e_a^2 - (e^2 - e_a^2) \cos^2 \varphi}{(e^2 - e_a^2) \cos^2 \varphi + e_a^2}, \\ G &= a^2 [(e^2 - e_a^2) \cos^2 \varphi + e_a^2 \sin^2 \varphi] \times \\ &\times \frac{1 - e_a^2 \cos^2 \varphi}{e^2 - e_a^2 \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \right\} (\text{III.44})$$

Из уравнений (III.44) легко найти частные производные

$$\frac{E_\psi}{E} = \frac{e_a^2 \sin 2\varphi}{(e^2 - e_a^2) \cos^2 \varphi - e_a^2 \sin^2 \varphi},$$

$$-\frac{G_\varphi}{G} = \frac{(e^2 - e_a^2) \sin 2\varphi}{(e^2 - e_a^2) \cos^2 \varphi + e_a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Подставив их в уравнение (III.43) и проинтегрировав полученное выражение, найдем

$$\begin{aligned} &[1 - e_a^2 - (e^2 - e_a^2) \cos^2 \varphi] \sin^2 \theta + \\ &+ [1 - e_a^2 + e_a^2 \sin^2 \varphi] \cos^2 \theta = \operatorname{const}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулы (III.39), окончательно получаем

$$u \sin^2 \theta + v \cos^2 \theta = \operatorname{const}, \quad (\text{III.45})$$

где θ — угол, который образует геодезическая линия в рассматриваемой точке с координатной линией u . Соотношение (III.45) принадлежит Лиувиллю [41].

Обратимся к геометрическому представлению соотношения (III.45). Проведем из центра O трехосного

эллипсоида радиус-вектор эллипса S параллельно касательной к геодезической линии (III.45) и обозначим d величину этого вектора. Так как с полуосью эллипсоида он составляет угол θ , найдем

$$\frac{1}{d^2} = \frac{\sin^2 \theta}{v} + \frac{\cos^2 \theta}{u}. \quad (\text{III.46})$$

Проведем затем из центра эллипсоида θ радиус-вектор, сопряженный предыдущему. Пусть d' — его длина, а θ' — угол с той же полуосью. Обращая внимание на величину полуосей эллипса, найдем

$$d^2 d'^2 \sin^2 (\theta - \theta') = uv,$$

или на основании формул (III.45) и (III.46) получим

$$d'^2 \sin^2 (\theta' - \theta) = \operatorname{const}; \quad (\text{III.47})$$

это и дает нам интерпретацию Лиувилля: если представим себе два полудиаметра эллипсоида, один из которых параллелен касательной к геодезической линии в какой-либо точке, а другой параллелен сопряженной касательной, то перпендикуляр, опущенный из конца второго полудиаметра на первый, будет иметь одну и ту же величину в каждой точке геодезической линии. Joachimsthal [86] интерпретирует уравнение (III.45) совершенно иначе. Определим расстояние p центра эллипсоида от плоскости, касательной к нему в какой-нибудь точке $P(x, y, z)$

$$(\xi - x)X + (\eta - y)Y + (\zeta - z)Z = 0.$$

Очевидно, что

$$p^2 = (xX + yY + zZ)^2.$$

Из уравнения эллипсоида имеем

$$X : \frac{x}{a^2} = Y : \frac{y}{b^2} = Z : \frac{z}{c^2}.$$

Откуда легко получаем

$$\frac{1}{p^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$$

или, пользуясь эллиптическими координатами (III.26), находим

$$uvp^2 = a^2 b^2 c^2. \quad (\text{III.48})$$

Сопоставляя теперь это соотношение, а также уравнение (III.46) с уравнением (III.45), видим, что последнее принимает вид

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{d^2 p^2} = \text{const}, \quad (\text{III.49})$$

т. е.

$$pd = \text{const}. \quad (\text{III.50})$$

Формула (III.50) выражает следующую теорему для геодезической линии на поверхности трехосного эллипсоида.

Теорема 1. Любая точка геодезической линии на трехосном эллипсоиде имеет постоянную величину произведения pd , т. е. перпендикуляра, опущенного из центра эллипсоида на касательную к его поверхности плоскость, и полу диаметра, проведенного из центра эллипсоида параллельно касательной к геодезической линии.

Приведем без вывода еще две теоремы, данные Joachimsthal'em [86].

Теорема 2. Геодезические линии, проходящие через одну и ту же точку эллипсоида, имеют в этой точке радиусы кривизны, прямо пропорциональные квадратам полу диаметров, проводимых из центра эллипсоида параллельно касательным к рассматриваемым кривым, т. е.

$$\rho = \frac{d^2}{p}. \quad (\text{III.51})$$

Формула (III.51) дает весьма простое решение для вычисления радиуса кривизны геодезической линии.

Теорема 3. По длине одной и той же геодезической линии на эллипсоиде радиус кривизны изменяется обратно пропорционально кубу перпендикуляра, опущенного из центра на касательную плоскость к эллипсоиду в рассматриваемой точке, т. е.

$$\rho = \frac{c^2}{p^3}.$$

Это положение следует из формул (III.50) и (III.51).

Приведем также без вывода первый интеграл геодезической линии на поверхности трехосного эллипсоида в геодезических координатах B, L .

Имеем

$$\begin{aligned} s(B, L, \alpha) &= [(1 - e^2)(1 - e_a^2 \sin^2 L) \sin^2 \alpha - \\ &- (1 - e^2) e_a^2 \sin B \sin L \cos L \sin 2\alpha + (W^2 - e_a^2 \times \\ &\times (1 - e^2 \sin^2 B) \cos^2 L) \cos^2 \alpha] : (1 - e_a^2) W^2 = \\ &= \frac{c^2}{b^2} = \text{const}. \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

Это уравнение выражает известное уравнение Клеро. Если в формуле (III.52) положить $e_a^2 = 0$, то получим

$$[(1 - e^2) \sin^2 A + (1 - e^2 \sin^2 B) \cos^2 A] : (1 - e^2 \sin^2 B) = \text{const},$$

или

$$\frac{\cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \sin A = r \sin A = \text{const}.$$

Это есть уравнение Клеро для геодезической линии на поверхности эллипсоида вращения.

После рассмотрения ряда важных свойств геодезических линий на трехосном эллипсоиде при помощи первого интеграла (III.45) обратимся к изучению полного интеграла, который впервые был приведен (без доказательства) в квадратурах Якоби [81], выразив его при помощи абелевых интегралов.

Имеем

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{u}{\sqrt{R(u)}} du + \int_{v_1}^{v_2} \frac{v}{\sqrt{R(v)}} dv = \text{const}, \quad (\text{III.53})$$

где

$$R(t) = -t(a^2 - t)(b^2 - t)(c^2 - t)(C^2 - t).$$

Длина дуги геодезической линии на трехосном эллипсоиде выражается таким образом:

$$s = \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{u^2}{\sqrt{R(u)}} du + \frac{1}{2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{v^2}{\sqrt{R(v)}} dv, \quad (\text{III.54})$$

где $P_1 = P(u_1 v_1)$ и $P_2 = P(u_2 v_2)$ — начальная и конечная точки геодезической линии.

Ioachimsthal уравнение геодезической линии на трехосном эллипсоиде записывает следующим образом:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}} \sqrt{\frac{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u - C}} =$$

$$= \pm \int \frac{dv}{\sqrt{1-\lambda_1^2 \sin^2 v}} \sqrt{\frac{c^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}{C - c^2 \cos^2 v - b^2 \sin^2 v}}. \quad (\text{III.55})$$

Если положить $C=b^2$, то интегралы (III. 55) превращаются в эллиптические.

Для определения длины дуг меридиана и параллели на трехосном эллипсоиде можно воспользоваться уравнениями (I.26) и (I.27) соответственно. Подставив в уравнение (I.27) значение величины g_{BB} (III.40; 1), найдем длину дуги меридиана от экватора до широты B . Имеем

$$dS_M = \sqrt{g_{BB}} dB = \frac{a(1-e^2)}{W^3} \times$$

$$\times \sqrt{1 - 2e_a^2 \sin^2 L + e_a^4 \sin^2 L (1 - \cos^2 B \cos^2 L)} dB$$

или, пренебрегая степенями e_a выше второй,

$$S_M = a(1-e^2) \int_0^B \left[\frac{1 - e_a^2 \sin^2 L + 3/2 e_a^2 \cos^2 B \sin^2 L : (1 - e^2 \sin^2 B)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 B)^3}} + \right.$$

$$\left. + e_a^4 \right] dB. \quad (\text{III.56})$$

Для дуги параллели имеем

$$S_{\Pi} = \sqrt{g_{LL}} dL$$

или, после подстановки значения g_{LL} из формулы (III.40), получим

$$S_{\Pi} = \frac{a \cos B}{W} \left[1 - \frac{e_a^2}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{e_a^2 \cos^2 B}{4(1 - e^2 \sin^2 B)} (L_2 - L_1) + \dots \right]. \quad (\text{III.57})$$

Элемент поверхности трехосного эллипсоида

$$dZ = \sqrt{g_{BB}} dB \cdot \sqrt{g_{LL}} dL \cdot \sin \omega,$$

но

$$\sin \omega = \frac{D}{\sqrt{EG}}.$$

Участок поверхности от экватора до широты $B = \text{const}$, заключенный между долготами $L=L_1$ и $L=L_2$, представится таким образом:

$$Z = a^2(1-e^2)(1-e_a^2) \int_0^{\sin B} \int_{L_1}^{L_2} \frac{d(\sin B) dL}{W^4}, \quad (\text{III.58})$$

где

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B - e_a^2 \cos^2 B \sin^2 L},$$

отсюда

$$Z = a^2(1-e^2)(1-e_a^2) \int_{L_1}^{L_2} \left[\frac{1}{(1 - e_a^2 \sin^2 L^2)} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{\sin B} \frac{d(\sin B)}{\left(1 - \frac{e^2 - e_a^2 \sin^2 L}{1 - e_a^2 \sin^2 L} \sin^2 B \right)^2} \right] dL.$$

Н. Г. Шебуев [46] для вычисления длин дуг меридианов и параллелей приводит следующие формулы. Для дуги меридиана

$$S_M = s_0 - \frac{i}{2} S_0 \cos 2\lambda +$$

$$+ \frac{3}{4} i \rho \cos^2 \lambda \left\{ (\varphi_1 - \varphi) - \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi) \right\}, \quad (\text{III.59})$$

где

$$S_0 = \int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\rho(1-e^2) d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

— длина дуги меридиана эллипсоида вращения с большой полуосью, равной ρ .

Для дуги параллели

$$S_{\Pi} = S'_0 - \frac{i\rho \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi\right) \cos \varphi}{W} \sin (\lambda_1 - \lambda) \cos (\lambda_1 + \lambda), \quad (\text{III.60})$$

где

$$S'_0 = \int_{\lambda}^{\lambda_1} \frac{\rho \cos \varphi}{V 1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\lambda.$$

Из уравнений (III.59) и (III.60) видно, что длины дуг меридиана и параллели трехосного эллипсоида получаются путем добавления соответствующих поправочных членов к длинам дуг меридиана и параллели, вычисленных на поверхности эллипсоида вращения.

Из формулы (III.59) можно также заключить, что длина дуги меридиана трехосного эллипсоида зависит не только от широт конечных точек меридианной кривой, но и от положения этой кривой относительно плоскости наибольшего меридиана, т. е. долготы λ . Дело в том, что кривизна различных (с различными долготами) меридианных кривых трехосного эллипсоида различна.

Сделаем несколько замечаний относительно постоянной C . Так, из формулы (III.45) находим

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{C - v}{u - C}, \quad (*)$$

откуда видно, что для всякой действительной геодезической линии постоянная C по своему значению должна лежать между u и v , так как ради определенности можно предположить, что $v < u$ и, следовательно,

$$b^2 < u < a^2, \quad C^2 < v < b^2;$$

так что

$$v < C < u.$$

Геодезические линии на эллипсоиде можно разделить на три группы: для одной группы постоянная $C < b^2$, для другой $C > b^2$, для третьей $C = b^2$. Легко убедиться, что последняя группа состоит из геодезических линий, проходящих через омбилические точки. Из со-

отношения (*) видим, что если $C < b^2$, то представляемая этим соотношением геодезическая линия будет касательной к линии кривизны $v = C$. Если же $C > b^2$, то геодезическая линия будет касаться линии кривизны $u = C$.

Дифференциальное уравнение геодезической линии на поверхности вращения можно получить следующим образом [7].

Дифференциальное уравнение геодезической линии (II.6) в случае ортогональной координации примет вид

$$d\theta = \frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left(\frac{dg_{11}}{du^2} du^1 - \frac{dg_{22}}{du^1} du^2 \right). \quad (\text{III.60})$$

Известно, что для поверхностей вращения величина g_{11} не зависит от u^2 . Следовательно,

$$d\theta = \frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left(- \frac{dg_{22}}{du^1} du^2 \right). \quad (\text{III.61})$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{d\theta}{ds} = - \frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left(\frac{dg_{22}}{du^1} \cdot \frac{du^2}{ds} \right). \quad (\text{III.62})$$

Чтобы применить уравнение (III.62) к эллипсоиду вращения, воспользуемся прежде всего выражением (I.36). Имеем

$$\frac{du^2}{ds} = \frac{\sin A}{\sqrt{g_{22}}}.$$

Тогда

$$\frac{dA}{ds} = - \frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left(\frac{dg_{22}}{du^1} \cdot \frac{\sin A}{\sqrt{g_{22}}} \right) = - \Gamma_{12}^2 \frac{\sin A}{\sqrt{g_{11}}}, \quad (\text{III.63})$$

где Γ_{12}^2 — символ Христофеля 2-го рода (II.23).

Положим, что линейный элемент ds^2 поверхности эллипсоида вращения задан в виде

$$ds^2 = M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 B dL^2. \quad (\text{III.64})$$

Поэтому

$$g_{11} = M, \quad g_{22} = N^2 \cos^2 B. \quad (\text{III.65})$$

Следовательно,

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \cdot \frac{dg_{22}}{du^1} = -\frac{M}{N} \operatorname{tg} B. \quad (\text{III.66})$$

Подставив уравнения (III.65) и (III.66) в (III.63), найдем

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\operatorname{tg} B}{N} \sin A, \quad (\text{III.67})$$

где учтено, что угол θ в формуле (III.62) на поверхности эллипсоида вращения является азимутом A .

Уравнение (III.67), а также (I.37) и (I.38) можно записать таким образом:

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\sin B}{r} \sin A, \quad (\text{III.68})$$

$$ds \cos A = -\frac{dr}{\sin B}, \quad (\text{III.69})$$

$$ds \sin A = r dL. \quad (\text{III.70})$$

Помножив уравнение (III.68) на (III.70), получим

$$dA = dL \sin B.$$

Это уравнение геодезической линии было получено в § 8.

Если перемножить равенства (III.68) и (III.69), то найдем дифференциальное уравнение геодезической линии в таком виде:

$$\operatorname{ctg} A \cdot dA = -\frac{dr}{r}. \quad (\text{III.71})$$

Интегрируя уравнение (III.71), получаем

$$\ln \sin A = -\ln r + \ln C$$

или

$$r \sin A = \operatorname{const}, \quad (\text{III.72})$$

где C — постоянная интегрирования.

Таким образом, для поверхности вращения произведение радиуса параллели на синус азимута геодезической линии имеет постоянное значение во всех точках геодезической линии. Принимая во внимание, что $r = a \cos u$, можно написать

$$\cos u \sin A = \operatorname{const}, \quad (\text{III.73})$$

т. е. произведение косинуса приведенной широты на синус азимута геодезической линии сохраняет постоянное значение во всех точках геодезической линии.

Уравнение (III.72) называют уравнением Клеро, уравнение (III.73) дано Бесселем.

Объединяя теперь уравнения (III.67), (I.37) и (I.38), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M}, \quad \frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B},$$

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\operatorname{tg} B}{N} \sin A. \quad (\text{III.74})$$

Система (III.74) имеет очень важное значение, так как ее интегралы решают основную задачу высшей геодезии: по заданным координатам начальной точки геодезической линии, ее длине и заданному азимуту определяют координаты конечной точки, а также азимут в этой точке (см. § 1). Именно таким образом формулировали основную задачу высшей геодезии К. Гаусс [36], Бессель [26].

Важно отметить, что система (III.74) может быть легко получена непосредственно из формул (III.22), (III.23) и (III.24), вычисленных для геодезической линии на трехосном эллипсоиде. Для этого в этих формулах следует принять $g_{12} = 0$; $\alpha = A$, $\mu = 0$, $\nu = 90^\circ$ (см. рис. 4, 8).

В дальнейшем решение прямой геодезической задачи на эллипсоиде вращения может быть выполнено численным интегрированием дифференциальных уравнений (III.74).

Для сферы уравнения (III.74) записывают следующим образом:

$$\frac{du}{d\sigma} = \cos A, \quad \frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\sin A}{\cos u}, \quad \frac{dA}{d\sigma} = \operatorname{tg} u \sin A. \quad (\text{III.75})$$

В этих уравнениях эксцентриситет отсутствует, поэтому можно дать такую геометрическую интерпретацию уравнениям (III.75): первые два уравнения представляют собой линейный элемент поверхности сферы единичного радиуса, на которой положение точки определяется широтой u и долготой λ , а третье уравнение представляет геодезическую линию на поверхности сферы — дугу большого круга.

Раздел II. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Аналитические методы вычислений не потеряли своего значения и в настоящее время, однако область их применения в связи с использованием ЭВМ несколько изменилась.

Разнообразие численных методов, обусловленное множеством конкретных задач, вызывает необходимость их классификации и унификации, что, в свою очередь, приводит к общей теории приближенных методов, тесно связанной с функциональным анализом, топологией, теорией информации и т. д. Алгоритмов, которыми пользуются в современных численных методах, очень много. Если их реализовать в виде системы достаточно универсальных программ, они могут стать производственными (управляющими) алгоритмами и послужить основой современной технологии и производства.

При выборе конкретного численного метода для решения задачи нужно принимать во внимание следующее.

1. Требуемую точность конечного результата и устойчивость численного метода или алгоритма (т. е. влияние ошибки, допущенной на данном шаге, на ошибку окончательного результата).

2. Возможность и сложность получения оценки ошибки на каждом шаге вычислительного процесса, что позволяет при необходимости автоматически изменить ход вычислительного процесса для достижения необходимой точности.

3. Общий объем вычислений, необходимых для получения окончательного результата с заданной точностью. Этот объем зависит от сложности вычислений на одном шаге вычислительного процесса и общего количества шагов, а последние, в свою очередь, зависят от скорости сходимости алгоритма.

4. Сложность программирования метода на ЭВМ. Это в первую очередь определяется сложностью алгоритма метода.

5. Характеристики конкретной ЭВМ (быстродействие, объем оперативной памяти, способ представления

чисел, размер разрядной сетки и т. д.), на которой предстоит решать задачу.

При решении задач сфероидической геодезии приходится иметь дело со следующими основными вычислительными задачами: 1) приближение функций (полиномиальная, дробно-рациональная); 2) численное интегрирование (квадратурные формулы Гаусса, Чебышева); 3) численные методы решения дифференциальных уравнений с начальными условиями (методы Рунге — Кутты).

За последние годы опубликовано много работ, посвященных численным методам [43], [47], [48], в которых дана обширная библиография. Для студентов геодезических специальностей вышло учебное пособие*.

Глава IV.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

§ 13. Введение

Приближение (аппроксимация) функций — замещение различных функций «близкими» к ним, более удобными для использования функциями, принадлежащими к некоторому заданному семейству функций. В простейшем, одномерном случае аппроксимации функций речь идет о приближенном представлении заданной функции $f(x)$, $a \leq x \leq b$, с помощью выражения некоторого вида $P(x, K) = P(x, k_0, \dots, k_n)$, где компоненты параметрического вектора $\bar{K}(k_0, \dots, k_n)$ определяются из условия возможной малости отклонения $P(x, \bar{K})$ от $f(x)$ при $a \leq x \leq b$ или, как говорят еще, «расстояния» $\mu(f, P)$ между функциями f и P , которые здесь предполагаются непрерывными на $[a, b]$. Это требование получает определенный смысл при отождествлении $\mu(f, P)$ с нормой разности $\|f - P\| = \|f - P\|_{[a, b]}$, или, в более общем виде, взвешенной разности: $\|\omega(f - P)\|$, где вес $\omega = \omega(x)$ положителен при $a \leq x \leq b$. При приближении равномерной («чебышевской» или «предельно степенной») и приближении средней степенной за меру отклонения $\mu(f, P) \equiv \mu[\bar{K}] \equiv \|f(x) - P(x, \bar{K})\|$ при

* *Вычислительная математика: Учебное пособие для вузов/ В. А. Вегасов, И. Г. Журкин, М. В. Красикова и др. — М., Недра, 1976.*

$\omega(x) = 1$ принимают соответственно (норма равномерная либо средняя степенная):

$$\mu_{\infty}(f_0 P) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x, \bar{K})| \equiv L(\bar{K}). \quad (\text{IV.1})$$

Чаще всего на практике применяют задачи приближения с линейно входящими параметрами

$$P(x, \bar{K}) = k_0 \varphi_0(x) + k_1 \varphi_1(x) + \dots + k_n \varphi_n(x), \quad (\text{IV.2})$$

где $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ — функции, линейно независимые на $[a, b]$. В этом случае (приближении полиномиальном при $\varphi_i(x) = x^i$ и квазиполиномиальном при ином выборе $\varphi_i(x)$, $(i=0, \dots, n)$) всегда обеспечено существование решений K_{∞}^* , K_q^* , реализующих точный минимум, соответствующего уклонения.

К задачам приближения функций с нелинейно входящими параметрами относится классическая задача д р о б н о - р а ц и о н а л ь н о г о приближения вида

$$P = R_{l, n-l}(x) = \frac{k_0 + k_1 x + \dots + k_l x^{(n-l)}}{k_{l+1} + k_{l+2} x + \dots + k_{n+1} x^{n-l}}. \quad (\text{IV.3})$$

По сравнению с полиномами дробно-рациональные приближения имеют лучшую сходимость при приближении функций с большим количеством производных высокого порядка.

Дробно-рациональные приближения иногда могут успешно заменять данную функцию в тех областях изменения аргумента, где разложение этой функции в степенной ряд расходится и где, следовательно, приближения в виде многочленов неприменимы. Так, например, дробно-рациональное приближение функции $\operatorname{tg} x$ вида

$$y = \frac{15x - x^3}{15 - 6x^2} \quad (\text{IV.4})$$

достаточно близко к исходной функции при изменении аргумента в пределах $|x| \leq 2$.

Приближение этой же функции рядом Тейлора требует значительного числа степенных членов при более узких пределах изменения аргумента ($|x| < \frac{\pi}{2}$). При вычислениях (в частности, при составлении стандарт-

ных подпрограмм для ввода функций в ЭВМ) рациональные дроби $P = \frac{k_l x^l}{k_{n+1} x^{n+1} - 1}$ обладают большей гибкостью приспособления к $f(x)$ в случаях, например, аналитической $f(x)$, имеющей полюс вблизи отрезка $[a, b]$, или непрерывной $f(x)$ с графиком, включающим при $a \leq x \leq b$, скажем, угловую точку либо точку с вертикальной касательной, и др.

Наконец, при пользовании дробно-рациональными приближениями отпадает необходимость вычислять высокие степени аргумента.

Таким образом, использование дробно-рациональных приближений упрощает многие расчетные формулы. Вместе с тем незначительное распространение дробно-рациональных приближений связано было с тем, что, хотя число операций для достижения заданной точности при дробно-рациональном приближении обычно меньше числа операций при многочленном, но при этом появляется операция деления, что не для всех ЭВМ желательно. В тех случаях, когда у ЭВМ скорость выполнения операции деления близка к скорости умножения, эффективность использования дробно-рациональной аппроксимации возрастает. Кроме этого, небольшое распространение дробно-рациональных приближений объясняется тем, что непосредственное получение их связано с длинными вычислениями.

Однако существуют методы, позволяющие получать необходимое число дробно-рациональных приближений данной функции. Эти методы не требуют сложных выкладок, наиболее широко распространенным из них является метод цепных дробей.

В свое время вопросы разложения функций в цепные дроби занимались крупнейшие математики: Эйлер, Лагранж и др. [75], [76].

В последнее время в ряде работ Перрона, Уолла, Трона [75], [76] и других авторов большое развитие получила аналитическая теория цепных дробей. Это вызвано тем, что цепные дроби приобретают все большее теоретическое и прикладное значение. Особенно много внимания уделяется вопросам сходимости цепных дробей. Основным методом получения новых признаков сходимости цепных дробей стал метод преобразования. Преобразования применяются также для раз-

ложения функций в цепные дроби и для улучшения их сходимости [75].

Первые сведения о преобразовании цепных дробей дают Лагранж и Эйлер. Лагранж [76] рассмотрел частные случаи сжатия цепных дробей. Эйлер [76] применяет сжатие для улучшения сходимости разложений в цепные дроби функций $(1+x)^n$; e^x , $\ln x$, $\text{arctg } x$.

В середине XIX в. Зейдель [76] вводит операции сжатия и растяжения цепных дробей. Ряд формул преобразования приводит советский математик А. Н. Хованский [76]. Он же рассмотрел преобразование Роджерса, сжатие цепных дробей, некоторые частные случаи цепной дроби Бауэра—Мюира.

В работах С. С. Хлопонина [75] поставлена и решена задача расширения аппарата преобразований цепных дробей и применения этого аппарата для получения новых разложений функций в цепные дроби и новых признаков сходимости цепных дробей. При этом им получено общее преобразование, которое включает все известные преобразования цепных дробей и дает много новых частных формул преобразования.

Применение цепных дробей к задачам сферической геодезии было выполнено в наших работах [9], [10], [12]. Дальнейшие, весьма интересные результаты были получены А. Г. Лесняком [49].

§ 14. Некоторые вопросы из теории цепных дробей

1. Обозначения цепной дроби. Цепной, или непрерывной, дробью называется выражение

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_k}{b_k + \dots}},} \quad (\text{IV.5})$$

где $\frac{a_k}{b_k}$ — k -е звено цепной дроби, b_0 — нулевое звено, a_i — частные числители, b_i — частные знаменатели ($i = 1, 2, \dots$).

Для цепной дроби (IV.5) часто употребляется сокращенная запись, предложенная Роджерсом,

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_k}{b_k} + \dots \quad (\text{IV.6})$$

Иногда используют записи

$$b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} \quad (\text{С. С. Хлопонин}),$$

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n} \quad (\text{А. Прингсгейм}),$$

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{a_2}{b_2} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{a_n}{b_n} \quad (\text{И. Мюллер}).$$

Все члены звеньев цепной дроби предполагаются конечными. Все частные знаменатели цепной дроби обычно считаются не равными нулю.

Цепная дробь, имеющая конечное множество звеньев, называется конечной.

Цепная дробь, имеющая бесконечное множество звеньев, называется бесконечной.

2. Вычисление подходящих дробей. Дробь, ограниченная звеном $\frac{a_n}{b_n}$, называется n -й подходящей дробью цепной дроби (IV.5) и обозначается

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}. \quad (\text{IV.7})$$

Из определения цепной дроби имеем

$$\begin{aligned} \frac{P_{-1}}{Q_{-1}} &= \frac{1}{0}; \quad \frac{P_0}{Q_0} = \frac{b_0}{1}; \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1}; \\ \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{b_2 P_1 + a_2 P_0}{b_2 Q_1 + a_2 Q_0}. \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

Предположим, что

$$\begin{aligned} P_n &= b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \\ Q_n &= b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}. \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

Тогда

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}}{b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}}. \quad (\text{IV.10})$$

Равенства (IV.9) позволяют последовательно вычислять подходящие дроби. При этом целесообразно пользоваться схемой:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots, \quad (IV.11)$$

$$\frac{1}{0} \cdot \frac{b_0}{1} \frac{P_1}{Q_1} \frac{P_2}{Q_2} \dots \frac{P_n}{Q_n} \dots$$

3. Преобразование цепных дробей. Умножив a_i и b_i на любое конечное число $p \neq 0$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$), получим тождество

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = b_0 + \frac{p_1 a_1}{p_1 b_1} + \frac{p_1 p_2 a_2}{p_2 b_2} + \dots + \frac{p_{n-1} p_n a_n}{p_n b_n} + \dots, \quad (IV.12)$$

При этом P_1 и Q_1 заменяются соответственно на $p_1 P_1$ и $p_1 Q_1$; P_2 и Q_2 — на $p_1 p_2 P_2$ и $p_1 p_2 Q_2 \dots$; P_n и Q_n — на $p_1 p_2 \dots p_n P_n$ и $p_1 p_2 \dots p_n Q_n$.

Так, например, приняв $p_{n-1} p_n a_n = 1$ ($n=2, 3, \dots$), получим

$$p_1 = \frac{1}{a_1}, p_2 = \frac{a_1}{a_2}, p_3 = \frac{a_2}{a_3}, \dots, p_{2k-1} = \frac{a_2 a_4 \dots a_{2k-2}}{a_1 a_3 \dots a_{2k-1}},$$

$$p_{2k} = \frac{a_1 a_3 \dots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2k}} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Введя обозначения

$$\beta_0 = b_0, \beta_{2k-1} = \frac{a_2 a_4 \dots a_{2k-2}}{a_1 a_3 \dots a_{2k-1}} b_{2k-1},$$

$$\beta_{2k} = \frac{a_1 a_3 \dots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2k}} b_{2k} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

преобразуем выражение (IV.5) в обыкновенную цепную дробь

$$\beta_0 + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \dots + \frac{1}{\beta_k} + \dots, \quad (IV.13)$$

Величины β_1, β_2, \dots — называются неполными частными обыкновенной цепной дроби.

Обыкновенную цепную дробь с натуральными неполными частными называют правильной. В теории чисел обычно рассматривают только правильные цепные дроби.

Приняв $b_0=0, p_i=1/b_i$ ($i=1, 2, \dots$), $a_i=a_i$, получим преобразование цепной дроби из вида (IV.5) в следующий:

$$\frac{\alpha_1}{1} + \frac{\alpha_2}{1} + \dots + \frac{\alpha_n}{1} + \dots, \quad (IV.14)$$

4. Некоторые свойства цепных дробей. Точное значение цепной дроби вида (IV.13) находится между двумя соседними подходящими дробями. Это значение ближе к последующей, чем к предыдущей подходящей дроби. Указанную границу можно определить более точно, а именно: значение n -й подходящей дроби заключено между нею и медианой, образованной этой дробью и предшествующей, т. е. лежит в интервале

$$\left(\frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_{n-1} + P_n}{Q_{n-1} + Q_n} \right).$$

Верхний предел погрешности n -й подходящей дроби вида (IV.13) ограничен величинами

$$\frac{1}{\beta_n \beta_{n+1}}, \frac{1}{\beta_n (\beta_n + \beta_{n-1})}, \frac{1}{2\beta_n^2},$$

но погрешность больше, чем

$$\frac{1}{\beta_k (\beta_{k+1} + \beta_k)}.$$

Подходящая дробь P_n/Q_n сходящейся бесконечной цепной дроби вида (IV.5) (с положительными частными знаменателями) приближает искомое значение с недостатком при n — нечетном и с избытком — при четном. Таким образом, подходящие дроби четного порядка образуют возрастающую, а нечетного — убывающую последовательность. Если функция $f(x)$ разложена в правильную цепную дробь вида

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n x}{1}$$

и n -я подходящая дробь $P_n(x)/Q_n(x)$ приближает заданную функцию $f(x)$, имеющую в области определения D непрерывные производные до $(n+1)$ -го порядка, то

остаточный член этого приближения можно определить по формуле

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1} [f(x) Q_n(x)]_{x=\zeta}^{n+1}}{Q_n(x)},$$

где ζ — некоторая точка области D , x — любая точка этой области, отличная от полюсов рациональной функции $P_n(x)/Q_n(x)$.

5. Сжатие цепных дробей. Цепная дробь Бернулли

$$K_0 + \frac{K_1 - K_0}{1} + \frac{K_1 - K_2}{K_2 - K_0} + \dots + \frac{(K_{n-2} - K_{n-3})(K_{n-1} - K_n)}{K_n - K_{n-2}} + \dots$$

отличается тем, что подходящие дроби ее имеют наперед заданные значения K_i ($i=1, 2, 3, \dots$). Если за K_i принимается некоторая подпоследовательность подходящих дробей цепной дроби (IV.5), говорят, что цепная дробь Бернулли получилась путем сжатия исходной цепной дроби (IV.5).

Приняв $K_n = \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$, получим

$$\begin{aligned} b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots &= \\ = b_0 + \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} - \frac{a_2 a_3 b_4}{(b_2 b_3 + a_3) b_4 + b_2 a_4} - & \\ - \frac{a_4 a_5 b_2 b_6}{(b_4 b_5 + a_5) b_6 + b_4 a_6} - \dots - & \\ - \frac{a_{2n-2} a_{2n-1} b_{2n-4} b_{2n}}{(b_{2n-2} b_{2n-1} + a_{2n-1}) b_{2n} + b_{2n-2} a_{2n}} - \dots \end{aligned}$$

При $K_n = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$ имеем

$$\begin{aligned} b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots + \frac{b_0 b_1 + a_1}{a_1} - & \\ - \frac{a_1 a_2 b_3}{(b_1 b_2 + a_2) b_3 + b_1 a_3} - & \\ - \frac{a_{2n-1} a_{2n} b_{2n-3} b_{2n-1}}{(b_{2n-1} b_{2n} + a_{2n}) b_{2n+1} + b_{2n-1} a_{2n+1}} - \dots \end{aligned}$$

Здесь знак \doteq показывает, что подходящей дробью нулевого порядка цепной дроби, стоящей в правой части последнего равенства, является дробь $\frac{1}{0}$, а не $\frac{0}{1}$, так как эта цепная дробь имеет своими подходящими дробями только все подходящие дроби нечетного порядка цепной дроби (IV.5).

6. Сходимость цепных дробей. Цепная дробь называется сходящейся, если существует

$$\lim \frac{P_n}{Q_n} = A < |\infty|.$$

Если $A = \pm\infty$, цепная дробь называется несущественно расходящейся, а если предел A не существует, то дробь называется существенно расходящейся.

Говорят, что цепная дробь сходится в широком смысле, если она не является существенно расходящейся.

Вследствие того, что сходимость цепной дроби в общем случае зависит не только от характера изменения общего члена при неограниченном возрастании n , а и от ее первых звеньев, вводятся понятия безусловной и условной сходимости. Сходящаяся цепная дробь (IV.5) с $a_k \neq 0$ называется безусловно сходящейся, если она остается сходящейся при отбрасывании любого числа начальных звеньев. В противном случае сходящаяся цепная дробь называется условно сходящейся.

Для установления факта сходимости цепной дроби, представляющей формальное разложение некоторой функции, важную роль играет понятие равномерной сходимости цепной дроби. Цепная дробь называется равномерно сходящейся на множестве E (звеньев цепной дроби), если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число M , что для любого $m \geq M$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{P_m}{Q_m} - \lim \frac{P_n}{Q_n} \right| < \varepsilon,$$

причем $Q_m = 0$ на всем множестве E . Для сходящейся цепной дроби n -е подходящие дроби P_n/Q_n являются ее приближенными значениями. Для дроби типа (IV.5) при $a_k \neq 0$ ($k=1, 2, \dots$) равномерная сходимость дроби на множестве E является достаточным условием того,

что дробь (IV.5) сходится к функции $f(x)$, которая разложена в цепную дробь.

7. Методы вычисления цепных дробей. Наиболее простой метод вычисления n -й подходящей дроби вида

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}} \quad (IV.17)$$

или

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{b_0}{1 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}} \quad (IV.18)$$

состоит в последовательном выполнении операции сложения и деления, начиная с n -го звена.

Первый метод. Для цепной дроби вида (IV.17) этот процесс можно представить в виде рекуррентного соотношения

$$d_{k-1} = b_{k-1} + \frac{a_k}{d_k}, \quad k = n, n-1, \dots, 2, 1.$$

Взяв в качестве начального приближения $d_n = b_n$ и проделав все итерации, получим $f_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = d_0$.

Для цепной дроби вида (IV.18) процесс вычисления можно представить в виде рекуррентного соотношения

$$d_{k-1} = b_{k-1} + \frac{a_k}{d_k}, \quad k = n, n-1, \dots, 3, 2, 1,$$

где $d_n = b_n$. Отсюда значение подходящей цепной дроби $f_n(x) = b_0 : (1 + d_1)$.

Второй метод. Для вычисления n -й подходящей дроби вида (IV.17) используются рекуррентные соотношения

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2},$$

$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

при начальных значениях $P_0 = b_0$, $Q_0 = 1$, $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$.

Третий метод. Вычисление n -й подходящей дроби вида (IV.17) по методу, предложенному Тейкроу, проводится по формуле

$$f_n(x) = b_0 + \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^i P_k,$$

где

$$P_k = 1/[1 + U_k(1 - P_{k-1})] - 1 \quad (k = 3, 4, \dots, n),$$

$$U_k = a_k/(b_{k-1} b_k), \quad P_1 = a_1/b_1, \quad P_2 = 1/(1 + U_2) - 1.$$

Если значения U_k вычислены заранее, то в общем случае число хранимых в памяти машины коэффициентов может сократиться почти вдвое по сравнению с первым и вторым методами вычисления цепных дробей, когда необходимо хранить все коэффициенты a_i, b_i .

Особенностью применения первого метода вычисления цепной дроби является необходимость заранее задаваться числом звеньев цепной дроби. При изменении числа звеньев все вычисления необходимо повторить. Первый и третий методы не дают больших чисел при промежуточных вычислениях, в то время как во втором методе величины P_n и Q_n возрастают очень быстро. Во втором и третьем методах при увеличении числа звеньев цепной дроби можно использовать полученные из предыдущих операций результаты. С точки зрения накопления погрешности при вычислении элементарных функций предпочтение следует отдать первому методу.

В ряде случаев, когда в ЭВМ деление выполняется достаточно быстро по сравнению с умножением, бывает целесообразно аппроксимировать элементарные функции цепными дробями. Так, для системы ИВМ-360 большинство рациональных приближений в ФОРТРАН-библиотеке вычисляется в форме цепных дробей. Это объясняется тем, что при записи дробно-рационального выражения в виде цепной дроби общее число сокращается. Так, например, при вычислении функции $f_3(x) = \frac{P_3(x)}{Q_3(x)}$ в рациональной форме требуется пять умножений, одно деление и шесть сложений, а в соответствующей цепной дроби — три деления и шесть сложений.

§ 15. Разложение в цепные дроби некоторых функций

Если при преобразовании степенного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ в цепную дробь частные суммы исходного степенного ряда совпадают с подходящими дробями цепной дроби, то полученная цепная дробь называется равноценной

исходному ряду, в противоположном случае дробь называется соответствующей исходному ряду.

Области сходимости степенного ряда и соответствующей цепной дроби могут быть различными, более того, степенной ряд и соответствующая ему цепная дробь могут расходиться, либо один из них расходится, а другой — сходится.

1. Построение равноценных дробей. Для этой цели чаще всего используют метод Эйлера, согласно которому можно записать тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + \frac{a_1 x}{1 - a_1 + a_2 x} - \frac{a_2 x}{a_2 + a_3 x} + \dots - \frac{a_{k-2} a_k x}{a_{k-1} + a_k x} + \dots \quad (IV.19)$$

Этому тождеству можно придать вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{a_0}{1 - a_0 + a_1 x} - \frac{a_1 a_2 x}{a_1 + a_2 x} + \dots - \frac{a_{n-2} a_n x}{a_{n-1} + a_n x} + \dots$$

Пример.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \frac{x}{1 + 3 - x^2} + \frac{9x^2}{5 - 3x^2} + \dots + \frac{(2n-1)^2 x^2}{2n+1 - (2n-1)x^2} + \dots$$

Степенной ряд для функции $f(x)$ можно преобразовать в цепную дробь по Мююру

$$f(x) = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots + B_n x^n = \frac{1}{1 - \frac{\beta_1 x}{1 - \frac{\beta_2 x}{1 - \frac{\beta_3 x}{1 - \frac{\beta_1 \beta_4 x}{\dots}}}}} \quad (IV.20)$$

где величины β_1, β_2, \dots вычисляются из выражений

$$\beta_1 = B_1, \beta_2 = \left| \frac{1}{B_1} \frac{B_1}{B_2} \right|, \beta_3 = \left| \frac{B_1}{B_2} \frac{B_2}{B_3} \right| \text{ и т. д.} \quad (IV.21)$$

Найдем по формулам (IV.8) несколько подходящих дробей цепной дроби (IV.20);

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1 - \beta_1 x}, \quad (IV.22)$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{\beta_1 - \beta_2 x}{\beta_1 - (\beta_2 + \beta_1^2) x}, \quad (IV.23)$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{\beta_1 \beta_2 - (\beta_3 + \beta_2^2) x}{\beta_1 \beta_2 - (\beta_3 + \beta_2^2 + \beta_1^2 \beta_2) x + \beta_1 \beta_3 x^2} \text{ и т. д.} \quad (IV.24)$$

Разности между двумя соседними подходящими дробями запишутся соответственно:

$$\Delta_2 = \frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1} = \frac{\beta_1 \beta_2 x}{[\beta_1 - (\beta_2 + \beta_1^2) x][1 - \beta_1 x]} \quad (IV.23^*)$$

$$\Delta_3 = \frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_2}{Q_2} = \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 x^3}{[\beta_1 - (\beta_2 + \beta_1^2) x][\beta_1 \beta_2 - (\beta_3 + \beta_2^2 + \beta_1^2 \beta_2) x + \beta_1 \beta_3 x^2]} \quad (IV.24^*)$$

Учитывая формулы (IV.22), (IV.23), (IV.24), функцию $f(x)$ можно представить в виде ряда

$$f(x) = \frac{1}{1 - \beta_1 x} + \Delta_2 + \Delta_3. \quad (IV.25)$$

Полученное разложение цепной дроби (IV.20) в ряд (IV.25) обеспечивает более высокую сходимость, чем разложение $f(x)$ в обычный степенной ряд. Конечно, ряд (IV.25) уже не является степенным рядом в обычном понимании, так как Δ_2, Δ_3 сами являются степенными функциями от x .

2. Разложение степенной функции. Одним из источников получения цепных дробей является решение дифференциальных уравнений в виде цепной дроби. Для этого, в частности, можно использовать метод Лагранжа.

Так, Лагранжем получено разложение функции $y = (1+x)^v$ в следующую цепную дробь:

$$(1+x)^v = 1 + \frac{vx}{1 + \frac{(1-v)x}{2 + \frac{(1+v)x}{3 + \frac{(2-v)x}{2 + \dots}}}}$$

$$+ \frac{(n-v)x}{2} + \frac{(n+v)x}{2n+1} + \dots \quad (\text{IV.26})$$

Сжав разложение (IV.26) по формуле (IV.15), получим

$$(1+x)^v = 1 + \frac{2vx}{2+(1-v)x} - \frac{(1-v^2)x^2}{3(2+x)} - \frac{(4-v^2)x^3}{5(2+x)} - \dots - \frac{(n^2-v^2)x^2}{(2n+1)(2+x)} - \dots \quad (\text{IV.27})$$

Подходящие дроби цепной дроби (IV.27)

$$(1+x)^v \approx \frac{P_1}{Q_1} = \frac{2+(1+v)x}{2+(1-v)x}, \quad (\text{IV.28})$$

$$(1+x)^v \approx \frac{P_2}{Q_2} = \frac{12+6x(v+2)+x^2(v+1)(v+2)}{12-6x(v-2)+x^2(v-1)(v-2)}. \quad (\text{IV.29})$$

В общем виде n -я подходящая дробь может быть представлена в виде

$$(1+x)^v = \frac{P_n}{Q_n}, \quad (\text{IV.30})$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_n &= a_0 + \dots + |a_{n-1}|x^{n-1}(v+2)(v+3)\dots \\ &\dots (v+n) + |a_n|x^n(v+1)(v+2)\dots(v+n), \\ Q_n &= a_0 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}(v-2)(v-3)\dots \\ &\dots (v-n) + a_n x^n (v-1)(v-2)\dots(v-n). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.31})$$

Коэффициент a_p может быть выражен формулой

$$a_p = (-1)^p \frac{(n-p+1)(n-p+2)\dots(2n-p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}. \quad (\text{IV.32})$$

Поправку за переход от данного приближения к последующему, т. е. разность выражений (IV.28) и (IV.29), можно записать таким образом:

$$\Delta_2 = \frac{-2x^3 v (v^2 - 1)}{[2 + (1 - v)x][12 - 6x(v - 2) + x^2(v - 1)(v - 2)]}. \quad (\text{IV.33})$$

или в общем виде

$$\Delta_{n+1} = \frac{(-1)^n 2x^{2n+1} v (v^2 - 1)(v^2 - 2^2)(v^2 - 3^2)\dots(v^2 - n^2)}{\left[\begin{array}{l} \text{знаменатель } n\text{-го} \\ \text{приближения} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \text{знаменатель} \\ (n+1)\text{-го} \\ \text{приближения} \end{array} \right]}. \quad (\text{IV.34})$$

И, следовательно, представляя функцию $(1+x)^v$ в виде ряда, получим [11], [12]

$$(1+x)^v = \frac{2+(1+v)x}{2+(1-v)x} + \Delta_{n+1} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (\text{IV.35})$$

3. Оценка ошибки приближения цепных дробей. Отметим, что в литературе нет пригодных для практических целей формул оценки остатка

$$\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} + \dots + \frac{a_{k+m}}{b_{k+m}}$$

цепной дроби (IV.5). Оценку можно провести только при положительных значениях a и b . Например, для цепной дроби (IV.5) с положительными элементами a_k и b_k оценка получается следующим образом.

Ранее было указано, что подходящие дроби четного порядка для цепной дроби (IV.5) монотонно возрастают, а нечетного — монотонно убывают. Следовательно, точное значение цепной дроби (IV.5) заключено между любыми соседними подходящими дробями f_n и f_{n+1} . Тогда абсолютная ошибка числа (функции) n -й подходящей дроби не превышает разности

$$|f_{n+1} - f_n|, \text{ т. е. } \delta_n < |f_{n+1} - f_n|.$$

В случае выражения (IV.27) все частные числители $-(1-v^2)x^2, -(n^2-v^2)x^2, \dots$, начиная со второго, отрицательны. Следовательно, цепная дробь (IV.27) для оценки указанным способом не годится. Для этих целей удобно взять цепную дробь (IV.26).

Приняв в выражении (IV.26) $v=1/2$, будем иметь

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3x}{6} + \dots + \frac{(2n+1)x}{2} + \frac{(2n+1)x}{4n+2} + \dots$$

Найдем первые четыре подходящие дроби

$$\frac{1}{1}, \frac{2+x}{2}, \frac{4+3x}{4+x}, \frac{8+8x+x^2}{4(2+x)}.$$

Положим

$$\sqrt{1+x} \approx \frac{4+3x}{4+x}.$$

Оценим ошибку δ_3 этого приближения

$$\delta_3 < \left| \frac{8+8x+x^2}{4(2+x)} - \frac{4+3x}{4+x} \right| < \frac{x^3}{4(2+x)(4+x)}.$$

Итак,

$$\delta_3 < \left| \frac{x^3}{4(2+x)(4+x)} \right|. \quad (\text{IV.36})$$

4. Дробно-рациональное приближение для гипергеометрического ряда. В целях большей общности при вычислении различных функций представим гипергеометрический ряд

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2! \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)(\alpha+2)(\beta+2)}{3! \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots \quad (\text{IV.37})$$

в виде цепной дроби по Мюиру (IV.20).

После определения величин $\beta_1, \beta_2 \dots$ по формулам (IV.21) и ограничившись второй подходящей дробью, запишем приближенное выражение гипергеометрического ряда в виде дроби [12]

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{2\gamma(\gamma+1) - [\gamma(\alpha+1)(\beta+1) - 2\alpha\beta(\gamma+1)]x}{2\gamma(\gamma+1) - [\gamma(\alpha+1)(\beta+1)]x}.$$

§ 16. Вычисление эллиптических интегралов

При решении многих геодезических задач приходится сталкиваться с так называемыми эллиптическими интегралами I, II и III родов, выражаемыми следующим образом [66]:

эллиптический интеграл I рода

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}},$$

эллиптический интеграл II рода

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}},$$

эллиптический интеграл III рода

$$\int \frac{dt}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}.$$

Подстановкой $t = \sin x$ эти интегралы приводятся к так называемой лежандровской форме

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}},$$

$$\int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx,$$

$$\int \frac{dx}{(1+h \sin^2 x)\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}.$$

Соответствующие определенные интегралы с нижним пределом, равным 0, обозначаются следующими символами [66]:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} = F(k^2, x),$$

$$\int_0^x \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx = E(k^2, x),$$

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+h \sin^2 x)\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} = \Pi(h, k^2, x).$$

Эти интегралы называются неполными эллиптическими интегралами соответственно I, II и III рода. При верхнем пределе $x = \frac{\pi}{2}$ интегралы I и II рода называются полными эллиптическими интегралами и являются функциями только переменной k^2

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} = K(k^2),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx = E(k^2).$$

Эллиптические интегралы никакими подстановками не могут быть приведены к системе табличных интегралов.

Почти все имеющиеся в настоящее время способы вычисления эллиптических интегралов основаны либо на разложении подкоренного выражения в ряд с применением методов, улучшающих его сходимость, либо на обращении к эллиптическим функциям Якоби, которые, в свою очередь, вычисляются разложением в ряды.

К вопросу вычисления эллиптических интегралов обращался великий русский математик П. Л. Чебышев [79]. Он рассмотрел вопрос о приближении радикала

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

функцией

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \dots + \frac{B_n}{C_n + x},$$

где величины A, B, C — функции полного эллиптического интеграла I рода $K(k^2)$.

Применив этот метод к вычислению интегралов вида

$$\int \frac{U}{V},$$

П. Л. Чебышев для частного случая эллиптического интеграла I рода получил следующую формулу:

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}} = \frac{1}{l^{2\theta}} \left[0,3933199 u + \frac{0,6066801 \operatorname{arctg}(\sqrt{1 - 0,8104089\lambda^2} \operatorname{tg} u)}{\sqrt{1 - 0,8104089\lambda^2}} \right],$$

$$n = 1, 2, 3 \dots, l^2 = 0,9993546, l^2 = 0,9999988.$$

Ниже приводятся формулы для вычисления эллиптических интегралов I, II, III рода, вывод которых основан на представлении подынтегральной функции в виде

дробно-рационального выражения с последующим его интегрированием.

Возьмем эллиптический интеграл I рода в форме Лежандра

$$F(k^2, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (\text{IV.38})$$

Представим знаменатель подынтегрального выражения в виде [12]

$$[1 + (-k^2 \sin^2 \varphi)]^{-1/2}.$$

Применим к этому выражению формулу (IV.28). Тогда

$$[1 + (-k^2 \sin^2 \varphi)]^{-1/2} = \frac{4 - k^2 \sin^2 \varphi}{4 - 3k^2 \sin^2 \varphi}. \quad (\text{IV.39})$$

После этого интеграл (IV.38) можно записать таким образом:

$$F(k^2, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{4 - k^2 \sin^2 \varphi}{4 - 3k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (\text{IV.40})$$

Интегрируя выражение (IV.40), получаем приближенную формулу для вычисления эллиптического интеграла I рода в таком виде:

$$F(k^2, \varphi) = \frac{1}{3} \varphi + \frac{2}{3 \sqrt{1 - 0,75k^2}} \operatorname{arctg} \times \\ \times (\sqrt{1 - 0,75k^2} \operatorname{tg} \varphi), \quad (\text{IV.41})$$

Соответственно для эллиптических интегралов II и III рода получены следующие формулы [10], [12]:

$$E(k^2, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \int_0^{\varphi} \frac{4 - 3k^2 \sin^2 \varphi}{4 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ = 3\varphi - \frac{2}{\sqrt{1 - 0,25k^2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{1 - 0,25k^2} \operatorname{tg} \varphi), \quad (\text{IV.42})$$

$$\Pi(h, k^2, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\varphi} \frac{4 - k^2 \sin^2 \varphi}{(1 + h \sin^2 \varphi)(4 - 3k^2 \sin^2 \varphi)} d\varphi = \\
&= \frac{4h + k^2}{4h + 3k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+h}} \operatorname{arctg}(\sqrt{1+h} \operatorname{tg} \varphi) + \\
&+ \frac{2k^2}{4h + 3k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-0,75k^2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{1-0,75k^2} \operatorname{tg} \varphi). \quad (\text{IV.43})
\end{aligned}$$

В случае вычисления интегралов со значениями аргументов k^2 , φ , не принадлежащих к указанным интервалам, или же когда амплитуда φ близка к $\pi/2$, а модуль k^2 близок к единице, необходимо пользоваться формулами приведения, изложенными, например, в руководстве [39].

Формулы (IV.41) и (IV.42) для вычисления эллиптических интегралов I и II рода можно преобразовать также следующим образом.

Разложим выражение $\operatorname{arctg}(\sqrt{1-\alpha} \operatorname{tg} \varphi)$ в ряд Лагранжа

$$\operatorname{arctg}(p \operatorname{tg} x) = x + q \sin 2x + \frac{q^2}{2} \sin 4x + \frac{q^3}{3} \sin 6x + \dots,$$

где

$$q = \frac{p-1}{p+1}; p = \sqrt{1-\alpha}.$$

Представим величину $\sqrt{1-\alpha}$ по формуле (IV.35)

$$\sqrt{1-\alpha} = \frac{4+3\alpha}{4-\alpha} = 1 - \frac{2\alpha}{4-\alpha}.$$

Тогда

$$q = -\frac{\alpha}{4-2\alpha},$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg}(\sqrt{1-\alpha} \operatorname{tg} \varphi) &= \varphi - \frac{\alpha}{4-2\alpha} \sin 2\varphi + \\
&+ \frac{\alpha^2}{2(4-2\alpha)^2} \sin 4\varphi - \frac{\alpha^3}{8(4-2\alpha)^3} \sin 6\varphi + \dots \quad (\text{IV.44})
\end{aligned}$$

Оценим член с α^2 . Положим, что $\sin 4\varphi = 1$, тогда $\varphi = \frac{\pi}{8}$, следовательно, $\varepsilon = \frac{\alpha^2}{2(4-2\alpha)^2}$, но $\alpha = \frac{k^2}{4} = 0,0016$,

отсюда $\varepsilon = 8 \cdot 10^{-8}$. Таким образом, при точных расчетах член с α^2 в формуле (IV.44) необходимо оставлять.

Подставляя выражение (IV.44) в формулу (IV.41), после необходимых преобразований получим выражение эллиптического интеграла I рода в виде

$$F(k^2, \varphi) = \beta\varphi + \gamma \sin 2\varphi + \delta \sin 4\varphi + \dots, \quad (\text{IV.45})$$

где

$$\left. \begin{aligned}
\beta &= \frac{1-0,3125k^2}{1-0,5625k^2}, \\
\gamma &= -\frac{0,125k^2}{(1-0,375k^2)} \cdot \frac{(1-0,1875k^2)}{(1-0,5625k^2)}, \\
\delta &= 0,01171875 \cdot \frac{1-0,1875k^2}{1-0,5625k^2} \left(\frac{k^2}{1-0,375k^2} \right)^2.
\end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.46})$$

Аналогичным способом можно преобразовать формулу (IV.42) для интеграла II рода, которая, как и формула (IV.45), будет проста по своей структуре и легко программируема на любой ЭВМ. Что касается интеграла III рода (IV.43), то преобразование Лагранжа можно применить только по второму слагаемому

$$\frac{2k^2}{4h+3k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-0,75k^2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{1-0,75k^2} \operatorname{tg} \varphi). \quad (\text{IV.47})$$

Дело в том, что в первое слагаемое

$$\frac{4h+k^2}{4h+3k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+h}} \operatorname{arctg}(\sqrt{1+h} \operatorname{tg} \varphi) \quad (\text{IV.48})$$

входит величина h , которая может изменяться от 0 до 1.

Заменив в формуле (IV.47) радикал по уравнению (IV.35), а также применив преобразование Лагранжа, после необходимых преобразований окончательно получим

$$\begin{aligned}
\Pi(h, k^2, \varphi) &= \frac{4h+k^2}{4h+3k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{1-h} \operatorname{tg} \varphi + \\
&+ \frac{2k^2}{4h+3k^2} \left[\varphi \left(1 + \frac{6k^2}{16-9k^2} \right) - \frac{3k^2}{16-6k^2} \left(1 + \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{6k^2}{16-9k^2} \right) \sin 2\varphi \right]. \quad (\text{IV.49})
\end{aligned}$$

В § 31 будут изложены способы вычисления эллиптических интегралов для решения главных геодезических задач относительно нормального и геоцентрического сечений, а также и геодезической линии на поверхности эллипсоида вращения.

§ 17. Другие способы получения дробно-рационального приближения

Взвешенное рациональное приближение

$$P_{mn}(x) = \frac{\sum_{k=0}^m a_k x^k}{\sum_{k=0}^n b_k x^k} \quad (IV.50)$$

к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется наилучшим, если

$$\mu(x) = \frac{f(x) - P_{mn}(x)}{W(x)} \quad (IV.51)$$

имеет наименьшее значение среди всех рациональных выражений заданных степеней вида $P_{mn}(x)$.

Существование, единственность и характерные свойства наилучшего взвешенного приближения вида (IV.51) устанавливает следующая теорема Чебышева.

Наилучшее рациональное приближение $P_{mn}(x)$ с весом $W(x)$ ($W(x) \neq 0$ для $x \in [a, b]$) на отрезке $[a, b]$ к непрерывной функции $f(x)$ существует и единственно.

Наилучшее рациональное взвешенное приближение

$$P_{mn}(x) = \frac{a_{n-\nu} x^{n-\nu} + a_{n-\nu-1} x^{n-\nu-1} + \dots + a_0}{b_{m-\lambda} x^{m-\lambda} + b_{m-\lambda-1} x^{m-\lambda-1} + \dots + b_0} = \frac{A(x)}{B(x)},$$

где $0 \leq \lambda \leq n$, $0 \leq \nu \leq m$, $b_{m-\lambda} \neq 0$ и дробь $A(x)/B(x)$ несократима, имеет N последовательных точек на отрезке $[a, b]$, в которых взвешенная разность (IV.51) принимает значения, равные μ_0 , не менее чем в $(n+m-d+2)$ точках.

В случае $P_{mn}(x) \equiv 0$ $N \geq m+2$. Величина $d = \min(\lambda, \nu)$ называется дефектом приближения (IV.50). В большинстве практически важных приближений $d=0$, т. е. $N=n+m+2$. Дефект приближения (IV.50) может быть

отличен от нуля, если числитель и знаменатель рационального приближения имеют общие корни или если коэффициенты при старших степенях знаменателя равны нулю.

Дробно-рациональные приближения некоторых функций могут быть найдены в общем виде с помощью формулы Обрешкова [76]. От приближающей функции требуется, чтобы она была дифференцируемой $(m+n+1)$ раз в заданном интервале.

Наиболее употребительный вид формулы Обрешкова без остаточного члена следующий:

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \frac{C_k^\nu}{C_{m+k}^\nu} \cdot \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x) = \\ & = \sum_{\nu=0}^m \frac{C_m^\nu}{C_{m+k}^\nu} \cdot \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0). \end{aligned} \quad (IV.51, a)$$

Положим $x_0=1$, $f(x)=x^n$, n — любое вещественное число, $m=k$, $k=1$. Тогда из формулы (IV.51, a) найдем

$$x^n = \frac{2-n+nx}{n+(2-n)x} x.$$

Процесс построения соответствующей цепной дроби, исходя из заданного дробно-рационального выражения, по методу В. Висковатова достаточно подробно описан в книге А. Н. Хованского [76]. С. С. Хлопонин [75] предложен другой метод построения цепной дроби по заданному дробно-рациональному приближению, при котором используется соотношение

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{P_{m-1}(x)}{P_m(x)} = \sum_{i=0}^{m-1} a_{1,m-1} x^i / \left(\sum_{i=0}^m a_{i,m} x^i \right) = \\ &= \frac{1}{b_0} + \frac{x}{b_1} + \frac{x}{b_2} + \dots + \frac{x}{b_{2m-1}}, \end{aligned}$$

где

$$b_0 = a_{0,m} / a_{0,m-1}, \quad a_{i,m-2} = a_{i+1,m} - b_0 a_{i+1,m-1},$$

$$i = \overline{0, m-1},$$

$$b_k = a_{0,m-k} / a_{0,m-k-1}, \quad a_{i,m-k-2} = a_{i+1,m-k} - b_k a_{i+1,m-k-1}.$$

В некоторых случаях используют преобразование отношений степенных рядов в цепную дробь

$$\frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\varphi_n \psi_{n-1}}{\varphi_{n-1} \varphi_n} x + \frac{\varphi_{n-1} \psi_{n+1}}{\varphi_n \psi_n} \right], \quad (IV.52)$$

где $\varphi_0 = \psi_0 = \psi_1 = 1$;

$$\varphi_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n} & a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & a_n & b_{2n-1} & b_{2n-2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

$$\psi_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n} & a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & a_{n+1} & b_{2n} & b_{2n-1} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

$$n \geq 1, \quad \psi_{n+1} \varphi_n \neq 0.$$

Если в выражении (IV.52) принять $b_n = 0$ для $n \geq 1$, получим формулу для преобразования степенного ряда в цепную дробь. Для практических целей преобразование (IV.52) можно записать в виде

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} x^n \right) / \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} x^n \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{(n-1)1} - a_{n1}) / 1,$$

$$a_{(k+1)n} = (a_{k(n+1)} - a_{(k-1)(n+1)}) / (a_{k1} - a_{(k-1)1}).$$

Г. Рутисхаузером [60] разработан QD-алгоритм (алгоритм частных и разностей), с помощью которого можно преобразовать степенной ряд в цепную дробь. Суть метода заключается в следующем.

Положим, что дана регулярная в бесконечности функция

$$\sum_0^{\infty} \frac{s_{\alpha}}{z^{\alpha+1}} = f(z). \quad (IV.53)$$

Применение QD-алгоритма к коэффициентам s_{α} дает все необходимые величины для записи цепной дроби для функции $f(z)$, а именно

$$f(z) = \frac{s_0}{z} - \frac{q_1^0}{1} - \frac{e_1^0}{z} - \frac{q_2^0}{1} - \frac{e_2^0}{z} - \dots \quad (IV.54)$$

Оказывается, что это удается сделать даже в тех случаях, когда ряд (IV.53) для функции $f(z)$ всюду расходится, например, для функции

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} - \frac{3}{z^4} + \dots$$

QD-схема выглядит так:

$$s_{\alpha} \begin{vmatrix} q_1^{(v)} & e_1^{(v)} & q_2^{(v)} & e_2^{(v)} & q_3^{(v)} \\ 1 & -1 & & & \\ -1 & -2 & -1 & & \\ 2 & -3 & -1 & -2 & \\ -6 & -4 & -1 & -2 & -3 \\ 24 & & -4 & -2 & -4 \\ & & & & -5 \end{vmatrix}$$

Следовательно, по формуле (IV.54) получим

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1} + \frac{1}{z} + \frac{2}{1} + \frac{2}{z} + \frac{3}{1} + \frac{3}{z} + \dots$$

Правило для применения QD-алгоритма к заданному ряду коэффициентов (констант Шварца $s_{\alpha} = s_1^{(v)}$) состо-

ит в следующем. Отправляясь от $s_1^{(v)}$, считаем последовательно ($\sigma=1, 2, 3, \dots$):

$$q_\sigma^{(v)} = s_\sigma^{v+1}/s_\sigma^v \text{ — последовательность частных,}$$

$$d_\sigma^v = q_\sigma^{v+1} - q_\sigma^v \text{ — последовательность разностей,}$$

$$e_\sigma^v = e_\sigma^v + e_{\sigma-1}^{v+1} \text{ — модифицированные разности}$$

(для $\sigma=1$ величины e_1^v и d_1^v совпадают, т.е. $e_0^v=0$),
 $s_{\sigma+1}^v = S_\sigma^{v+1} \cdot e_\sigma^v$ — последовательность новых величин s .
 Полученные таким образом величины можно расположить по схеме (QD-схема)

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 s_1^0 & & & & & & & & & \\
 & q_1^0 & & & & & & & & \\
 s_1^1 & d_1^0 = e_1^0 & s_2^0 & & & & & & & \\
 & q_1^1 & & q_2^0 & & & & & & \\
 s_1^2 & d_1^1 = e_1^1 & s_2^1 & d_2^0 & e_2^0 & s_3^0 & & & & \\
 & q_1^2 & & q_2^1 & & & & & & \\
 s_1^3 & d_1^2 = e_1^2 & s_2^2 & d_2^1 & e_2^1 & s_3^1 & q_3^0 & & &
 \end{array}$$

Система рациональных приближений (аппроксимация Паде) для функции $y=(1+x)^\alpha$ может быть представлена формулой [44]

$$\begin{aligned}
 y = (1+x)^\alpha &\approx \frac{\sum_{t=0}^{n-k} C_{n-k}^t \frac{(-\alpha-k)t}{(-n)_t} x^t}{\sum_{t=0}^k C_k^t \frac{(\alpha-n+k)t}{(-n)_t} x^t} = \\
 &= \frac{p_{n-k}(x)}{q_k(x)}, \quad (IV.55)
 \end{aligned}$$

где $x < 1$, $n=0, 1, \dots$, $k=0, 1, \dots, n$.

Приняв в формуле (IV.55) $n=2n-1$, $k=n$, $\alpha=-1/2$, получим приближение для функции $y=(1+x)^{-1/2}$ подходящими дробями только четного порядка

$$\begin{aligned}
 y = (1+x)^{-1/2} &= \frac{\sum_{t=0}^{n-1} C_{n-1}^t \frac{(0,5-n)t}{(1-2n)_t} x^t}{\sum_{t=0}^n C_n^t \frac{(0,5-n)t}{(1-2n)_t} x^t} + \\
 &+ r_{2n}(x)
 \end{aligned}$$

$$+ r_{2n}(x) = \frac{p_{2n}(x)}{q_{2n}(x)} + r_{2n}(x). \quad (IV.56)$$

Если в выражении (IV.55) примем $n=2n$, $k=n$ и $\alpha=-1/2$, то получим приближение для той же функции $y=(1+x)^{-1/2}$, но уже подходящими дробями только нечетного порядка

$$\begin{aligned}
 y = (1+x)^{-1/2} &= \frac{\sum_{t=0}^n C_n^t \frac{(0,5-n)t}{(-2n)_t} x^t}{\sum_{t=0}^n C_n^t \frac{(-0,5-n)t}{(-2n)_t} x^t} + \\
 &+ r_{2n+1}^{(1)}(x) = \frac{p_{2n+1}(x)}{q_{2n+1}(x)} + r_{2n+1}^{(1)}(x). \quad (IV.57)
 \end{aligned}$$

Относительно четных подходящих дробей (IV.56) для функции $y=(1+x)^{-1/2}$ В. Е. Корниловым [44] доказано следующее равенство:

$$\frac{p_{2n}(x)}{q_{2n}(x)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+x \sin^2\left(\frac{2\pi t - \pi}{4n}\right)}. \quad (IV.58)$$

Выражение (IV.56) можно переписать в таком виде:

$$y = (1+x)^{-1/2} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{1+x \sin^2\left(\frac{2\pi t - \pi}{4n}\right)} + r_{2n}(x). \quad (IV.59)$$

§ 18. Некоторые обобщения цепных дробей

1. Связь метода матриц створией цепных дробей. В § 14 было указано, что теория цепных дробей строится при помощи основных рекуррентных соотношений (IV.9). Естественно рассмотреть обобщения цепных дробей, основанные на других линейных рекуррентных соотношениях, связывающих числители и

знаменатели соседних подходящих дробей. В частности, можно рассмотреть соотношения вида

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \alpha_n P_{n-1} + \beta_n Q_{n-1}, \\ Q_n &= \gamma_n P_{n-1} + \delta_n Q_{n-1}. \end{aligned} \right\} n = (1, 2, 3, \dots) \quad (\text{IV.60})$$

С помощью матриц эти равенства можно записать

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (\text{IV.61})$$

При этом величины $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ принимают различные вещественные значения в зависимости от значения индекса n .

Найдем теперь условия, при которых равенства (IV.60) могут перейти в равенства (IV.9). Для этого заменим в равенствах (IV.60) n на $n-1$, найдем Q_{n-1} и P_{n-1} из полученных соотношений и подставим их в равенства (IV.60). Для краткости обозначим $\alpha_{n-1}\delta_{n-1} - \beta_{n-1}\gamma_{n-1} = \Delta_{n-1}$, тогда получим

$$P_n = \left(\alpha_n + \frac{\beta_n \delta_{n-1}}{\beta_{n-1}} \right) P_{n-1} - \frac{\beta_n \Delta_{n-1}}{\beta_{n-1}} P_{n-2} \quad (\text{IV.62})$$

и

$$Q_n = \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \alpha_{n-1} + \delta_n \right) Q_{n-1} - \frac{\gamma_n \Delta_{n-1}}{\gamma_{n-1}} Q_{n-2}. \quad (\text{IV.63})$$

Равенства (IV.62) и (IV.63) показывают, что P_n и Q_n можно считать числителями и знаменателями подходящей дроби n -го порядка некоторой цепной дроби в том случае, если выполняются условия

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \alpha_{n-1} + \delta_n = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} \delta_{n-1} + \alpha_n, \quad \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

Этим условиям можно придать вид

$$\frac{\alpha_n - \beta_n}{\beta_n} = \frac{\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}}{\beta_{n-1}} = \dots = \frac{\alpha_1 - \delta_1}{\beta_1} \equiv B, \quad (\text{IV.64})$$

$$\frac{\beta_n}{\gamma_n} = \frac{\beta_{n-1}}{\gamma_{n-1}} = \dots = \frac{\beta_1}{\gamma_1} \equiv \frac{1}{A}. \quad (\text{IV.65})$$

Отсюда следует, что матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \frac{\gamma_1}{\beta_1} \beta_n & \alpha_n - \frac{\alpha_1 - \delta_1}{\beta_1} \beta_n \end{pmatrix} \quad (n \geq 1) \quad (\text{IV.66})$$

равноценна цепной дроби, частные числители которой a_n и частные знаменатели b_n выражаются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} (\beta_{n-1} \gamma_{n-1} - \alpha_{n-1} \delta_{n-1}), \\ \beta_n &= \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} \delta_{n-1} + \alpha_n \quad (n \geq 2). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.67})$$

Из соотношений

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 b_0 + \beta_1 \\ \gamma_1 b_0 + \delta_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_0 b_1 + a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

находим нулевое и первое звено цепной дроби. Таким образом, матрица (IV.66) вместе с матрицей $\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ 1 & \delta_0 \end{pmatrix}$ приводит к цепной дроби

$$\begin{aligned} b_0 + & \frac{\beta_1 + (\alpha_1 - \delta_1) b_0 - \gamma_1 b_0^2}{\gamma_1 b_0 + \delta_1} + \frac{\beta_2 (\beta_1 \gamma_1 - \alpha_1 \delta_1)}{\beta_1} + \\ & \frac{\beta_2}{\beta_2} (\beta_2 \gamma_2 - \alpha_2 \delta_2) + \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} (\beta_{n-1} \gamma_{n-1} - \alpha_{n-1} \delta_{n-1}) + \\ & + \alpha_3 + \frac{\beta_3}{\beta_2} \delta_2 + \alpha_n + \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} \delta_{n-1} + \dots \end{aligned} \quad (\text{IV.68})$$

На основании формул (IV.64) и (IV.65) уравнениям (IV.60) можно придать вид

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \alpha_n P_{n-1} + \beta_n Q_{n-1}, \\ Q_n &= A \beta_n P_{n-1} + (\alpha_n - B \beta_n) Q_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.69})$$

Рассмотрим теперь вопрос о возможности перехода от цепной дроби к равноценной ей матрице. Для этого решим систему (IV.69) относительно α_n и β_n . Получим

$$\alpha_n = \frac{P_n (A P_{n-1} - B Q_{n-1}) - Q_n Q_{n-1}}{K_n},$$

$$\beta_n = \frac{Q_n P_{n-1} - P_n Q_{n-1}}{K_n} = (-1)^n \frac{a_1 \dots a_n}{K_n},$$

где $K_n = AP_{n-1}^2 - BP_{n-1}Q_{n-1} - Q_{n-1}^2$.

Примем следующие начальные условия: $\alpha = 1, \beta_1 = 1, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 1, A = 0, B = 0$. Тогда матрица (IV.66) примет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{Q_n}{Q_{n-1}} & \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}^2} \\ 0 & \frac{Q_n}{Q_{n-1}} \end{pmatrix}. \quad (IV.70)$$

Теперь предположим, что имеется матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (IV.71)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — вещественные числа.

Повторяя предыдущие выводы, найдем

$$P_n = (\alpha + \delta)P_{n-1} - (\alpha\delta - \beta\gamma)P_{n-2},$$

$$Q_n = (\alpha + \delta)Q_{n-1} - (\alpha\delta - \beta\gamma)Q_{n-2},$$

а также

$$a_n = \beta\gamma - \alpha\delta, \quad b_n = \alpha + \delta,$$

$$a_1 = \beta + (\alpha - \delta)b_0 - \gamma b_0^2, \quad b_1 = \gamma b_0 + \delta.$$

Следовательно, искомая цепная дробь имеет вид

$$b_0 + \frac{\beta + (\alpha - \beta)b_0 + \gamma b_0^2}{\gamma b_0 + \delta} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\alpha + \delta} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\alpha + \delta} + \dots \quad (IV.72)$$

Цепная дробь (IV.72) является частным случаем цепной дроби (IV.68). Так как $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \beta, \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha, \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = \gamma, \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = \delta$ и, следовательно, $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\beta_3}{\beta_2} = \dots = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} = 1$.

Пример. Матрица

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

при начальном значении $b_0 = 2$ равноценна цепная дробь

$$2 + \frac{3}{8 + \frac{1}{9 + \frac{1}{9 + \frac{1}{9 + \dots}}}},$$

которая, начиная со второго звена, является даже правильной.

Матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — вещественные числа, равноценная цепной дроби (IV.71), имеет вид

$$\frac{1}{a_1} \begin{pmatrix} b_0 a + (b - b_1)(b_0 b_1 + a_1) & (b_0 b_1 + a_1)[b_0(b_1 - b) + a_1] b_0^2 a \\ b_1(b - b_1) + a & b_0 b_1(b_1 - b) + a_1 b_1 - b_0 a \end{pmatrix}. \quad (IV.73)$$

Ранее отмечалось, что одним из методов улучшения сходимости цепной дроби является ее сжатие. Однако сжатие цепной дроби производится по сложной формуле (IV.15) и требует значительных вычислений. Метод матриц позволяет провести это сжатие гораздо проще, так как все сводится лишь к возведению матрицы в степень с натуральным показателем.

Следует отметить, что в такой постановке вопроса речь идет только о сжатии периодических цепных дробей. Применение матричного метода для сжатия непериодических цепных дробей весьма затруднительно. Дело в том, что цепную дробь с переменными элементами можно представить в матричном виде (IV.70) только при условии, если будут найдены знаменатели подходящих дробей. Перевод же непериодической цепной дроби в периодическую можно сделать далеко не всегда.

Итак, для того чтобы провести сжатие цепной дроби (IV.5) (обязательно периодической), необходимо, во-первых, перейти от исходной цепной дроби (IV.5) к равноценной матрице (IV.73); во-вторых, возвести в зависимости от типа задачи эту матрицу в степень с натуральным показателем; в-третьих, от усиленной таким образом матрицы перейти к цепной дроби по формуле (IV.72).

В общем виде этот процесс можно представить таким образом:

$$\begin{pmatrix} P_{n+k} \\ Q_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{k+1} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (IV.74)$$

Пример. Возьмем цепную дробь

$$4 - \frac{1}{9 - \frac{1}{9 - \frac{1}{9} \dots}}$$

и проведем ее сжатие. Матрица (IV.66), равноценная этой дроби, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Возведем эту матрицу в четвертую степень, получим

$$\begin{pmatrix} 1764 & 13509 \\ 711 & 3475 \end{pmatrix}.$$

По формуле (IV.72) найдем сжатую цепную дробь

$$4 - \frac{711}{6319} - \frac{1}{6239} - \dots$$

2. Экономизация цепных дробей. Метод экономизации цепных дробей заключается в следующем.

Пусть функция $f(x)$ аппроксимирована цепной дробью вида

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2x}{b_2 + \frac{a_3x}{b_3 + \dots}}}$$

и пусть эта аппроксимация является при фиксированном числе членов наилучшей в малой окрестности точки $d \in [-1, 1]$. Необходимо найти новые коэффициенты a_i ($i = \overline{1, n}$), обеспечивающие более быструю сходимость подходящей цепной дроби P_n/Q_n к функции $f(x)$ в интервале $[-1, 1]$. Для этого можно воспользоваться рекуррентной формулой

$$\bar{a}_k = a_k \left[1 - (-1)^{n-k} c_{k-1} \prod_{i=k}^n p_i \right], \quad k = \overline{1, n},$$

где $p_i = a_{k+1}/(b_k b_{k+1})$; величины c_k определяются для фиксированного n как коэффициенты, стоящие перед x^α ($\alpha = \overline{0, n}$) уравнения $2^{-(n-1)} T_n = x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_0$, полученного из полиномов Чебышева T_n степени n .

Если $f(x)$ — нечетная функция, т. е.

$$f(x) = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2x^2}{b_2 + \frac{a_3x^2}{b_3 + \dots}}},$$

коэффициенты a_k определяют из рекуррентных формул

$$\bar{a}_k = a_k \left[1 - c_{2k-2} \prod_{i=k}^n p_i \right], \quad k = \overline{1, n};$$

$$p_k = a_{k+1}/(b_k b_{k+1});$$

коэффициенты c_{2k-2} получают из равенства

$$2^{-(2n-1)} T_{2n}(x) = x^{2n} + c_{2n-2} x^{2n-2} + c_{2n-4} x^{2n-4} + \dots + c_0.$$

Если $f(x)$ — нечетная функция, т. е.

$$f(x) = \frac{a_1x}{b_1 + \frac{a_2x^2}{b_2 + \frac{a_3x^2}{b_3 + \dots}}},$$

$$\bar{a}_k = a_k \left[1 - c_{2k-1} \prod_{i=k}^n p_i \right], \quad p_k = a_{k+1}/(b_k b_{k+1}), \quad k = \overline{1, n},$$

коэффициенты c_k определяют из равенства

$$2^{-2n} T_{2n+1}(x) = x^{2n+1} + c_{2n-1} x^{2n-1} + c_{2n-3} x^{2n-3} + \dots + c_1 x.$$

3. Использование метода невязок для ускорения сходимости цепных дробей. Пусть функция $y=f(x)$ аппроксимирована цепной дробью и эта аппроксимация является наилучшей в окрестности некоторой точки $d \in [a, b]$. Необходимо найти способ замены аргумента x невязкой $z_0 = F(x, y_0)$ уравнения $F(x, y) = 0$, где y — искомая функция; y_0 — приближенное значение функции $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Такая замена при соответствующем выборе y_0 обеспечивает ускорение сходимости подходящей дроби P_n/Q_n к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. При этом можно воспользоваться соотношениями, полученными при разложении некоторых элементарных функций в ряды невязок.

§ 19. Восходящие цепные дроби и первый алгоритм Остроградского

В работе Е. Я. Ремеза [58] приводятся два алгоритма М. В. Остроградского для приближения действительных чисел с помощью рациональных. К сожалению, теоретическое рассмотрение обоих алгоритмов Остроградским ограничивается указанием остаточного члена для первого алгоритма. Рассмотрим возможность применения восходящих цепных дробей для тех же целей.

Первый алгоритм

$$\omega = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_0 p_1} + \frac{1}{p_0 p_1 p_2} - \dots + \frac{(-1)^n}{p_0 p_1 \dots p_n} + \frac{(-1)^{n+1} \theta_n}{p_0 p_1 \dots p_n (p_{n+1})}. \quad (\text{IV.75})$$

Е. Я. Ремез дает следующую геометрическую схему построения алгоритма [58].

Число ω представляется как отношение двух однородных положительных величин — отрезков A и B ; $\omega = A/B$ ($A < B$) с условием, что предварительно из рассматриваемых чисел выделена целая часть. Чтобы определить $\omega = A/B$, пользуясь первым алгоритмом Остроградского, откладываем A на B до получения остатка $A_1 < A$ (пусть $B = p_0 A + A_1$); далее откладываем остаток A_1 не на меньшем отрезке A , а на том же отрезке B до получения нового остатка $A_2 < A_1$ (пусть $B = p_1 A_1 + A_2$); откладывая A_2 на том же B до бесконечности или до получения нулевого остатка, мы будем получать: $B = p_2 A_2 + A_3$, $B = p_3 A_3 + A_4 \dots$. Можно утверждать, что имеет место точное разложение

$$\omega = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_0 p_1} + \frac{1}{p_0 p_1 p_2} - \dots + \frac{(-1)^n}{p_0 p_1 \dots p_n} + \frac{(-1)^{n+1} \theta_n}{p_0 p_1 \dots p_n (p_{n+1})},$$

$$p_0 < p_1 < p_2 < \dots; \quad 0 < \theta_n < 1.$$

В дальнейшем Е. Я. Ремез указывает на некоторые элементы сходства первого алгоритма Остроградского с аппаратом непрерывных цепных дробей. Сравнивая же точности n -х приближений, получаемых с помощью обоих аппаратов, Е. Я. Ремез приходит к заключению, что «если, однако, исходить из учета максимальной величины аргіогі возможной погрешности n -го приближения при использовании одним и другим аппаратом, независимо от частного выбора аппроксимируемого действительного числа, то мы, в случае алгоритма Остроградского, придем к члену ряда

$$1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots + \frac{(-1)^n}{1 \cdot 2 \dots n},$$

именно к $\frac{1}{(n+2)!}$ ($n=0, 1, 2, 3, \dots$), а в случае алгоритма непрерывных дробей — к числу $\pm \frac{1}{u_{n+2} u_{n+3}}$ знакопеременного

ряда, равносильного разложению в непрерывную дробь отношения «золотого деления»:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{u_{n+2} u_{n+3}}}}}$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$.

Здесь уже величина $\frac{1}{u_{n+1} u_{n+1}}$ ($n=0, 1, 2, \dots$), где $ak_1^n + bk_2^n$ — числа Фибоначчи, убывает асимптотически по более слабому закону геометрической прогрессии (см. 37 [58]).

Ниже показано, что первый алгоритм Остроградского можно получить из так называемых восходящих цепных дробей с отрицательными звеньями.

Можно построить непрерывную дробь $K^{(n)}$ и в таком виде [16]:

$$K^{(n)} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} \dots \quad (IV.76)$$

Частные значения такой дроби определяют с помощью следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} x_{n-1} &= \frac{a_n}{b_n}, \\ x_{n-2} &= \frac{a_{n-1} + x_{n-1}}{b_{n-1}}, \\ &\dots \dots \dots \\ x_2 &= \frac{a_3 + x_3}{b_3}, \\ x_1 &= \frac{a_2 + x_2}{b_2}. \end{aligned} \right\} \quad (IV.77)$$

Следовательно,

$$K^{(n)} = \frac{a_1 + x_1}{b_1} \quad (IV.78)$$

Дроби, записанные в виде (IV.76), называются восходящими (aufsteigende) непрерывными, или цепными, дробями.

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} M^{(1)} &= a_1, & N^{(1)} &= b_1, \\ M^{(2)} &= a_1 b_2 + a_2 = b_2 M^{(1)} + a_2, & N^{(2)} &= b_1 b_2, \\ M^{(n)} &= b_n M^{(n-1)} + a_n, & N^{(n)} &= b_1 b_2 \dots b_n, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.79})$$

Тогда

$$K^{(n)} = \frac{M^{(n)}}{N^{(n)}} = \frac{b_n M^{(n-1)} + a_n}{b_1 b_2 \dots b_n},$$

$$K^{(n+1)} = \frac{b_n M^{(n-1)} + a_n + a_{n+1} b_{n+1}}{b_1 b_2 \dots b_{n+1}} = \frac{b_{n+1} M^{(n)} + b_{n+1}}{b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1}}.$$

Далее можно записать

$$K^{(r)} = \frac{M^{(r)}}{N^{(r)}} = \frac{M^{(r-1)}}{N^{(r-1)}} + \frac{a_r}{b_1 b_2 \dots b_r} \quad (r = 2, 3, \dots). \quad (\text{IV.80})$$

От сложения $(n-1)$ уравнений типа (IV.80) получим

$$K^{(n)} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \frac{a_3}{b_1 b_2 b_3} + \dots + \frac{a_n}{b_1 b_2 \dots b_n}. \quad (\text{IV.81})$$

Уравнение (IV.81) представляет восходящие цепные дроби в виде ряда. Предположим, что $a_i = 1$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), тогда получим ряд, напоминающий первый алгоритм Остроградского.

Построим восходящую цепную дробь (IV.76) с отрицательными звеньями

$$K^{(n)} = \frac{1}{b_0} - \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3} - \dots \quad (\text{IV.82})$$

По уравнениям (IV.77) подсчитываем частные значения вновь построенной дроби

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \frac{b_3 - 1}{b_2 b_3}; & x_2 &= \frac{b_2 b_3 - b_3 + 1}{b_1 b_2 b_3}; \\ x_1 &= \frac{b_1 b_2 b_3 - b_2 b_3 + b_3 - 1}{b_0 b_1 b_2 b_3}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.83})$$

Если провести почленное деление в выражении (IV.83), то получим

$$K^{(n)} = \frac{1}{b_0} - \frac{1}{b_0 b_1} + \frac{1}{b_0 b_1 b_2} - \frac{1}{b_0 b_1 b_2 b_3} + \dots \quad (\text{IV.84})$$

Таким образом, мы получили первый алгоритм Остроградского.

Следует заметить, что теория восходящих цепных дробей разработана недостаточно даже в специальной математической литературе. Так, например, у нас в СССР этому вопросу посвящено не более двух статей самого элементарного содержания.

§ 20. Ветвящиеся цепные дроби

Естественным обобщением цепной дроби является ветвящаяся цепная дробь

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{b_1^{(0)}}{a_1 + \frac{b_{11}^{(1)}}{a_{11}^{(2)}} + \dots + \frac{b_{1s}^{(1)}}{a_{1s}^{(2)}}} + \\ + \dots + \frac{b_s^{(0)}}{a_s^{(1)} + \frac{b_{s1}^{(1)}}{a_{s1}^{(2)}} + \dots + \frac{b_{ss}^{(1)}}{a_{ss}^{(2)}}}, \end{aligned} \quad (\text{IV.85})$$

понятие которой впервые было введено В. Я. Скоробатко [28].

Ветвящиеся цепные дроби описывают функции многих переменных так же, как обыкновенные цепные дроби описывают функции одной переменной.

Основная идея этого обобщения следует из таких соображений. Обыкновенную цепную дробь

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_k}{b_k} + \dots \quad (\text{IV.86})$$

легко представить графом, если конструктивный элемент дроби (IV.86)

$$\frac{k}{m+n} \quad (IV.87)$$

изобразить так: числу k ставим в соответствие точку, а числам m и n — концы стрелок, восходящих из точки k . Если на построенном таким образом графе опустить буквенные обозначения, то цепная дробь (IV.87) в такой интерпретации изобразится геометрической фигурой, напоминающей частный случай ветки дерева.

Естественно, что существуют графы более сложной структуры, в частности, графы, напоминающие дерево с разветвленной кроной. Но иногда геометрическому дереву соответствует дробь при условии, что вершины дерева имеют числа и ветки ориентированы стрелками, причем элемент

$$\frac{k}{m_1+m_2+\dots+m_k} \quad (IV.88)$$

изобразится так: число k ставим к точке, а числа m_i ($i=1, 2, \dots, n$) — к концам стрелок, выходящих из точки K . Дроби, которым в указанной выше интерпретации соответствуют деревья с разветвленной кроной, называют ветвящимися цепными дробями.

Приведем некоторые теоремы, относящиеся к ветвящимся цепным дробям [28].

Теорема 1. Если при вычислении элементов ветвящейся цепной дроби

$$\alpha_0 + \sum_{k_0=1}^n \frac{1}{\alpha_{k_0}^{(1)}} + \sum_{k_1=1}^n \frac{1}{\alpha_{k_0 k_1}^{(2)}} + \dots + \sum_{k_m=1}^n \frac{1}{\alpha_{k_0 k_1 \dots k_m}^{(n)}} \quad (IV.89)$$

допущены некоторые ограничения относительно ошибки, то относительная ошибка вычислений этой дроби не превышает максимальную относительную ошибку ее элементов независимо от числа этажей и разветвлений.

Теорема 2. Любую ветвящуюся цепную дробь мо-

жно эквивалентными преобразованиями привести к виду (IV.89).

Теорема 3. Многомерная функциональная цепная дробь типа Эйлера может быть представлена в виде

$$\alpha_0 + \frac{\sum_{k=1}^N \alpha_k^{(1)} \chi_k}{1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^N \alpha_k^{(n)} \chi_k}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k^{(n)} \chi_k} \quad (IV.90)$$

В работе [28] показано, что ветвящиеся цепные дроби весьма эффективно могут применяться при решении обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с частными производными, а также при решении некоторых нелинейных уравнений с начальными условиями.

На наш взгляд, особое внимание заслуживает представление алгоритмов Остроградского с помощью ветвящихся цепных дробей.

Для определения величины ω М. В. Остроградским дан первый алгоритм в таком виде:

$$\omega = \frac{A}{B}, \quad (IV.91)$$

где

$$\left. \begin{aligned} B &= p_0 A + A_1, \\ B &= p_1 A_1 + A_2, \\ B &= p_2 A_2 + A_3, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (IV.92)$$

Кроме того, справедливы следующие неравенства:

$$1) B > A > A_1 > A_2 > \dots > A_n > \dots, \quad (IV.93)$$

$$2) p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n < \dots, \quad (IV.94)$$

$$3) \omega = \frac{A}{B} \equiv \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_0 p_1} + \frac{1}{p_0 p_1 p_2} - \dots + \frac{(-1)^{(n)}}{p_0 p_1 \dots p_n} + \dots \quad (IV.95)$$

Итак,

$$\omega = \frac{A}{B} = \frac{1}{p_0} \left(1 - \frac{A_1}{B} \right). \quad (IV.96)$$

Если учесть уравнения (IV.92), то последнее выражение можно записать в таком виде:

$$\omega = \frac{A}{B} = \frac{1}{p_0} \left(1 - \frac{1}{p_1 + \frac{A_2}{A_1}} \right). \quad (IV.97)$$

Из уравнений (IV.92) имеем рекуррентные соотношения

$$p_n A_n + A_{n+1} = p_{n+1} A_{n+1} + A_{n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

а также

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{p_n}{p_{n+1} - 1 + \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (IV.98)$$

Подставив уравнение (IV.98) в формулу (IV.97), найдем выражение первого алгоритма М. В. Остроградского в виде нисходящей дроби

$$\omega = \frac{A}{B} = \frac{1}{p_0} \left(1 - \frac{1}{p_1 + \frac{p_2}{p_2 - 1 + \frac{p_3}{p_3 - 1 + \dots + \frac{p_n}{p_{n+1} - 1 + \dots}}} \right) \quad (IV.99)$$

Оценка дроби (IV.99) дается выражением

$$\left| \omega - \frac{p_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{(n+2)!}.$$

В другом алгоритме М. В. Остроградского вычисление величин A и B дается с помощью выражений

$$\left. \begin{aligned} B &= q_0 A + A_1, \\ q_0 B &= q_1 A_1 + A_2, \\ q_0 q_1 B &= q_2 A_2 + A_3, \\ &\dots \dots \dots \\ q_0 q_1 \dots q_{n-1} B &= q_n A_n + A_{n+1}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (IV.100)$$

Кроме того, справедливы следующие закономерности:

$$1) B > A > A_1 > A_2 > \dots > A_n > \dots, \quad (IV.101)$$

$$2) q_1 \geq q_0 (q_0 + 1), \\ q_2 \geq q_1 (q_1 + 1) \dots q_{n+1} \geq q_n (q_n + 1) \dots, \quad (IV.102)$$

$$3) \omega = \frac{A}{B} = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} - \dots + \frac{(-1)^n}{q_n} + \dots. \quad (IV.103)$$

Без доказательства отметим, что второй алгоритм М. В. Остроградского с помощью нисходящих цепных дробей представляется следующим образом [28]:

$$\omega = \frac{A}{B} = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1 + \frac{q_1^2}{q_2 - q_1 + \frac{q_2^2}{q_3 - q_2 + \dots + \frac{q_n^2}{q_{n+1} - q_n + \dots}}}} \quad (IV.104)$$

Причем

$$q_n^2 A_n + q_n A_{n+1} = q_{n+1} A_{n+1} + A_{n+2},$$

а также

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{q_n^2}{q_{n+1} - q_n + \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (IV.105)$$

Обобщение и представление первого алгоритма с помощью ветвящихся цепных дробей состоит в следующем [28]. Рассмотрим, во-первых, случай $N=3$. При этом $A_0 < A < B$, тогда уравнения (IV.92) представляются в виде

$$B = p_0^{(1)} A + A'_1, \quad A'_1 = p_0^{(2)} A_0 + A'_1,$$

где $A'_1 < A$, $A_1 < A_0$, $A_1 \leq A'_1$, и $A > A_0 > A_1$.

Следовательно,

$$B = p_0^{(1)} A + p_0^{(2)} A_0 + A_1.$$

Продолжая аналогичные рассуждения, находим:

$$\left. \begin{aligned} B &= p_0^{(1)} A + p_0^{(2)} A_0 + A_1, \\ B &= p_1^{(1)} A_0 + p_1^{(2)} A_1 + A_2, \\ B &= p_2^{(1)} A_1 + p_2^{(2)} A_2 + A_3. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.106})$$

Тогда

$$\omega = \frac{A}{B} = \frac{1}{p_0^{(1)}} \left[1 - p_0^{(2)} \frac{A_0}{B} - \frac{A_1}{B} \right].$$

Используя второе и третье равенства (IV.106), после элементарных преобразований получаем

$$\omega = \frac{1}{p_0^{(1)}} \left[1 - \frac{p_0^{(2)}}{p_1^{(1)} + p_1^{(2)} \frac{A_1}{A_0} + \frac{A_2}{A_0}} \dots \right]. \quad (\text{IV.107})$$

Из сравнения двух соседних равенств (IV.106) получим рекуррентные формулы

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{p_n^{(1)}}{[p_{n+2}' - p_{n+1}^{(2)}] + (p_{n+2}^{(2)} - 1) \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} + \frac{A_{n+3}}{A_{n+1}}}, \quad (\text{IV.108})$$

$$\frac{A_{n+3}}{A_{n+1}} = \frac{p_{n+2}^{(1)}}{(p_{n+3}^{(2)} - 1) + \frac{p_{n+3}^{(1)} - p_{n+2}^{(2)}}{A_{n+3}/A_{n+2}} + \frac{A_{n+4}}{A_{n+3}}}. \quad (\text{IV.109})$$

Подставляя равенства (IV.108) и (IV.109) в уравнение (IV.107), получим представление ω в виде ветвящихся цепных дробей

$$\omega = \frac{1}{p_0^{(1)}} \left[1 - \frac{p_0^{(2)}}{p_1^{(1)} + \frac{p_1^{(2)} p_0^{(1)}}{(p_2^{(1)} - p_1^{(2)} + \dots) + \frac{p_1^{(1)}}{(p_2^{(2)} - 1) + \dots}} \right]$$

$$\left. \dots \left[1 - \frac{p_{N-1}^{(2)}}{p_N^{(1)} + \frac{p_N^{(2)} p_{N-1}^{(1)}}{(p_{N+1}^{(1)} - p_N^{(2)} + \dots) + \frac{p_N^{(1)}}{(p_{N+1}^{(2)} - 1) + \dots}} \right] \right]. \quad (\text{IV.110})$$

Заметим, что при определении величины ω для N чисел получим ветвящуюся цепную дробь с $N-1$ ветвями, при этом

$$A_1 = \sum_{i=1}^N p_0^{(i)} A_{i+1},$$

$$A_1 = \sum_{i=1}^N p_k^{(i)} A_{i+k+1},$$

где $p_i^{(N)} = 1$ ($i=1, 2, \dots$).

§ 21. Алгоритмы вычисления некоторых функций

Вопросам вычисления элементарных функций посвящено много работ. Среди специалистов-практиков широко известны две монографии [43], [48]. Ниже приведены алгоритмы, не вошедшие в указанные работы, но имеющие важное значение.

В § 14 указывалось, что если члены звеньев цепной дроби положительны, то подходящие дроби четного порядка образуют монотонно возрастающую последовательность, а подходящие дроби нечетного порядка — монотонно убывающую последовательность. При этом, если цепная дробь сходится, то ее значение больше любой ее подходящей дроби четного порядка и меньше любой ее подходящей дроби нечетного порядка.

Для монотонно возрастающей последовательности к $\sqrt[n]{D}$ снизу можно написать следующую систему формул [76]:

$$m < \frac{A_2}{B_2} < \frac{P}{Q} < \frac{P'}{Q'} < \frac{P''}{Q''} < \dots < \sqrt[n]{D},$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_0}{B_0} &= \frac{m}{1}, \\ \frac{A_2}{B_2} &= \frac{m[(v-1)m^v + (v+1)D]}{(v+1)m^v + (v-1)D}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{p^{(n)}}{Q^{(n)}} &= \frac{p^{(n-1)}}{Q^{(n-1)}} \times \\ &\times \frac{[(v-1)(p^{(n-1)})^v + (v+1)D(Q^{(n-1)})^v]}{[(v+1)(p^{(n-1)})^v + (v-1)D(Q^{(n-1)})^v]} \end{aligned} \right\} \text{(IV.111)}$$

Монотонно убывающая последовательность приближений к $\sqrt[v]{D}$ сверху состоит из следующей системы формул:

$$\frac{A_i}{B_i} > \frac{R}{s} > \frac{R'}{s'} > \frac{R''}{s''} > \dots > \sqrt[v]{D},$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_i}{B_i} &= \frac{(v-1)m^v + D}{vm^{v-1}}, \\ \frac{R'}{s} &= \frac{A_i}{B_i} \cdot \frac{[(v-1)A_i^v + (v+1)DB_i^v]}{(v+1)A_i^v + (v-1)DB_i^v}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{R^{(n)}}{s^{(n)}} &= \frac{R^{(n-1)}}{s^{(n-1)}} \cdot \frac{[(v-1)(R^{(n-1)})^v + (v+1)D(s^{(n-1)})^v]}{[(v+1)(R^{(n-1)})^v + (v-1)D(s^{(n-1)})^v]} \end{aligned} \right\} \text{(IV.112)}$$

Пользуясь итерационными формулами (IV.111), (IV.112), приведем результаты вычислений для функции $V = \sqrt{1+e^{2B} \cos^2 B}$. Значение широты взято $B = 40^\circ 30'$. Приближения к функции снизу (IV.111):

$$\begin{aligned} (V)_1 &= 1,00194626993014738; \\ (V)_2 &= 1,00194627177146041; \\ (V)_3 &= 1,00194627177146041. \end{aligned}$$

Приближения к функции V сверху (IV.112):

$$\begin{aligned} (V)_1 &= 1,00194816575836460; \\ (V)_2 &= 1,00194627177146041; \\ (V)_3 &= 1,00194627177146041. \end{aligned}$$

В работе [76] отмечается, что общий вид разложения в цепную дробь функций $\sin x$ и $\cos x$ неизвестен. По методу Висковатова, как и способом непосредственного преобразования степенного ряда в соответствующие цепные дроби, можно найти лишь некоторое число звеньев:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{10} - \frac{11x^2}{42} + \frac{25x^2}{66} - \frac{121x^2}{150} + \\ &+ \frac{18361x^2}{34606} - \dots, \end{aligned} \quad \text{(IV.113)}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{x}{1} + \frac{x^2}{6} - \frac{7x^2}{10} + \frac{11x^2}{98} - \frac{551x^2}{198} + \frac{847x^2}{1102} - \\ &- \frac{479249x^2}{34606} + \dots, \end{aligned} \quad \text{(IV.114)}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{3x^2}{10} + \frac{13x^2}{126} - \\ &- \frac{59x^2}{26} + \frac{127x^2}{1298} - \dots, \end{aligned} \quad \text{(IV.115)}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^2}{6} + \frac{3x^2}{50} - \frac{313x^2}{126} + \\ &+ \frac{295x^2}{626} - \frac{14615x^2}{1298} + \dots \end{aligned} \quad \text{(IV.116)}$$

Нечетные подходящие дроби разложений (IV.113), (IV.114), (IV.115) и (IV.116) совпадают.

Получим разложение $\sin x$ в бесконечную дробь, исходя из тождества

$$\begin{aligned} (a+1)F(-a; 1; b+2; -1) + (b+1)F(-b; 1; a+2; -1) &= \\ = 2^{a+b+1} \frac{\Gamma(a+2)\Gamma(b+2)}{\Gamma(a+b+2)}; \end{aligned}$$

$$a, b \neq -2, -3, -4, \dots \quad \text{(IV.117)}$$

Предположим, что в тождестве (IV.117) $b = -a$.

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_0}{B_0} &= \frac{m}{1}, \\ \frac{A_2}{B_2} &= \frac{m[(v-1)m^v + (v+1)D]}{(v+1)m^v + (v-1)D}, \\ \dots \\ \frac{P^{(n)}}{Q^{(n)}} &= \frac{P^{(n-1)}}{Q^{(n-1)}} \times \\ &\times \frac{[(v-1)(P^{(n-1)})^v + (v+1)D(Q^{(n-1)})^v]}{[(v+1)(P^{(n-1)})^v + (v-1)D(Q^{(n-1)})^v]} \end{aligned} \right\} \text{(IV.111)}$$

Монотонно убывающая последовательность приближений к $\sqrt[v]{D}$ сверху состоит из следующей системы формул:

$$\frac{A_1}{B_1} > \frac{R}{s} > \frac{R'}{s'} > \frac{R''}{s''} > \dots > \sqrt[v]{D},$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1}{B_1} &= \frac{(v-1)m^v + D}{vm^{v-1}}, \\ \frac{R'}{s} &= \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{[(v-1)A_1^v + (v+1)DB_1^v]}{(v+1)A_1^v + (v-1)DB_1^v}, \\ \dots \\ \frac{R^{(n)}}{s^{(n)}} &= \frac{R^{(n-1)}}{s^{(n-1)}} \cdot \frac{[(v-1)(R^{(n-1)})^v + (v+1)D(s^{(n-1)})^v]}{[(v+1)(R^{(n-1)})^v + (v-1)D(s^{(n-1)})^v]} \end{aligned} \right\} \text{(IV.112)}$$

Пользуясь итерационными формулами (IV.111), (IV.112), приведем результаты вычислений для функции $V = \sqrt{1+e^2 \cos^2 B}$. Значение широты взято $B = 40^\circ 30'$. Приближения к функции снизу (IV.111):

$$(V)_1 = 1,00194626993014738;$$

$$(V)_2 = 1,00194627177146041;$$

$$(V)_3 = 1,00194627177146041.$$

Приближения к функции V сверху (IV.112):

$$(V)_1 = 1,00194816575836460;$$

$$(V)_2 = 1,00194627177146041;$$

$$(V)_3 = 1,00194627177146041.$$

В работе [76] отмечается, что общий вид разложения в цепную дробь функций $\sin x$ и $\cos x$ неизвестен. По методу Висковатова, как и способом непосредственного преобразования степенного ряда в соответствующие цепные дроби, можно найти лишь некоторое число звеньев:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{10} - \frac{11x^2}{42} + \frac{25x^2}{66} - \frac{121x^2}{150} + \\ &+ \frac{18361x^2}{34606} - \dots, \end{aligned} \quad \text{(IV.113)}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{x}{1} + \frac{x^2}{6} - \frac{7x^2}{10} + \frac{11x^2}{98} - \frac{551x^2}{198} + \frac{847x^2}{1102} - \\ &- \frac{479249x^2}{34606} + \dots, \end{aligned} \quad \text{(IV.114)}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{3x^2}{10} + \frac{13x^2}{126} - \\ &- \frac{59x^2}{26} + \frac{127x^2}{1298} - \dots, \end{aligned} \quad \text{(IV.115)}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^2}{6} + \frac{3x^2}{50} - \frac{313x^2}{126} + \\ &+ \frac{295x^2}{626} - \frac{14615x^2}{1298} + \dots \end{aligned} \quad \text{(IV.116)}$$

Нечетные подходящие дроби разложений (IV.113), (IV.114), (IV.115) и (IV.116) совпадают.

Получим разложение $\sin x$ в бесконечную дробь, исходя из тождества

$$\begin{aligned} (a+1)F(-a; 1; b+2; -1) + (b+1)F(-b; 1; a+2; -1) &= \\ = 2^{a+b+1} \frac{\Gamma(a+2)\Gamma(b+2)}{\Gamma(a+b+2)}; \end{aligned}$$

$$a, b \neq -2, -3, -4, \dots \quad \text{(IV.117)}$$

Предположим, что в тождестве (IV.117) $b = -a$.

Тогда будем иметь равенство

$$(1+a)F(-a; 1; 2-a; -1) + (1-a)F(a; 1; 2+a; -1) = 2\Gamma(2+a) \cdot \Gamma(2-a).$$

Известно, что

$$\Gamma(n+a)\Gamma(n-a) = -\frac{\pi P_n(a)}{a \cdot \sin \pi a},$$

где

$$P_n(a) = -a^2(1-a^2)(4-a^2) \dots [(n-1)^2 - a^2],$$

$$2\Gamma(2+a)\Gamma(2-a) = \frac{2\pi a(1-a^2)}{\sin \pi a};$$

на основании последней формулы напишем

$$\sin \pi a = \frac{2\pi a(1-a^2)}{(1+a)F(-a; 1; 2-a; -1) + (1-a)F(a; 1; 2+a; -1)}. \quad (IV.118)$$

Гипергеометрический ряд $F(a, 1, c, x)$ может быть разложен в следующие цепные дроби:

$$F(a, 1, c, x) = 1 + \frac{ax}{c} - \frac{(a+1)cx}{c+1} + \frac{(a-c)x}{c+2} - \frac{(a+2)(c+1)x}{c+3} + \dots - \frac{(a+n)(c+n-1)x}{-c+2n-1} + \frac{n(a-c-n+1)}{c+2n} + \dots, \quad (IV.119)$$

$$F(a, 1, c, x) = \frac{1}{1 - \frac{ax}{c} - \frac{(c-a)x}{c+1} - \frac{(a+1)cx}{c+2} - \frac{2(c-a+1)x}{c+3} - \dots - \frac{n(c-a+n-1)x}{c+2n-1} - \frac{(a+n)(c+n-1)x}{c+2n} - \dots}. \quad (IV.120)$$

Цепная дробь (IV.120) имеется в работе [76]. Нечетные подходящие дроби разложений (IV.119) и (IV.120) совпадают.

Приняв в формуле (IV.118) $x = \pi a$, получим четыре цепные дроби, в которые может быть разложен $\sin x$:

$$1) \sin x = \frac{2x}{\pi \left(\frac{1}{\pi-x} P_1 + \frac{1}{\pi+x} Q_1 \right)}, \quad (IV.121)$$

где

$$P_1 = 1 + \frac{x}{2\pi-x} + \frac{(\pi-x)(2\pi-x)}{3\pi-x} + \frac{2\pi^2}{4\pi-x} + \dots + \frac{(\pi x-x)[(n+1)\pi-x]}{(2n+1)\pi-x} + \frac{n(n+1)\pi^2}{(2n+1)\pi-x} + \dots,$$

$$Q_1 = 1 - \frac{x}{2\pi+x} + \frac{(\pi+x)(2\pi+x)}{3\pi+x} + \frac{2\pi^2}{4\pi+x} + \dots + \frac{(n\pi+x)[(n+1)\pi+x]}{(2n+1)\pi+x} + \frac{n(n+1)\pi^2}{2(n+1)\pi+x} + \dots,$$

$$2) \sin x = \frac{2x}{\pi \left(\frac{1}{\pi-x} P_2 + \frac{1}{\pi+x} Q_2 \right)}. \quad (IV.122)$$

где

$$P_2 = \frac{1}{1 - \frac{x}{2\pi-x} + \frac{2\pi^2}{3\pi-x} + \frac{(\pi-x)(2\pi-x)}{4\pi-x} + \dots} + \frac{n(n+1)\pi^2}{(2n+1)\pi-x} + \frac{(n\pi-x)[\pi(n+1)-x]}{(2n+2)\pi-x} + \dots,$$

$$Q_2 = \frac{1}{1 + \frac{x}{2\pi+x} + \frac{2\pi^2}{3\pi+x} + \frac{(\pi+x)(2\pi+x)}{4\pi+x} + \dots} + \frac{n(n+1)\pi^2}{(2n+1)\pi+x} + \frac{(n\pi+x)[\pi(n+1)+x]}{(2n+2)\pi+x} + \dots,$$

$$3) \sin x = \frac{2x}{\pi \left(\frac{1}{\pi-x} P_2 + \frac{1}{\pi+x} Q_1 \right)}, \quad (IV.123)$$

$$4) \sin x = \frac{2x}{\pi \left(\frac{1}{\pi-x} P_1 + \frac{1}{\pi+x} Q_2 \right)}. \quad (IV.124)$$

Разложение $\cos x$ в цепную дробь также проведем на основании тождества (IV.115) [61].

Приняв в формуле (IV.115) $a = z - \frac{1}{2}$ и $b = -z - \frac{1}{2}$, получим

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} + z\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - z\right) = \left(z + \frac{1}{2}\right)F\left(-z + \frac{1}{2}; 1; -z + \frac{3}{2}; -1\right) + \left(\frac{1}{2} - z\right)F\left(z + \frac{1}{2}; 1; z + \frac{3}{2}; -1\right).$$

Известно соотношение

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2} + z\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi Q_n(z)}{\cos \pi z},$$

где

$$Q_n(z) = \left(\frac{1}{4} - z^2\right) \left(1 \cdot 2 + \frac{1}{4} - z^2\right) \cdots \left[(n-1)n + \frac{1}{4} - z^2\right].$$

Следовательно, можем записать

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2} + z\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - z\right) &= \frac{\pi\left(\frac{1}{4} - z^2\right)}{\cos \pi z} = \\ &= \left(z + \frac{1}{2}\right) F\left(-z + \frac{1}{2}; 1; -z + \frac{3}{2}; -1\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2} - z\right) F\left(z + \frac{1}{2}; 1; z + \frac{3}{2}; -1\right). \end{aligned} \quad (IV.125)$$

Заменим πz через x . Тогда из выражения (IV.125) запишем

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{\pi^2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{\pi}\right) F\left(-\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}; 1; -\frac{x}{\pi} + \frac{3}{2}; -1\right) +} \\ &+ \frac{\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{\pi^2}\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi}\right) F\left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}; 1; \frac{x}{\pi} + \frac{3}{2}; -1\right)}. \end{aligned}$$

Используя разложения (IV.119) и (IV.120), получаем четыре цепные дроби для

$$1) \cos x = \frac{1}{2[(\pi+2x)s_1 + (\pi-2x)T_1]}, \quad (IV.126)$$

где

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 - \frac{\pi-2x}{3\pi-2x} + \frac{(3\pi-2x)^2}{5\pi-2x} - \frac{4\pi^2}{7\pi-2x} + \cdots + \\ &+ \frac{[(2n+1)\pi-2x]^2}{(4n+1)\pi-2x} - \frac{4\pi^2 n^2}{(4n+3)\pi-2x} + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 - \frac{\pi+2x}{3\pi+2x} + \frac{(3\pi+2x)^2}{5\pi+2x} - \frac{4\pi^2}{7\pi+2x} + \cdots \\ &\cdots + \frac{[(2n+1)\pi+2x]^2}{(4n+1)\pi+2x} - \frac{4\pi^2 n^2}{(4n+3)\pi+2x} + \cdots \\ 2) \cos x &= \frac{1}{2[(\pi+2x)s_2 + (\pi-2x)T_2]}, \end{aligned} \quad (IV.127)$$

где

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{1}{1 + 3\pi-2x} + \frac{4\pi^2}{5\pi-2x} + \frac{(3\pi-2x)^2}{7\pi-2x} + \cdots \\ &\cdots + \frac{4\pi^2 n^2}{(4n+1)\pi-2x} + \frac{[(2n+1)\pi-2x]^2}{(4n+3)\pi-2x} + \cdots, \\ T_2 &= \frac{1}{1 + 3\pi+2x} + \frac{4\pi^2}{5\pi+2x} + \frac{(3\pi+2x)^2}{7\pi+2x} + \cdots \\ &\cdots + \frac{4\pi^2 n^2}{(4n+1)\pi+2x} + \frac{[(2n+1)\pi+2x]^2}{(4n+3)\pi+2x} + \cdots \end{aligned}$$

Запишем также:

$$3) \cos x = \frac{1}{2[(\pi+2x)s_1 + (\pi-2x)T_2]}, \quad (IV.128)$$

$$4) \cos x = \frac{1}{2[(\pi+2x)s_2 + (\pi-2x)T_1]}. \quad (IV.129)$$

При разложении эллиптических интегралов I и II рода в цепную дробь имеем

$$\begin{aligned} F(\varphi, k) &= \frac{x}{1 - \frac{(1+k^2)x^2}{6} - \frac{(17-2k^2+17k^4)x^2}{10(1+k^2)} -} \\ &- \frac{9(61+148k^2-162k^4+148k^6+61k^8)x^2}{14(17-2k^2+17k^4)} - \\ &- \frac{(1+k^2)(69049-27702k^2+398679k^4-617908k^6+}{18(61+148k^2-162k^4+} \\ &+ 398679k^8+27702k^{10}+69049k^{12})x^2}{+148k^6+61k^8} - \cdots \end{aligned} \quad (IV.130)$$

Разложение уравнения (IV.130) обеспечивает быструю сходимость при вычислении эллиптического интеграла I рода для малых амплитуд. Так, при $\varphi=10^\circ$ уже третья подходящая дробь (IV.130)

$$\frac{60(1+k^2)x - (17-2k^2+17k^4)x^3}{60(1+k^2) - (7-22k^2+7k^4)x^2}$$

позволяет определять значения эллиптического интеграла $F(\varphi, k)$ с точностью шести знаков при различных значениях модуля k . Следует отметить, что скорость сходимости цепной дроби (IV.130) почти не зависит от модуля k и определяется в основном величиной амплитуды φ , уменьшаясь с увеличением последней [61].

Для полного эллиптического интеграла I рода запишем соответствующую цепную дробь

$$K = \frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{8} - \frac{18k^2}{4} - \frac{19k^2}{36} - \frac{1025k^2}{76} - \frac{54171k^2}{4100} - \dots \quad (\text{IV.131})$$

Значения полных эллиптических интегралов I и II рода можно вычислять следующим образом [12].

Известно, что

$$F(k^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right),$$

$$E(k^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right).$$

Подсчет по формуле (IV.37) дает

$$F\left(\mp \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right) = \frac{4 - \left[\left(\mp \frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2} + 1\right) - 2\left(\mp \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right] k^2}{4 - \left[\left(\mp \frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2} + 1\right)\right] k^2}.$$

Окончательно $F(0,05) = 1,5909995$; $E(0,05) = 1,5509755$. Табличные значения суть $F(0,05) = 1,5910035$; $E(0,05) = 1,5509734$.

В § 16 получены приближенные выражения для неполных эллиптических интегралов в виде

$$F(\varphi, k^2) = \frac{2}{3\sqrt{1-0,75k^2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{1-0,75k^2} \operatorname{tg} \varphi) + \frac{1}{3} \varphi,$$

$$E(\varphi, k^2) = 3\varphi - \frac{2}{\sqrt{1-0,25k^2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{1-0,25k^2} \operatorname{tg} \varphi).$$

Приняв $\varphi = \frac{\pi}{2}$, можно перейти к полным интегралам.

Имеем

$$F(k^2) = \frac{\pi}{6} \left[1 + \frac{2}{\sqrt{1-0,75k^2}} \right],$$

$$E(k^2) = \left[1,5 - \frac{1}{\sqrt{1-0,25k^2}} \right] \pi.$$

Корни в этих выражениях можно дополнительно представить согласно формуле (IV.28). Тогда

$$F(k^2) = \frac{\pi}{6} \left[\frac{48 - 15k^2}{16 - 9k^2} \right]; \quad E(k^2) = \pi \left[\frac{8 - 3,5k^2}{16 - 3k^2} \right]. \quad (\text{IV.132})$$

Функция бинорма через гипергеометрический ряд выражается формулой $(1+x)^n = F(-n, 1, 1, -x)$. После подстановки значений $\alpha = -n$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $x = -x$ в формулу (IV.37) получим приближенную формулу для бинорма, которая ранее была нами получена из иных соображений:

$$(1+x)^n = \frac{2 + (1+n)x}{2 + (1-n)x}.$$

Обращая эллиптический интеграл I рода, получаем эллиптические функции Якоби. Запишем цепную дробь, в которую разлагается функция $\operatorname{sn} u$:

$$\operatorname{sn} u = \frac{u}{1 + \frac{(1+k^2)u^2}{6} - \frac{(7-22k^2+7k^4)u^2}{10(1+k^2)} + \frac{(11-772k^2+1458k^4-772k^6+11k^8)u^2}{14(7-22k^2+7k^4)} - \frac{(1+k^2)(551+81822k^2-191319k^4+216868k^6-18(11-772k^2+1458k^4) - 191319k^8+81822k^{10}+551k^{12})u^2}{-772k^6+11k^8}}. \quad (\text{IV.133})$$

Разложение функции (IV.133) сходится на всей плоскости комплексного переменного u [61].

При $k=0$ цепная дробь (IV.133) вырождается в следующую:

$$\operatorname{sn} u = \frac{u}{1} + \frac{u^2}{6} - \frac{7u^2}{10} + \frac{11u^2}{98} - \frac{551u^2}{198} + \dots \quad (\text{IV.134})$$

Это известное разложение для тригонометрического синуса.

Если $k=1$, дробь (IV.133) приобретает вид

$$\operatorname{sn} u = \frac{u}{1} + \frac{u^2}{3} + \frac{u^2}{5} + \frac{u^2}{7} + \frac{u^2}{9} + \dots \quad (\text{IV.135})$$

В самом деле, $\lim_{k \rightarrow 1} \operatorname{sn} u = \operatorname{th} u$.

Пример. Вычислить функцию $\operatorname{sn} u$, если $u=0,264440$ и модулярный угол $\theta=69^\circ$.

В данном случае $k=\sin 69^\circ=0,933580$.

По разложению (IV.133) имеем следующие приближения для $\operatorname{sn} (0,264440)$: 1) 0,264440; 2) 0,258795; 3) 0,258818; 4) 0,258819; 5) 0,258819.

§ 22. Разложение функций по многочленам Чебышева

Приближенное представление непрерывной функции посредством полинома степени n можно получить с помощью ряда Тейлора. Однако такое представление выражает хорошее приближение только в очень тесных пределах изменения x , в окрестности $x=a$. Из рассмотрения исключаются функции, заданные графически или таблицей, имеющие в отдельных точках разрыв и т. д. Но, пользуясь уже имеющимся рядом Тейлора для какой-нибудь функции, можно построить такой многочлен, сходимость которого будет самая быстрая. Этого можно достигнуть с помощью полиномов Чебышева, наименее уклоняющихся от степенной функции [12].

Для примера обратимся к основной сфероидической функции

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}.$$

Требуется вычислить значения этой функции многократно при $x=\cos^2 B$ с точностью $0,5 \cdot 10^{-10}$. Разлагая

V в степенной ряд и удерживая пять членов при $x \in (0, 1)$, будем иметь

$$\left| V - \left(1 + \frac{e'^2}{2} x - \frac{e'^4}{8} x^2 + \frac{e'^6}{16} x^3 - \frac{5e'^8}{128} x^4 \right) \right| \leq \leq \frac{7e'^{10}}{256} x^5 \leq 0,4 \cdot 10^{-12}.$$

Следовательно, с заданной точностью вместо $V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}$

на $x \in (0, 1)$ можно брать соответствующее значение многочлена

$$V_1 = 1 + \frac{e'^2}{2} x - \frac{e'^4}{8} x^2 + \frac{e'^6}{16} x^3 - \frac{5e'^8}{128} x^4, \quad (\text{IV.136})$$

вычисление которого не составляет труда. Но среди многочленов, степень $\cos B$ которых не выше восьми, построенный многочлен не является единственным, дающим на $(0, 1)$ приближение V с заданной точностью. Нетрудно построить многочлен, например, четвертой степени $\cos B$, который будет удовлетворять поставленным выше условиям. В этой задаче удобно использовать «смещенные» полиномы $T_n^*(x)$, так как их интервал ортогональности совпадает с данным интервалом $(0, 1)$.

Перепишем выражение (IV.136) в виде

$$V_1 = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4, \quad (\text{IV.137})$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= 0,3369262 \cdot 10^{-2}, & C &= +0,19124 \cdot 10^{-7}, \\ B &= -0,56759 \cdot 10^{-5}, & D &= -0,8 \cdot 10^{-10}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.138})$$

Известно, что для полиномов Чебышева $T_n^*(x)$ имеет место неравенство $|T_n^*(x)| \leq 1$ при $x \in (0, 1)$.

Но

$$T_4^*(x) = 128x^4 - 256x^3 + 160x^2 - 32x + 1.$$

Отсюда при $x \in (0,1)$

$$\frac{1}{2^{2n-1}} |T_n^*(x)| = \frac{1}{2^7} |T_4^*(x)| = \left| x^4 - \frac{256}{128} x^3 + \frac{160}{128} x^2 - \frac{32}{128} x + \frac{1}{128} \right| \leq \frac{1}{2^7}.$$

Если в многочлене V_1 заменить x^4 многочленом

$$\frac{256}{128} x^3 - \frac{160}{128} x^2 + \frac{32}{128} x - \frac{1}{128},$$

т. е. рассмотреть многочлен

$$V_2 = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + D \left(-\frac{1}{128} + \frac{32}{128} x - \frac{160}{128} x^2 + \frac{256}{128} x^3 \right), \quad (\text{IV.139})$$

то на отрезке $(0;1)$ он будет отличаться от V_1 не больше, чем на $D \cdot \frac{1}{2^7} = 0,8 \cdot 10^{-12}$. Это означает, что V отличается от V_2 на $(0,1)$ не больше, чем на $|0,4 \cdot 10^{-12} + 0,8 \cdot 10^{-12}| = 1,2 \cdot 10^{-12}$. Если сделать еще один шаг, то получим для функции окончательное приближенное выражение

$$V_2 = A_0 + A_1 \cos^2 B + A_2 \cos^4 B, \quad (\text{IV.140})$$

где коэффициенты имеют значения, отличные от первоначальных, т. е.

$$A_0 = 1,0000000006; \quad A_1 = 0,33692519 \cdot 10^{-2}; \quad (\text{IV.141})$$

$$A_2 = -0,56473 \cdot 10^{-5}.$$

Итак, первоначальный полином восьмой степени сведен к новому полиному четвертой степени точности 5×10^{-10} . Описанный выше прием называется «телескопическим сдвигом» степенного ряда путем последовательного сокращения. Так, для функции W^{-1} телескопически сдвинутая формула записывается в виде

$$W^{-1} = b_0 + b_1 \sin^2 B + b_2 \sin^4 B, \quad (\text{IV.142})$$

где

$$b_0 = 1,0000000003; \quad b_1 = 0,33466576 \cdot 10^{-2}; \\ b_2 = 0,169422 \cdot 10^{-4}. \quad (\text{IV.143})$$

Кроме этого приема существует телескопический сдвиг степенного ряда путем переразложения по полиномам Чебышева. Рассмотрим снова отрезок ряда Гейлора для функции

$$V = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4.$$

Заменим степени x через соответствующие полиномы $T_n^*(x)$. В результате получим

$$V_2 = (2^7 + 2^6 A + 3 \cdot 2^4 B + 5 \cdot 2^3 C + 35D) \cdot 2^{-7} T_0^*(x) + \\ + (2^4 A + 2^4 B + 15C + 14D) \cdot 2^{-5} T_1^*(x) + \\ + (2^2 B + 6C + 7D) \cdot 2^{-5} T_2^*(x) + (C + 2D) \cdot 2^{-5} T_3^*(x) + \\ + D \cdot 2^{-7} T_4^*(x). \quad (\text{IV.144})$$

Заменив коэффициенты A, B, C, D их численными значениями (IV.138), получим

$$V_2 = 1,0016822509 T_0^*(x) + 0,16818023 \cdot 10^{-2} T_1^*(x) - \\ - 0,7059 \cdot 10^{-6} T_2^*(x) + 0,593 \cdot 10^{-9} T_3^*(x) - \\ - 0,629 \cdot 10^{-12} T_4^*(x). \quad (\text{IV.145})$$

Если отбросить последние два члена, абсолютная величина совершенной ошибки в любой точке интервала не превосходит

$$|+0,593 \cdot 10^{-9} + 0,629 \cdot 10^{-12}| < 6 \cdot 10^{-10}.$$

Между тем в выражении (IV.136) она равна

$$|0,191 \cdot 10^{-7} + 0,8 \cdot 10^{-1}| < 2 \cdot 10^{-8},$$

т. е. в 100 раз больше. Если оставить полином второй степени, то получим

$$V_2 = 1,0016822509 T_0^*(x) + 0,16818023 \cdot 10^{-2} T_1^*(x) - \\ - 0,7059 \cdot 10^{-6} T_2^*(x). \quad (\text{IV.146})$$

После перехода в выражении (IV.146) от $T_n^*(x)$ к $x = \cos^2 B$ получим окончательно

$$V_2 = A_0 + A_1 \cos^2 B + A_2 \cos^4 B, \quad (\text{IV.147})$$

где $A_0 = 1,0000000006; \quad A_1 = 0,33692519 \cdot 10^{-2}; \quad A_2 = -0,56473 \cdot 10^{-5}$. Выражение (IV.146) не является обыкновенным степенным рядом, а представляет собой раз-

ложение по полиномам Чебышева исходной функции V . Значительно быстрая сходимость нового ряда позволяет опустить некоторые члены. Ошибка, допускаемая при этом, выражается коэффициентами опущенных членов. Кроме указанных выше двух способов можно поступить и таким образом.

Запишем отрезок ряда Тейлора для функции V в виде

$$V_2 = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + R_3, \quad (\text{IV.148})$$

где $|R_3| \leq Dx^4$, так как имеем убывающий ряд. Вычтем из левой и правой части величину $CT_3^*(x)$, где

$$\frac{1}{2^5} T_3^*(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{16}x - \frac{1}{32}.$$

Тогда

$$V_2 = \left(1 + \frac{C}{32}\right) + \left(A - \frac{9}{16}C\right)x + \left(B + \frac{3}{2}C\right)x^2 + R_3 + T_3^*(x) \cdot C.$$

Если в правой части последнего выражения отбросить два последних члена, то суммарная ошибка при этом будет равна $6 \cdot 10^{-10}$, так как

$$|T_n^*(x)| \leq \frac{1}{2^{2n-1}}; \quad |R_3| \leq Dx^4 \leq 0,8 \cdot 10^{-10}.$$

Поэтому

$$|R_3 + T_3^*(x)C| \leq \frac{D}{2^5} + 0,8 \cdot 10^{-10} = 6 \cdot 10^{-10}.$$

Итак, для функции V с указанной выше точностью можно записать

$$V_2 = \left(1 + \frac{C}{32}\right) + \left(A - \frac{9}{16}C\right)x + \left(B + \frac{3}{2}C\right)x^2. \quad (\text{IV.149})$$

Но так как

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \left(1 + \frac{C}{32}\right) = 1,0000000006, \\ A_1 &= \left(A - \frac{9}{16}C\right) = 0,33692519 \cdot 10^{-2}, \\ A_2 &= \left(B + \frac{3}{2}C\right) = -0,56473 \cdot 10^{-5}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.150})$$

то окончательное выражение для функции V еще раз можно записать

$$V_2 = A_0 + A_1 \cos^2 B + A_2 \cos^4 B. \quad (\text{IV.151})$$

Это выражение тождественное с полученными ранее (IV.140), (IV.147).

Для телескопического сдвига можно воспользоваться полиномами $T_n(x)$ и $C_n(x)$. В первом случае переменное берется в интервале $(-1, +1)$, во втором — в интервале $(-2, +2)$. Коэффициенты полиномов $C_n(x)$ — целые числа, но они значительно меньше по величине коэффициентов полиномов $T_n(x)$. Кроме наилучшей сходимости полиномы $T_n(x)$ обладают тем свойством, что они могут быть представлены элементарными тригонометрическими функциями, выраженными через переменную $x = \cos t$.

Таким образом, на отрезке $(-1, +1)$ непрерывную функцию $f(x)$ посредством подстановки $x = \cos t$ можно преобразовать в четную функцию $\varphi(t) = f(\cos t)$ с периодом $2T$. Если $P(x)$ есть приближенный многочлен степени n , изображающий $f(x)$ на отрезке $(-1, +1)$, то посредством указанной подстановки он преобразуется в $P(\cos t)$, т. е. в целый многочлен относительно $\cos t$. Заменяя степени косинуса эквивалентными выражениями через косинусы кратных дуг, получим вместо многочлена $P(\cos t)$ эквивалентную конечную тригонометрическую сумму

$$s_n = \sum_{k=0}^n A_k \cos kt,$$

которая изображает $\varphi(t)$ с тем же приближением, с каким $P(x)$ изображает функцию $f(x)$.

Рассмотрим снова отрезок степенного ряда для функции V

$$V_2 = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3, \quad (\text{IV.152})$$

где

$$|R_3| \leq Dx^4$$

на интервале $\alpha \leq x \leq \beta$. Введем новую переменную

$$\xi = \frac{2x - (\alpha + \beta)}{\beta - \alpha}.$$

Когда x изменяется между α и β , новая переменная изменяется между -1 и $+1$. Очевидно, степени x можно выразить через степени ξ , а последние — через $T_k(\xi)$, т. е.

$$\xi^n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{1/2n} \binom{n}{k} T_{n-2k}(\xi). \quad (\text{IV.153})$$

Следовательно, данный степенной ряд (IV.152) можно преобразовать в новый ряд, в котором вместо степеней x используются полиномы $T_k(\xi)$. В нашем случае $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Поэтому

$$\zeta = 2x - 1, \quad x = \frac{1 + \xi}{2}.$$

Подставляя новое значение x в уравнение (IV.152), получаем

$$V_2 = 1 + \frac{A}{2}(1 + \xi) + \frac{B}{4}(1 + \xi)^2 + \frac{C}{8}(1 + \xi)^3. \quad (\text{IV.154})$$

После раскрытия скобок и замены коэффициентов A , B , C их значениями (IV.138), получим

$$V_2 = 1,001682509 T_0(\xi) + 0,16818024 \cdot 10^{-2} T_1(\xi) - 0,7059 \cdot 10^{-6} T_2(\xi) + 0,6 \cdot 10^{-9} T_3(\xi). \quad (\text{IV.155})$$

В последнем равенстве, как и предполагалось, величины ξ заменены через $T_k(\xi)$ по (IV.153). Опуская последний член в формуле (IV.155), допустим ошибку $6 \cdot 10^{-10}$. После обратного перехода от $T_k(\xi)$ к ξ , а затем от ξ к x получим окончательно

$$V_2 = 1,001682509 + 0,16818024 \cdot 10^{-2} \cos 2B - 0,7059 \cdot 10^{-6} \cos 4B. \quad (\text{IV.156})$$

Это выражение тождественно с полученными ранее выражениями по смещенным полиномам $T_n^*(x)$ для функции V . При этом следует подчеркнуть одно очень важное обстоятельство. В сфероидической геодезии очень часто прибегают к переходу от четных степеней синусов или косинусов к косинусам или синусам кратных дуг. Это делается для того, чтобы облегчить последующее интегрирование ряда, составленного из степеней синуса

или косинуса. Правда, Гельмерт, например, отмечает, что подобный подход дает сильнее сходящийся ряд. Однако никто из авторов не связывает это с теорией полиномов Чебышева [12].

Как видно из приведенных выше примеров, для функции $V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}$, которая представляется степенным рядом функции косинуса, экономизация или телескопический сдвиг с помощью смещенных полиномов $T_n^*(x)$ равносильно указанному выше переходу. Дело в том, что степени $x = \cos^2 B$ выражаются через полиномы $T_n^*(x)$ с помощью формулы

$$x^n = \frac{1}{2^{2n-1}} \left[T_n^*(x) + \binom{2n}{1} T_{n-1}^*(x) + \binom{2n}{2} T_{n-2}^*(x) + \dots \right] = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{\alpha=0}^n \binom{2n}{\alpha} T_{n-\alpha}^*(x), \quad (\text{IV.157})$$

которая идентична с формулой для выражения четных степеней косинусов через косинусы кратных дуг. Полиномы же $T_n(x)$ являются попеременно четными и нечетными функциями, и пользование ими сопряжено с обязательным переходом к интервалу $(-1, +1)$, что и было показано выше. Для выражения степеней величины x через полиномы $T_n(x)$ служит формула

$$x^n = \frac{1}{2^{n-1}} \left[T_n(x) + n T_{n-2}(x) + \frac{n(n-1)}{2} T_{n-4}(x) + \dots \right].$$

Используя эту формулу, можно представить ряд Тейлора через полиномы $T_n(x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \\ &= a_0 + \frac{2}{2^2} a_2 + \frac{4 \cdot 3}{2^4 \cdot 2!} a_4 + \dots + \frac{2l(2l-1) \dots (l+1)^l}{2^{2l} l!} a_{2l} + \\ &+ \dots + T_1(x) \left[a_1 + \frac{3}{2^2} a_3 + \frac{5 \cdot 4}{2^4 \cdot 2!} a_5 + \right. \\ &+ \dots + \left. \frac{(2l+1) \dots (l+2)}{2^{2l} l!} a_{2l+1} + \dots \right] + \\ &\dots \end{aligned}$$

$$+ T_n(x) \left[\frac{a_n}{2^{n-1}} + \frac{n+2}{2^{n+1}} a_{n+2} + \frac{(n+4)(n+3)}{2^{n+3} 2!} a_{n+4} + \dots + \frac{(2l+n) \dots (l+n+1)}{2^{2l+n-1} l!} a_{2l+n} + \dots \right] + \dots \quad (\text{IV.158})$$

Но функция $f(x)$ не всегда может быть представлена рядом Тейлора. Может случиться, что сама функция, либо ее интеграл или производная вычисляются с трудом. Во всех этих случаях требуется приближенное представление функции, удобное для нахождения ее значений, интегрирования или иных операций. Задача построения такой функции называется задачей интерполирования. Если ставится задача, в которой значение остаточного члена R_n должно быть возможно меньшим, то последовательность абсцисс a при интерполировании выражается через нули полиномов Чебышева

$$a_i = \cos \left(\frac{2i+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Приближающий же полином имеет вид

$$P(x) = \sum_{k=0}^n b_k T_k(x),$$

где коэффициенты $b_0 \dots b_n$ определяются по формулам

$$b_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(a_i); \quad b_k = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n f(a_i) T_k(a_i).$$

Тогда функцию $f(x)$ можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^n b_k T_k(x) + \frac{1}{2^n (n+1)!} T_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\eta).$$

Выбор узлов интерполирования согласно

$$a_i = \cos \left(\frac{2i+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

дает очень неравномерное распределение точек интерполирования, при котором они накапливаются вблизи двух конечных точек $x = \pm 1$ интервала. Известно, что существует способ построения ортогональных полиномов Чебышева для случая равноотстоящих точек (ко-

печноразностный аналог полиномов Лежандра), который здесь не рассматривается.

В общем же случае коэффициенты b_k выражаются через интегралы

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos t) \cos kt \, dt,$$

вычисление которых в большинстве случаев вызывает неодолимые трудности. Процесс же интерполирования обходится без вычисления указанных определенных интегралов. Для примера возьмем опять функцию V , которая после приведения к интервалу $(-1, +1)$ запишется в виде

$$V = \sqrt{1 + \frac{e^{12}}{2} (1 + \xi)}.$$

Для случая $n=2$ получим

$$a_0 = \cos \frac{\pi}{6} = 0,86602540, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{6};$$

$$a_1 = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2};$$

$$a_2 = \cos \frac{5\pi}{6} = -0,86602540, \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{6};$$

$$f(a_0) = 1,003138632, \quad \cos 2\theta_0 = 0,5;$$

$$f(a_1) = 1,001683212, \quad \cos 2\theta_1 = -1;$$

$$f(a_2) = 1,000225674, \quad \cos 2\theta_2 = 0,5;$$

$$b_0 = 1,001682506;$$

$$b_1 = 0,001681798;$$

$$b_2 = -0,000000706.$$

Следовательно, имеем полином

$$V_2 = 1,001682506 + 0,1681798 \cdot 10^{-2} T_1(\xi) - 0,706 \cdot 10^{-6} T_2(\xi)$$

или

$$V_2 = 1,001682506 + 0,1681798 \cdot 10^{-2} \cos 2B - 0,706 \cdot 10^{-6} \cos 4B.$$

(IV.159)

Для случая $n=4$ получим

$$V_3 = 1,0016825058 + 0,0016817929 \cos 2B - 0,7077 \cdot 10^{-6} \cos 4B. \quad (IV.160)$$

Критерий Чебышева, будучи общепринятым, не является единственным. Стильтес [12] предложил за критерий приближения брать среднее абсолютное уклонение. На отрезке $(-1, +1)$ параметры приближающей функции подбираются так, чтобы среднее абсолютное уклонение

$$\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} |e(x)| dx$$

было возможно меньше. Приближающий многочлен в этом случае записывается так:

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n, \quad (IV.161)$$

где для вычисления параметров α_n в случае полинома четвертой степени служит таблица

$$x_1 = -x_5 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_1 = f_1(x_1) = -y_5,$$

$$x_2 = -x_4 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = f_2(x_2) = -y_4,$$

$$x_3 = 0, \quad y_3 = f(x_3),$$

$$z_1 = \frac{2(y_1 + y_5 + 2y_3)}{3}, \quad \alpha_0 = y_3 = f(0),$$

$$z_2 = 2(y_2 + y_4 - 2y_3), \quad \alpha_1 = \frac{3z_2 - z_1}{2},$$

$$u_1 = \frac{(y_1 - y_5)}{\sqrt{3}}, \quad \alpha_2 = \frac{(3z_2 - z_1)}{2},$$

$$\alpha_3 = 2(u_1 - u_2),$$

$$u_2 = y_2 - y_4, \quad \alpha_4 = 2(z_1 - z_2).$$

Составим полином четвертой степени для функции V , используя предложения Стильтеса. Имеем

$$y_1 = y_5 = 1,00252376, \quad z_1 = 0,00336501, \quad \alpha_0 = 1,$$

$$y_2 = y_4 = 1,00084196, \quad z_2 = 0,00336784, \quad \alpha_1 = \alpha_3 = 0,$$

$$y_3 = 1, \quad u_1 = u_2 = 0, \quad \alpha_2 = 0,33692518 \cdot 10^{-2},$$

$$\alpha_4 = -0,566 \cdot 10^{-5}.$$

Следовательно,

$$V_3 = 1 + 0,33692518 \cdot 10^{-2} \cos^2 B - 0,566 \cdot 10^{-5} \cos^4 B. \quad (IV.162)$$

Для дуги меридиана

$$S = c \int_0^B \frac{dB}{V^3} = c \int_0^B (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) dB$$

параметры соответственно равны

$$\alpha_0 = 1; \quad \alpha_1 = -0,01010790; \quad \alpha_2 = +0,8472 \cdot 10^{-4}.$$

Поэтому

$$S = 30,870795 \cdot B'' - 16036,366 \sin 2B + 16,959202 \sin 4B.$$

Легко заметить, что для вычисления параметров α_n в способе Стильтеса, так же как и при интерполировании с узлами полиномов Чебышева, не требуется интегрирования. Поэтому способ Стильтеса очень выгоден для приближения функций, имеющих сложное строение и для которых построение ряда Тейлора затруднительно. Отметим, что в случае приближения функции V способ Стильтеса дает те же самые значения параметров, что и при применении среднеквадратического приближения по Чебышеву.

Отметим, что до Чебышева решались отдельные задачи на наилучшее приближение некоторых конкретных функций. Эти задачи возникали под влиянием практики, вызывались запросами картографии, геодезии, практической механики и т. д.

Л. Эйлер в 1777 г. в мемуаре о проекции Делиля дал решение вопроса о наилучшем приближении функции $f(x) = \cos x$ с помощью полинома степени $P(x) = a(b-x)$ на отрезке $0 < a \leq x \leq \beta < \frac{\pi}{2}$.

Лаплас рассмотрел задачу на наилучшее приближение функции $F(\varphi)$, выражающей длину градуса меридиана, в предположении, что Земля является эллипсоидом вращения. Лаплас ставил условие, необходимое и достаточное, при котором

$$\max_{\varphi \in M} |F(\varphi) - (a + b \sin^2 \varphi)|$$

будет наименьшим.

У Фурье задача на наилучшее приближение возникла в связи с его попыткой создания общей теории неравенств. Только у Понселе постановка задачи приобрела характер, более близкий к классической теории наилучшего приближения функций.

Глава V.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 23. Введение

Уравнение — это запись задачи поиска таких элементов x некоторого множества X , что

$$F(x) = Y, \quad (V.1)$$

где F — оператор (математический), т. е. заданное отображение множества X на множество Y ; y — фиксированный элемент множества Y .

Уравнение общего вида (V.1) называется операторным. В зависимости от того, линеен или не линеен оператор F , уравнение (V.1) называется соответственно линейным или нелинейным. Если X и Y — множества чисел в многомерных пространствах, то получается система уравнений. Если X и Y — множества функций, то в зависимости от характера отображения F получаются дифференциальные или интегральные уравнения. Если $F(x) = F_1(x) + f(t)$, где $F_1 = \frac{d^n}{dt^n} + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + \frac{d}{dt} + \frac{d^0}{dt^0}$, то уравнение (V.1) называется обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка.

Решением дифференциального уравнения является некоторая функциональная зависимость, которая в простейших случаях может быть получена аналитически, а в более сложных — численными методами.

Возьмем систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$x_i^1 = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = f_i(t, \bar{X}) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (V.2)$$

Задача интегрирования системы (V.2) на заданном интервале изменения независимой переменной $t_0 \leq t \leq T$

становится определенной, если заданы либо начальные, либо краевые условия. Краевые условия — ограничения в виде одного или нескольких уравнений, заданных в точках границы области, где ищут решение краевой задачи. Эти задачи часто встречаются в проблемах внешней баллистики, навигации и др.

Начальные условия для системы (V.2) имеют вид

$$x_i(t_0) = x_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (V.3)$$

где x_{i0} — заданные величины.

Краевые условия для системы (V.2) записываются в таком виде.

При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, k < n), \quad (V.4)$$

а при $t = t_1$ заданы конечные условия вида

$$x_j(t_1) = x_{j1}^* \quad (j = k + 1, k + 2, \dots, n), \quad (V.5)$$

или

$$x_i(t_1) = x_{i1}^* \quad (i = 1, 2, \dots, n - k). \quad (V.6)$$

Решение краевой задачи (V.2) — (V.5) или (V.2), (V.4), (V.6) не может быть проведено с помощью известных численных методов интегрирования, поскольку последние предназначены для решения задачи с полностью известными начальными данными для всех компонент вектора $\bar{X} = (x_1, \dots, x_n^T)$, т. е. для так называемой задачи Коши. Рассматриваемую задачу можно, однако, свести к задаче Коши, если доопределить недостающие начальные условия для компонент x_j ($j = k + 1, \dots, n$) вектора \bar{X} .

Проблема численного интегрирования системы (V.2) с начальными условиями (V.3) на отрезке $[t_0, T]$ заключается в выборе такого деления $t_0, t_1, t_2, \dots, t_r, \dots, t_n$ отрезка $[t_0, T]$ на n участков и построения такой таблицы значений переменных x_i на концах этих участков, что погрешность между точным решением $x_i(t_r)$ в момент t_r и приближенным x_{ir} удовлетворяет выбранным требованиям по точности интегрирования.

Разность $\Delta t_r = t_{r+1} - t_r$ значений аргумента на концах элементарного участка интегрирования называется ша-

гом интегрирования. Если величина шага интегрирования остается неизменной для всех участков, т. е. если $\Delta t_r = \Delta t = \text{const}$ при всех r , то говорят, что интегрирование ведется с постоянным шагом; если $\Delta t_r \neq \Delta t_j (r \neq j)$, то интегрирование ведется с переменным шагом. Здесь r — номер шага интегрирования.

§ 24. Методы Рунге — Кутта

Методы Рунге—Кутта принадлежат к многоточечным одношаговым методам численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений [43].

Исходные данные. Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка в скалярной форме

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (\text{V.7})$$

в векторной форме

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{X}), \quad (\text{V.8})$$

где

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Начальные условия при $t=t_0$:
в скалярной форме для уравнения (V.7)

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad (\text{V.9})$$

в векторной форме для уравнения (V.8)

$$\bar{X}(t_0) = \bar{X}_0. \quad (\text{V.10})$$

Требуется найти приближенное решение систем на отрезке $[t_0, T]$. Идея методов Рунге—Кутта заключается в том, что приближенное значение решения дифференциального уравнения 1-го порядка (V.8) в точке t_{r+1} пишется в виде

$$x_{r+1} = x_r + \sum_{i=1}^{np} \gamma_i^{(p)} k_i = x_r + \Phi_i^{(p)}(t_r, x_r, \Delta t_r), \quad (\text{V.11})$$

где

$$k_1 = \Delta t_r f(t_r, x_r);$$

$$k_i = \Delta t_r f\left(t_r + \alpha_i^{(p)} \Delta t_r, x_r + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}^{(p)} k_j\right),$$

$$\Delta t_r = t_{r+1} - t_r \text{ — шаг интегрирования.} \quad (\text{V.12})$$

Коэффициенты $\gamma_i^{(p)}$, $\alpha_i^{(p)}$, $\beta_{ij}^{(p)}$ в формулах (V.11) и (V.12) выбираются так, чтобы несколько первых членов разложения в ряд Тейлора по степеням Δt_r в правой части формулы (V.11) совпадало с таким же числом членов разложения точного решения $x(t_r + \Delta t_r)$ по степеням Δt_r .

Метод Рунге—Кутта называется методом порядка p , если указанные разложения совпадают вплоть до членов, содержащих Δt_r^p . Поскольку полученные таким образом соотношения для определения коэффициентов $\gamma_i^{(p)}$, $\alpha_i^{(p)}$, $\beta_{ij}^{(p)}$ при каждом фиксированном порядке p допускают, как правило, неединственное решение, это обстоятельство обуславливает большое разнообразие формул Рунге—Кутта одного и того же порядка.

Как видно из структур формул (V.11) и (V.12), для получения значения решения в точке $t_r + \Delta t_r$ не требуются специальных процедур для нахождения решения в нескольких предыдущих точках, а достаточно информации лишь о значении x_r .

Расчетные формулы. Приведенные ниже формулы записаны для одного скалярного уравнения системы (V.7). Для интегрирования всей системы (V.7) эти формулы следует применять к каждой компоненте вектора \bar{X} .

В табл. 1 приведены формулы различных вариантов методов Рунге—Кутта 4-го порядка для численного интегрирования систем дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Формулы Рунге—Кутта более высокого порядка достаточно сложны и здесь не приводятся.

При использовании ЭВМ непосредственно программируются вычисления по формулам, указанным в табл. 1. При этом для решения сложных задач целесообразно использовать методы, для которых известны простые выражения для локальной ошибки (например, методы

Формулы методов Рунге — Кутты 4-го порядка для интегрирования дифференциальных уравнений
1-го порядка $\dot{X} = f(t, X)$

1	2	3	4
Название метода	Название конкретного метода	Формулы для вычисления x_{r+1}	Формулы для вычисления коэффициентов K_i
Метод Рунге — Кутта 4-го порядка	Стандартный метод Рунге — Кутта (правило «1/6»)	$x_{r+1} = x_r + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$	$k_1 = \Delta t \cdot f(t_r, x_r),$ $k_2 = \Delta t \cdot f\left(t_r + \frac{1}{2} \Delta t, x_r + \frac{1}{2} k_1\right),$ $k_3 = \Delta t \cdot f\left(t_r + \frac{1}{2} \Delta t, x_r + \frac{1}{2} k_2\right),$ $k_4 = \Delta t \cdot f(t_r + \Delta t, x_r + k_3).$
Метод Рунге — Кутта 4-го порядка	Метод Рунге — Кутта — Мерсона	$x_{r+1} = x_r + \frac{1}{2} (k_1 + 4k_2 + k_3)$	$k_1 = \frac{1}{3} \Delta t \cdot f(t_r, x_r),$ $k_2 = \frac{1}{3} \Delta t \cdot f(t_r + 1/3 \Delta t, x_r + k_1),$ $k_3 = \frac{1}{3} \Delta t \cdot f\left(t_r + \frac{1}{3} \Delta t, x_r + 1/2 k_1 + \frac{1}{2} k_2\right),$ $k_4 = \frac{1}{3} \Delta t \cdot f\left(t_r + \frac{1}{2} \Delta t, x_r + \frac{3}{8} k_1 + \frac{9}{8} k_2\right),$
Метод Рунге — Кутта 4-го порядка	Метод Рунге — Кутта — Ингланда	$x_{r+1} = x_r + \frac{1}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3)$	$k_3 = \frac{1}{3} \Delta t \cdot f\left(t_r + \Delta t, x_r + \frac{3}{2} k_1 + 6k_2 - \frac{9}{2} k_3\right).$ <p>Оценка локальной ошибки (контрольный член Мерсона)</p> $E = \frac{1}{5} \left(k_1 - \frac{9}{2} k_2 + 4k_3 - \frac{1}{2} k_4\right)$
Метод Рунге — Кутта 4-го порядка	Метод Рунге — Кутта — Ингланда	$x_{r+1} = x_r + \frac{1}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3)$	$k_1 = \Delta t \cdot f(t_r, x_r),$ $k_2 = \Delta t \cdot f\left(t_r + \frac{1}{2} \Delta t, x_r + \frac{1}{2} k_1\right),$ $k_3 = \Delta t \cdot f\left[t_r + \frac{1}{2} \Delta t, x_r + \frac{1}{4} (k_1 + k_2)\right],$ $k_4 = \Delta t \cdot f(t_r + \Delta t, x_r - k_2 + 2k_3),$ $k_5 = \Delta t \cdot f\left[t_r + \frac{18}{27} \Delta t, x_r + \frac{1}{27} (7k_1 + 10k_2 + k_3)\right],$ $k_6 = \Delta t \cdot f\left[t_r + \frac{1}{5} \Delta t, x_r + \frac{1}{625} (28k_1 - 125k_2 + 546k_3 + 54k_4 - 378k_5)\right].$

Оценка локальной ошибки метода Рунге — Кутта — Ингланда:

$$E = \frac{1}{336} (-42 k_1 - 224 k_2 - 21 k_3 + 162 k_4 + 125 k_5 + 125 k_6)$$

Рунге—Кутта—Мерсона, Рунге—Кутта—Инглана). Для методов с известной оценкой локальной ошибки можно использовать схемы автоматического выбора шага, что приводит к экономии машинного времени при заданной точности решения.

§ 25. Оценка одношаговых методов

Различные методы численного интегрирования характеризуются различной величиной ошибки. Важной характеристикой при этом является ошибка метода интегрирования на одном шаге (локальная ошибка метода). Эта величина дает представление об ошибке, возникающей лишь от приближенного характера метода без учета ошибок округления, и может служить (совместно с оценкой сложности метода и объемом необходимой для его реализации запоминаемой информации) основанием для предварительного выбора метода.

Если $x_i(t_{r+1})$ — точное решение дифференциального уравнения, а $x_{i,z+1}$ — приближенное решение, вычисленное на одном шаге длиной Δt с помощью какого-либо метода численного интегрирования при использовании точной информации о начальных условиях $x_i(t_r)$ и необходимых предыдущих значениях $x_i(t_{r-1}), x_i(t_{r-2}), \dots (i=1, \dots, n)$, и если при этом для ошибки $x_i(t_r) - x_{i,r}$ имеет место соотношение

$$x_i(t_r) - x_{i,r} = O(\Delta t^{p+1}), \quad (V.13)$$

то число $(p+1)$ называется порядком ошибки метода на одном шаге (порядком локальной ошибки метода).

Численное значение главного члена выражения $O(\Delta t^{p+1})$, найденное каким-либо образом, называется оценкой локальной ошибки метода и обозначается E . Тогда формула (V.13) приобретает вид

$$x_i(t_r) - x_{i,r} \approx E. \quad (V.14)$$

Порядок ошибки метода на одном шаге тесно связан с понятием порядка метода интегрирования.

Метод численного интегрирования называется методом p -го порядка, если используемая в методе формула для x_{r+1} эквивалентна отрезку ряда Тейлора по степеням Δt до p -го порядка включительно. Таким образом, поряд-

док метода на единицу меньше порядка локальной ошибки метода.

Локальная ошибка стандартного метода Рунге—Кутта 4-го порядка может быть оценена с помощью выражения

$$E = 3\Delta t f'(t_{r+1}, x_{r+1}) + k_1 - 2k_3 - 2k_4, \quad (V.15)$$

которое требует вычисления значения $f'(t_{r+1}, x_{r+1})$.

Метод оценки локальной ошибки, часто используемый в стандартных подпрограммах в тех случаях, когда явное выражение для ошибки неизвестно, состоит в интегрировании с двумя различными шагами. Если получены результаты интегрирования от точки t_r до точки t_{r+1} с шагами Δt и $\Delta t/2$, то ошибку можно оценить с помощью формулы

$$x_{2r}^{(\Delta t/2)} - x(t_r) = \frac{1}{2^p - 1} (x_r^{(\Delta t)} - x_{2r}^{(\Delta t/2)}). \quad (V.16)$$

Такой способ требует, однако, больших затрат машинного времени (для этого необходимо 11 раз вычислять правую часть $\bar{f}(t, \bar{X})$). Для сокращения машинного времени можно интегрировать с шагами Δt и $2\Delta t$, а оценку проводить через шаг. В этом случае на каждые восемь вычислений $\bar{f}(t, \bar{X})$ необходимо проводить три дополнительных вычисления для получения оценки локальной ошибки.

Вычислительные схемы автоматического выбора шага основываются на использовании оценок локальной ошибки метода и при интегрировании систем вида (V.7) строятся следующим образом. Среди n компонент вектора \bar{X} выбирается m компонент, $m \leq n$, точность интегрирования которых должна контролироваться. Для контролируемых x_i назначаются величины ε_i ($i=1, 2, \dots, m$) допустимых ошибок на одном шаге интегрирования. Тогда, если в процессе интегрирования из точки (t_r, x_r) текущее значение оценки локальной ошибки E_i для i -й компоненты превосходит допустимое значение ε_i (хотя бы для одной из m контролируемых компонент), то шаг Δt_{r+1} уменьшается (обычно в два раза) и расчет производится заново из точки (t_r, \bar{X}_r) . Если текущее значение E_i удовлетворяет условию $E_i < \varepsilon_i/2^{p+1}$ для всех $i=1, 2, \dots, m$, то шаг увеличивается вдвое и интегрирование с этим ша-

гом начинается из точки (t_{r+1}, \bar{X}_{r+1}) . В остальных случаях интегрирование ведется из точки (t_{r+1}, \bar{X}_{r+1}) с прежним шагом. (Увеличение и уменьшение шага в два раза связано со стремлением получить или целые, или дробные, но с небольшим числом знаков, значения для моментов времени t_r).

Таким образом, схема автоматического изменения шага в процессе интегрирования может быть следующей:

$$\Delta t_{r+1} = \left. \begin{array}{l} \Delta t_r/2, \text{ если } E_i > \varepsilon_i \text{ хотя бы для одного } i \\ i = 1, 2, \dots, m; \\ \Delta t_r, \text{ если } \varepsilon_i/2^{p+1} < E < \varepsilon_i \text{ для всех} \\ i = 1, 2, \dots, m; \\ 2\Delta t_r, \text{ если } E_i < \varepsilon_i/2^{p+1} \text{ для всех} \\ i = 1, 2, \dots, m, \end{array} \right\} \quad (\text{V.17})$$

где Δt_{r+1} — шаг интегрирования из точки (t_{r+1}, \bar{X}_{r+1}) , если интегрировать нужно с прежним или удвоенным шагом, и из точки (t_r, \bar{X}_r) , если интегрирование должно вестись с уменьшенным шагом.

В тех случаях, когда значение t_r выражать в целых числах не нужно, схема автоматического изменения шага может быть следующей:

$$\Delta t_{r+1} = \alpha \Delta t_r \min (\varepsilon_i/E_i)^{1/(p+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (\text{V.18})$$

где $\alpha < 1$ (можно принимать $\alpha = 0,85 \div 0,95$).

В тех случаях, когда

$$\min (\varepsilon_i/E_i)^{1/(p+1)} > 1 \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

интегрирование с шагом Δt_{r+1} ведется из точки (t_{r+1}, \bar{X}_{r+1}) , а в тех случаях, когда

$$\min (\varepsilon_i/E_i)^{1/(p+1)} < 1, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

интегрирование с шагом Δt_{r+1} повторяется из точки (t_r, \bar{X}_r) .

Выбор величины начального шага Δt_0 для схемы (V.17) не является очень существенным, так как нужное значение шага находится довольно быстро, даже в том случае, когда в качестве Δt_0 берется значение $T - t_0 = \Delta t_0$.

Для схемы (V.18) величину начального шага Δt_0 целесообразно выбирать близкой к действительному значению. Методы интегрирования с автоматическим выбором шага обычно на 20—30% сокращают время, необходимое для получения решения, по сравнению с методами интегрирования при постоянном шаге (при одинаковой точности). При этом вторая схема автоматического изменения шага несколько эффективнее первой.

Практика решения задач сфероидической геодезии показывает, что методы низкого порядка (методы Эйлера, улучшенный метод Эйлера и др.) с постоянным шагом при решении многих задач часто дают значительную ошибку (при большом шаге Δt велика ошибка метода, при малом шаге Δt велика ошибка округления) или приводят к значительным затратам времени ЭВМ. Вместе с тем использование методов 2-го порядка с автоматическим выбором шага (Рунге—Кутта или прогноза с коррекцией) при решении прямых геодезических задач дает вполне удовлетворительные результаты.

В § 35 будут даны необходимые рабочие формулы для решения прямой геодезической задачи по способу Рунге—Кутта—Ингланда.

Раздел III. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ
НА РАЗЛИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

В течение двух последних столетий решением главных геодезических задач занимались ряд ученых, среди которых можно указать такие имена, как Клеро, Л. Эйлер, А. Лежандр, К. Гаусс, Бессель и др.

Так, А. Лежандр [87] дал три варианта решения различной точности. В третьем из них он использовал для передачи координат геодезическую линию и приведенную широту. Это решение можно считать первым прямым решением, в котором эллиптические интегралы, с помощью которых выражаются длина геодезической линии и разность долгот между двумя пунктами, расположенными на поверхности эллипсоида, вычисляются с помощью теоремы Лагранжа, но вывод рабочих формул не полон, а только намечен.

Первую полную сфероидическую тригонометрию составил в 1806 г. итальянский ученый Ориани. Приоритет Ориани перед Бесселем в смысле однотипности решения главной геодезической задачи (прямой задачи) является бесспорным, и Ориани поднял вопрос о приоритете в журнале «Astronomische Nachrichten» (№ 94). Однако в некоторых частях решения задачи Бессель пошел дальше Ориани.

Формулы Ориани следующие:
для вычисления расстояния

$$\begin{aligned} V - V' = \omega - \frac{2\alpha}{\sin 1''} \sin \omega \cos (2V' + \omega) - \\ - \frac{2\alpha''}{\sin 1''} \sin 2\omega \cos (2V' + \omega) + \\ + \frac{(2\alpha')^2}{\sin 1''} \sin \omega \cos (2V + \omega) \cos (2V' + \omega) + \dots; \end{aligned} \quad (a)$$

для вычисления разности долгот

$$\bar{\omega} = z - z' - \sin p [M(V - V') -$$

$$\begin{aligned} - \frac{2N'}{\sin 1''} \sin (V - V') \cos (V + V') + \\ + \frac{2N''}{\sin 1''} \sin 2(V - V') \cos 2(V + V') - \dots]. \end{aligned} \quad (б)$$

Формулы (а), (б) переходят в известные формулы Бесселя для вычисления S, l , если в формулах (а) и (б) положить

$$V = M + \sigma; \quad V' = M; \quad z - z' = \lambda; \quad \sin p = \sin m;$$

$$2 \frac{N'}{\sin 1''} = \beta' \frac{e^2}{\sqrt[3]{1 - 3/4 e^2}} \text{ и т. д.}$$

К. Гаусс получает свое решение, основываясь на общей теории проекций, которую, по существу, он и создал. Основой этого способа служит развертывание идеальной поверхности Земли на сфере, т. е. одно из равноугольных изображений одной поверхности на другой. Естественно, что и всякое другое изображение идеальной земной поверхности на сфере может дать решение рассматриваемой задачи.

Решение, предложенное Бесселем, сводит решение сфероидического треугольника, составленного из геодезических линий, к решению вспомогательного сферического треугольника. В этом смысле между решениями Гаусса и Бесселя существует известная аналогия. Бессель решает вопрос так же, как и Гаусс, с помощью рядов, но приходит к решению весьма искусственным приемом, и искусственность обусловливается необходимостью устранить эллиптический интеграл III рода с мнимым параметром.

Ранее были получены следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{c} V^3, \quad \frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{c \cos B} V, \quad \frac{dA}{ds} = \frac{\operatorname{tg} B}{c} \sin A \cdot V.$$

Интегралы этих интегралов будут, конечно, эллиптическими.

Благодаря присутствию множителя V интегралы системы не выражаются в элементарных функциях, и единственным методом, имеющим практическое значение, считался метод разложения в ряды [2], [54]. Как было показано в § 16, существует и другой, более эффектив-

ный метод, заключающийся в представлении подынтегральных функций в виде дробно-рациональных выражений и последующего интегрирования полученных дробей. В § 31 будут приведены сравнительные оценки некоторых классических решений главных геодезических задач.

Отметим одно существенное обстоятельство. Дело в том, что в настоящее время все еще продолжается публикация результатов исследований различных способов изображения поверхности эллипсоида вращения на сфере с целью применения их для решения геодезических задач. С практической точки зрения такие исследования оправдать трудно, так как авторы, во-первых, не избегают вычисления эллиптических интегралов, а, во-вторых, дополнительные теоретические изыскания (помимо существующих) о способах изображения поверхности эллипсоида вращения на сфере лишь усложняют, по существу, простой вопрос о вычислении различных криволинейных координат на поверхности эллипсоида вращения, тем более, что в некоторых случаях применение прямоугольной пространственной системы координат будет выгодно.

В настоящее время исключительный интерес для практики вычислений на ЭВМ представляют решения геодезических задач численными методами. Их можно разделить на две группы: вычисление эллиптических интегралов методами численного интегрирования и численное интегрирование дифференциальных уравнений геодезической линии.

Следует иметь в виду, что вычисление эллиптических интегралов методами численного интегрирования (формулы трапеций, Симпсона, Чебышева, Гаусса и др.) в определенном смысле не являются наилучшим решением вопроса при решении главных геодезических задач. Дело в том, что в самом совершенном с теоретической стороны способе вычисления — способе Гаусса —

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=1}^n R_i f[a + (b-a)v_i] = (b-a) E_x$$

приходится выполнять целый ряд сложных действий: 1) определять численные значения функций для значений независимого переменного с большим числом десятичных знаков, что представляет значительные трудно-

сти; 2) проводить умножение чисел с большим числом десятичных знаков и т. д.; 3) необходимо вычислять значения производных различных порядков, входящих в выражение остаточных членов, что на практике представляет значительные трудности.

В геодезической практике, да и не только в геодезической, наибольшее распространение получили метод Рунге—Кутта и его модификации (см. § 24). Отличительной особенностью этих методов является простота программирования, высокая точность решения, возможность автоматического выбора шага интегрирования, универсальность и единообразие вычислительной процедуры при любых расстояниях. Для этих методов существуют удобные формулы для оценки точности интегрирования на одном шаге (локальной ошибки).

В настоящее время оптимальным методом в смысле точности и эффективности решения прямой геодезической задачи на любые расстояния является метод Рунге—Кутта—Ингланда (см. § 24).

Конечно, при решении прямой геодезической задачи на большие расстояния методами Рунге—Кутта требуется значительное количество машинного времени.

В практике сфероидической геодезии решение главных геодезических задач выполняется исключительно на регулярных поверхностях.

В 1961 г. вышла работа А. Е. Сержанова, в которой дается математическое обоснование решения прямой геодезической задачи на поверхности, имеющей ребра [62]. Прямая задача в этом случае решается таким образом: на меридиане эллипсоида берется ряд точек; через две соседние точки проводится дуга окружности так, чтобы центр соответствующей окружности лежал на оси вращения эллипсоида. Полученная кривая, состоящая из отрезков дуг окружностей, при вращении около малой оси эллипсоида образует поверхность, состоящую из шаровых поясов и вписанную в эллипсоид вращения. После этого прямая геодезическая задача решается не на эллипсоиде, а на поверхности, состоящей из шаровых поясов. Результаты, полученные на таком образом построенной поверхности, считаются эллипсоидальными.

Целесообразность решения задач на поверхности, состоящей из шаровых поясов, вытекает из того, что на этой поверхности интегралы берутся в конечном виде.

Кроме того, как это показано в работах С. П. Александрова [1] и Л. А. Люстерника [50], теорема Клеро $r \sin A = c$ действительна и для выпуклых поверхностей. Таким образом, определение азимутов при решении главных геодезических задач не составляет затруднений. В нашей работе [21] приведены дальнейшие исследования по решению как прямой, так и обратной геодезических задач на поверхности с ребром.

Методы решения геодезических задач между пунктами, заданными в единой системе координат, в настоящее время основательно разработаны и продолжают совершенствоваться. Особенность решения геодезических задач между пунктами изолированных сетей состоит, главным образом, в необходимости учета разносистемности координат. Решение геодезических задач без приведения координат пунктов в единую систему может привести к ошибкам в расстояниях порядка 1—1,5 км и в азимутах для сравнительно коротких расстояний ($s \approx 1000$ км) порядка нескольких минут дуги. Пренебрежение такими ошибками во многих случаях недопустимо, так как ведет к неполному использованию возможностей радиолокации и радионавигации. В § 36 даны весьма обстоятельные исследования по этому вопросу, которые принадлежат Г. А. Мещерякову и его ученикам.

Решение навигационных задач непосредственно на той поверхности, которой принадлежат траектории навигационных сигналов и где, следовательно, расположены навигационные точки и объект навигации (навигационное пространство), имеет как теоретическое, так и практическое значение.

При навигации на земной поверхности удобно пользоваться такой системой координат, в которой положение точки на поверхности Земли задается широтой Φ и долготой L , причем земной радиус-вектор ρ является в общем случае функцией координат Φ и L (геоцентрическая система координат) и определяется фигурой Земли. Земную поверхность можно рассматривать как двумерное риманово пространство соответствующей кривизны, и тогда при наземном расположении навигационных точек и объекта навигации решаемые задачи навигации будут двумерными.

В зависимости от того, какой модели уподобляется геоид — трехосному эллипсоиду, эллипсоиду вращения

или сфере, навигационные пространства будут обладать различными геометрическими свойствами.

В навигационном пространстве сигналы распространяются по кратчайшим расстояниям. Траектории навигационных сигналов, огибающих Землю, представляют собой геодезические линии, принадлежащие поверхности, которой уподоблен геоид. Свойства геодезических линий определяются внутренней геометрией поверхности и описываются с помощью компонент фундаментального метрического тензора g_{ij} (или $g^{i,j}$) и их частных производных (см. раздел I) по координатам, выражаемых символами Христофеля Γ_{jk}^i (или Γ_{jh}).

Заметим, что в настоящее время при аналитическом решении обычно стремятся решать их в неискривленном пространстве двух или трех измерений, а фактическое отклонение метрики от евклидовой учитывать путем внесения необходимых поправок за сферичность или сфероидичность Земли, за рефракцию или запаздывание сигнала. Подобные упрощения пространства в ряде случаев бывают оправданными. В то же время точная методика решения навигационных задач должна быть основана на анализе геодезических линий на поверхности того метрического тела, которому в данной задаче уподобляется геоид.

Отметим, что подобная методика решения геодезических задач разрабатывалась еще в 1962 г. В. С. Шебшаевичем. Навигационные решения на двумерной сфероидической поверхности рассматривались им как частный случай навигационных решений в искривленных пространствах различной мерности. Была важна общность в подходе к решениям различных навигационных задач, отсюда и избранный путь анализа с применением метрических характеристик отдельных моделей планетной поверхности [80]. Естественно, что описание свойств геодезических линий в этом случае должно опираться на теорию и практику тензорного исчисления.

В § 28 данного раздела будет изложена (с нашими комментариями) методика решения геодезических задач.

На основании решения дифференциальных уравнений геодезических линий для случая эллипсоида вращения, которому может уподобляться навигационное пространство в виде геоида, находится совокупность зависимостей

между длинами геодезических линий, ортогональными координатами и азимутами. Эти зависимости, представляющие собой обобщение формул сферической тригонометрии, составляют основу решения навигационных задач непосредственно в эллиптическом навигационном пространстве. Подчеркивается, что решения, основанные на переходе от поверхности эллипсоида к некоторой условной сферической поверхности, в результате чего в формульные зависимости входят элементы, относящиеся к этой фиктивной сфере, менее удобны и выгодны, чем решения непосредственно в эллиптическом пространстве.

В случае трехосного эллипсоида аналитические выражения становятся громоздкими и надежным методом решения главных геодезических задач является численный метод решения.

Глава VI.

ОСНОВЫ МЕТОДИКИ РЕШЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

§ 26. Основные уравнения при решении главных геодезических задач по геодезической линии на поверхности эллипсоида вращения

Дифференциальное уравнение линии (II.19) можно рассматривать как уравнение Эйлера—Лагранжа [15]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{u}^i} \right) = 0, \quad (\text{VI.1})$$

выражающее, что первая вариация δs длины дуги s , соединяющей две точки, заданной в параметрическом виде $u^i = u^i(t)$ ($i=1, 2; t_0 \leq t \leq t_1$), должна равняться нулю.

В частном случае, когда функция Φ зависит от u^i , уравнение Эйлера записывается таким образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{u}^i} \right) = 0. \quad (\text{VI.2})$$

Положим теперь, что поверхность отнесена к координатам u^1, u^2 и имеет метрическую формулу [см. § 2, (I.17)]:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta.$$

Тогда длина дуги кривой выразится интегралом

$$\int_L ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta} dt; \quad \left(\dot{u}^i = \frac{du^i}{dt} \right). \quad (\text{VI.3})$$

Вследствие экстремальности геодезической линии для подынтегральной функции $\Phi = \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}$ должно выполняться уравнение Эйлера (VI.1).

В дальнейшем положим, что Φ зависит только от u^i , т. е. $\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{u}^i} = 0$. Тогда, учитывая выражение (VI.2), можно записать

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}}{\partial \dot{u}^i} \right) = 0. \quad (\text{VI.4})$$

Интегрируя выражение (VI.4), получаем

$$\frac{\partial \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}}{\partial \dot{u}^i} = c. \quad (\text{VI.5})$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial \dot{u}^i} (g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta) = 2g_{\alpha i} \dot{u}^\alpha; \quad \frac{\partial \dot{u}^j}{\partial \dot{u}^i} = \delta_i^j. \quad (\text{VI.6})$$

Поэтому равенство (VI.5) примет вид

$$\frac{g_{\alpha i} \dot{u}^\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}} = c. \quad (\text{VI.7})$$

Уравнение (VI.7) представляет собой дифференциальное уравнение геодезической линии и записано в самом общем виде.

Возьмем на какой-либо поверхности ортогональную параметрическую сеть и будем считать, что переменные u^1 и u^2 независимы. Тогда для линейного элемента поверхности, согласно уравнению (I.20), можно записать

$$ds^2 = g_{11} (du^1)^2 + g_{22} (du^2)^2; \quad (\text{VI.8})$$

где

$$g_{ij} = \bar{r}_i \bar{r}_j. \quad (\text{VI.9})$$

Обозначим $\frac{du^2}{du^1} = u^2$, тогда уравнение (VI.8) будет иметь вид

$$ds = \sqrt{g_{11} + g_{22} \dot{u}^2} du^1, \quad (\text{VI.10})$$

откуда

$$s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{g_{11} + g_{22} (\dot{u}^2)^2} du^1. \quad (\text{VI.11})$$

Подынтегральное выражение в уравнении (VI.11) $\Phi = \sqrt{g_{11} + g_{22} (\dot{u}^2)^2}$ зависит только от \dot{u}^2 , поэтому для геодезической линии должно выполняться уравнение Эйлера в форме (VI.7).

Тогда, учитывая равенства (VI.5), (VI.7), получаем

$$\frac{g_{22} (\dot{u}^2)}{\sqrt{g_{11} + g_{22} (\dot{u}^2)^2}} = c. \quad (\text{VI.12})$$

Формула (VI.12) также представляет собой дифференциальное уравнение геодезической линии, которое можно привести к виду

$$\dot{u}^2 = \frac{du^2}{du^1} = \frac{c \sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}^2 - g_{22} c^2}}. \quad (\text{VI.13})$$

Длину геодезической линии s можно найти из уравнения (VI.11), если вместо величины \dot{u}^2 , входящей в подынтегральное выражение (VI.11), подставить уравнение (VI.13), связывающее du^1 и du^2 . Имеем

$$s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\frac{g_{11} g_{22}}{g_{22}^2 - c^2}} du^1. \quad (\text{VI.14})$$

Интегрируя обе части равенства (VI.13)

$$du^2 = \frac{c \sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}^2 - g_{22} c^2}} du^1,$$

получаем

$$u^2 = u_1^2 + \int_{u_1}^{u_2} \frac{c \sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}^2 - g_{22} c^2}} du^1. \quad (\text{VI.15})$$

Уравнения (VI.14) и (VI.15) являются основными уравнениями при решении главных геодезических задач. Они пригодны для любой поверхности, включая поверхность с ребром, а также для любой системы координат.

Важно отметить, что на поверхности трехосного эллипсоида нельзя построить ортогональную координатную сеть, и, следовательно, линейный элемент ds^2 запишется в виде

$$ds^2 = g_{11} (du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22} (du^2)^2.$$

Отсюда, вид формул (VI.14) и (VI.15) будет значительно сложнее.

1. Вычисление длин геодезических линий по формуле (VI.14).

а) На эллипсоиде вращения. По данным работы [5] для коэффициентов $g_{11} dz^2$ и g_{22} получены следующие выражения:

$$g_{11} dz^2 = \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 u\right) b^2 \cos^2 u du^2, \quad (\text{VI.16})$$

$$g_{22} = a^2 \cos^2 u. \quad (\text{VI.17})$$

Подставляя выражения (VI.16) и (VI.17) в формулу (VI.14), будем иметь

$$s = a \int_{u_1}^{u_2} \frac{\cos u \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{\sqrt{\cos^2 u - c^2}} du, \quad (\text{VI.18})$$

где $c = \cos u_0$.

После подстановки

$$\sin u = \sin u_0 \cos \varphi$$

получим

$$s = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_0} \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad (\text{VI.19})$$

где

$$k^2 = \frac{e^2 \sin^2 u_0}{1 - e^2 \cos^2 u_0}.$$

Вычисление эллиптического интеграла (VI.19) приведено в § 16.

б) На сфероиде Клеро. Уравнение меридионального сечения в этом случае имеет вид

$$\rho = a(1 - \alpha \sin^2 \Phi), \quad (\text{VI.20})$$

где Φ — геоцентрическая широта.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) = \xi = a(1 - \alpha \sin^2 \Phi) \cos \Phi, \\ z = a(1 - \alpha \sin^2 \Phi) \sin \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.21})$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} d\xi = -a[1 + \alpha(2 - 3 \sin^2 \Phi)] \sin \Phi d\Phi, \\ dz = a(1 - 3\alpha \sin^2 \Phi) \cos \Phi d\Phi, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.22})$$

а также

$$\varphi'(z) = - \left[\frac{1 + \alpha(2 - 3 \sin^2 \Phi)}{1 - 3\alpha \sin^2 \Phi} \right] \text{tg } \Phi. \quad (\text{VI.23})$$

С учетом полученных формул (VI.21), (VI.22) и (VI.23) найдем

$$g_{11} dz^2 = a^2(1 - 2\alpha \sin^2 \Phi) d\Phi^2, \quad (\text{VI.23}^*)$$

$$g_{22} = a^2(1 - 2\alpha \sin^2 \Phi) \cos^2 \Phi. \quad (\text{VI.24})$$

Подставив уравнения (VI.23*) и (VI.24) в формулу (VI.14), будем иметь

$$s = a \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{(1 - 2\alpha \sin^2 \Phi) \cos \Phi d\Phi}{\sqrt{(1 - 2\alpha \sin^2 \Phi) \cos^2 \Phi - c^2}}, \quad (\text{VI.25})$$

где

$$c = (1 - \alpha \sin^2 \Phi_0) \cos \Phi_0. \quad (\text{VI.26})$$

Без приведения подобных выкладок укажем, что с помощью подстановки $\sin \Phi = \sin \Phi_0 \sin \varphi$ интеграл (VI.25) сводится к выражению

$$s = \frac{ak^2}{\sin^3 \Phi_0} \left[(1 + 2\alpha \cos^2 \Phi_0) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \right.$$

$$\left. - 2\alpha \cos^2 \Phi_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right], \quad (\text{VI.27})$$

где

$$k^2 = \frac{2\alpha \sin^2 \Phi_0}{1 + 2\alpha \cos^2 \Phi_0}.$$

Таким образом, длина геодезической линии на сфероиде Клеро выражается с помощью эллиптических интегралов I и II родов, вычисление которых приведено в § 16.

в) На поверхности, имеющей ребра. Уравнение i -го шарового пояса получено в таком виде [62]:

$$X = R_i \frac{a \cos u \cos L}{D_i(u)},$$

$$Y = R_i \frac{a \cos u \sin L}{D_i(u)},$$

$$Z = R_i \frac{b \sin u - Z_i}{D_i(u)},$$

где

$$D_i(u) = \sqrt{a^2 \cos^2 u - (b \sin u - Z_i)^2}.$$

Следовательно, величины ξ и Z запишутся

$$\xi = \frac{R_i(a)}{D_i(u)} \cos u, \quad Z = \frac{R_i(b \sin u - Z_i)}{D_i(u)}. \quad (\text{VI.28})$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= \frac{R_i a}{D_i^3(u)} (b \sin u - Z_i) (b - Z_i \sin u), \\ dZ &= \frac{R_i a^2}{D_i^3(u)} \cos u (b - Z_i \sin u) \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.29})$$

и далее

$$f'(Z) = \frac{b \sin u - Z_i}{a \cos u}. \quad (\text{VI.30})$$

Величина $\gamma_{11} dZ^2$ с учетом уравнений (VI.29) и (VI.30) будет

$$\gamma_{11} dZ^2 = (1 + f'^2) dZ^2 = \frac{R_i^2 a^2}{D_i^4(u)} (b - Z_i \sin u)^2. \quad (\text{VI.31})$$

Из выражений (VI.28) получим

$$\gamma_{22} = \frac{R_i^2 a^2}{D_i(u)} \cos^2 u. \quad (\text{VI.32})$$

Подставив выражения (VI.31) и (VI.32) в формулу (VI.14), найдем

$$s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\frac{\frac{R_i^2 a^2}{D_i^4(u)} (b - Z_i \sin u)^2 \cdot \frac{R_i^2 a^2}{D_i^2(u)} \cos^2 u}{\frac{R_i^2 a^2}{D_i^2(u)} \cos^2 u - c^2}} du. \quad (\text{VI.33})$$

Интегрируя выражение (VI.33), окончательно получаем

$$\frac{s}{R} = \sigma_2 - \sigma_1, \quad (\text{VI.34})$$

где при $D(u) = R$

$$\sin \sigma_i = \frac{a(u_i)}{f}; \quad a(u_i) = b \sin u_i - Z_i; \quad f = \sqrt{R^2 - c^2}$$

($i = 1, 2$).

По формуле (VI.34) вычисляется длина геодезической линии на поверхности шарового пояса.

2. Вычисление разности долгот между пунктами по формуле (VI.15).

а) На эллипсоиде вращения. Подставив выражения (VI.16), (VI.17) и $c = \cos u_0$ в уравнение (VI.15), будем иметь

$$L_2 = L_1 + \cos u_0 \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - \cos^2 u_0}} du. \quad (\text{VI.35})$$

Подстановкой $\sin \varphi = \frac{\sin u}{\sin u_0}$ выражение (VI.35) сводится к эллиптическому интегралу III рода по Лежандру

$$L_2 = L_1 + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos u_0} \right) - e^2 \cos u_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{1 + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (\text{VI.36})$$

где

$$k^2 = \frac{e^2 \sin^2 u_0}{1 - e^2 \cos^2 u_0}.$$

б) На сфероиде Клеро. Подставив выражения (VI.23), (VI.24) и (VI.26) в уравнение (VI.15), найдем

$$L_2 = L_1 + \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{(1 - \alpha \sin^2 \Phi_0) \cos \Phi_0 d\Phi}{\cos \Phi \sqrt{(1 - 2\alpha \sin^2 \Phi) \cos^2 \Phi - (1 - 2\alpha \sin^2 \Phi_0) \cos^2 \Phi_0}}. \quad (\text{VI.37})$$

После подстановки $\sin \varphi \sin \Phi_0 = \sin \Phi$ получим

$$L_2 = L_1 + \frac{(1 - \alpha \sin^2 \Phi_0) \cos \Phi_0 k^2}{\sin^3 \Phi_0} \times \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1 + \sin^2 \Phi_0 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (\text{VI.38})$$

где

$$k^2 = \frac{2\alpha \sin^2 \Phi_0}{1 + 2\alpha \cos^2 \Phi_0}.$$

Отсюда следует, что и на сфероиде Клеро разность долгот между двумя пунктами выражается с помощью эллиптического интеграла III рода, вычисление которого приведено в § 16.

в) На поверхности, имеющей ребра. Подставив выражения (VI.31) и (VI.32) в уравнение (VI.15), найдем

$$L_2 = L_1 + (\gamma_2 - \gamma_1), \quad (\text{VI.39})$$

где при $D(u) = R$

$$\operatorname{tg} \gamma_i = \frac{ca(u_i)}{Rb(u_i)}, \quad \begin{aligned} a(u_i) &= b \sin u_i - z_c, \\ b(u_i) &= \sqrt{a^2 \cos u_i - c^2}. \end{aligned} \quad (\text{VI.40})$$

Сопоставление исходных формул на сфероиде Клеро с аналогичными формулами на эллипсоиде вращения показывает, что они по структуре, функциональному виду и т. д. сходны. Следовательно, решение геодезических задач на обеих поверхностях будет аналогично как по

методике, так и по сложности вычислений. Ясно, что введение сфероид Клеро в качестве поверхности относимости при решении геодезических задач существенного эффекта не дает. Вместе с тем ответа на этот вопрос до сих пор не было [55].

§ 27. Общий метод решения главных геодезических задач на малые расстояния

Предположим, что на какой-нибудь поверхности задана произвольная система координат u^1, u^2 . Тогда, разлагая соответствующий интеграл дифференциальных уравнений геодезической линии в ряд Тейлора, получаем [14]

$$u^i = u_0^i + \xi^i s - \frac{s^2}{2} (\Gamma_{\alpha\beta}^i)_0 \xi^\alpha \xi^\beta - \frac{s^3}{6} (\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^i)_0 \xi^\alpha \xi^\beta \xi^\gamma - \dots \quad (\text{VI.41})$$

Из уравнений геодезической линии

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{du^\alpha}{ds} \cdot \frac{du^\beta}{ds} \quad (\text{VI.42})$$

последовательным дифференцированием получим

$$\frac{d^3 u^i}{ds^3} = -\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^i \frac{du^\alpha}{ds} \cdot \frac{du^\beta}{ds} \cdot \frac{du^\gamma}{ds}, \quad (\text{VI.43})$$

$$\frac{d^4 u^i}{ds^4} = -\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \frac{du^\alpha}{ds} \cdot \frac{du^\beta}{ds} \cdot \frac{du^\gamma}{ds} \cdot \frac{du^\delta}{ds}, \quad (\text{VI.44})$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}^i, \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^i$ — значения соответствующих функций в точке (u_0^1, u_0^2) , а ξ^1, ξ^2 — значения в той же точке производных $\frac{du^1}{ds}, \frac{du^2}{ds}$, которые определяют направление геодезической линии.

Для определения символов Христофеля $\Gamma_{\alpha\beta}^i, \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^i, \dots$ служит общая формула

$$\Gamma_{jkl\dots mn}^i = \frac{1}{N} P \left[\frac{\partial \Gamma_{jkl\dots mn}^i}{\partial u^k} - (N-1) \Gamma_{\alpha k\dots m}^i \Gamma_{jk}^\alpha \right], \quad (\text{VI.45})$$

где N — число нижних индексов, P — сумма членов в выражении, стоящем внутри скобок, которые получают циклической перестановкой свободных индексов.

Если обозначить

$$v^i = s \xi^i, \quad (\text{VI.46})$$

то уравнение (VI.41) можно представить в виде

$$u^i = u_0^i + v^i - \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha\beta}^i)_0 v^\alpha v^\beta - \frac{1}{6} (\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^i)_0 v^\alpha v^\beta v^\gamma - \dots \quad (\text{VI.47})$$

Соотношение (VI.47) можно рассматривать как уравнение, связывающее независимые переменные u^1, u^2 с независимыми v^1, v^2 , т. е. как уравнение преобразования переменных u^1, u^2 в v^1, v^2 .

Из уравнения (VI.47) найдем

$$v^i = (u^i - u_0^i) + F(u^1 - u_0^1 \dots u^n - u_0^n). \quad (\text{VI.48})$$

Таким образом, по формуле (VI.47) решается прямая задача, т. е. по v^i находится u^i , а по формуле (VI.48) — обратная.

Перепишем соотношение (VI.47) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u^1 &= u_0^1 + v^1 - \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha\beta}^1)_0 v^\alpha v^\beta - \\ &- \frac{1}{6} (\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^1)_0 v^\alpha v^\beta v^\gamma - \dots, \\ u^2 &= u_0^2 + v^2 - \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha\beta}^2)_0 v^\alpha v^\beta - \\ &- \frac{1}{6} (\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^2)_0 v^\alpha v^\beta v^\gamma - \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.49})$$

Символы Христофеля, согласно формуле (VI.45), представим в развернутом виде

$$(\Gamma_{\alpha\beta}^1)_0 v^\alpha v^\beta = (\Gamma_{11}^1)_0 v^1 v^1 + 2 (\Gamma_{12}^1)_0 v^1 v^2 + (\Gamma_{22}^1)_0 v^2 v^2, \quad (\text{VI.50})$$

где

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}, \quad (\text{VI.51})$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}, \quad (\text{VI.52})$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2g_{11}} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}. \quad (\text{VI.53})$$

$$(\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^1)_0 v^\alpha v^\beta v^\gamma = (\Gamma_{111}^1)_0 (v^1)^3 + [(\Gamma_{112}^1)_0 + (\Gamma_{121}^1)_0 + (\Gamma_{211}^1)_0] (v^1)^2 (v^2) + [(\Gamma_{122}^1)_0 + (\Gamma_{212}^1)_0 + (\Gamma_{221}^1)_0] \times v^1 (v^2)^2 + (\Gamma_{222}^1)_0 (v^2)^3, \quad (\text{VI.54})$$

где

$$\Gamma_{111}^1 = \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial u^1} - 2(\Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^2), \quad (\text{VI.55})$$

$$\Gamma_{112}^1 = \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial u^2} - 2(\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^2), \quad (\text{VI.56})$$

$$\Gamma_{121}^1 = \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u^1} - 2(\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2), \quad (\text{VI.57})$$

$$\Gamma_{211}^1 = \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial u^1} - 2(\Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^2), \quad (\text{VI.58})$$

$$\Gamma_{222}^1 = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u^2} - 2(\Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{22}^2), \quad (\text{VI.59})$$

$$\Gamma_{122}^1 = \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u^2} - 2(\Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2), \quad (\text{VI.60})$$

$$\Gamma_{212}^1 = \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial u^2} - 2(\Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{22}^2), \quad (\text{VI.61})$$

$$\Gamma_{221}^1 = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u^1} - 2(\Gamma_{12}^1 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2), \quad (\text{VI.62})$$

$$(\Gamma_{\alpha\beta}^2)_0 v^\alpha v^\beta = (\Gamma_{11}^2)_0 (v^1)^2 + 2(\Gamma_{12}^2)_0 v^1 v^2 + (\Gamma_{22}^2)_0 (v^2)^2, \quad (\text{VI.63})$$

где

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2g_{22}} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}, \quad (\text{VI.64})$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}, \quad (\text{VI.65})$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}. \quad (\text{VI.66})$$

$$(\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^2)_0 v^\alpha v^\beta v^\gamma = (\Gamma_{111}^2)_0 (v^1)^3 + [(\Gamma_{112}^2)_0 + (\Gamma_{121}^2)_0 + (\Gamma_{211}^2)_0] \times (v^1)^2 v^2 + [(\Gamma_{122}^2)_0 + (\Gamma_{212}^2)_0 + (\Gamma_{221}^2)_0] v^1 (v^2)^2 + (\Gamma_{222}^2)_0 (v^2)^3, \quad (\text{VI.67})$$

где

$$\Gamma_{111}^2 = \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u^1} - 2(\Gamma_{11}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{11}^2), \quad (\text{VI.68})$$

$$\Gamma_{112}^2 = \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u^2} - 2(\Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2), \quad (\text{VI.69})$$

$$\Gamma_{121}^2 = \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u^1} - 2(\Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2), \quad (\text{VI.70})$$

$$\Gamma_{211}^2 = \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial u^1} - 2(\Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^2), \quad (\text{VI.71})$$

$$\Gamma_{222}^2 = \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial u^2} - 2(\Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2), \quad (\text{VI.72})$$

$$\Gamma_{122}^2 = \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u^2} - 2(\Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^2), \quad (\text{VI.73})$$

$$\Gamma_{212}^2 = \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial u^2} - 2(\Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^2), \quad (\text{VI.74})$$

$$\Gamma_{221}^2 = \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial u^1} - 2(\Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^2). \quad (\text{VI.75})$$

Предположим, что имеем эллипсоид вращения. За параметры u^1, u^2 примем геодезические координаты: широту $B=u^1$ и долготу $L=u^2$.

Линейный элемент на произвольной поверхности в случае ортогональной сети записывается в таком виде:

$$ds^2 = g_{11} (du^1)^2 + g_{22} (u^2)^2, \quad (\text{VI.76})$$

где $g_{12}=g_{21}=0$. В соответствии с формулой (VI.76) для линейного элемента поверхности эллипсоида вращения получим

$$ds^2 = M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 B dL^2, \quad (\text{VI.77})$$

следовательно,

$$g_{11} = M^2, \quad (\text{VI.78})$$

$$g_{22} = N^2 \cos^2 B. \quad (\text{VI.79})$$

Так как

$$\frac{du^1}{ds} = \frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M}, \quad (\text{VI.80})$$

$$\frac{du^2}{ds} = \frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B}, \quad (\text{VI.81})$$

то, согласно формуле (VI.46), можно получить

$$v^1 = \frac{s \cdot \cos A}{M}, \quad (\text{VI.82})$$

$$v^2 = \frac{s \cdot \sin A}{N \cos B}. \quad (\text{VI.83})$$

По формулам (VI.50)—(VI.75) подсчитаем значения символов Христофеля. Прежде всего замечаем, что $\frac{\partial q_{11}}{\partial u^2} = 0$, значит символы Христофеля $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{22}^2$ также равны нулю. Поэтому исходные уравнения (VI.50)—(VI.75) для определения символов Христофеля запишутся в сокращенном виде:

$$(\Gamma_{\alpha\beta}^i) v^\alpha v^\beta = (\Gamma_{11}^1)_0 v^1 v^1 + (\Gamma_{22}^1)_0 v^2 v^2, \quad (\text{VI.84})$$

$$(\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^1)_0 v^\alpha v^\beta v^\gamma = (\Gamma_{111}^1)_0 (v^1)^3 + [(\Gamma_{212}^1)_0 + (\Gamma_{221}^1)_0] v^1 (v^2)^2, \quad (\text{VI.85})$$

где

$$\Gamma_{111}^1 = \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial u^1} - 2\Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1, \quad (\text{VI.86})$$

$$\Gamma_{122}^1 = -\Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2, \quad (\text{VI.87})$$

$$\Gamma_{212}^1 = -2\Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1, \quad (\text{VI.88})$$

$$\Gamma_{221}^1 = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u^1} - 2\Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2, \quad (\text{VI.89})$$

$$(\Gamma_{\alpha\beta}^2)_0 = v^\alpha v^\beta = 2(\Gamma_{12}^2)_0 v^1 v^2, \quad (\text{VI.90})$$

$$(\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^2)_0 = v^\alpha v^\beta v^\gamma = [(\Gamma_{112}^2)_0 + (\Gamma_{121}^2)_0 + (\Gamma_{211}^2)_0] (v^1)^2 v^2 + (\Gamma_{222}^2)_0 (v^2)^3, \quad (\text{VI.91})$$

где

$$\Gamma_{112}^2 = -2\Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2, \quad (\text{VI.92})$$

$$\Gamma_{121}^2 = \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u^1} - 2\Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1, \quad (\text{VI.93})$$

$$\Gamma_{211}^2 = \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial u^1} - 2\Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^2, \quad (\text{VI.94})$$

$$\Gamma_{222}^2 = -2\Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1. \quad (\text{VI.95})$$

С учетом формул (VI.84)—(VI.95), т. е. новых значений символов Христофеля, уравнения (VI.49) запишутся в таком виде:

$$u^1 = u_0^1 + v_0^1 - \frac{1}{2} [(\Gamma_{11}^1)_0 (v^1)^2 + (\Gamma_{22}^1)_0 (v^2)^2] - \frac{1}{6} \left\{ \left[\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial u^1} - 2\Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 \right]_0 (v^1)^3 + \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u^1} - 2\Gamma_{22}^1 (2\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1) \right]_0 v^1 (v^2)^2 \right\}. \quad (\text{VI.96})$$

$$u^2 = u_0^2 + v_0^2 - (\Gamma_{12}^2)_0 v^1 v^2 - \frac{1}{6} \left\{ \left[2 \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u^1} - 4\Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - 2\Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 \right]_0 (v^1)^2 v^2 - 2(\Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1)_0 (v^2)^3 \right\}. \quad (\text{VI.97})$$

В нашей работе [7] даны символы Христофеля $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{12}^2$ для эллипсоида.

Имеем

$$\Gamma_{11}^1 = + \frac{3}{2} e^2 \frac{\sin 2B}{W^2}, \quad (\text{VI.98})$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} V^2 \sin 2B, \quad (\text{VI.99})$$

$$\Gamma_{12}^2 = - \frac{\text{tg } B}{V^2}. \quad (\text{VI.100})$$

Кроме того, легко находим

$$\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial u^1} = \frac{d}{dB} \left(\frac{3}{2} e^2 \frac{\sin 2B}{W^2} \right) = \frac{3[e^2 - (2e^2 - e^4) \sin^2 B]}{W^4}, \quad (\text{VI.101})$$

$$\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u^1} = \frac{d}{dB} \left(\frac{1}{2} V^2 \sin 2B \right) = \frac{1}{1 - e^2} \left[1 - \left(2 + \frac{3}{2} e^2 \right) \sin^2 B + \frac{5}{4} e^2 \sin^4 B \right], \quad (\text{VI.102})$$

$$\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u^1} = \frac{d}{dB} \left(-\frac{\operatorname{tg} B}{V^2} \right) = - \frac{(1 - e^2) - (e^2 + e^4) \sin B - (2e^2 - 2e^4) \sin^4 B}{\cos^2 BW^4} \quad (\text{VI.103})$$

После подстановки полученных выражений (VI.98) — (VI.103) в исходные уравнения (VI.96), (VI.97) с учетом формул (VI.82), (VI.83) можем записать

$$B_2 = B_1 + a_1 s \cos A_{12} + a_2 s^2 \cos^2 A_{12} + a_3 s^3 \sin^2 A_{12} + a_4 s^3 \cos^3 A_{12} + \dots \quad (\text{VI.104})$$

$$L_2 = L_1 + b_1 s \sin A_{12} + b_2 s^2 \cos A_{12} \sin A_{12} + b_3 s^3 \sin^3 A_{12} + b_4 s^3 \cos^2 A_{12} \sin A_{12} + \dots, \quad (\text{VI.105})$$

где

$$a_1 = \frac{\rho''}{M}, \quad a = -\frac{3}{2} \frac{\operatorname{tg} BV^4}{c^2} \rho'' \eta^2, \quad (\text{VI.106})$$

$$a_3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{V^4}{c^2} \cdot \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B} \rho'',$$

.....

$$b_1 = \frac{V}{c \cos B} \rho'',$$

$$b_2 = \frac{V^2 \operatorname{tg} B}{c^2 \cos B} \rho'',$$

$$b_3 = -\frac{V^3 \operatorname{tg}^2 B}{3c^3 \cos B} \rho'' \quad (\text{VI.107})$$

.....

Как и следовало ожидать, полученные коэффициенты тождественны коэффициентам, которые обычно используются при решении прямой геодезической задачи по способу Лежандра [2].

Формулы (VI.96), (VI.97) универсальны. Проиллюстрируем это следующими примерами.

Положим, что радиус-вектор сфероида задан в следующих двух видах:

$$R(\Phi) = a(1 - \alpha \sin^2 \Phi), \quad (\text{VI.108})$$

$$R(\Phi) = a \left\{ 1 - \alpha \left(\sin^2 \Phi - \frac{3}{8} \alpha^2 \right) \sin^2 2\Phi \right\}. \quad (\text{VI.109})$$

В этом случае величины g_{11} , g_{22} могут быть вычислены по формулам, которые приведены в § 9.

Так, для уравнения (VI.108) имеем

$$g_{11} = a^2(1 - 2\alpha \sin^2 \Phi), \quad (\text{VI.110})$$

$$g_{22} = a^2(1 - 2\alpha \sin^2 \Phi) \cos^2 \Phi; \quad (\text{VI.111})$$

соответственно для формулы (VI.109)

$$g_{11} = a^2[1 - \alpha(2 - \alpha) \sin^2 \Phi], \quad (\text{VI.112})$$

$$g_{22} = a^2[1 - 2\alpha \sin^2 \Phi - \alpha^2(3 - 4 \sin^2 \Phi) \sin^2 \Phi] \cos^2 \Phi. \quad (\text{VI.113})$$

Символы Христофеля II рода, согласно формулам (VI.51), (VI.53) и (VI.65), например, в первом случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -2\alpha \sin \Phi \cos \Phi, \\ \Gamma_{22}^1 &= [1 + 2\alpha(1 - 3 \sin^2 \Phi)] \sin \Phi \cos \Phi, \\ \Gamma_{12}^2 &= -[\alpha \sin 2\Phi + \operatorname{tg} \Phi]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.114})$$

После того как найдены символы Христофеля Γ_{11}^1 , Γ_{22}^1 , Γ_{12}^2 , определить величины $\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial u^1}$, $\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u^1}$, $\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u^1}$ трудно. Получение рабочих формул для решения прямой геодезической задачи состоит в подстановке найденных величин в формулы (VI.96), (VI.97).

Путем обращения соотношений (VI.96), (VI.97) можно получить необходимые уравнения для решения обратной геодезической задачи.

Принимая в соотношениях (VI.98), (VI.99), (VI.100) $e^2=0$ или $\alpha=0$ в уравнениях (VI.110) — (VI.113), (VI.114), получаем решение тех же задач на сфере.

Из приведенных примеров следует, что выражения (VI.96), (VI.97) являются самыми общими, а получение по ним рабочих формул значительно проще и удобнее, чем это принято в настоящее время в геодезической ли-

тературе. Общеизвестно, что по мере увеличения порядка членов усложняются выражения для их коэффициентов, следовательно, и получение последних. Из формулы (VI.45) легко заключить, что получение символов Христофеля взамен вычисления производных высоких степеней [2] более эффективно, даже в случае решения задач на поверхности трехосного эллипсоида.

§ 28. Основные зависимости между длинами геодезических линий, ортогональными координатами и азимутами на поверхности эллипсоида вращения

Запишем уравнение эллипсоида вращения в виде

$$\rho(\Phi) = b(1 - e^2 \cos^2 \Phi)^{-1/2}, \quad (\text{VI.115})$$

где Φ — геоцентрическая широта точки, ρ — радиус-вектор.

Первая квадратичная формула имеет вид [см. § 2, формулу (I.17)]

$$I = ds^2 = g_{ik} du^i du^k \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где u^i — координаты, g_{ik} — компоненты фундаментального метрического тензора, а также

$$\frac{d^2 u^i}{dp^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{du^\alpha}{dp} \cdot \frac{du^\beta}{dp} + \Phi(p) \frac{du^i}{dp} = 0, \quad (\text{VI.116})$$

$(i, k = 1, 2, \dots, n),$

где $\Gamma_{\alpha\beta}^i$ — символы Христофеля II рода, p — некоторый параметр, через который выражается геодезическая линия, $\Phi(p)$ — функция, связанная с производными от лонгального параметра s [41],

$$\Phi(p) = \ddot{s} (\dot{s})^{-1}.$$

В случае ортогональной координатной сети получим

$$s = \int_{p_1}^{p_2} \left[g_{\Phi\Phi}(p) \left(\frac{d\Phi}{dp} \right)^2 + g_{LL}(p) \left(\frac{dL}{dp} \right)^2 \right]^{1/2} dp, \quad (\text{VI.117})$$

кроме того,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{dp^2} + \Gamma_{\Phi\Phi}^{\Phi} \left(\frac{d\Phi}{dp} \right)^2 + \Gamma_{LL}^{\Phi} \left(\frac{dL}{dp} \right)^2 + \Phi(p) \frac{d\Phi}{dp} = 0 \\ \text{и} \\ \frac{d^2 L}{dp^2} + 2\Gamma_{\Phi L}^L \frac{d\Phi}{dp} \frac{dL}{dp} + \Phi(p) \frac{dL}{dp} = 0, \end{aligned} \right\} (\text{VI.118})$$

поскольку $q_{\Phi L} = q_{L\Phi} = \Gamma_{\Phi L}^{\Phi} = \Gamma_{L\Phi}^{\Phi} = \Gamma_{\Phi\Phi}^L = \Gamma_{LL}^L = 0$.

Из соотношений (VI.118) найдем

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\cos A}{\rho(\Phi)}, \quad \frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{G}, \quad (\text{VI.119})$$

где

$$G = \rho(\Phi) \cos \Phi = b(1 - e^2 \cos^2 \Phi)^{-1/2} \cos \Phi. \quad (\text{VI.120})$$

Подставляя в уравнения (VI.118) значения $\Gamma_{\Phi\Phi}^{\Phi}$ и Γ_{LL}^{Φ} из формулы (I.99), а величины $\frac{d\Phi}{ds}$, $\frac{d^2 \Phi}{ds^2}$ и $\frac{dL}{ds}$ — в со-

ответствии с уравнением (VI.119), после несложных преобразований получим

$$\frac{d}{ds} (G \sin A) = 0. \quad (\text{VI.121})$$

Интегрируя последнее выражение, найдем

$$\rho(\Phi) \cos \Phi \sin A = c. \quad (\text{VI.122})$$

Постоянная c может быть определена из начальных условий. Если обозначить A_0 азимут геодезической линии в точке пересечения геодезической линии с экватором ($\Phi=0$), то при $\Phi=0$ радиус-вектора $\rho_0(\Phi) = a$. Поэтому

$$c = a \sin A_0. \quad (\text{VI.123})$$

Сопоставляя уравнения (VI.122) и (VI.123), а также учитывая выражение (VI.120), получаем

$$\sin A_0 = \frac{b}{a} \cos \Phi \sin A (1 - e^2 \cos^2 \Phi)^{-1/2} \quad (\text{VI.124})$$

или

$$\sin A_0 = \frac{\sin A}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \Phi \right)^{1/2}}. \quad (\text{VI.125})$$

Мы получим первый интеграл дифференциального уравнения геодезической линии в функции геоцентрической широты Φ и азимута A .

Из формулы (VI.125) легко найти значение наибольшей широты, которое достигает геодезическая линия на эллипсоиде. В этом случае $A_{\max} = \frac{\pi}{2}$, и поэтому

$$\Phi_{\max} = \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{ctg} A_0 \right). \quad (\text{VI.126})$$

Для сферы $\rho = a = b$, $e^2 = 0$. Следовательно, из уравнения (VI.125) получим известное соотношение сферической тригонометрии

$$\sin A_0 = \cos \Phi \sin A. \quad (\text{VI.127})$$

следовательно,

$$\Phi_{\max} = A_0. \quad (\text{VI.128})$$

Запишем первую квадратичную форму следующим образом:

$$ds^2 = g_{\Phi\Phi} d\Phi^2 + g_{LL} dL^2. \quad (\text{VI.129})$$

Из уравнений (VI.122) и (VI.119) следует

$$G^2 \frac{dL}{ds} = c, \quad dL = \frac{c}{G^2} ds. \quad (\text{VI.130})$$

Подставляя в выражения (VI.130) значение ds из уравнения (VI.129), найдем

$$\frac{dL}{d\Phi} = \left(\frac{g_{\Phi\Phi}}{G^4/c^2 - g_{LL}} \right)^{1/2}. \quad (\text{VI.131})$$

Заменяя $g_{\Phi\Phi}$, g_{LL} , G и c их значениями из формул (I.98), (VI.120) и (VI.123), после преобразований получим

$$\frac{dL}{d\Phi} = \sec^2 \Phi \left(1 - \frac{e^2}{B^2} \right)^{1/2} \left(\frac{b^2}{a^2} \operatorname{ctg}^2 A_0 - \operatorname{tg}^2 \Phi \right)^{-1/2} \quad (\text{VI.132})$$

где

$$B^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \Phi = \sin^2 A \operatorname{cosec}^2 A_0. \quad (\text{VI.133})$$

Дифференцируя уравнения (VI.125), найдем следующее соотношение:

$$\frac{dA}{d\Phi} = \sec^2 \Phi B^{-1} \left(\frac{b^2}{a^2} \operatorname{ctg}^2 A_0 \operatorname{ctg}^2 \Phi - 1 \right)^{-1/2}. \quad (\text{VI.134})$$

Используя выражения (VI.132) и (VI.134), получим

$$\frac{dL}{dA} = \operatorname{ctg} \Phi \sqrt{B^2 - e^2}. \quad (\text{VI.135})$$

Дифференциальные зависимости (VI.132) — (VI.135) используются далее для нахождения интегральных зависимостей, дающих соотношения между геодезическими линиями и азимутами:

Заметим, что выражения (VI.12) и (VI.130) идентичны.

Для сферы ($\rho = a = b$) будут иметь место соотношения, вытекающие из уравнений (VI.132) — (VI.135),

$$\frac{dL}{d\Phi} = \sec^2 \Phi (\operatorname{ctg}^2 A_0 - \operatorname{tg}^2 \Phi)^{-1/2}, \quad (\text{VI.132}')$$

$$\frac{dA}{d\Phi} = \sec \Phi (\operatorname{ctg}^2 A_0 \operatorname{ctg}^2 \Phi - 1)^{-1/2} \quad (\text{VI.134}')$$

$$\frac{dL}{dA} = \operatorname{cosec} \Phi. \quad (\text{VI.135}')$$

Найдем зависимость между геодезической линией s и азимутами в начальной и конечной точках этой линии.

Из уравнения (VI.117) следует

$$s = \int_{A_1}^{A_2} \left[g_{\Phi\Phi} \left(\frac{d\Phi}{dA} \right)^2 + g_{LL} \left(\frac{dL}{dA} \right)^2 \right]^{1/2} dA. \quad (\text{VI.136})$$

Входящие в интеграл величины $g_{\Phi\Phi}$, g_{LL} , $\frac{d\Phi}{dA}$, $\frac{dL}{dA}$ даются с помощью выражений (I.98), (VI.134') и (VI.135'), где они представлены в функции широты Φ . Используя первый интеграл дифференциального уравнения геодезической линии (VI.125), выразим эти величины в функции A и A_0 . Выполнив необходимые преобразования, найдем

$$g_{\Phi\Phi} = (\alpha^4 + \gamma^4 A^2)(1 + A^2)^2 (\alpha^2 + \gamma^2 A^2)^{-3}, \quad (\text{VI.137})$$

где

$$A^2 = \operatorname{tg}^2 \Phi;$$

а также

$$g_{LL} = \alpha^{-2} \operatorname{cosec}^2 A \sin^2 A_0. \quad (\text{VI.138})$$

Для величин $\frac{d\Phi}{dA}$ и $\frac{dL}{da}$ соответственно найдем

$$\frac{d\Phi}{dA} = \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} \sin 2A \operatorname{cosec}^2 A_0 A^{-1} (1 + A^2)^{-1}, \quad (\text{VI.139})$$

а также

$$\frac{dL}{dA} = A^{-1} \left(A^2 + \frac{\alpha^4}{\gamma^4} \right)^{1/2}. \quad (\text{VI.140})$$

Подставив выражения (VI.137) — (VI.140) в формулу (VI.136), после преобразований получим

$$s = a \int_{A_1}^{A_2} \frac{1}{\sin A} \sqrt{\frac{1 - e^2 (\sin A \operatorname{cosec} A_0)^{-2}}{\sin^2 A \operatorname{cosec} A_0 - 1}} dA. \quad (\text{VI.141})$$

Введем подстановку

$$\sin \psi = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} A_0, \quad (\text{VI.142})$$

откуда

$$\sin A = \sqrt{\frac{1}{1 + \sin^2 \psi \operatorname{ctg} A_0}} \quad (\text{VI.143})$$

и

$$dA = -\operatorname{ctg} A_0 \sin^2 A \cos \psi d\psi. \quad (\text{VI.144})$$

Произведя в формуле (VI.141) подстановки в соответствии с уравнениями (VI.142), (VI.143) и (VI.144), получим

$$s = -a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 A_0} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi. \quad (\text{VI.145})$$

Величина

$$k^2 = \frac{e^2 \cos^2 A_0}{1 - e^2 \sin^2 A_0}. \quad (\text{VI.146})$$

В нашей работе [13] интеграл (VI.141) получен в таком виде:

$$s = \frac{b}{(1-n)} \sin A_0 \int_{A_1}^{A_2} \sqrt{\frac{(1+n)^2 \sin^2 A - 4n \sin^2 A_0}{\sin^2 A - \sin^2 A_0}} \cdot \frac{dA}{\sin^2 A},$$

который легко приводится к виду (VI.141).

Из уравнения (VI.145) видно, что s выражается через эллиптический интеграл II рода от ψ и k :

$$s = -R_s |E(\psi, k^2)|_{\psi_1}^{\psi_2}, \quad (\text{VI.147})$$

где

$$R_s = a (1 - e^2 \sin^2 A_0)^{1/2}. \quad (\text{VI.148})$$

В общем случае вычислять следует по формуле

$$s = R_s [E(\psi_1, k^2) - E(\psi_2, k^2)], \quad (\text{VI.149})$$

в которой первое и второе слагаемые представляют собой расстояние по геодезической линии от точки с максимальной широтой соответственно до начальной и конечной точек отрезка геодезической линии.

Отметим, что для сферы ($\rho = a = b$) $k^2 = 0$; и поскольку $E(\psi, 0) = \frac{2\psi}{\pi} E = \psi$, имеем для длины геодезической линии

$$s = \rho [|\psi_0^1| - |\psi_0^2|]. \quad (\text{VI.149}')$$

В случае отсчета расстояний от экватора

$$s = \rho \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(\operatorname{ctg} A_2 \operatorname{tg} A_0) \right], \quad (\text{VI.149}'')$$

откуда следует, что

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{s}{\rho} \right) = \operatorname{ctg} A_2 \operatorname{tg} A_0;$$

и далее известная формула сферической тригонометрии

$$\cos s' = \operatorname{ctg} A \operatorname{tg} A_0, \quad (\text{VI.150})$$

где $s' = \frac{s}{\rho}$ — дуга большого круга в угловом выражении.

Итак, длина геодезической линии s на эллипсоиде вращения выражается через эллиптические интегралы II рода $E(\psi, k^2)$, и для расчетов можно пользоваться имеющимися таблицами эллиптических интегралов. Однако для ряда практических применений более целесо-

образно использовать асимптотическое разложение эллиптических интегралов по степени тригонометрических функций и модуля k^2 .

Применяя к выражению (VI.149) известное разложение [39], находим

$$s = R_s \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left[\psi_i \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} Q_1(n) k^{2n} \right) + \sin \psi_i \cos \psi_i \sum_{n=1}^{\infty} Q_2(n) k^{2n} \sum_{p=1}^n Q_3(n, p) \sin^{2(n-p)} \psi_i \right], \quad (\text{VI.151})$$

где $Q_1(n)$, $Q_2(n)$ и $Q_3(n, p)$ выражаются через гамма-функции.

Необходимое число членов в разложении (VI.151) можно легко подсчитать. Все будет зависеть от практической постановки задачи. Отметим лишь, что в случае эллипсоида Красовского член, пропорциональный k^2 , может достигнуть 17 км, член с k^4 имеет величину порядка 20 м, тогда как член с k^6 дает несколько сантиметров.

Так, для некоторых целей навигации на поверхности Земли можно использовать формулу, получаемую из разложения (VI.151), путем пренебрежения членами высших порядков малости

$$s = R_s \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} (f_1 \psi_i + f_2 \sin \psi_i \cos \psi_i + f_3 \sin^3 \psi_i \cos \psi_i), \quad (\text{VI.152})$$

где $f_1 = 1 - f_2$; $f_2 = 1/4k^2 + 3/64k^4$; $f_3 = 1/32k^4$. Здесь k^2 дается выражением (VI.146).

Как было показано в гл. IV, § 16, более эффективным решением эллиптических интегралов является представление их в виде дробно-рациональных выражений. Применяя формулы (IV.42) и (IV.44) § 16 к эллиптическому интегралу (VI.147), находим

$$s = R_s [\rho_2 (\psi_1 - \psi_2) + \Delta \rho_2 (\sin 2\psi_1 - \sin 2\psi_2)]. \quad (\text{VI.153})$$

Итак, зависимость длины геодезической линии от ее азимута как параметра представлена формулами (VI.152) или (VI.153) и была найдена в результате интегрирования уравнения (VI.117) по A .

Получим аналогичную зависимость, выраженную через широту Φ , как параметр. Из уравнения (VI.117) имеем

$$s = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \left[g_{\Phi\Phi} + g_{LL} \left(\frac{dL}{d\Phi} \right)^2 \right]^{1/2} d\Phi. \quad (\text{VI.154})$$

Значения для $g_{\Phi\Phi}$, g_{LL} и $d\Phi$, выраженные через Φ и A_0 , даны соответственно в § 6, а также в формулах (I.98) и (VI.132). Подставляя их в выражение (VI.154), после необходимых преобразований находим

$$s = b \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \sqrt{\frac{1 - (1 - e^2) \cos^2 \Phi}{1 - e^2 \cos^2 \Phi}} + \frac{1 - e^2}{1 + b^2/a^2 \operatorname{tg}^2 \Phi} \frac{d\Phi}{1 - e^2 \cos^2 \Phi} \cdot (\text{VI.155})$$

Вводим подстановку

$$\cos \psi = \frac{\sin \Phi}{\cos A_0 \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \Phi}}. \quad (\text{VI.156})$$

Тогда

$$\cos^2 \Phi = \frac{1 - \cos^2 A_0 \cos^2 \psi}{1 - e^2 \cos A_0 \cos^2 \psi}, \quad (\text{VI.157})$$

$$\sin^2 \Phi = \frac{(1 - e^2) \cos^2 A_0 \cos^2 \psi}{1 - e^2 \cos^2 A_0 \cos^2 \psi}, \quad (\text{VI.158})$$

$$d\Phi = - \frac{\cos A_0 \sin \psi \sqrt{1 - e^2} d\psi}{(1 - e^2 \cos^2 A_0 \cos^2 \psi) \sqrt{1 - \cos^2 A_0 \cos^2 \psi}}. \quad (\text{VI.159})$$

Подставляя выражения (VI.157), (VI.158) и (VI.159) в уравнение (VI.155) и выполняя необходимые преобразования, находим

$$s = -a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 A_0} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \quad (\text{VI.160})$$

где

$$k^2 = \frac{e^2 \cos^2 A_0}{1 - e^2 \sin^2 A_0}. \quad (\text{VI.161})$$

Итак, длина геодезической линии выражается через эллиптический интеграл II рода. Обозначим, как и раньше,

$$a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 A_0} = R_s. \quad (\text{VI.162})$$

Для вычисления интеграла (VI.160) воспользуемся формулами (IV.42) и (IV.44) § 16. Тогда

$$s = R_s [\rho_2 (\psi_1 - \psi_2) + \Delta \rho_2 (\sin 2\psi_1 - \sin 2\psi_2)]. \quad (\text{VI.163})$$

Конечно, для вычислений можно пользоваться также разложением решения по степеням тригонометрических функций и модуля k^2 (VI.161), а также приближенной формулой (VI.152).

Отметим, что для сферы ($\rho = a = b$) $k^2 = 0$, и поэтому $E(\Psi, 0) = \Psi$, так что при отсчете расстояний от экватора

$$s = \rho \left[\frac{\pi}{2} - \arccos(\sin \Phi \sec A_0) \right],$$

откуда следует что

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{s}{\rho} \right) = \sin \Phi \sec A_0$$

и далее — известная формула сферической тригонометрии

$$\sin \Phi = \sin s' \cos A_0. \quad (\text{VI.164})$$

Важно отметить следующее. Выражения для геодезической линии в функции азимута A или широты Φ непременно приводят к эллиптическому интегралу II рода. Тот же интеграл

$$s = -R_s \int_{\psi_1}^{\psi_2} E(\psi, k^2) d\psi,$$

мы получим, если выразим длину геодезической линии в функции широты Φ и азимута A совместно. Поэтому целесообразнее, не прибегая к интегрированию, воспользоваться результатом формулы (VI.147), выражая каждый раз амплитуду Ψ соответственно через A , Φ или Φ и A совместно. Так, для выражения длины геодезической линии в функции азимута A получено (см. формулу (VI.142))

$$\psi = \arcsin(\operatorname{ctg} A \operatorname{tg} A_0),$$

в функции широты Φ (см. формулу VI.156)

$$\psi = \arccos \left(\frac{\sin \Phi \sec A_0}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \Phi}} \right),$$

в функции Φ и A совместно (см. формулу VI.164)

$$\psi = \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \Phi \cos A \right).$$

Следовательно, можно выразить s в функции только Φ и A через эллиптические интегралы $E(\Psi, k^2)$ таким образом:

$$s = a (1 - e^2 B^{-2} \sin^2 A)^{1/2} [E(\psi_1, k^2) - E(\psi_2, k^2)], \quad (\text{VI.165})$$

где B — функция Φ , определяемая соотношением (VI.133). В равной степени и в этом случае могут быть использованы асимптотические разложения типа (VI.151) или (VI.152), а также дробно-рациональное (IV.42).

Для сферы ($k^2 = 0$) и отсчета расстояний от экватора из выражения (VI.165) найдем

$$s = \rho \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \Phi \cos A) \right], \quad (\text{VI.166})$$

и как частный случай получается известная формула сферической тригонометрии

$$\operatorname{ctg} s' = \operatorname{ctg} \Phi \cos A. \quad (\text{VI.167})$$

Таким образом, в рассмотренных трех случаях зависимости $s(A, A_0)$, $s(\Phi, A_0)$ и $s(\Phi, A)$ выражаются эллиптическими интегралами II рода, модуль которых k и амплитуда Ψ являются функциями соответствующих сочетаний углов $[A, A_0]$, $[\Phi, A_0]$ и $[\Phi, A]$.

Установим зависимости, содержащие параметр долготы. Прежде всего найдем зависимость $l = l(\Phi, A_0)$. На основании дифференциального соотношения (VI.132) имеем

$$l = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \sec^2 \Phi \sqrt{\frac{1 - \frac{e^2}{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \Phi}}{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \Phi}} \times \left(\frac{b^2}{a^2} \operatorname{ctg}^2 A_0 - \operatorname{tg}^2 \Phi \right)^{-1/2} d\Phi. \quad (\text{VI.168})$$

Воспользуемся далее подстановками (VI.156) и (VI.161)

$$\cos \psi = \frac{\sin \Phi \sec A_0}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \Phi}},$$

$$k^2 = \frac{e^2 \cos^2 A_0}{1 - e^2 \sin^2 A_0}$$

и формулами (VI.157), (VI.158) и (VI.159). После ряда преобразований найдем

$$l = - \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 A_0}}{\sin A_0} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi}{1 + \operatorname{ctg}^2 A_0 \sin^2 \psi}. \quad (\text{VI.169})$$

Как известно [84], входящий в уравнение (VI.169) интеграл выражается через эллиптические интегралы I рода $F(\Psi, k^2)$ и III рода $\Pi(\Psi, \mu, k^2)$:

$$\int \frac{dn^2 u}{1 + \mu \operatorname{sn}^2 u} du = \left(1 + \frac{k^2}{\mu}\right) [\Pi(\psi_2, \mu, k^2) - \Pi(\psi_1, \mu, k^2)] - \frac{k^2}{\mu} [F(\psi_2, k^2) - F(\psi_1, k^2)]. \quad (\text{VI.170})$$

Поэтому, подставляя в уравнение (VI.169) выражение для интеграла (VI.170), получаем

$$l = R_{L_1} [\Pi(\psi_1, \mu, k^2) - \Pi(\psi_2, \mu, k^2)] - R_{L_2} [F(\psi_1, k^2) - F(\psi_2, k^2)], \quad (\text{VI.171})$$

где $\mu = \operatorname{ctg}^2 A_0$;

$$R_{L_1} = \operatorname{cosec} A_0 (1 - e^2 \sin^2 A_0)^{-1/2},$$

$$R_{L_2} = e^2 \sin A_0 (1 - e^2 \sin^2 A_0)^{-1/2}. \quad (\text{VI.172})$$

Зависимость (VI.171) $l=l(\Phi, A_0)$ может быть представлена в виде разложения по степеням модуля k^2 и тригонометрических функций так же, как и в случае зависимостей $s(\Phi, A_0)$. Более эффективным способом вычисления l будет представление эллиптических интегралов I и III рода по формулам (IV.45) и (IV.49) (см. § 16, гл. IV).

После необходимых преобразований окончательно получим

$$l = \sigma_1 - \sigma_2 - \Delta\sigma (\Delta\psi_1 - \Delta\psi_2), \quad (\text{VI.173})$$

где

$$\sigma = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sin A_0}, \quad (\text{VI.174})$$

$$\Delta\sigma = \frac{2(e^2 - k^2)}{4 - 3k^2 - e^2} \operatorname{cosec} A_0, \quad (\text{VI.175})$$

$$\Delta\psi = \psi + \frac{2k^2}{16 - 3k^2} \psi - \frac{k^2}{16 - 2k^2} \sin 2\psi. \quad (\text{VI.176})$$

Зависимость $l=l(\Phi, A_0)$ (VI.171) была найдена из интеграла разности долгот (VI.168) путем интегрирования по Φ функции $\varphi_1(\Phi, A_0)$. Для нахождения зависимости $l=l(A, A_0)$ следует интегрировать по A с предварительным выражением подынтегральной функции в виде $\varphi_2(A, A_0)$. Аналогично этому представление подынтегрального выражения в виде функции $\varphi_3(\Phi, A)$ с последующим интегрированием по Φ или по A приводит к зависимости $l=l(\Phi, A)$, т. е. к интегралам типа (VI.169) и, в конечном счете, к эллиптическим интегралам вида (VI.170). Поэтому возможно без проведения указанных вычислений сразу записать зависимость $l=l(A, A_0)$ в виде, повторяющем формулу (VI.171), имея в виду, что в этом случае

$$\psi = \arcsin(\operatorname{ctg} A \operatorname{tg} A_0).$$

Подобно этому зависимость $l=l(\Phi, A)$ может быть записана в виде, отличающемся от вида формулы (VI.171) только сомножителями при $\Pi(\Psi, \mu, k^2)$ и $F(\Psi, k^2)$,

$$l = B^2 \sin^{-1} A (B^2 - e^2 \sin^2 A)^{-1/2} [\Pi(\psi_1, \mu, k) - \Pi(\psi_2, \mu, k)] - e^2 \sin A (B^2 - e^2 \sin^2 A)^{-1/2} \times [F(\psi_1, k) - F(\psi_2, k)], \quad (\text{VI.177})$$

причем теперь

$$\psi = \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \Phi \cos A \right), \quad B^2 = \sin^2 A \operatorname{cosec}^2 A_0. \quad (\text{VI.178})$$

В заключение отметим, что на основе полученных зависимостей представляется возможным разработать алгоритмы решения различного рода задач сферической геодезии непосредственно на поверхности эллипсоида вращения, т. е. в эллиптическом пространстве,

не пользуясь никакими способами изображения эллипсоида на сфере.

§ 29. Алгоритмы решения основных задач сфероидической геодезии

Приведем алгоритмы решения основных задач сфероидической геодезии в двумерном пространстве типа эллипсоида вращения, используя для этого систему тригонометрических зависимостей, полученных в § 28.

А. Сокращенные обозначения исходных зависимостей

1) Азимут A_0 пересечения геодезической линии с экватором

$$A_0(\Phi, A) = \arccos \left[\sin A \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \Phi \right)^{-1/2} \right]. \quad (\text{VI.179})$$

2) Широта Φ , определяемая по A_0 и азимуту A ,

$$\Phi(A_0, A) = \operatorname{arctg} \left[\frac{b}{a} (\sin^2 A \operatorname{cosec}^2 A_0 - 1)^{1/2} \right]. \quad (\text{VI.180})$$

3) Азимут геодезической линии A , определяемый по известной теореме Φ и азимуту A_0 ,

$$A(\Phi, A_0) = \arcsin \left[\sin A_0 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \Phi \right)^{1/2} \right]. \quad (\text{VI.181})$$

4) Модуль k эллиптических интегралов, определяемый по азимуту A_0 ,

$$k(A_0) = \sqrt{e^2 \cos A_0 (1 - e^2 \sin^2 A_0)^{-1/2}}. \quad (\text{VI.182})$$

5) Амплитуда Ψ эллиптических интегралов, определяемая по известным азимутам A и A_0 ,

$$\Psi(A, A_0) = \arcsin (\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} A_0). \quad (\text{VI.183})$$

6) Амплитуда Ψ , определяемая по известной широте Φ и азимуту A_0 ,

$$\Psi(\Phi, A_0) = \arccos \left[\sin A_0 \left(\frac{b^2}{a^2} \operatorname{cosec}^2 \Phi - e^2 \right)^{-1/2} \right]. \quad (\text{VI.184})$$

7) Широта Φ , определяемая по известным амплитуде Ψ и азимуту A_0 ,

$$\Phi(\Psi, A_0) = \operatorname{arccosec} \left[\frac{a}{b} (\sec^2 A_0 \sec^2 \Psi - e^2)^{1/2} \right]. \quad (\text{VI.185})$$

8) Коэффициент длины R_s , определяемый по известному азимуту A_0 ,

$$R_s(A_0) = a(1 - e^2 \sin^2 A_0)^{1/2}. \quad (\text{VI.186})$$

9) Эллиптический интеграл II рода E , определяемый по известным его амплитуде Ψ и модулю k ,

$$E(\Psi, k^2) = \left(1 - \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4 \right) \Psi + \left(\frac{1}{4} k^2 + \frac{3}{64} k^4 \right) \sin \Psi \cos \Psi + \frac{1}{32} k^4 \sin^3 \Psi \cos \Psi.$$

10) Длина геодезической линии s , определяемая по известным модулю k и амплитудам конечных точек Ψ_1 и Ψ_2 ,

$$\begin{aligned} s(k^2, \Psi_1, \Psi_2) &= R_s [E(\Psi_1, k^2) - E(\Psi_2, k^2)] = \\ &= R_s \left[\left(1 - \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4 \right) (\Psi_1 - \Psi_2) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1}{4} k^2 + \frac{3}{64} k^4 \right) (\sin \Psi_1 \cos \Psi_1 - \sin \Psi_2 \cos \Psi_2) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{32} k^4 (\sin^3 \Psi_1 \cos \Psi_1 - \sin^3 \Psi_2 \cos \Psi_2) \right]. \quad (\text{VI.187}) \end{aligned}$$

11) Интеграл E_2 , относящийся к конечной точке и определяемый по модулю k , длине s , коэффициенту R_s и амплитуде Ψ_1 , принадлежащей начальной точке,

$$E_2(k^2, \Psi_1, s) = E(\Psi_2, k^2) = E(\Psi_1, k^2) - R_s^{-1} s. \quad (\text{VI.188})$$

12) Амплитуда ψ , определяемая по известным значениям модуля k и интеграла E , $\psi(E, k)$.

Для нахождения $\psi(E, k^2)$, кроме использования таблиц эллиптических интегралов, может применяться итерационный процесс, для которого исходное значение амплитуды берется из сферического ($e^2 = 0$) решения; $\psi_0 = E$ и используется зависимость (VI.152).

Имеем $\psi_0 = E$, а этапы итерации имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= E - (f_1 E + f_2 \sin E \cos E + f_3 \sin^3 E \cos E) + E, \\ \psi_2 &= \psi_1 - (f_1 \psi_1 + f_2 \sin \psi_1 \cos \psi_1 + f_3 \sin^3 \psi_1 \cos \psi_1) + E, \\ &\dots \dots \dots \\ \psi_n &= \psi_{n-1} (f_1 \psi_{n-1} + f_2 \sin \psi_{n-1} \cos \psi_{n-1} + \\ &+ f_3 \sin^3 \psi_{n-1} \cos \psi_{n-1}) + E, \end{aligned}$$

где

$$f_1 = 1 - f_2, \quad f_2 = \frac{1}{4} k^2 + \frac{3}{64} k^4, \quad f_3 = \frac{1}{32} k^4. \quad (\text{VI.189})$$

13) Для нахождения $A_0(s, \Phi_1, \Phi_2)$ можно воспользоваться итерационным процессом, для которого первым приближением может служить сферическое ($e^2 = 0$) решение, вытекающее из уравнения (VI.149').

Имеем

$$s = a(\psi_{01} - \psi_{02}) = a \left[\arcsin(1 - \sin^2 \Phi_1 \sec^2 A_0)^{1/2} - \arcsin(1 - \sin^2 \Phi_2 \sec^2 A_0)^{1/2} \right],$$

откуда следует

$$A_0 = \arccos \left\{ \pm \left[\sin^2 \Phi_1 + \sin^2 \Phi_2 \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm 2 \sin \Phi_1 \sin \Phi_2 \cos \frac{s}{a} \right]^{1/2} \operatorname{cosec} \frac{s}{a} \right\}. \quad (\text{VI.190})$$

Выбор знаков осуществляется в соответствии со знаками разностей $(\Phi_2 - \Phi_1)$ и $(L_2 - L_1)$. Последовательные приближения будут иметь вид

$$A_n = A_{n-1} + (1 - e^2 \sin^2 A_{n-1})^{1/2} [f_{(n-1)1}(\psi_{(n-1)1} - \psi_{(n-1)2}) + \\ + f_{(n-1)2}(\sin \psi_{(n-1)1} \cos \psi_{(n-1)1} - \sin \psi_{(n-1)2} \cos \psi_{(n-1)2}) + \\ + f_{(n-1)3}(\sin^3 \psi_{(n-1)1} \cos \psi_{(n-1)1} - \sin^3 \psi_{(n-1)2} \cos \psi_{(n-1)2})] \frac{s}{a}, \quad (\text{VI.191})$$

где f_{n1}, f_{n2}, f_{n3} даются выражениями (VI.189), а ψ_{nj} (Φ_j, A_n) — выражениями (VI.184).

14) Азимут A_0 , определяемый по известной длине s , широте начальной точки Φ_1 и азимуту конечной точки A_2 : $A_0(s, \Phi_1, A_2)$. Для нахождения $A_0(s, \Phi_1, A_2)$ возможно итерационное решение, первым приближением которого служит величина, полученная из сферического ($e^2 = 0$) решения уравнения типа (VI.149').

15) Коэффициент R_{L_1} , выражаемый через азимут A_0 , $R_{L_1}(A_0) = \operatorname{cosec} A_0 (1 - e^2 \sin^2 A_0)^{-1/2}$. (VI.192)

16) Коэффициент R_{L_2} , выражаемый через азимут A_0 ,

$$R_{L_2}(A_0) = e^2 \sin A_0 (1 - e^2 \sin^2 A_0)^{-1/2}, \quad (\text{VI.193})$$

17) Коэффициент μ , выражаемый через A_0 ,

$$\mu(A_0) = \operatorname{ctg}^2 A_0. \quad (\text{VI.194})$$

18) Долгота L_2 конечной точки геодезической линии, определяемая по азимуту A_0 , долготе начальной точки L_1 и амплитудам ψ_1 и ψ_2 .

Имеем

$$L_2(A_0, L_1, \psi_1, \psi_2) = L_1 + R_{L_1} [\Pi(\psi_1, \mu, k) - \Pi(\psi_2, \mu, k)] - \\ - R_{L_2} [F(\psi_1, k) - F(\psi_2, k)] = L_1 + h_1(\psi_1 - \psi_2) + \\ + h_2(\sin \psi_1 \cos \psi_1 - \sin \psi_2 \cos \psi_2) + \\ + h_3 [\operatorname{arctg}(\operatorname{cosec} A_0 \operatorname{tg} \psi_1) - \operatorname{arctg}(\operatorname{cosec} A_0 \operatorname{tg} \psi_2)], \quad (\text{VI.195})$$

где

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= R_{L_1} \left(\frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{16} k^4 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{8} k^4 \operatorname{tg}^2 A_0 \right) \operatorname{tg}^2 A_0 - R_{L_2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 \right), \\ h_2 &= R_{L_2} \frac{1}{4} k^2 - R_{L_1} k^4 \operatorname{tg}^2 A_0, \\ h_3 &= R_{L_1} \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \operatorname{tg}^2 A_0 + \frac{3}{8} k^4 \operatorname{tg}^4 A_0 \right) \sin A_0; \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.196})$$

причем $\psi(A, A_0)$ или $\psi(\Phi, A_0)$ даются соответственно выражениями (VI.183) или (VI.184).

19) Азимут A_0 , определяемый по известным широтам Φ_1 и Φ_2 и долготам L_1 и L_2 конечных точек, $A_0(\Phi_1, \Phi_2, L_1, L_2)$. Для нахождения $A_0(\Phi_1, \Phi_2, L_1, L_2)$ может применяться итерационное решение, первое приближение для которого берется из сферических формул типа ($e^2 = 0$).

Имеем

$$L_2 = L_1 + \arcsin(1 - \operatorname{tg}^2 \Phi_1 \operatorname{tg}^2 A_0)^{1/2} - \\ - \arcsin(1 - \operatorname{tg}^2 \Phi_2 \operatorname{tg}^2 A_0)^{1/2}. \quad (\text{VI.197})$$

Откуда следует

$$A_0 = \operatorname{arctg} \left\{ \pm \left[\operatorname{tg}^2 \Phi_1 + \operatorname{tg}^2 \Phi_2 \mp 2 \operatorname{tg} \Phi_1 \operatorname{tg} \Phi_2 \cos \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (L_2 - L_1) \right]^{1/2} \operatorname{cosec} (L_2 - L_1) \right\}. \quad (\text{VI.198})$$

При этом итерационная формула будет следующей:

$$A_n = A_{n-1} - h_{(n-1)1} (\psi_{(n-1)1} - \psi_{(n-1)2}) + \\ + h_{(n-1)2} (\sin \psi_{(n-1)1} \cos \psi_{(n-1)1} - \sin \psi_{(n-1)2} \cos \psi_{(n-1)2}) + \\ + h_{(n-1)3} [\operatorname{arctg} (\operatorname{cosec} A_{n-1} \operatorname{tg} \psi_{(n-1)1} - \\ - \operatorname{arctg} (\operatorname{cosec} A_{n-1} \operatorname{tg} \psi_{(n-1)2}))] - (L_2 - L_1),$$

где h_{n1} , h_{n2} и h_{n3} даются выражениями (VI.196), а ψ_{nj} (Φ_j , A_n) — выражением (VI.184).

20) Азимут A_0 , определяемый по известной широте Φ_1 и долготе L_1 начальной точки геодезической линии и азимуту A_2 и долготе L_2 ее конечной точки,

$$A_0(\Phi_1, A_2, L_1, L_2).$$

Находится A_0 (Φ_1 , A_2 , L_1 , L_2) так же, как и в предыдущем случае.

21) Широта Φ_2 конечной точки, определяемая по известным азимуту A_0 , широте Φ_1 и долготе L_1 начальной точки и долготе L_2 конечной точки,

$$\Phi_2(A_0, \Phi_1, L_1, L_2).$$

Находится $\Phi_2(A_0, \Phi_1, L_1, L_2)$ так же, как и в предыдущем случае.

22) Широта Φ_2 конечной точки, определяемая по известным длине s , широте Φ_1 и долготе L_1 начальной точки и долготе L_2 конечной точки,

$$\Phi_2(s, \Phi_1, L_1, L_2).$$

Для нахождения Φ_2 (s , Φ_1 , L_1 , L_2) следует решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} F_1(s, A_0, \Phi_1, \Phi_2) &= 0, \\ F_2(L_2, A_0, L_1, \Phi_1, \Phi_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.199})$$

Для этого применим метод Ньютона. В качестве первого приближения A_0 и Φ_{02} могут использоваться решения системы уравнений сферического приближения [типа (VI.149'') и (VI.197)].

Последовательные поправки к приближенным значениям ΔA_n и $\Delta \Phi_{n2}$ вычисляются по известным формулам этого метода из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta A_n \left(\frac{\partial F_1}{\partial A_0} \right)_n + \Delta \Phi_{n2} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \Phi} \right)_n + \\ + F_1(s, A_n, \Phi_1, \Phi_{n2}) &= 0, \\ \Delta A_n \left(\frac{\partial F_2}{\partial A_0} \right)_n + \Delta \Phi_{n2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial \Phi} \right)_n + \\ + F_2(L_2, A_n, L_1, \Phi_1, \Phi_{n2}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.200})$$

23) Широта Φ_x объекта навигации, определяемая по известным широтам Φ_1 и Φ_2 и долготам L_1 и L_2 двух навигационных точек, а также по измеренным расстояниям s_1 и s_2 от объекта до этих точек,

$$\Phi_x(\Phi_1, \Phi_2, L_1, L_2, s_1, s_2).$$

24) Долгота L_x объекта навигации, определяемая по известным широтам Φ_1 и Φ_2 и долготам L_1 и L_2 двух навигационных точек, а также по измеренным расстояниям s_1 и s_2 от объекта до этих точек,

$$L_x(\Phi_1, \Phi_2, L_1, L_2, s_1, s_2).$$

Для нахождения Φ_x и L_x следует решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} F_1(s_1, \Phi_1, \Phi_x, A_{01}) &= 0, \\ F_2(\Phi_1, L_1, \Phi_x, L_x, A_{01}) &= 0, \\ F_3(s_2, \Phi_2, \Phi_x, A_{02}) &= 0, \\ F_4(\Phi_2, L_2, \Phi_x, L_x, A_{02}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.201})$$

Для этого применим метод Ньютона. Значение первых приближений Φ_{0x} и L_{0x} , если они не заданы априорно, берут из сферических решений. Последовательные поправки к приближенным значениям $\Delta \Phi_{nx}$, ΔL_{nx} , ΔA_{n1} и ΔA_{n2} вычисляются по известным формулам решением системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Phi_{nx} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \Phi} \right)_n + \Delta A_{n1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial A_0} \right)_n - \\ - F_1(s_1, \Phi_1, \Phi_{nx}, A_{n1}) &= 0, \\ \Delta \Phi_{nx} \left(\frac{\partial F_2}{\partial \Phi} \right)_n + \Delta A_{n1} \left(\frac{\partial F_2}{\partial A_0} \right)_n - \Delta L_{nx} - \\ - F_2(\Phi_1, L_1, \Phi_{nx}, L_{nx}, A_{n1}) &= 0, \\ \Delta \Phi_{nx} \left(\frac{\partial F_3}{\partial \Phi} \right)_n + \Delta A_{n2} \left(\frac{\partial F_3}{\partial A_0} \right)_n - \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.202})$$

Таблица 2

№ п/п	Величина	Формулы	№ формулы
1	A_0	$\sin A_0 = \sin A_1 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \Phi_1\right)^{-1/2}$	(VI. 125)
2	ψ_1	$\cos \psi_1 = \sin \Phi_1 \sec A_0 (1 - e^2 \cos^2 \Phi_1)^{-1/2}$	(VI. 156)
3	k^2	$k^2 = e^2 \cos^2 A_0 (1 - e^2 \sin^2 A_0)^{-1}$	(VI. 161)
4	ρ	$\rho = 1 - k^2 (4 - 0,75k^2)^{-1}$	
5	$\Delta\rho$	$\Delta\rho = 0,125k^2 (1 + 0,125k^2)$	
6	R_s	$R_s = a [1 - 2(e^2 - k^2)(4 - 3k^2 + e^2)^{-1}]$	
7	ψ_2^0	$\psi_2^0 = \psi_1 + \frac{\Delta\rho}{\rho} \sin 2\psi_2 - s(p \cdot R_s)^{-1}$	
8	ψ_2	$\psi_2 = \psi_2^0 - \frac{\Delta\rho}{\rho} \sin 2\psi_2$	
9	Φ_2	$\cos \Phi_2 = [(1 - \cos^2 A_0 \cos^2 \psi_2)(1 - e^2 \cos^2 A_0 \cos^2 \psi_2)^{-1}]^{1/2}$	(VI. 157)
10	L_2	$L_2 = \sigma_1 - \sigma_2 - \Delta\sigma (\Delta\psi_1 - \Delta\psi_2)$	(VI. 173) — (VI. 176)
11	A_2	$\sin A_2 = \sin A_0 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \Phi_2\right)^{1/2}$	(VI. 125)

$$\begin{aligned} -F_3(s_2, \Phi_2, \Phi_{nx}, A_{n2}) &= 0, \\ \Delta\Phi_{nx} \left(\frac{\partial F_4}{\partial \Phi}\right)_n + \Delta A_{n2} \left(\frac{\partial F_4}{\partial A_0}\right)_n - \Delta L_{nx} - \\ -F_4(\Phi_2, L_2, \Phi_{nx}, L_{nx}, A_{n2}) &= 0. \end{aligned}$$

При этом учтено, что $\frac{dF_2}{dL} = \frac{dF_4}{dL} = 1$.

25) Широта Φ_x объекта навигации, определяемая по известным широтам Φ_1 и Φ_2 и долготам L_1 и L_2 двух навигационных точек, а также по измеренным расстоянию s и азимуту A_2 ,

$$\Phi_x(\Phi_1, \Phi_2, L_1, L_2, s_1, A_2).$$

26) Долгота L_x объекта навигации, определяемая по известным широтам Φ_1 и Φ_2 и долготам L_1 и L_2 двух навигационных точек, а также по измеренным расстоянию s и азимуту A_2 ,

$$L_x(\Phi_1, \Phi_2, L_1, L_2, s_1, A_2).$$

Для нахождения Φ_x и L_x с использованием метода Ньютона решается система уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} F_1(s_1, \Phi_1, \Phi_x, A_{01}) &= 0, \\ F_2(\Phi_1, L_1, \Phi_x, L_x, A_{01}) &= 0, \\ F_3(A_2, \Phi_x, A_{02}) &= 0, \\ F_4(\Phi_2, L_2, \Phi_x, L_x, A_{02}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI. 203})$$

При этом последовательные поправки вычисляются по формулам типа (VI. 202), но в этом случае третье уравнение системы будет иметь вид

$$\Delta\Phi_{nx} \left(\frac{\partial F_3}{\partial \Phi}\right)_n + \Delta A_{02} \left(\frac{\partial F_3}{\partial A_0}\right)_n - F_3(A_2, \Phi_{nx}, A_{0n2}) = 0.$$

Б. Алгоритмы основных задач

Рассмотрим алгоритмы решения некоторых задач с использованием одной или двух исходных точек. Координаты исходных точек обозначим через Φ_1, L_1, Φ_2 и L_2 , а координаты определяемого пункта — через Φ_x и L_x .

1) Определение Φ_x и L_x по измерениям азимута A_1 и расстоянию s соответствует одному из наиболее распространенных навигационных методов — угломерно-

дальномерному. Такую же формулировку имеет прямая геодезическая задача. Порядок вычисления приведен в табл. 2.

2) Определение длины геодезической линии s и азимутов A_1 и A_2 ее конечных точек по данным широте Φ_x , долготе L_x двух исходных точек. Эта задача называется обратной геодезической задачей. Порядок вычислений см. в табл. 3.

Выше были рассмотрены способы решения основных задач. Изложенная методика может служить основой для решения других возможных вариантов навигационных задач.

В § 28 были даны выражения для расстояния s и разности долгот l в виде степенных рядов (VI. 152), (VI. 195).

Ниже приводятся уравнения для s и l с учетом высших членов разложения [80].

Таблица 3

№ п/п	Величина	Формула	№ формулы
1	A'_0	$\operatorname{ctg} A'_0 = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \Phi_1 + \operatorname{tg}^2 \Phi_2 + 2 \operatorname{tg} \Phi_1 \operatorname{tg} \Phi_2 \cos l} \times \operatorname{cosec} l$	
2	$A'_2 \leftarrow$	$\sin A'_2 = \sin A'_0 \sqrt{1 + a^2/b^2 \operatorname{tg} \Phi_2}$	(VI.125)
3	ψ_1	$\cos \psi_1 = \sin \Phi_1 \sec A'_0 (1 - e^2 \cos^2 \Phi_1)^{-1/2}$	(VI.156)
4	ψ_2	$\cos \psi_2 = \sin \Phi_2 \sec A'_0 (1 - e^2 \cos^2 \Phi_2)^{-1/2}$	(VI.156)
5	$\Delta L'$	$\Delta L' = \sigma_1 - \sigma_2 - \Delta \sigma (\Delta \psi_1 - \Delta \psi_2)$	(VI.173) —
6	p	$p = 1 - k^2 (4 - 0,75k^2)^{-1}$	(VI.176)
7	Δp	$\Delta p = 0,25k^2 (1 + 0,125k^2)$	
8	s'	$s' = R_S [p (\psi_1 - \psi_2) + \Delta p (\sin 2\psi_1 - \sin 2\psi_2)]$	(VI.163)
9	$dA_0 \leftarrow$	$dA_0 = -\frac{a}{s} \cos \Phi_2 \cos A_2 (\Delta L' - \Delta L)$	
10	A_1	$\sin A_1 = \sin A_0 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \Phi_1\right)^{1/2}$	(VI.125)

Длина геодезической линии s имеет выражение

$$s = R_s \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} (f_1 \psi_i + f_2 \sin \psi_i \cos \psi_i + f_3 \sin^3 \psi_i \cos \psi_i + f_4 \sin^5 \psi_i \cos \psi_i),$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 - f_2, \quad f_2 = \frac{1}{4} k^2 + \frac{3}{64} k^4 + \frac{5}{256} k^6, \\ f_3 &= \frac{1}{32} k^4 + \frac{5}{284} k^6, \quad f_4 = \frac{1}{96} k^6. \end{aligned} \quad (\text{VI.204})$$

Разность долгот l выражается в виде

$$l = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} [h_1 \psi_i + h_2 \sin \psi_i \cos \psi_i + h_3 \sin^3 \psi_i \cos \psi_i + h_4 \operatorname{arctg} (\operatorname{cosec} A_0 \operatorname{tg} \psi_i + h_5 \sin^5 \psi_i \cos \psi_i)],$$

где

$$\begin{aligned} h_1 &= R_{L_1} \left[\frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{16} k^4 (1 - 2 \operatorname{tg}^2 A_0) + \right. \\ &+ \left. \frac{15}{128} k^6 \left(1 - \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 A_0 + \frac{8}{3} \operatorname{tg}^4 A_0 \right) \right] \operatorname{tg}^2 A_0 - \\ &- R_{L_2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \frac{5}{256} k^6 \right), \\ h_2 &= R_{L_2} \left(\frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \frac{25}{256} k^6 \right) - \\ &- R_{L_1} \left[\frac{3}{16} k^4 + \frac{15}{128} k^6 \left(1 - \frac{4}{3} \operatorname{tg}^2 A_0 \right) \right] \operatorname{tg}^2 A_0, \\ h_3 &= R_{L_2} \left(\frac{3}{32} k^4 + \frac{25}{384} k^6 \right) - R_{L_1} \frac{5}{64} k^6 \operatorname{tg}^2 A_0, \\ h_4 &= R_{L_1} \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \operatorname{tg}^2 A_0 + \frac{3}{8} k^4 \operatorname{tg}^4 A_0 - \right. \\ &- \left. \frac{5}{16} k^6 \operatorname{tg}^6 A_0 \right) \sin A_0, \\ h_5 &= R_{L_2} \frac{5}{96} k^6. \end{aligned} \quad (\text{VI.205})$$

§ 30. Сравнение некоторых классических способов решения главных геодезических задач

Известно (см. § 12), что в основе решения главных геодезических задач на поверхности эллипсоида вращения лежит система трех дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad M dB + 0 \cdot dL - \cos A \cdot ds + 0 \cdot dA &= 0, \\ 2) \quad 0 \cdot dB + r \cdot dL - \sin A \cdot ds + 0 \cdot dA &= 0, \\ 3) \quad 0 \cdot dB + \sin A \cdot dL + 0 \cdot ds - 1 \cdot dA &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.206})$$

Соответственно в основе решения главных геодезических задач на поверхности трехосного эллипсоида лежит система дифференциальных уравнений (III.22), (III.23), (III.24) (см. § 10).

Ф. Бессель [26] представляет систему уравнений в развернутом виде *

$$d\varphi = \frac{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3}}{a(1-e^2)} \cos \alpha \cdot ds,$$

$$\cos \varphi d\omega = \frac{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)}}{a} \sin \alpha \cdot ds,$$

$$d\alpha = \sin \varphi \cdot d\omega;$$

Преобразуем систему (VI.206) следующим образом. Исключая ds из первых двух уравнений, находим

$$\cos B \cdot dL = \frac{(1-e^2) \operatorname{tg} A \cdot dB}{1-e^2 \sin^2 B}. \quad (\text{VI.207})$$

Подставив это уравнение в формулу (VI.206.3), получим

$$dA = \frac{(1-e^2) \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}{1-e^2 \sin^2 B} dB. \quad (\text{VI.208})$$

Уравнение (VI.206.1) дает

$$ds = \frac{a(1-e^2) dB}{(1-e^2 \sin^2 B)^{3/2} \cos A}. \quad (\text{VI.209})$$

Интегралами трех последних выражений и решается вопрос, но только одно уравнение (VI.208) интегрируется в конечном виде.

Для интегрирования уравнения (VI.208) вместо геодезической широты B введем приведенную. Имеем

$$\operatorname{tg} u = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} B,$$

откуда

$$\frac{du}{\cos^2 u} = \sqrt{1-e^2} \frac{dB}{\cos^2 B}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} u \cdot du = \frac{(1-e^2) \operatorname{tg} B \cdot dB}{1-e^2 \sin^2 B}. \quad (\text{VI.210})$$

Подставляя уравнение (VI.210) в формулу (VI.208), находим

$$dA = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} u du$$

* Обозначения φ , ω , α приводятся по Бесселю.

или после интегрирования

$$\cos u \cdot \sin A = c,$$

где c представляет производную постоянную величину.

Если в предыдущем интеграле принять $c = \cos u_0$, то u_0 , очевидно, представит приведенную широту той точки, в которой продолжаемая геодезическая линия пересекается с одним из меридианов под прямым углом.

Представим теперь предыдущий интеграл в виде

$$\sin A \cdot \cos u = \cos u_0, \quad (\text{VI.211})$$

откуда можно получить

$$\sin A = \frac{\cos u_0}{\cos u}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{\cos u_0}{\sqrt{\cos^2 u - \cos^2 u_0}}, \quad (\text{VI.212})$$

так как

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \sin B = \frac{\sin u}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}, \quad (\text{VI.213})$$

то уравнение (VI.207) с учетом уравнения (VI.210) приводится к виду

$$dL = \frac{\cos u_0}{\cos u} \sqrt{\frac{1-e^2 \cos^2 u}{\cos^2 u - \cos^2 u_0}} du. \quad (\text{VI.214})$$

Преобразуя подобным образом уравнение (VI.209), найдем

$$ds = a \cos u \sqrt{\frac{1-e^2 \cos^2 u}{\cos^2 u - \cos^2 u_0}} du. \quad (\text{VI.215})$$

Из уравнений (VI.206) видно, что изменения всех переменных зависят от азимута линии в данной точке. Поэтому чтобы их интегрировать, необходимо составить еще одно уравнение, которое или объединило бы азимут A с остальными переменными, т. е. с ds , dL , dB , B , L , или было бы достаточным, чтобы исключить значение A . Такое уравнение выражает закон, согласно которому кривая линия, элементом которой является ds , должна быть проведена по заданной поверхности.

Как было показано в § 2, для геодезической линии таким уравнением является уравнение

$$dA = \sin B dL.$$

В только что приведенном выводе основных уравнений (VI.214) и (VI.215) исключение $\cos A$ и $\sin A$ из дифференциальных уравнений производилось с помощью уравнения (VI.211), т. е. первого интеграла геодезической линии, полагая, что величина $c = \cos u_0$ [73].

Ганзен [65] первый интеграл геодезической линии записал в виде

$$\cos u \sin A = \cos u_0.$$

По Ганзену — это первое основное уравнение геодезической линии. Из уравнения

$$a \cos u dL = \sin A ds$$

путем исключения $\sin A$ с помощью формулы (VI.211) П. Ганзен получает

$$a \cos^2 u dL = \cos u_0 ds. \quad (\text{VI.216})$$

По Ганзену — это второе уравнение геодезической линии.

Из выражения

$$- du \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} = ds \cos A$$

путем исключения $\cos A$ с помощью уравнения (VI.211) Ганзен записывает

$$ds = - \cos u \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} du. \quad (\text{VI.217})$$

Уравнение (VI.217) Ганзен называет третьим и последним основным уравнением геодезической линии.

Исключая ds из уравнения (VI.216) с помощью формулы (VI.217), Ганзен находит выражение

$$dL = - \frac{\cos u_0}{\cos u} \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} adu. \quad (\text{VI.218})$$

Интеграл последнего уравнения — уравнение геодезической линии.

Гельмерт [37] исключает величины $\cos A$ и $\sin A$ из соответствующих дифференциальных уравнений так же, как это выполнено выше.

В заключение отметим, что описанная методика получения исходных выражений (VI.214) и (VI.215) принадлежит Лежандру [85]. Ганзен [65, с. 112] по этому пово-

ду писал: «Я исхожу в этой статье из тех же лежандровых формул, которые взяты в основание у Якоби,...».

Ф. Бессель [26] для получения основных выражений величин ds и dL использует иную методику вывода. Его способ вытекает из аналитического представления свойства геодезической линии на поверхности эллипсоида вращения и основывается на применении так называемого вспомогательного треугольника, расположенного на поверхности сферы произвольного радиуса. Первый интеграл уравнения геодезической линии Ф. Бессель берет в виде

$$\cos u \sin A = \cos u' \sin A' \quad (\text{VI.219})$$

и рассматривает это уравнение как соотношение между частями известного сферического треугольника, и этот треугольник принимается за вспомогательный.

Так, если на сфере произвольного радиуса между тремя точками A, B, P построить треугольник и если точки A, B и P выбраны так, что дуги больших кругов

$$AP = 90^\circ - u', \quad BP = 90^\circ - u$$

и углы

$$PAB = A', \quad PBA = 180^\circ - A,$$

то для этого треугольника будем иметь

$$\sin A' \cos u' = \sin A \cos u.$$

Это означает, что геодезическая линия может быть представлена дугой большого круга на сфере произвольного радиуса таким образом, что широтами ее точек будут приведенные широты точек геодезических линий на эллипсоиде, а азимуты ее элементов будут равняться азимутам соответствующих точек на эллипсоиде.

Итак, по элементарному треугольнику, известным образом составленному на поверхности эллипсоида вращения, имеем

$$\left. \begin{aligned} MdB &= ds \cos A, \\ a \cos u dL &= N \cos BdL = ds \sin A. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.220})$$

Для соответствующего элементарного треугольника на сфере имеем

$$\left. \begin{aligned} du &= \cos A d\sigma, \\ \cos u d\lambda &= \sin A d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.221})$$

Разделив соответственно уравнения (VI.220) на уравнения (VI.221), найдем

$$\left. \begin{aligned} M \frac{dB}{du} &= \frac{ds}{d\sigma}, \\ a \frac{dL}{d\lambda} &= \frac{ds}{d\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.222})$$

Выполнив необходимые преобразования, окончательно запишем дифференциальные уравнения, связывающие между собой величины изменений ds , $d\sigma$, dL , $d\lambda$,

$$ds = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\sigma, \quad (\text{VI.223})$$

$$dL = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\lambda. \quad (\text{VI.224})$$

В дальнейшем, чтобы интегрировать эти дифференциальные уравнения, Ф. Бессель выполняет преобразования уравнений, пользуясь соотношениями между частями вспомогательного треугольника.

Важно подчеркнуть, что величина m , введенная Ф. Бесселем, равна $90^\circ - u_0$, где u_0 — приведенная широта той точки, в которой геодезическая линия пересекается с одним из меридианов под прямым углом.

Решение Ф. Бесселя стало классическим и до сих пор излагается почти без изменения во всех фундаментальных работах по высшей геодезии.

От уравнений (VI.223) и (VI.224), предложенных Ф. Бесселем, легко перейти к уравнениям (VI.214) и (VI.215) Лежандра. Для этого достаточно дифференциалы $d\sigma$ и $d\lambda$ заменить на du . Имеем

$$d\sigma = \frac{du}{\cos A}, \quad d\lambda = d\sigma \sin A.$$

Но

$$\sin A = \frac{c}{\cos u} = \frac{\sin m}{\cos u}, \quad \cos A = \frac{1}{\cos u} \sqrt{\cos^2 u - c^2}.$$

Следовательно,

$$d\sigma = \frac{\cos u du}{\sqrt{\cos^2 u - c^2}} \quad (\text{VI.225})$$

$$d\lambda = \frac{c du}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - c^2}}, \quad (\text{VI.226})$$

Подставляя уравнение (VI.225) в формулу (VI.223) и (VI.226) в (VI.224), получаем (VI.215) и (VI.214).

Уравнения (VI.215) и (VI.214) можно интегрировать различными способами. Например, путем интегрирования по сферической дуге σ , по приведенной широте u , по сферической разности долгот λ , по азимуту A .

Из уравнения Клеро имеем

$$\cos u \sin A = \cos u_0 = c,$$

путем дифференцирования получаем

$$du = \operatorname{ctg} u \operatorname{ctg} A dA. \quad (\text{VI.227})$$

Имея в виду формулы (VI.211) и (VI.227), после соответствующего преобразования (VI.215) и (VI.214) получаем уравнения

$$ds = \frac{a \sqrt{\sin^2 A - e^2 c^2}}{\sqrt{\sin^2 A - c^2}} dA, \quad (\text{VI.228})$$

$$dL = \frac{\sqrt{\sin^2 A - e^2 c^2}}{\sqrt{\sin^2 A - c^2}} dA. \quad (\text{VI.229})$$

Значения ds , dL можно также найти в функции геодезической широты B .

Имеем

$$\cos u = \frac{\cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{\cos B}{W},$$

отсюда

$$\frac{du}{dB} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{W} \quad \text{или} \quad du = \sqrt{1 - e^2} = \frac{dB}{W}.$$

Заменив в формулах (VI.215) и (VI.214) du и $\cos u$ полученными значениями, будем иметь

$$ds = \frac{a(1 - e^2) \cos B dB}{W^2 \sqrt{\cos^2 B - W^2 c^2}}, \quad (\text{VI.230})$$

$$dL = \frac{c(1 - e^2) dB}{W \cos B \sqrt{\cos^2 B - c^2 W^2}}, \quad (\text{VI.231})$$

где B — геодезическая широта текущей точки.

Выражения (VI.214) и (VI.215) не могут быть интегрированы в конечном виде, поэтому подынтеграль-

ные функции разложим в ряды, которые затем проинтегрируем почленно.

Пусть

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \mu.$$

Разложим подынтегральные функции в интегралах (VI.214) и (VI.215) по степеням μ и будем удерживать в этих разложениях все члены до порядка μ^2 , это будет почти равносильно тому, что мы удерживаем в разложениях члены четвертого порядка относительно эксцентриситета [73].

Так как $a^2 = b^2 + \mu b^2$, то выражение (VI.214) преобразуется в следующее:

$$dL = \frac{b \cos u \cos u_0 \sqrt{1 + \mu \sin^2 u}}{a \cos^2 u \sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} du. \quad (\text{VI.232})$$

Но

$$a^2 = b^2(1 + \mu),$$

ограничиваясь вторыми степенями μ , получаем

$$\frac{b}{a} = 1 - \frac{\mu}{2} + \frac{3}{8} \mu^2.$$

Следовательно, предыдущий дифференциал представится в виде

$$dL = \frac{\cos u \cos u_0 du}{\cos^2 u \sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} \left[1 - \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{4} \right) \cos^2 u + \frac{\mu^2}{8} \cos^2 u (1 + \sin^2 u) \right].$$

Поэтому

$$L_2 - L_1 = l = \int \frac{\cos u \cos u_0 du}{\cos^2 u \sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} - \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{4} \right) \int \frac{\cos u \cos u_0 du}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} + \dots \quad (\text{VI.233})$$

После интегрирования выражения (VI. 233) найдем

$$l = \arccos \left(\frac{\text{tg } u}{\text{tg } u_0} \right) - \left(\frac{\mu}{2} - \frac{3}{8} \mu^2 - \frac{\mu}{16} \sin^2 u_0 \right) \times$$

$$\cos u_0 \times \arccos \left(\frac{\sin u}{\sin u_0} \right) + \frac{\mu^2}{16} \sin^2 u_0 \cos u_0 \frac{\sin u}{\sin u_0} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 u_0}}. \quad (\text{VI.234})$$

Выражение (VI. 215) после введения величины μ примет вид

$$s = b \int \frac{d(\sin u)}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} \sqrt{1 + \mu \sin^2 u},$$

ограничиваясь здесь вторыми степенями μ , получаем

$$\frac{s}{b} = \int \frac{d(\sin u)}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} + \frac{\mu}{2} \int \frac{\sin^2 u d(\sin u)}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} - \frac{\mu^2}{8} \int \frac{\sin^4 u d(\sin u)}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}}. \quad (\text{VI.235})$$

После интегрирования выражения (VI. 235) найдем

$$\begin{aligned} \frac{s}{b} = & \left(1 + \frac{\mu}{4} \sin^2 u_0 - \frac{3}{64} \mu^2 \sin^4 u_0 \right) \arccos \left(\frac{\sin u}{\sin u_0} \right) + \\ & + \left(\frac{\mu}{4} \sin^2 u_0 - \frac{3}{64} \mu^2 \sin^4 u_0 \right) \frac{\sin u}{\sin u_0} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 u_0}} - \\ & - \frac{\mu^2}{32} \sin^4 u_0 \left(\frac{\sin u}{\sin u_0} \right)^3 \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 u_0}}. \end{aligned} \quad (\text{VI.236})$$

Если положить

$$\arccos \left(\frac{\sin u}{\sin u_0} \right) = \sigma, \quad \arccos \left(\frac{\text{tg } u}{\text{tg } u_0} \right) = \lambda,$$

то

$$\cos \sigma = \frac{\sin u}{\sin u_0}, \quad \cos \lambda = \frac{\text{tg } u}{\text{tg } u_0}. \quad (\text{VI.237})$$

Легко видеть, что эти уравнения представляют собой соотношения между частями некоторого прямоугольного сферического треугольника, сторонами этого треугольника служат $90^\circ - u$, $90^\circ - u_0$ и σ . В этом треугольнике против стороны σ лежит угол λ , а против стороны $(90^\circ - u)$ расположен прямой угол. Для такого треугольника существуют соотношения

$$\sin u = \sin u_0 \cos \sigma,$$

$$\cos u \cos \lambda = \cos \sigma \cos u_0.$$

$$\cos \sigma = \sin u \sin u_0 + \cos u \cos u_0 \cos \lambda;$$

первое из этих уравнений тождественно с первым из уравнений (VI.237), а после исключения $\cos \sigma$ из второго и третьего получаем второе из уравнений (VI.237).

По первому уравнению (VI.237) имеем

$$\frac{\sin u}{\sin u_0} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 u_0}} = \cos \sigma \sin \sigma = \frac{\sin 2\sigma}{2},$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin u}{\sin u_0}\right)^3 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin u}{\sin u_0}\right)^2} &= \cos^3 \sigma \sin \sigma = \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 \sigma \sin^2 2\sigma. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\frac{1 + \cos 2\sigma}{4} \sin 2\sigma = \frac{\sin 4\sigma}{8} + \frac{\sin 2\sigma}{4}.$$

Таким образом, уравнения (VI.234) и (VI.236) приводятся к виду

$$l = \lambda - F\sigma + G \sin 2\sigma, \quad (\text{VI.238})$$

$$\frac{s}{b} = A\sigma + B \sin 2\sigma - C \sin 4\sigma, \quad (\text{VI.239})$$

где

$$\left. \begin{aligned} F &= \left(\frac{\mu}{2} - \frac{3}{8} \mu^2 - \frac{\mu^2}{16} \sin^2 u_0\right) \cos u_0, \\ B &= \frac{\mu}{8} \sin^2 u_0 - \frac{\mu^2}{32} \sin^4 u_0, \\ G &= \frac{\mu^2}{32} \sin^2 u_0 \cos u_0, \quad C = \frac{\mu^2}{256} \sin^4 u_0, \\ A &= 1 + \frac{\mu}{4} \sin^2 u_0 - \frac{3}{64} \mu^2 \sin^4 u_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.240})$$

При $u = u_0$, как σ , так и λ , как показывают уравнения (VI.237), обращаются в нуль, следовательно, при $u = u_0$ величины s и l также обращаются в нули. Таким образом, найденные интегралы (VI.238) — (VI.239) представляют длину дуги геодезической линии от данной точки до точки пересечения геодезической линии с некоторым меридианом под прямым углом. Заметим

также, что разность долгот l есть разность долгот между вышеуказанными точками.

Положим, что на эллипсоиде между точками с приведенными широтами u и u_1 проведена геодезическая линия и продолжена до пересечения с некоторым меридианом под прямым углом.

Если для точки с приведенной широтой u_1 построим такой прямоугольный сферический треугольник, какой строили для точки u , т.е. треугольник со сторонами $(90^\circ - u_0)$, $(90^\circ - u_1)$ и σ_1 и углами 90° и λ_1 , лежащими против сторон $(90^\circ - u_1)$ и σ_1 , то длина геодезической линии от точки с широтой u_1 и разность долгот этих точек представятся в виде

$$\frac{s_1}{b_1} = A\sigma_1 + B \sin 2\sigma_1 - C \sin 4\sigma_1, \quad (\text{VI.241})$$

$$l_1 = \lambda_1 - F\sigma_1 + G \sin 2\sigma_1. \quad (\text{VI.242})$$

Вычитая из этих выражений равенства (VI.238), (VI.239), находим

$$\begin{aligned} \frac{s}{b} &= A(\sigma_1 - \sigma) + 2B \sin(\sigma_1 - \sigma) \cos(\sigma_1 + \sigma) - \\ &- 2C \sin 2(\sigma_1 - \sigma) \cos 2(\sigma_1 + \sigma), \end{aligned} \quad (\text{VI.243})$$

$$\begin{aligned} l &= \lambda_1 - \lambda - F(\sigma_1 - \sigma) + \\ &+ 2G \sin(\sigma_1 - \sigma) \cos(\sigma_1 + \sigma). \end{aligned} \quad (\text{VI.244})$$

Эти интегралы представляют собой длину дуги геодезической линии от данной до определяемой точки и разность долгот этих точек.

Если рассматриваемая геодезическая линия с некоторым меридианом пересекается под прямым углом между данной и определяемой точкой, то упомянутое расстояние и разность долгот представляются суммами интегралов (VI.238) — (VI.239) и (VI.241) — (VI.242) и будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{s}{b} &= A(\sigma_1 + \sigma) + B \sin(\sigma_1 + \sigma) \cos(\sigma_1 - \sigma) - \\ &- 2C \sin 2(\sigma_1 + \sigma) \cos 2(\sigma_1 - \sigma), \end{aligned} \quad (\text{VI.245})$$

$$\begin{aligned} l &= \lambda_1 - \lambda - F(\sigma_1 + \sigma) + \\ &+ 2G \sin(\sigma_1 + \sigma) \cos(\sigma_1 - \sigma). \end{aligned} \quad (\text{VI.246})$$

Ганзен [65] решает уравнения несколько иначе. Пусть

$$a^2 - b^2 = a^2 e^2,$$

тогда выражение (VI.217) можно переписать следующим образом:

$$ds = -a \cos u \frac{\sqrt{1 - e^2 + e^2 \sin^2 u}}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} du. \quad (\text{VI.247})$$

Подставляя вместо u дугу φ (заметим, что это предложение Лежандра), которая определяется соотношением

$$\sin u = \sin u_0 \cos \varphi, \quad (\text{VI.248})$$

получим

$$ds = a \sqrt{1 - e^2 + e^2 \sin^2 u_0 \cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (\text{VI.249})$$

Известно, что

$$\operatorname{tg} u_0 = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B_0.$$

Обозначим

$$e = \sin B_0 = k, \quad (\text{VI.250})$$

где B_0 — широта точки, в которой геодезическая линия пересекает меридиан под прямым углом.

Далее находим

$$\sin^2 u_0 = \frac{(1 - e^2) \sin^2 B_0}{1 - e^2 \sin^2 B_0}.$$

Следовательно, окончательно получим

$$ds = \frac{a \sin u_0}{\sin B_0} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (\text{VI.251})$$

Если теперь из формулы (VI.251) исключить ds с помощью выражения (VI.216), то получим

$$dL = \frac{\sin u_0 \cos u_0}{\sin B_0} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{1 - \sin^2 u_0 \cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (\text{VI.252})$$

Пусть φ_1 и φ_2 будут значения дуги φ , соответствующие начальной и конечной точкам дуги s , тогда уравнения (VI.251) и (VI.252) дадут

$$s = a \frac{\sin u_0}{\sin B_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad (\text{VI.253})$$

$$L_2 - L_1 = l = \frac{\sin u_0 \cos u_0}{\sin B_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{1 - \sin^2 u_0 \cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (\text{VI.254})$$

В дальнейшем Ганзен разлагает в ряды подынтегральные выражения (VI.253) и (VI.254) по степеням величины $k = e \sin B_0$ и почленно интегрирует.

Гельмерт [37] ввел вместо величины k величину

$$k_1 = \operatorname{tg}^2 \frac{\varepsilon}{2}.$$

По Бесселю

$$\operatorname{tg} \varepsilon = k = e' \sin u_0 = e' \cos m.$$

Следовательно, k_1 можно выразить рядом

$$k_1 = \frac{1}{4} k^2 + \frac{1}{8} k^4 + \frac{5}{64} k^6 + \frac{7}{128} k^8.$$

С учетом параметра k_1 интеграл дуги геодезической линии можно записать в таком виде:

$$s = a \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - k_1} \int_0^\sigma \sqrt{1 + k_1^2 + 2k_1 \cos^2 \sigma} d\sigma. \quad (\text{VI.255})$$

Для определения разности долгот Гельмерт предложил формулу

$$dL = d\lambda - \cos u_0 (1 - \sqrt{1 - e^2}) \frac{\sqrt{1 + k_1^2 \cos^2 \sigma} d\sigma}{1 - \sin^2 u_0 \cos^2 \sigma}, \quad (\text{VI.256})$$

После разложения в ряды и почленного интегрирования выражений (VI.255) и (VI.256) Гельмертом получено

$$\begin{aligned} s &= b \frac{1 + \frac{1}{4} k_1^2}{1 - k_2} \left[\sigma + \left(k_1 - \frac{3}{8} k_1^3 \right) \cos 2\sigma_m \sin \sigma - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} k_1^2 \cos 4\sigma_m \sin 2\sigma + \frac{1}{24} k_1^3 \cos 6\sigma_m \sin 3\sigma \right], \\ l &= (\lambda_2 - \lambda_1) - \frac{1}{2} e^2 \cos u_0 \left[\left(1 + n - \frac{1}{2} k_1 - \frac{1}{4} k_1^2 \right) \sigma - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} k_1 \cos 2\sigma_m \sin \sigma + \frac{1}{8} k_1^2 \cos^4 \sigma_m \sin 2\sigma \right], \end{aligned}$$

где

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2), \quad \sigma = (\sigma_2 - \sigma_1), \quad n = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}.$$

Ф. Бессель [26] окончательные формулы для вычисления длины дуги геодезической линии и разности долгот между двумя пунктами получил в виде

$$s = \frac{1}{\alpha} [\sigma - \beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) - \gamma \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma)], \quad (\text{VI.257})$$

$$l = \lambda - \sin m [\alpha_1 \sigma + \beta_1 \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \dots], \quad (\text{VI.258})$$

где

$$\left. \begin{aligned} l &= L_2 - L_1, \quad \lambda = \lambda_2 - \lambda_1, \quad \alpha = \frac{\rho''}{Ab}, \\ \beta &= \frac{B\rho''}{A}, \quad \gamma = \frac{C\rho''}{A}, \\ \alpha_1 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} - \frac{e^2}{16} \cos^2 m \right) e^2, \\ \beta_1 &= \frac{\cos^2 m \rho''}{16} e^4. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.259})$$

Порядок решения прямой и обратной геодезических задач по способам Бесселя, Гельмерта и других авторов здесь не приводится, так как эти способы достаточно подробно изложены в учебных и справочных руководствах.

Изложенные выше способы нахождения расстояния s и разности долгот отличаются от способа Бесселя методом интегрирования основных уравнений и дальнейшим усовершенствованием рядов по нахождению искомых величин путем введения различных параметров k или k_1 .

Разница в решении главных геодезических задач относительно точности и быстроты практически неощутима. При требовании быстрого схождения рядов способ Гельмерта предпочтительней.

Глава VII

РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГЛАВНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

§ 31. О применении различных кривых для решения главных геодезических задач

В настоящее время предлагаются способы решения главных геодезических задач по дугам нормальных сечений [35] (как это делалось до введения геодезической линии), по дугам центральных сечений эллипсоида [54], [59] и т. д. Естественно, что эти кривые имеют как достоинства, так и недостатки. Есть предложения вообще исключить из сфероидической геодезии рассмотрение кривых линий и решать геодезические задачи способом пространственной геометрии, без построения поверхности эллипсоида вращения [38]. Последнее предложение позволяет несколько проще решать геодезические задачи, но с точки зрения практики, для которой необходимо иметь на плоскости изображение кривой передачи координат в какой-либо проекции, этот метод вызывает серьезные возражения, так как хорда не изображается на плоскости [51].

Ниже приведены решения главных геодезических задач по нормальному и центральному сечениям эллипсоида, основанные на применении цепных дробей к вычислению эллиптических интегралов, выражающих длины дуг этих сечений. Дается также новое решение главной геодезической задачи по геодезической линии.

Нормальное сечение. Азимут нормального сечения [63], концы которого заданы геодезическими координатами на поверхности эллипсоида вращения, выражается формулой

$$\text{ctg } \bar{A}_{i,j} = \frac{\cos B_i \sin B_j - \sin B_i \cos B_j \cos l - Q_{ij}}{\cos B_i \sin l}, \quad (\text{VII.1})$$

где

$$Q_{i,j} = e^2 \left(\sin B_j - \frac{W_j}{W_i} \sin B_i \right) \cos B_i. \quad (\text{VII.2})$$

$$l = L_j - L_i.$$

Функцию W с высокой точностью (до $1 \cdot 10^{-8}$) можно представить формулой

$$W = \frac{1 - 0,75e^2 \sin^2 B}{1 - 0,25e^2 \sin^2 B}.$$

Длина нормального сечения [35]

$$s_n = a_{1.2} (1 - e_{1.2}^2) \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{(1 - e_{1.2}^2 \sin^2 \omega)^{3/2}}, \quad (\text{VII.3})$$

где $a_{1.2}$ — большая полуось и $e_{1.2}$ — первый эксцентриситет эллипса нормального сечения:

$$a_{1.2} = a \frac{1 + 0,25\tau^2}{1 + 0,75\tau^2}, \quad (\text{VII.4})$$

$$e_{1.2}^2 = \frac{e^2 - g^2}{1 - g^2}, \quad (\text{VII.5})$$

здесь

$$\tau^2 = \frac{f^2 g^2}{1 - f^2 - g^2}, \quad f^2 = e^2 \sin^2 B_1, \quad g^2 = e^2 \cos B_1 \sin^2 \bar{A}_{1.2}.$$

Геодезические широты ω_1 и ω_2 пунктов 1 и 2 в плоскости сечения получают из соотношений

$$\text{ctg } \omega_1 = \text{ctg } B_1 \cos \bar{A}_{1.2}, \quad (\text{VII.6})$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \sigma, \quad (\text{VII.7})$$

где

$$\cos \sigma = \sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos l. \quad (\text{VII.8})$$

Имея уравнения (VII.4) — (VII.8) для величин, входящих в формулу (VII.3), находим уравнение для вычисления длины нормального сечения.

Согласно уравнению (IV.40), интегральное выражение (VII.3) можно представить в виде

$$s_n = a_{1.2} (1 - e_{1.2}^2) \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{4 + e_{1.2}^2 \sin^2 \omega}{4 - 5e_{1.2}^2 \sin^2 \omega} d\omega. \quad (\text{VII.9})$$

Почленно интегрируя выражение (VII.9) и учитывая (IV.44), после преобразований получаем

$$s_n = a_{1.2} (1 - e_{1.2}^2) [A_n (\omega_2 - \omega_1) - B_n (\sin 2\omega_2 - \sin 2\omega_1) + C_n (\sin 4\omega_2 - \sin 4\omega_1)], \quad (\text{VII.10})$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1 - 0,1875 e_{1.2}^2}{1 - 0,9375 e_{1.2}^2}, \\ B_n &= \frac{0,375 e_{1.2}^2}{(1 - 0,625 e_{1.2}^2)} \cdot \frac{(1 - 0,3125 e_{1.2}^2)}{(1 - 0,9375 e_{1.2}^2)}, \\ C_n &= 0,05859375 \frac{(1 - 0,3125 e_{1.2}^2)}{(1 - 0,9375 e_{1.2}^2)} \left(\frac{e_{1.2}^2}{1 - 0,625 e_{1.2}^2} \right)^2. \end{aligned} \right\} (\text{VII.11})$$

Формулы (VII.1) — (VII.2), (VII.7) — (VII.8) и (VII.10) — (VII.11) решают обратную геодезическую задачу по нормальному сечению.

Решение прямой задачи сводится к следующему. По формулам (VII.4) — (VII.6) вычисляются величины $a_{1.2}$, $e_{1.2}^2$ и ω_1 . Затем, используя формулу (VII.10), осуществляют переход от s_n к σ . Для определения σ имеем

$$\begin{aligned} \sigma &= (\omega_2 - \omega_1) = \sigma_0 + I (\sin 2\omega_2 - \sin 2\omega_1) - \\ &- II (\sin 4\omega_2 - \sin 4\omega_1), \end{aligned} \quad (\text{VII.12})$$

где

$$\sigma_0 = \frac{s_n}{a_{1.2} (1 - e_{1.2}^2)} A_n^{-1}, \quad I = \frac{B_n}{A_n}, \quad II = \frac{C_n}{A_n}. \quad (\text{VII.13})$$

Дальнейшее решение задачи приводит к нахождению величин B_2 , l и $\bar{A}_{2.1}$ известными методами [35].

Центральное или геоцентрическое сечение. При решении главной геодезической задачи по центральному сечению будем пользоваться приведенной широтой u . В этом случае прямой и обратный азимуты в конечных точках сечения получим по формулам

$$\text{ctg } \alpha_{1.2} = v_1 \text{ctg } \bar{\alpha}_{1.2}, \quad (\text{VII.14})$$

$$\text{ctg } \alpha_{2.1} = v_2 \text{ctg } \bar{\alpha}_{2.1}. \quad (\text{VII.15})$$

Функцию v с высокой точностью примем равной

$$v = \frac{1 - 0,75e^2 \cos^2 u}{1 - 0,25e^2 \cos^2 u}, \quad (\text{VII.16})$$

а значения $\text{ctg } \bar{\alpha}_{1.2}$ и $\text{ctg } \bar{\alpha}_{2.1}$ приведем к виду

$$\text{ctg } \bar{\alpha}_{1.2} = \frac{\cos u_1 \text{tg } u_2 - \sin u_1 \cos l}{\sin l}, \quad (\text{VII.17})$$

$$\operatorname{ctg} \bar{\alpha}_{2,1} = \frac{\sin u_2 \cos l - \cos u_2 \operatorname{tg} u_1}{\sin l}, \quad (\text{VII.18})$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} u &= \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B, \\ l &= L_2 - L_1. \end{aligned} \quad (\text{VII.19})$$

(Значения $\sin u$ и $\cos u$ удобно вычислять по формулам, не прибегая к таблицам, т. е. $\cos u = (1 + \operatorname{tg}^2 u)^{-1/2}$, $\sin u = \cos u \operatorname{tg} u$).

Длина дуги центрального сечения между двумя точками 1 и 2 выражается формулой [35]

$$s_c = a \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{1 - e^2 (1 - c^2) \cos^2 \sigma} d\sigma, \quad (\text{VII.20})$$

где

$$c = \cos u_1 \sin \alpha_{1,2} = -\cos u_2 \sin \alpha_{2,1}, \quad (\text{VII.21})$$

$$\operatorname{ctg} \sigma_1 = \operatorname{ctg} u_1 \cos \alpha_{1,2}, \quad (\text{VII.22})$$

$$\sigma_2 = \sigma + \sigma_1, \quad (\text{VII.23})$$

$$\cos \sigma = \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos l. \quad (\text{VII.24})$$

Приведем выражение (VII.20) к удобному для практического применения виду. Для этого, проводя действия, аналогичные выводу (VII.13), получаем

$$\begin{aligned} s_c &= a \left\{ 3(\sigma_2 - \sigma_1) - \frac{2}{\sqrt{1 - 0,25e^2(1 - c^2)}} \times \right. \\ &\times \left[\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \sigma_2}{\sqrt{1 - 0,25e^2(1 - c^2)}} - \right. \\ &\left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \sigma_1}{\sqrt{1 - 0,25e^2(1 - c^2)}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая уравнение (IV.44), окончательно пишем

$$\begin{aligned} s_c &= a [A_c(\sigma_2 - \sigma_1) - B_c(\sin 2\sigma_2 - \sin 2\sigma_1) + \\ &+ C_c(\sin 4\sigma_2 - \sin 4\sigma_1)], \end{aligned} \quad (\text{VII.25})$$

где

$$\begin{aligned} A_c &= \frac{(1 - 0,4375k^2)}{(1 - 0,1875k^2)}, \\ B_c &= -\frac{0,125k^2}{(1 - 0,1875k^2)} \cdot \frac{(1 - 0,0625k^2)}{(1 - 0,125k^2)}, \\ C_c &= -\frac{0,03125k^2}{(1 - 0,125k^2)} B_c, \\ k^2 &= e^2(1 - c^2) \end{aligned} \quad (\text{VII.26})$$

(e — эксцентриситет эллипсоида).

Формулы (VII.14) — (VII.19), (VII.21) — (VII.24), (VII.25) и (VII.26) полностью обеспечивают решение обратной геодезической задачи. Для прямой геодезической задачи по центральному сечению предлагается такая последовательность решения. Вначале по формуле (VII.25) следует переход от s_c к $\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$, где

$$\operatorname{ctg} \sigma_1 = \operatorname{ctg} u_1 \cos \alpha_{1,2}.$$

Из совместного решения уравнений (VII.17) и (VII.24) определяется приведенная широта u_2

$$\sin u_2 = \sin u_1 \cos \sigma + \cos u_1 \sin \sigma \cos \bar{\alpha}_{1,2} \quad (\text{VII.27})$$

и разность долгот l

$$\cos l = \frac{\cos \sigma - \sin u_1 \sin u_2}{\cos u_1 \cos u_2}. \quad (\text{VII.28})$$

Далее следуют вычисления $\alpha_{2,1}$, B_2 и L_2 .

Геодезическая линия. Предлагаемый порядок решения обратной геодезической задачи состоит в следующем. Известными способами при заданных B_1 , B_2 и l определяется приведенная широта u_0 в точке экстремума геодезической линии. Далее по формуле Клеро вычисляются прямой и обратный геодезические азимуты:

$$\sin A_{1,2} = \frac{\cos u_0}{\cos u_1}, \quad (\text{VII.29})$$

$$\sin A'_{2,1} = \frac{\cos u_0}{\cos u_2}, \quad (\text{VII.30})$$

$$A_{2,1} = A'_{2,1} \pm 180^\circ. \quad (\text{VII.31})$$

Длина геодезической линии s_g между точками 1 и 2 на поверхности эллипсоида выражается через эллиптический интеграл вида

$$s_g = b \frac{\cos u_0}{\cos B_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (\text{VII.32})$$

Без приведения вывода (вывод аналогичен получению s_n и s_c) в окончательном виде запишем

$$s_g = b \frac{\cos u_0}{\cos B_0} [A_g (\varphi_2 - \varphi_1) + B_g (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) - C_g (\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1)], \quad (\text{VII.33})$$

где b — малая полуось эллипсоида,

$$\varphi_i = \arccos \left(\frac{\sin u_i}{\sin u_0} \right) \quad (i = 1, 2), \quad (\text{VII.34})$$

$$B_0 = \arctg \frac{\operatorname{tg} u_0}{\sqrt{1 - e^2}},$$

где φ_i — отрезок геодезической линии между точкой ее экстремума и точкой с широтой u_i на поверхности сфeры.

Коэффициенты A_g , B_g и C_g равны

$$\left. \begin{aligned} A_g &= \frac{(1 - 0,4375k^2)}{(1 - 0,1875k^2)}, \\ B_g &= \frac{0,125k^2}{(1 - 0,1875k^2)} \cdot \frac{(1 - 0,0625k^2)}{(1 - 0,125k^2)}, \\ C_g &= 0,00390625 \frac{(1 - 0,0625k^2)}{(1 - 0,1875k^2)} \cdot \left(\frac{k^2}{1 - 0,125k^2} \right)^2, \\ k^2 &= e^2 \sin^2 B_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.35})$$

Решение прямой задачи по геодезической линии сводится к следующему. В обычном порядке, используя формулу (VII.33), переходят от s_g к сферической дуге $\sigma = \varphi_2 - \varphi_1$ по формуле

$$\varphi_2 = \varphi_2^0 - \frac{B}{A} \sin 2\varphi_2 + \frac{C}{A} \sin 4\varphi_2, \quad (\text{VII.36})$$

где

$$\varphi_2^0 = \varphi_1 + \frac{s \cos B_0}{Ab \cos u_0} + \frac{B}{A} \sin 2\varphi_1 - \frac{C}{A} \sin 4\varphi_1. \quad (\text{VII.37})$$

Обозначим

$$\frac{s \cos B_0}{Ab \cos u_0} = \sigma_0, \quad \frac{B}{A} = I, \quad \frac{C}{A} = II.$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_2^0 - I \sin 2\varphi_2 + II \sin 4\varphi_2, \\ \varphi_2^0 &= \varphi_1 + \sigma_0 + I \sin 2\varphi_1 - II \sin 4\varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.38})$$

Величина φ_1 определяется по формулам

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \arctg \frac{\operatorname{tg} u_0}{\sqrt{1 - e^2}}, \\ \varphi_i &= \arccos \left(\frac{\sin u_i}{\sin u_0} \right) \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.39})$$

где

$$\cos u_0 = \sin A_{12} \cos u_1.$$

Геодезическая широта B_2 находится из выражения

$$\operatorname{tg} B_2 = \frac{\operatorname{tg} u_2}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad (\text{VII.40})$$

где $\sin u_2 = \sin u_0 \cos \varphi_2$.

Неизвестная разность долгот $l = L_2 - L_1$ определится при помощи выражения для эллиптического интеграла III рода

$$\Delta L = l = - \frac{v_0}{\cos u_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{1 + \operatorname{tg}^2 u_0 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad (\text{VII.41})$$

где

$$v_0 = \frac{1 - 0,75e^2 \cos^2 u_0}{1 - 0,25e^2 \cos^2 u_0}.$$

Опуская подробности интегрирования, выражение (VII.41) пишем

$$\left. \begin{aligned} \Delta L &= \frac{v_0}{\cos u_0} \left[\frac{4 + 3k^2 \operatorname{ctg}^2 u_0}{4 + k^2 \operatorname{ctg}^2 u_0} \cos u_0 \arctg \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\cos u_0} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{8k^2 \operatorname{ctg}^2 u_0}{4 + k^2 \operatorname{ctg}^2 u_0} \cdot \frac{1}{4 \sqrt{1 - 0,25k^2}} \arctg (\sqrt{1 - 0,25k^2} \operatorname{tg} \varphi_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.42})$$

После соответствующих преобразований окончательно получим

$$l = \Delta L = \lambda - \Delta l, \quad (\text{VII.43})$$

где $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ — разность долгот на сфере,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= \text{arctg} \left(\frac{\text{tg } \varphi_i}{\cos u_0} \right), \\ \Delta l &= I_e (\Delta l_1 - \Delta l_2), \\ I_e &= \frac{(e^2 - k^2) \sec u_0}{2(1 - 0,25e^2 - 0,75k^2)}, \end{aligned} \right\} (\text{VII.44})$$

$$\Delta l_i = \frac{(1 - 0,0625 k^2)}{(1 - 0,1875 k^2)} \varphi_i - \frac{0,0625 k^2}{(1 - 0,125 k^2)} \sin 2\varphi_i. \quad (\text{VII.45})$$

Тогда

$$L_2 = L_1 + l. \quad (\text{VII.46})$$

Геодезический азимут $A_{2,1}$ определится по формулам (VII.29) и (VII.31).

Предлагаемые в § 31 формулы для решения главных геодезических задач по кривым на поверхности земного эллипсоида отличаются простотой алгоритма и удобны для счета как на ЭВМ, так и на настольных вычислительных машинах. При решении не требуются какие-либо специальные таблицы. Поправку за разность долгот при решении прямой задачи по геодезической линии получают не способом приближений, как в классических способах решения (например в способе Бесселя), а непосредственно по формуле.

Таким образом, полученные результаты дают основание считать, что рассмотренные выше способы решения главных геодезических задач по любой из кривых могут удовлетворить требования, предъявляемые к геодезическим и специальным задачам, решаемым на большие расстояния между двумя точками на эллипсоиде; при этом расстояние между двумя пунктами на эллипсоиде можно вычислять по любой из формул (VII.12), (VII.25) и (VII.33), а азимуты — по формулам соответствующей кривой.

§ 32. Решение обратной геодезической задачи с помощью приближений Паде

Ранее указывалось, что источником рациональных приближений являются цепные дроби. В основу таких приближений может быть положено известное разложение Эйлера степенной функции в цепную дробь (IV.26)

$$(1+x)^v = 1 + \frac{vx}{1+\frac{v}{2}x} + \frac{(1+v)x}{3+\frac{v}{2}x} + \dots + \frac{(n-v)x}{2+\frac{v}{2}x} + \dots$$

Известно, что абсолютная погрешность n -го приближения функции n -й подходящей дробью из выражения (IV.26) не превышает по модулю разности между соседними подходящими дробями, т.е.

$$|r_n| \leq \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right|.$$

С учетом третьей подходящей дроби r_3 для функции $y = (1+x)^{1/2}$ будет

$$r_3 \leq \left| \frac{x^3}{4(2+x)(4+x)} \right|.$$

Если переменная

$$x = e^2 f(\xi), \quad |f(\xi)| \leq 1,$$

то

$$|r_3| \leq 1 \cdot 10^{-8}.$$

Приведенные на основании (IV.26) с погрешностью (IV.37) формулы для W, V, M, N более удобны и просты по сравнению с классическими, построенными с помощью степенных рядов [10].

Расстояния s и разность долгот l на земном сфероиде представляются в виде эллиптических интегралов

$$s = b \int_0^\sigma \sqrt{1 + k^2 \sin^2(M + \sigma)} d\sigma, \quad (\text{VII.47})$$

$$l = \int_0^\omega \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\omega. \quad (\text{VII.48})$$

Применяя цепную дробь (IV.26) и ограничиваясь третьими подходящими дробями, получаем для уравнений (VII.47), (VII.48) [10]

$$\sigma'' = \frac{s\sigma''}{3b} + \frac{2p_1}{3\sqrt{p_1(p_1+1)}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{p_1+1}{p}} \operatorname{tg} \sigma \right) \Big|_M^{M+\sigma}, \quad (\text{VII.49})$$

$$l'' = \omega'' - \alpha \sin m \left[\frac{1}{2} \sigma + \frac{p_2}{2\sqrt{p_2(p_2+1)}} \right] \times \\ \times \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{p_2+1}{p_2}} \operatorname{tg} \sigma \right) \Big|_M^{M+\sigma}. \quad (\text{VII.50})$$

Однако будет ошибочным оценивать точность формул (VII.49), (VII.50) по выражению (IV.36). Действительно, формулы (VII.49), (VII.50) получены в результате интегрирования, где подынтегральные функции разложены в цепную дробь (VII.47), (VII.48) согласно формуле (IV.26). Остаточные члены $R_n(x)$ будут в этом случае иметь вид

$$R_n(x) = \int_0^\sigma r_n(x) dx. \quad (\text{VII.51})$$

Найдем $R_3(\sigma)$ для выражения (VII.47)

$$\frac{s}{b} = \int_0^\sigma \frac{4+3k^2 \sin^2(M+\sigma)}{4+k^2 \sin^2(M+\sigma)} d\sigma + R_3(\sigma), \quad (\text{VII.52})$$

$$|R_3(\sigma)| = \left| \int_0^\sigma r_3(\sigma) dv \right| \leq \frac{k^6 \sin^6(M+\sigma)}{32} \sigma.$$

Уже при $\sigma > 30^\circ$; $R_3(\sigma)$ может быть больше 0,001'. В равной степени это относится и к погрешности формулы (VII.48). Для обеспечения точности 0,001" при выводе формул (VII.49), (VII.50) пришлось бы в цепной дроби (IV.26) удерживать подходящую дробь более высокого порядка, что существенно усложнило бы эти формулы.

Приближение функции $(1+x)^v$ в виде (IV.26) неединственное. Оно может быть представлено системой аппроксимаций Паде [см. § 17, формула (IV.55)]

$$(1+x)^v \approx \frac{\sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i \frac{(-v-k)_i x^i}{(-n)_i}}{\sum_{i=0}^k C_k^i \frac{(v-n+k)_i x^i}{(-n)_i}} = \frac{p_{n-k}(x)}{q_k(x)},$$

где $x < 1$; $(a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1)$; $(a_0=1, n=0, 1, \dots, k=0, 1, \dots, n)$.

Приняв в формуле (IV.55) $n=2n-1, k=n, v=-0,5$, получим приближение для функции $(1+x)^{-0,5}$ подходящими дробями только четного порядка [см. формулу (IV.56)]

$$(1+x)^{-1/2} = \frac{p_{2n}(x)}{q_{2n}(x)} + r_{2n}(x).$$

Если в формуле (IV.55) принять $n=2n, k=n, v=-0,5$, то получим приближение для той же функции подходящими дробями нечетного порядка [см. формулу (IV.57)]

$$(1+x)^{-1/2} = \frac{p_{2n+1}(x)}{q_{2n+1}(x)} + r_{2n+1}(x).$$

Относительно четных подходящих дробей в выражении (IV.56) для функции $(1+x)^{-1/2}$ имеет место [см. формулу (IV.58)]

$$\frac{p_{2n}(x)}{q_{2n}(x)} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{1+x \sin^2\left(\frac{2t\pi-\pi}{4n}\right)}.$$

Используя разложение (IV.58), находим приближения для функций W, V, M, N :

$$V = \frac{1+e'^2 \cos^2 B}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{1+Q_t \cos^2 B} + \\ + r_{2n}(B) (1+e'^2 \cos^2 B), \quad (\text{VII.53})$$

$$W = \frac{1 - e^2 \sin^2 B}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{1 - Q'_t \sin^2 B} + r'_{2n}(B)(1 - e^2 \sin^2 B), \quad (\text{VII.54})$$

$$M = \frac{c}{n(1 + e'^2 \cos^2 B)} \sum_{t=1}^n \frac{1}{1 + Q_t \cos^2 B} + \frac{r_{2n}(B)c}{1 + e'^2 \cos^2 B}, \quad (\text{VII.55})$$

$$N = \frac{c}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{1 + Q_t \cos^2 B} + r_{2n}(B)c, \quad (\text{VII.56})$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q_t &= e'^2 \sin^2 \left(\frac{2t\pi - \pi}{4n} \right), Q'_t = e^2 \sin^2 \left(\frac{2t\pi - \pi}{4n} \right), \\ r_{2n}(B) &\leq \left| \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \right| < \frac{(e'^2 \cos^2 B)^{2n}}{2^{4n-1}}, \\ r'_{2n}(B) &< \frac{(e^2 \sin^2 B)^{2n}}{2^{4n-1}}, c = a(1 - e^2)^{-1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.57})$$

При $n=2$ ошибки в формулах (VII.53), (VII.54) не превосходят $2 \cdot 10^{-11}$, а в формулах (VII.55), (VII.56) $2 \cdot 10^{-11}c = 0,0001$ м.

С помощью тождеств (VII.47) — (VII.48) с учетом (IV.58) могут быть найдены приближения эллиптических интегралов для вычисления расстояния s и разности долгот l на земном сфероиде [49]:

$$\begin{aligned} s(\sigma, k) &= b \int_0^\sigma \sqrt{1 + k^2 \sin^2(M + \sigma)} d\sigma = \\ &= b \int_0^\sigma \frac{1 + k^2 \sin^2(M + \sigma)}{\sqrt{1 + k^2 \sin^2(M + \sigma)}} d\sigma = \\ &= b \left\{ 2n\sigma - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\text{arctg}(\alpha_t \text{tg} \sigma)}{\alpha_t} \times \right. \\ &\quad \left. \times \text{ctg}^2 \left(\frac{2t\pi - \pi}{4n} \right) \right\} \Bigg|_M^{M+\sigma} + R_{2n}(\sigma), \end{aligned}$$

$$\alpha_t^2 = 1 + k^2 \sin^2 \left(\frac{2t\pi - \pi}{4n} \right), k^2 = e'^2 \cos^2 m, \quad (\text{VII.58})$$

$$\begin{aligned} e(\omega, l) &= \int_0^\omega \sqrt{1 - \frac{e^2}{1 + \text{ctg}^2 m \sin^2(\mu + \omega)}} d\omega = \\ &= \omega - \frac{e^2}{n} \sum_{t=1}^n \cos^2 \left(\frac{2t\pi - \pi}{4n} \right) \frac{1}{\beta_t \sqrt{\beta_t^2 + \text{ctg}^2 m}} \times \\ &\quad \times \text{arctg} \frac{\sqrt{\beta_t^2 + \text{ctg}^2 m} \text{tg} \omega}{\beta_t} \Bigg|_\mu^{\mu+\omega} + R_{2n}(\omega), \end{aligned} \quad (\text{VII.59})$$

$$\beta_t^2 = 1 - e^2 \sin^2 \left(\frac{2t\pi - \pi}{4n} \right) \quad n = 1, 2, \dots; \quad t = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sin \mu = \text{tg} u \text{tg} m.$$

Здесь величины u, σ, ω, m, M — элементы вспомогательной сферы Бесселя.

Для получения рабочих формул для s и l примем в формулах (VII.58) и (VII.59) $n=2$ и проведем оценку остаточных членов $R_{2n}(\sigma)$ и $R_{2n}(\omega)$:

$$R_{2n}(\sigma) = \int_0^\sigma [1 + k^2 \sin^2(M + \sigma)] r_{2n}(\sigma) d\sigma,$$

$$r_{2n}(\sigma) \leq \frac{p_{2n}(\sigma)}{q_{2n}(\sigma)} - \frac{p_{2n+1}(\sigma)}{q_{2n+1}(\sigma)}. \quad (\text{VII.60})$$

Для $n=2$

$$\begin{aligned} |r_4(\sigma)| &\leq \frac{k^8 \sin^8(M + \sigma)}{128[1 + k^2 \sin^2(M + \sigma)] + \dots} < \\ &< \frac{k^8 \sin^8(M + \sigma)}{128[1 + k^2 \sin^2(M + \sigma)]}. \end{aligned} \quad (\text{VII.61})$$

Известно, что если $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx, \quad a < b. \quad (\text{VII.62})$$

На основании формул (VII.62), (VII.60), (VII.61) имеем

$$R_4(\sigma) < \int_0^{\sigma} \frac{k^8 \sin^8(M+\sigma)}{128} d\sigma. \quad (\text{VII.63})$$

Воспользовавшись теоремой о среднем значении, получим окончательно

$$R_4(\sigma) < \frac{k^8 \sin^8(M+\sigma)}{128} \sigma. \quad (\text{VII.64})$$

Аналогично найдем оценку для $R_4(\omega)$

$$R_4(\omega) = \int_0^{\omega} \left[1 - \frac{e^2}{1 + \text{ctg}^2 m \sin^2(\mu + \omega)} \right] r_4(\omega) d\omega,$$

$$|r_4(\omega)| < \frac{e^8}{127(1 + \text{ctg}^2 m \sin^2(\mu + \omega)) \left(1 - \frac{e^2}{1 + \text{ctg}^2 m \sin^2(\mu + \omega)} \right)},$$

$$R_4(\omega) < \frac{e^8}{127} \omega.$$

При $\sigma \leq \pi$ $R_4(\sigma) < 0,00001''$, $R_4(\omega) < 0,00001''$.
Заметим, что в формулах величины

$$\sin^2\left(\frac{2t\pi - \pi}{4n}\right), \quad \cos^2\left(\frac{2t\pi - \pi}{4n}\right),$$

$$\text{ctg}^2\left(\frac{2t\pi - \pi}{4n}\right), \quad \beta_t^2 = 1 - e^2 \sin^2\left(\frac{2t\pi - \pi}{4n}\right)$$

являются константами для каждого значения n . Это исключает составление каких-либо вспомогательных таблиц. Остаточные члены полученных общих формул (VII.53), (VII.54), (VII.55), (VII.56), (VII.58), (VII.59) имеют вид $[e^{2f}(\varepsilon)]^{2n}$ и следовательно, точность в $(1 : e^2)^n$ более высокую, чем соответствующие приближения, полученные с помощью биномиального ряда.

§ 33. Решение главных геодезических задач в прямоугольных системах координат $p, q(x, y)$

В § 9 гл. II было дано определение полугеодезических систем координат: полярной (азимутальной) сфероидической и прямоугольной сфероидической.

Вторая система, в свою очередь, подразделяется на прямую прямоугольную, поперечную прямоугольную и косую прямоугольную. Поперечная прямоугольная система получается путем поворота прямой прямоугольной системы на угол 90° , а косая — на произвольный угол. Все они могут быть использованы для решения главных геодезических задач на расстояния порядка до 2000 км в любых широтах.

Связь полугеодезических координат p и q с геодезическими B, L может быть осуществлена при помощи рядов по степеням разностей широт и долгот до 3-го порядка включительно, основанных на формулах Гельмерта [37] или Лежандра [45].

В нашей работе [19] приведены рабочие формулы для решения на ЭВМ главных геодезических задач в прямоугольных сфероидических координатах на ЭВМ, а также результаты моделирования алгоритмов. Приведем вывод некоторых исходных уравнений.

Ф. Н. Красовский* при рассмотрении координат Зольднера приводит систему формул (362), которую можно записать в виде

$$\frac{ndx}{ds} = \frac{\sin\{90^\circ - [T_{12} - (2\beta + 2\gamma)]\}}{\sin[90^\circ - (\beta + \gamma)]}, \quad (\text{VII.65})$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\sin[T_{12} - (\beta + \gamma)]}{\sin[90^\circ - (\beta + \gamma)]} \quad (\text{VII.66})$$

или

$$dx = ds \cos[T_{12} - (2\beta + 2\gamma)] \frac{\sec(\beta + \gamma)}{n}, \quad (\text{VII.67})$$

$$dy = ds \sin[T_{12} - (\beta + \gamma)] \sec(\beta + \gamma), \quad (\text{VII.68})$$

а также

$$(T_{21} \pm 180^\circ - T_{12}) = -(2\beta + 3\gamma). \quad (\text{VII.69})$$

Из теории решения сфероидических треугольников известно, что сферический избыток определяется по формуле [45]

$$\varepsilon'' = \frac{ap}{2} \rho'' K_m + \frac{K_m^2}{24} \rho'' p (p^2 q_1 + q_1^3 + p^2 q + q^3), \quad (\text{VII.70})$$

* Руководство по высшей геодезии, ч. II. М., Геодезиздат, 1942.

где

$$K_m = \frac{K_A + K_B + K_C}{3}.$$

Применительно к нашему случаю формулу (VII.70) можно записать в таком виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon'' = 2\beta'' &= \frac{dxy_1}{2R_m^2} \rho'' + \frac{y_1}{24R_m^4} [y_1^2 dx + (dx)^3] \rho'' + \\ &+ \frac{ndx y_1}{2R_m^2} \rho'' + \frac{y_1}{24R_m^4} [y_1^2 ndx + n^3 (dx)^3] \rho'', \end{aligned}$$

откуда

$$\beta'' = \frac{dxy_1}{4R_m^2} \rho'' \left\{ (1+n) + \frac{1}{12R_m^2} [y_1^2 + dx^2 - ndx^2 + dx^2 n^2] \right\}$$

или окончательно

$$\begin{aligned} \beta'' &= \frac{(1+n)(x_2 - x_1)y_1}{4R_m^2} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{y_1^2 + (x_2 - x_1)^2(1-n+n^2)}{12R_m^2} \right\} \rho''. \end{aligned} \quad (\text{VII.71})$$

Формула (VII.71) имеет высокую степень точности. Из формул (VII.67) и (VII.68) легко найти первое приближение

$$x_2 - x_1 = s \cos T_{12},$$

$$y_2 - y_1 = s \sin T_{12}.$$

Введем обозначения

$$u = s \cos T_{12}, \quad v = s \sin T_{12},$$

тогда угол γ может быть определен по приближенной формуле

$$\gamma_0'' = \frac{nw}{6R_m^2} \rho''. \quad (\text{VII.72})$$

Из уравнения (VII.71) имеем

$$\beta_0'' = \frac{(1+n)uy_1}{4R_m^2} \rho''. \quad (\text{VII.73})$$

Формулы (VII.72) и (VII.73) необходимы для точных вычислений.

По величинам β_0 и γ_0 можно найти приращения координат

$$x_2 - x_1 = \frac{s \cos [T_{12} - 2(\beta_0 + \gamma_0)]}{n}, \quad (\text{VII.74})$$

$$y_2 - y_1 = s \sin [T_{12} - (\beta_0 + \gamma_0)]. \quad (\text{VII.75})$$

Используя формулы (VII.74) и (VII.75), находим значение β по формуле (VII.71), а γ — по формуле

$$\gamma'' = \frac{n(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{6R_m^2} \rho'' \left(1 + \frac{s^2}{12R_m^2} \right). \quad (\text{VII.76})$$

Для решения прямой геодезической задачи можно записать теперь следующую систему формул.

Вспомогательные формулы:

$$u = s \cos T_{12}, \quad v = s \sin T_{12},$$

$$n = \cos \frac{y_1}{R_1} - \frac{\eta_1^2 y_1^4}{24 N_1^4} (12 \operatorname{tg}^2 B_1 + \eta_1^2), \quad (\text{VII.77})$$

$$x_m = \left(x_1 + \frac{u}{2n} \right), \quad \text{по } x_m \text{ находим } B_m. \quad (\text{VII.78})$$

Формулы первого приближения:

$$\gamma_0'' = \frac{nw}{6R_m^2} \rho'', \quad \beta_0'' = \frac{(1+n)uy_1}{4R_m^2} \rho''.$$

$$(x_2 - x_1)_0 = \frac{s \cos [T_{12} - 2(\beta_0 + \gamma_0)]}{n},$$

$$(y_2 - y_1)_0 = s \sin [T_{12} - (\beta_0 + \gamma_0)].$$

Окончательные формулы:

$$\gamma'' = \frac{n(x_2 - x_1)_0 (y_2 - y_1)_0}{6R_m^2} \rho''$$

или

$$\gamma'' = \frac{n(x_2 - x_1)_0 (y_2 - y_1)_0 \rho''}{6R_m^2} \left(1 + \frac{s^2}{12R_m^2} \right). \quad (\text{VII.79})$$

Величина R_m находится по $x_m = x_1 + \frac{u}{2n}$:

$$\beta'' = \frac{(1+n)(x_2-x_1)_0 y_1}{4R_m^2} \left\{ 1 + \frac{y_1^2 + (x_2-x_1)_0^2(1-n+n^2)}{12R_m^2} \right\} \rho'', \quad (\text{VII.80})$$

$$x_2 = x_1 \pm s \cos [T_{12} - 2(\beta + \gamma)] \frac{\sec(\beta + \gamma)}{n}, \quad (\text{VII.81})$$

$$y_2 = y_1 + s \sin [T_{12} - (\beta + \gamma)] \sec(\beta + \gamma), \quad (\text{VII.82})$$

$$(T_{21} \pm 180^\circ - T_{12}) = - (2\beta + 3\gamma). \quad (\text{VII.83})$$

При ординате $y=700$ км и значении $(x_2-x_1) = 100$ км величина

$$\beta = \frac{(1+n)(x_2-x_1)y_1\rho''}{4R_1^2} \approx 200'',$$

при $u=v=100$ км

$$\gamma = \frac{nuv}{6R^2} \rho'' \approx 3''.$$

Следовательно, $(\beta + \gamma)$ составит $203''$ и $\sec(\beta + \gamma)$ можно без ощутимой потери точности принять равным единице.

Формулы для решения обратной геодезической задачи можно получить путем обращения формул прямой задачи.

Имея разности (x_2-x_1) и (y_2-y_1) , можно найти β , γ , а затем

$$\operatorname{tg} Q = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1) n_m}. \quad (\text{VII.84})$$

С помощью величины Q определяют T_{12} и T_{21} :

$$T_{21} = T_{12} \pm 180^\circ - (2\beta + 3\gamma).$$

Далее вычисляют s по формуле

$$s = \frac{(y_2 - y_1)}{\sin [T_{12} - (\beta + \gamma)]} = \frac{n_1(x_2 - x_1)}{\cos [T_{12} - 2(\beta + \gamma)]}.$$

Вычисляют T_{12} и T_{21} в такой последовательности:

$$v = \frac{A}{B} = \operatorname{lg} \frac{(y_2 - y_1) \cos [Q - (\beta + \gamma)]}{(x_2 - x_1) n_1 \sin Q}$$

или

$$v = \operatorname{lg} (y_2 - y_1) - \operatorname{lg} n_1 (x_2 - x_1) - \operatorname{lg} \sin Q + \operatorname{lg} \cos [Q - (\beta + \gamma)],$$

$$(\delta) = \frac{-v}{(\Delta_2 - \Delta_1)},$$

где Δ_2 — приращение $\operatorname{lg} \cos [Q - (\beta + \gamma)]$ на $1''$, Δ_1 — приращение $\operatorname{lg} \sin Q$ на $1''$.

Таким образом, можно написать

$$T_{12} = Q + [(\delta) + (\beta + \gamma)], \quad (\text{VII.85})$$

$$T_{21} = [T_{12} \pm 180^\circ - (2\beta + 3\gamma)], \quad (\text{VII.86})$$

$$s = \frac{(y_2 - y_1)}{\sin [T_{12} - (\beta + \gamma)]}, \quad (\text{VII.87})$$

$$s = \frac{n_1(x_2 - x_1)}{\cos [T_{12} - 2(\beta + \gamma)]}. \quad (\text{VII.88})$$

Для перевычисления прямоугольных координат в координаты Гаусса — Крюгера служат формулы

$$y_3 = y_k \left[1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{y_k^2}{N^2} + \frac{y_k^4}{24 N^4} \right], \quad x_k - x_3 = \frac{\eta^{2t}}{24} y \left(\frac{y}{N} \right)^3.$$

$$y_k = y_3 \left[1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{y_3^2}{N^2} + \frac{y_3^4}{24 N^4} \right].$$

§ 34. Решение главных геодезических задач с помощью эллиптических функций

Решение главных геодезических задач в замкнутой форме, основанное на применении эллиптических функций, принадлежит их создателю Якоби [39]. Как известно, решение Якоби было опубликовано только после его смерти астрономом Лютером [65]. Решение Якоби зависит от вычисления эллиптического интеграла I рода и от двух якобиевых функций Θ и H . По этим функциям оно представлено в конечном виде.

Вывод рабочих формул для решения главных геодезических задач с привлечением метода, намеченного Якоби, заключается в следующем. Так же, как и Якоби, исходим из лежандровых формул [87]:

$$s = a \frac{\sin \beta_0}{\sin B_0} \int_{\varphi'}^{\varphi''} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad (\text{VII.89})$$

$$l = \frac{\text{tg } \beta_0}{\sin B_0} \int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{1 + \text{tg}^2 \beta_0 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (\text{VII.90})$$

Из теории эллиптических функций известно, что при вычислении эллиптических интегралов I, II и III родов по заданным значениям модуля k^2 и амплитуды φ существенно знать величину только интеграла I рода, так как остальные два случая приводятся к первому в результате введения поправочных членов, выражаемых через тэта-функции [39], [33].

Именно

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = u - u \frac{\theta''(0)}{\theta(0)} + \frac{\theta'(u)}{\theta(u)}, \quad (\text{VII.91})$$

$$\text{II}(\varphi, k, p) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{k'} \theta_1(u) du}{\theta(u) + p \sqrt{k'} \theta_1(u)},$$

где

$$\left. \begin{aligned} u &= \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \\ \frac{\theta''(0)}{\theta(0)} &= 8q(1 - 6q + 28q^2), \\ \frac{\theta'(u)}{\theta(u)} &= 4(1 - 4q + 12q^2) \{q \sin 2x + \\ &+ q^2 \sin 4x + \dots\}, \\ \theta_1(u) &= 1 - 2q \cos 2x, \\ \theta(u) &= 1 - 2q \cos 2x, \quad x = \frac{\pi u}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.92})$$

Причем полный эллиптический интеграл I рода вычисляются в пределах от 0 до $\pi/2$ по формуле

$$k = \frac{\pi}{2} (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 \dots). \quad (\text{VII.93})$$

Модуль q вычисляют с точностью до q^4 из выражения

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt[4]{1 - k^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - k^4}}, \quad (\text{VII.94})$$

где

$$k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad k^2 = \frac{e^2 \sin \beta_0}{1 - e^2 \cos^2 \beta_0}. \quad (\text{VII.95})$$

Вычислить эллиптический интеграл I рода (VII.91) можно по формуле (IV.41) § 16. Отметим, что одним из эффективных методов вычисления эллиптического интеграла I рода является преобразование Ландена [39]. Оно заключается в том, что данный интеграл приводят к другому, модуль которого меньше модуля данного интеграла. Повторяя операцию и уменьшая постепенно модули, можно дойти до интеграла, модулем которого можно пренебречь, и свести вопрос к интегралу

$$\int_0^{\varphi} d\varphi_n = \varphi_n.$$

Общая формула преобразования по Ландену следующая:

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{(1 + k_1)(1 + k_2) \dots (1 + k_n)}{2^n} \varphi_n. \quad (\text{VII.96})$$

Для вычисления модулей служит формула

$$k_k = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{(k-1)}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{(k-1)}^2}}, \quad (\text{VII.97})$$

а для вычисления соответствующих амплитуд формула

$$\text{tg} [\varphi_k - \varphi_{(k-1)}] = \sqrt{1 - k_{(k-1)}^2} \text{tg} \varphi_{(k-1)}. \quad (\text{VII.98})$$

Таким образом, необходимые соотношения для окончательных формул решения главных геодезических задач нами получены на основе общих правил теории эллиптических функций.

Опуская различного рода преобразования, приводим окончательные системы формул для решения прямой и обратной геодезической задач [4].

Формулы для решения прямой геодезической задачи:

$$1. \operatorname{tg} u_1 = (1 - \alpha) \operatorname{tg} B_1, \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{\cos A_1}{\operatorname{tg} u_1}.$$

$$2. \operatorname{tg} u_0 = -\frac{\operatorname{ctg} A_1}{\sin \varphi_1}, \operatorname{tg} \omega_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\cos u_0}.$$

$$3. y = (1 - e^2 \cos^2 u_0).$$

$$4. q = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 \sin^2 u_2}{y \left(1 - \frac{\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt[4]{y}}\right)^2 \left(1 + \frac{1-\alpha}{\sqrt{y}}\right)}$$

$$5. \sigma_1 = \varphi_1 + 2q \sin 2\varphi_1 - q^2 \sin 4\varphi_1.$$

$$6. \sigma = \sigma_1 + \frac{s}{a} + \frac{s}{a} \left[\frac{\alpha - 4q(1-q)}{1-\alpha} \right].$$

$$7. \varphi = \sigma - 2q \sin 2\sigma + 5q^2 \sin 4\sigma.$$

$$8. \operatorname{tg} A' = \frac{\operatorname{ctg} u_2}{\sin \varphi}, A_2 = 360^\circ - A'.$$

$$9. \operatorname{tg} u = \frac{\cos A'}{\operatorname{tg} \varphi}, \operatorname{tg} B_2 = \frac{\operatorname{tg} u}{1-\alpha}.$$

$$10. \operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos u_0}.$$

$$11. l = \omega - \omega_1 - \frac{\alpha \cos u_0}{1+2q} (\varphi - \varphi_1) + \alpha q \cos u_0 \times \\ \times (\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1).$$

Формулы для решения обратной геодезической задачи:

$$1. \Delta\lambda_1 = V_{\text{ср}} l, p = \arccos \left(\tau + \frac{Q \cos \Delta\lambda_1}{\sqrt{1-e^2 V_1 V_2}} \right).$$

$$2. \tau = \sin B_1 \sin B_2, Q = \cos B_1 \cos B_2.$$

$$3. \Delta l = \frac{0,003351 p \sin \Delta\lambda_1 Q}{\sin p V_1 V_2 (1-e^2)}.$$

$$4. \Delta\lambda_2 = l + \Delta l, B_m = \arccos \left(\frac{Q \sin \Delta\lambda_2}{\sqrt{1-(Q \cos \Delta\lambda_2 + \tau^2)^2}} \right).$$

$$5. A_i = \arcsin \left(\frac{V_i}{V_m} \cdot \frac{\cos B_m}{\cos B_i} \right) (i = 1, 2).$$

$$6. u_1 = \operatorname{arctg} ((1 - \alpha) \operatorname{tg} B_1), \varphi_1 = \operatorname{arctg} \left(-\frac{\cos A_1}{\operatorname{tg} u_1} \right).$$

$$7. u_0 = \operatorname{arctg} \left(-\frac{\operatorname{ctg} A_1}{\sin \varphi_1} \right).$$

$$8. \sigma_1 = \varphi_1 + 2q \sin 2\varphi_1 - q^2 \sin 4\varphi_1.$$

$$9. \varphi = \arcsin \left(\frac{\operatorname{tg} A_2}{\operatorname{tg} u_0} \right).$$

$$10. \sigma = \varphi + 2q \sin 2\varphi - q^2 \sin 4\varphi.$$

$$11. s = \frac{(\sigma - \sigma_1) (1 - \alpha) a}{1 - 4q(1 - q)}.$$

По поводу применения эллиптических функций для решения главных геодезических задач отметим одно важное обстоятельство. Для модуля q , введенного Якоби с точностью членов порядка q^6 , из формулы (VII.94) найдем

$$q = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt[4]{1-k^2}}{1 + \sqrt[4]{1-k^2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{k^2}{4} + \frac{k^4}{8} + \frac{21k^6}{256} + \dots \right).$$

(VII.99)

Сравнение q (VII.99) с величиной k_1 , введенной Гельмертом [37],

$$k_1 = \frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{1 + \sqrt{1-k^2}} = \frac{k^2}{4} + \frac{k^8}{8} + \frac{5k^6}{64} + \frac{7k^8}{128} + \dots$$

показывает, что $4q$ и k_1 отличаются на $1: 256k^6$. Следовательно, применение величины q вместо k_1 предпочтительнее, так как в результате мы имеем возможность получить более сходящиеся ряды.

П. Ганзен [65] ввел в ряды величину μ :

$$\mu = \frac{1}{4} k^2 + \frac{1}{8} k^2 + \frac{21}{256} k^6 + \frac{31}{512} k^8 + \dots,$$

равную не q , а $4q$. Ф. Бессель [26] использовал k_1 (обозначенное им ϵ).

Для решения главных геодезических задач на поверхности эллипсоида эллиптические функции применялись также М. Ф. Хандриковым в 1867 г. [72], Г. Альфеном в 1888 г. [84], А. Форсайтом в 1911 г. [83], А. И. Витманом в 1945 г. [33].

Известно [72], что еще К. Гаусс (не позднее 1796 г.) осуществил обращение эллиптического интеграла и первым открыл эллиптические функции и их важнейшие свойства. К сожалению, он не опубликовал результатов этой работы и честь основателей теории эллиптических функций остается за Абелем и Якоби.

К. Гауссу принадлежит представление эллиптической функции $\operatorname{sl} z$ (лемнискатический синус) в виде частного двух тэта-функций.

Абель и Якоби осуществили обращение эллиптического интеграла более общего вида, чем лемнискатический. Абель исходил из интеграла

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}},$$

полагая $x = \varphi(\alpha)$ и вводя, кроме того, функции

$$f(\alpha) = \sqrt{1-c^2\varphi^2(\alpha)}, \quad F(\alpha) = \sqrt{1+e^2\varphi^2(\alpha)}.$$

Якоби же обращал сначала интеграл

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = u,$$

назвав φ амплитудой u .

Тогда для эллиптического интеграла I рода в нормальной форме Лежандра

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = u$$

Якоби делал замену $x = \sin \varphi$, в результате которой получилось

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = u, \quad \varphi = \operatorname{am} u$$

и $x = \sin \operatorname{am} u$ — синус амплитуды, u — основная эллиптическая функция Якоби. Рядом с ней Якоби вводил еще две эллиптические функции:

$$\cos \operatorname{am} u = \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am}^2 u}, \quad \Delta \operatorname{am} u = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}^2 u},$$

Для эллиптических функций Якоби со времен Гурдермана (1838 г.) употреблял обозначения: $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{sp} u$, $\operatorname{dn} u$.

В дальнейшем Якоби получил тэта-функции ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$). Однако Якоби эти функции интересовали с точки зрения применения к задаче обращения эллиптического интеграла.

Цель, которую ставил перед собой Якоби, заключалась в следующем. Отправляясь от аргумента построенных тэта-функций, подойти к решению задачи обращения эллиптического интеграла. Эта цель была им достигнута. Дополнительно он занимался выяснением вопроса, всегда ли можно подобрать параметр q так, чтобы получить наперед заданное значение модуля k ($0 < k < 1$).

§ 35. Решение прямой геодезической задачи методом Рунге — Кутта — Ингланда

Метод Рунге — Кутта — Ингланда (см. гл. V, § 24) состоит в том, что решение дифференциального уравнения 1-го порядка в точке x_{j+1} определяется по формуле

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6} (k_1 + 4k_3 + k_4), \quad (\text{VII.100})$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \Delta x f(x_j, y_j), \\ k_2 &= \Delta x f\left(x_j + \frac{1}{2} \Delta x, y_j + \frac{1}{2} k_1\right), \\ k_3 &= \Delta x f\left[x_j + \frac{1}{2} \Delta x, y_j + 0,25(k_1 + k_2)\right], \\ k_4 &= \Delta x f(x_j + \Delta x, y_j - k_2 + 2k_3). \end{aligned} \right\} (\text{VII.101})$$

$\Delta x = x_{j+1} - x_j$ — шаг интегрирования.

Ошибка интегрирования на одном шаге (локальная ошибка) определяется по формуле

$$M = \frac{1}{336} (-42k_1 - 224k_3 - 21k_4 + 162k_5 + 125k_6), \quad (\text{VII.102})$$

где

$$\begin{aligned} k_5 &= \Delta x f \left[x_j + \frac{18}{27} \Delta x, y_j + \frac{1}{27} (7k_1 + 10k_2 + k_3) \right], \\ k_6 &= \Delta x f \left[x_j + \frac{1}{5} \Delta x, y_j + \frac{1}{625} (28k_1 - 125k_2 + \right. \\ &\quad \left. + 546k_3 + 54k_4 - 378k_5) \right]. \end{aligned} \quad (\text{VII.103})$$

Применяя уравнение (VII.100) к решению интегралов

$$B_2 = B_1 + \int_0^s \frac{V^3}{c} \cos A ds,$$

$$L_2 = L_1 + \int_0^s \frac{V}{c} \sin A \sec B ds,$$

$$A_2 = A_1 + \int_0^s \frac{V}{c} \sin A \sin B \sec B ds,$$

получаем следующие рабочие формулы:

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + \frac{1}{6} (\Delta B_1 + 4\Delta B_3 + \Delta B_4), \\ L_2 &= L_1 + \frac{1}{6} (\Delta L_1 + 4\Delta L_3 + \Delta L_4), \\ A_2 &= A_1 + \frac{1}{6} (\Delta A_1 + 4\Delta A_3 + \Delta A_4), \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.104})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_i &= s_0 V_i^3 \cos \alpha_i, \\ \Delta L_i &= s_0 V_i \frac{\sin \alpha_i}{\cos \varphi_i}, \quad V_i = \frac{1 + 0,6\gamma_i}{1 + 0,2\gamma_i}, \\ \Delta A &= \Delta L_1 \sin \varphi_i, \\ \gamma_i &= \beta \cos^2 \varphi_i, \quad s_0 = \frac{s}{c} \rho'' = 0,0322304 \cdot s, \\ \beta &= 1,25e'^2, \\ i &= 1, \dots, 4 \text{ — номер пробного шага.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.105})$$

Таблица 4

i	α_i	φ_i
1	A_1	B_1
2	$A_1 + 0,5\Delta A_1$	$B_1 + 0,5\Delta B_1$
3	$A_1 + 0,25(\Delta A_1 + \Delta A_2)$	$B_1 + 0,25(\Delta B_1 + \Delta B_2)$
4	$A_1 - \Delta A_2 + 2\Delta A_3$	$B_1 - \Delta B_2 + 2\Delta B_3$
5	$A_1 + 1/27(7\Delta A_1 + 10\Delta A_2 + \Delta A_3)$	$B_1 + 1/27(7\Delta B_1 + 10\Delta B_2 + \Delta B_3)$
6	$A_1 + 1/625(28\Delta A_1 - 125\Delta A_2 + \Delta A_3 + 546\Delta A_3 + 54\Delta A_4 - 378\Delta A_5)$	$B_1 + 1/625(28\Delta B_1 - 125\Delta B_2 + \Delta B_3 + 546\Delta B_3 + 54\Delta B_4 - 378\Delta B_5)$

Для эллипсоида Красовского $c = 6399\ 698,9$ м, $\beta = 0,0084\ 2316$.

Значения α_i и φ_i приведены в табл. 4.

Локальные ошибки для координат и азимута вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} M_{\Delta B} &= \frac{1}{336} (-42\Delta B_1 - 224\Delta B_3 - 21\Delta B_4 + \\ &\quad + 162\Delta B_5 + 125\Delta B_6), \end{aligned}$$

$$M_{\Delta L} = \frac{1}{336} (-42\Delta L_1 - 224\Delta L_3 - 21\Delta L_4 + 162\Delta L_5 + 125\Delta L_6),$$

$$M_{\Delta A} = \frac{1}{336} (-42\Delta A_1 - 224\Delta A_3 - 21\Delta A_4 + 162\Delta A_5 + 125\Delta A_6).$$

Формула (VII.102) локальной ошибки интегрирования M позволяет при использовании ЭВМ автоматически изменять шаг в процессе интегрирования. При некоторой заданной ошибке интегрирования ε на одном шаге схема такого изменения может быть следующей:

$$\Delta x_{j+1} = \begin{cases} \frac{\Delta x_j}{2} & \text{при } M_i > \varepsilon, \\ \Delta x_j & \text{при } M_i = \varepsilon, \\ 2\Delta x_j & \text{при } M_i < \varepsilon, \end{cases}$$

где Δx_{j+1} — величина шага интегрирования из точки (x_{j+1}, y_{j+1}) , если $M \leq \varepsilon$ или из точки (x_j, y_j) , если $M > \varepsilon$, $i = 1, \dots, n$ — номер шага.

Реализация схемы автоматического выбора шага на 20—30% сокращает время, необходимое для полу-

чения решения, по сравнению с методом интегрирования при постоянном шаге.

Проверка точности и области применения формул (VII. 104) показала, что: 1) метод Рунге — Кутта — Ингленда точнее метода Рунге — Кутта, 2) практически при одинаковой точности решения этот метод экономичнее метода Рунге — Кутта — Мерсона.

§ 36. О точности решения обратной геодезической задачи по пунктам, отнесенным к различным референц-эллипсоидам

Обратная задача может быть решена строго, если существует геодезическая связь двух систем координат, и приближенно, если эта связь отсутствует. Действительно, в первом случае координаты любой точки на поверхности одного эллипсоида могут быть перевычислены в систему второго эллипсоида. Во втором случае мы вынуждены считать координаты точек в одной системе равными координатам этих же точек в другой системе, т. е. полагать, что оба эллипсоида совпадают как по размерам, так и по положению в теле Земли.

Первый случай — когда известны координаты хотя бы одного пункта относительно обоих эллипсоидов [64], [52]. Представим себе эллипсоид вращения \mathcal{E}^I с большой полуосью a^I и эксцентриситетом e^I . Пусть относительно этого эллипсоида задана точка P_1^I геодезическими координатами B_1, L_1 и высотой H_1 (рис. 9). Возьмем прямоугольную систему координат так, чтобы начало системы координат совпало с центром эллипсоида \mathcal{E}^I , ось Z совпала с осью вращения этого эллипсоида, ось X лежала бы в плоскости начального меридиана, а ось Y — в плоскости, перпендикулярной к плоскости начального меридиана.

Возьмем второй эллипсоид \mathcal{E}^{II} с параметрами $a^{II} = a^I + \delta a$ и $e^{II} = e^I + \delta e$. Пусть центр \mathcal{E}^{II} в указанной системе имеет координаты m, p и q соответственно по осям X, Y, Z . Для отнесения точки P_1 , данной на первом эллипсоиде \mathcal{E}^I , к поверхности второго эллипсоида \mathcal{E}^{II} надо в исходные координаты B_1, L_1 и высоту h_1 ввести поправки $\delta B, \delta L$ и δh . Если будут известны координаты m, p и q , то эти поправки могут быть вычислены по формулам Слудского [63]:

$$\left. \begin{aligned} a\delta B &= m \sin B \cos L + p \sin B \sin L - q \cos B + \\ &+ 2ae \sin B \cos B \delta e, \\ a \cos B \delta B &= m \sin L - p \cos L, \\ \delta h &= -\delta a - m \cos B \cos L - p \cos B \sin L - \\ &- q \sin B + ae \sin^2 B \delta e. \end{aligned} \right\} \text{(VII.106)}$$

Для нахождения координат m, p, q можно воспользоваться теми же формулами Слудского. Действительно, если имеется хотя бы одна точка, координаты которой относительно обоих эллипсоидов известны, то представляется возможным получить для этой точки разности координат и высот, т. е. $\delta B_0, \delta L_0, \delta h_0$. Подставив их в формулы (VII.106), получим выражения для вычисления искомых координат m, p, q :

$$\left. \begin{aligned} m &= -\cos B \cos L \delta a - \sin^2 B \cos B \cos L a e \delta e + \\ &+ \sin B \cos L \frac{a \delta B_0''}{\rho''} + \cos B \sin L \frac{a \delta L_0''}{\rho''} - \\ &- \cos B \cos L \delta h_0, \\ p &= -\cos B \sin L \delta a - \sin^2 B \cos B \sin L a e \delta e + \\ &+ \sin B \sin L \frac{a \delta B_0''}{\rho''} - \cos B \cos L \frac{a \delta L_0''}{\rho''} - \\ &- \cos B \sin L \delta h_0, \\ q &= -\sin B \delta a + (\sin^3 B + \sin 2B \cos B) a e \delta e - \\ &- \cos B \frac{a \delta B_0''}{\rho''} - \sin B \delta h_0. \end{aligned} \right\} \text{(VII.107)}$$

Теперь, зная m, p, q , вычисляем по формулам (VII.106) поправки $\delta B, \delta L$ и δh в координаты B, L и высоту H любой точки поверхности первого эллипсоида, иначе говоря, можно получить координаты любой точки и высоту ее относительно поверхности второго эллипсоида.

Пример. Для перехода с эллипсоида Бесселя на эллипсоид Красовского имеем: $a^B = 6377397,2$ м $\alpha^B = 1:299,15$ ($e^B = 1:12,230$), $a^K = 6378245$ м, $\alpha^K = 1:298,3$ ($e^K = 1:12,213$), а также исходные геодези-

ческие даты (центр Круглого зала Пулковской обсерватории) [52]:

$$B_0^B = 59^\circ 46' 18,71'', \quad L_0^B = 30^\circ 19' 38,55'', \quad h_0^B = 0,$$

$$B_0^K = 59^\circ 46' 18,55'', \quad L_0^K = 30^\circ 19' 42,09'', \quad h_0^K = 0$$

и, следовательно,

$$\delta\alpha = +847,8; \quad \delta\alpha = 0,000009525 (\delta e = 0,00012),$$

$$\delta B = -0,16''; \quad \delta L_0 = +3,54''; \quad \delta h_0 = 0.$$

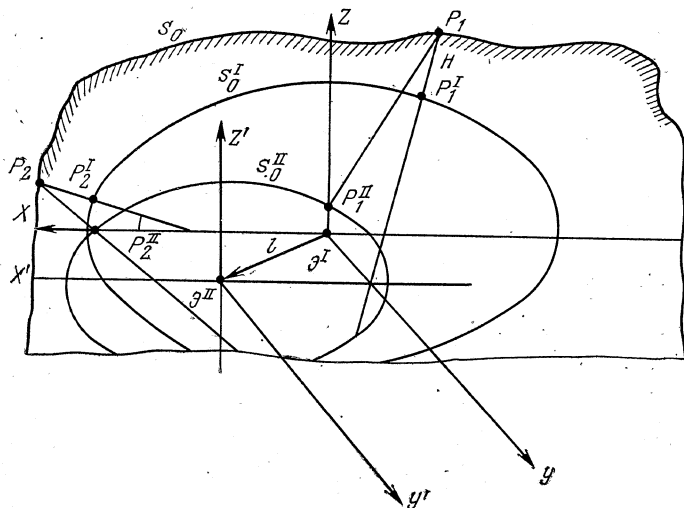


Рис. 9

Вычисленные по формулам (VII.107) координаты центра эллипсоида Красовского относительно эллипсоида Бесселя имеют значения: $m = -363,99 \text{ м} \approx 364 \text{ м}$; $p = -276,77 \text{ м} \approx 277 \text{ м}$; $q = -664,22 \text{ м} \approx 664 \text{ м}$. Центр эллипсоида Красовского смещен относительно центра эллипсоида Бесселя на величину $|l| = \sqrt{m^2 + p^2 + q^2} \approx 806 \text{ м}$. Направляющие косинуса смещения определяются отношениями $\frac{m}{l}$, $\frac{p}{l}$, $\frac{q}{l}$.

Величины m , p , q , полученные предлагаемым способом, будут иметь более или менее значительные

ошибки, так как элементы ориентировки земного эллипсоида в исходном пункте каждой отдельной системы градусных измерений не соответствуют его окончательно принятым размерам, установленным на основании всех систем градусных измерений [45], [52]. Кроме того, не может быть определена высота геоида в исходных пунктах градусных измерений вследствие обработки их по методу развертывания. Влияние этих двух факторов снижает точность вычислений m , p , q и, следовательно, точность решения обратной геодезической задачи при значительных расстояниях, когда точки отнесены к различным эллипсоидам. Из-за недостатка данных мы не можем подсчитать влияние указанных факторов. Однако можно отметить, что они, во-первых, ставят предел точности решения обратной геодезической задачи в рассматриваемом случае и, во-вторых, ясно показывают на рациональность выбора для наших целей формул Слудского, а не других, более точных.

Здесь не приведено полное решение вопроса о точности перенесения точки с поверхности одного эллипсоида на другой, но, несмотря на это, отметим, что в формулах Слудского опущены члены со сжатием $\alpha = \frac{e^2}{2}$ и более малые. Можно считать, хотя и не совсем строго, что точность вычисления поправок δB и δL указанным способом оказывается порядка сжатия, т. е. $\approx \frac{1}{300}$.

Второй случай — когда связь между эллипсоидами отсутствует.

Рассмотрим снова эллипсоид \mathcal{E}^I (см. рис. 9), размеры которого и положение в теле Земли установлены вполне определенно (координаты точки P_0 по отношению к эллипсоиду \mathcal{E}^I приняты равными B_0 , L_0 , H_0).

Рассмотрим теперь второй эллипсоид \mathcal{E}^{II} с определенными размерами и известным положением по отношению к эллипсоиду \mathcal{E}^I , определяемым вектором смещения \vec{l} и, следовательно, с известным положением в теле Земли. В этом случае координаты любой точки на поверхности Земли, данные в системе эллипсоида \mathcal{E}^{II} — например, координаты точки P_2^{II} (B_2^{II} , L_2^{II} , H_2^{II}), — можно перевычислить с любой

степенью точности в систему эллипсоида \mathcal{E}^I , т. е. можно получить координаты точки $P_2^{II}(B_2^I, L_2^I, H_2^I)$ на эллипсоиде \mathcal{E}^I .

Расстояние s_0^I , полученное из решения обратной задачи на эллипсоиде \mathcal{E}^I между пунктами P_1 и P_2 , будет в общем случае отличным от расстояния s_0^{II} , полученного из решения задачи между теми же пунктами на эллипсоиде \mathcal{E}^{II} . Но от расстояний s_0^I и s_0^{II} можно однозначно перейти к единому расстоянию s_0 на поверхности Земли по формулам [45]

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= \int_0^{s_0^{II}} \frac{R^{II} + H^{II}}{R^{II} \cos \xi^{II}} ds_0^{II} - \\ &- \int_{\xi_1^{II}}^{\xi_2^{II}} \frac{(R^{II} + H^{II})(H^{II} - h^{II})}{(R^{II} + h^{II})} d\xi^{II}, \\ s_0 &= \int_0^{s_0^I} \frac{R^I + H^I}{R^I \cos \xi^I} ds_0^I - \\ &- \int_{\xi_1^I}^{\xi_2^I} \frac{(R^I + H^I)(H^I - h^I)}{(R^I + h^I)} d\xi^I. \end{aligned} \right\} \quad (VII.108)$$

Итак, если неизвестна ориентировка двух референц-эллипсоидов по отношению к общему земному эллипсоиду, но известна взаимная ориентировка их относительно друг друга и их положение в теле Земли, то обратная задача может быть решена совершенно строго и точно на одном из данных эллипсоидов.

Если же взаимная ориентировка двух эллипсоидов неизвестна, то задача может быть решена только приближенно. В этом случае искомые величины (расстояния и азимуты) будут искажены только ошибками координат пункта P_2 , вызванными различием размеров, форм и ориентировок двух референц-эллипсоидов, которое нельзя учесть.

Если обратная задача решается на одном из двух данных эллипсоидов, не имеющих связи, то максимальные (для данных возможных элементов взаимной ориентировки) ошибки в азимутах и расстояниях выражаются формулами [64]

$$(\delta A_1)_{\max} = \frac{(a\delta B_2)_{\max}}{a \sin \frac{s}{a}}, \quad (VII.109)$$

$$(\delta s)_{\max} = (a\delta B_2)_{\max}. \quad (VII.110)$$

Величина $(a\delta B_2)_{\max}$, входящая в формулы (VII.109) и (VII.110), определяется из уравнения

$$\begin{aligned} (a\delta B_2)_{\max} &= m \sin B_2^{\delta B_{\max}} \cos L_2^{\delta B_{\max}} + \\ &+ p \sin B_2^{\delta B_{\max}} \sin L_2^{\delta B_{\max}} - q \cos B_2^{\delta B_{\max}} + a\delta\alpha \sin 2B_2^{\delta B_{\max}}, \end{aligned} \quad (VII.111)$$

Координаты $B_2^{\delta B_{\max}}$ и $L_2^{\delta B_{\max}}$, при которых $a\delta B_2$ максимально, определяется из уравнений

$$\begin{aligned} L_2^{\delta B_{\max}} &= \arctg \frac{p}{m}, \\ (m \cos L_2^{\delta B_{\max}} + p \sin L_2^{\delta B_{\max}}) \cos B_2^{\delta B_{\max}} + \\ &+ a\delta\alpha 2 \cos 2B_2^{\delta B_{\max}} + q \sin B_2^{\delta B_{\max}} = 0. \end{aligned} \quad (VII.112)$$

Подсчеты показывают, что максимальные ошибки в расстояниях не превосходят 1000—1200 м, в азимутах — 60—80" при $s=5000$ км, 30—40" при $s=10000$ км, 15—20" при $s=15000$ км.

Таким образом, в каждом конкретном случае практики можно ответить на вопрос — на какой поверхности (сфере или одном из референц-эллипсоидов и конкретно каком) следует решать обратную задачу при заданной точности определения расстояния и азимутов.

Как известно, с каждым национальным каталогом геодезических пунктов связана своя система координат, обусловленная принятыми параметрами референц-эллипсоида и ориентировкой последнего в теле Земли. В табл. 5 приведены разности расстояний Δs и азимутов ΔA , составленные относительно длины геодезичес-

Таблица 5

Эллипсоид	Длина геодезической линии, м	Азимут		Δs	ΔA_{12}	ΔA_{21}
		прямой A_{12}	обратный A_{21}			
Красовского Кларка (1880 г.) Бесселя Хейфорда Эйри	14 112 407,74	96°36'08,6"	317°52'19,5"	997998,7	-11,5"	-5,1"
	15 110 406,40	96°35'57,1"	317°52'14,4"	997054,0	+1,9"	+0,9"
	15 109 461,68	96°36'10,5"	317°52'20,4"	998999,9	-3,1"	-1,4"
	15 111 407,59	96°36'05,5"	317°52'18,1"	997424,4	+2,3"	+1,0"
15 109 832,07	96°36'10,9"	317°52'20,5"				

кой линии и азимутов, вычисленных на поверхности эллипсоида Красовского.

В заключение отметим, что в теории геодезических задач принято различать две части решения: главную — сферическую и эллипсоидальную поправку. Применительно к решению обратных геодезических задач между пунктами изолированных геодезических сетей в решении должна быть учтена еще одна поправка — за разнесистемность координат. Очевидно, последняя поправка может быть введена в координаты пунктов или в конечные результаты решения — в расстояния и азимуты. Параллельное применение обоих указанных способов доставит наиболее надежный контроль решения задачи.

Глава VIII

РЕШЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЗАСЕЧЕК НА ЭЛЛИПСОИДЕ ВРАЩЕНИЯ

Создание и совершенствование радиотехнических средств обеспечили возможность широкого применения разного рода геодезических засечек на шаре и эллипсоиде для определения координат, различных объектов на суше, на море и в околоземном пространстве.

Большая часть работ,

выполненных за последние годы, посвящена гиперболическим засечкам (задача «фазового зонда»). В работе В. П. Морозова [55] получены оригинальные формулы для двух возможных вариантов гиперболической засечки на шаре: с совмещенными базами (три фокуса) и с разнесенными базами (четыре фокуса). Для перехода от измеренных разностей расстояний на эллипсоиде к сферическим разностям используется линейная редукция, соответствующая сферическому изображению эллипсоида на шаре. В. А. Полевой [57] и другие ученые [55] при вычислении гиперболической засечки на эллипсоиде используют метод дифференциальных поправок.

Принципиальное различие решения гиперболической засечки на эллипсоиде способом Морозова и способом дифференциальных поправок состоит в следующем. В первом способе итерациями находят (по формулам гиперболической засечки на шаре) сферическое расстояние от фокуса до определяемого пункта, изменяя в каждой итерации измеренную разность расстояний редукционной поправкой. Полученные в последней итерации азимуты и сферическое расстояние используются для вычисления на шаре широты и долготы определяемого пункта. Эти координаты будут точно равны геодезическим координатам в соответствии с условиями сферического изображения эллипсоида на шаре. Во втором способе итерациями находят непосредственно геодезические координаты определяемого пункта, изменяя в каждой итерации длины геодезических линий, которые вычисляются по точным формулам решения обратной геодезической задачи на эллипсоиде. Разности длин геодезических линий, измеренных и вычисленных, являются основными аргументами в дифференциальных формулах для вычисления поправок в геодезические координаты определяемого пункта.

Анализ задачи преобразования гиперболических координат в геодезические показывает возможность создания двух классов алгоритмов, отличающихся друг от друга структурно-логическими схемами построения. Естественно, что в каждом классе алгоритмов отдельные их операторы, выполняющие одни и те же функции, могут быть реализованы различными методами, являющимися функциями требуемой точности преобразова-

ния координат, применимости к определенной группе ГРНС и т. д.

К первому классу алгоритмов относятся так называемые прямые алгоритмы, характеризуемые последовательным, неитеративным, прямым методом преобразования координат. Данный класс алгоритмов состоит из двух основных арифметических операторов, выполняющих последовательный перевод гиперболических координат ψ_1 и ψ_2 в полярные s и A и полярных — в геодезические B и L . Логическую схему этого класса алгоритмов можно описать следующим образом: $P_1 B_2 P_3 A_4 P_5 A_6 B_7$, где P_1 — логический оператор, выполняющий функцию определения типа ГРНС, от которой осуществляется прием гиперболических координат, B_2, B_7 — операторы ввода и вывода информации; A_4, A_6 — арифметические операторы, соответственно выполняющие преобразование гиперболических координат в полярные и полярных в геодезические; P_3 — логический оператор, выполняющий определение области работы ГРНС, в которой находится объект; P_5 — логический оператор, определяющий способ расположения радионавигационных станций.

Ко второму классу относятся так называемые обратные, итеративные алгоритмы, в основу которых положены решения обратной геодезической задачи и системы двух нелинейных уравнений типа

$$\left. \begin{aligned} F_1(B, L) = \psi_1 - f_1(B, L) = 0, \\ F_2(B, L) = \psi_2 - f_2(B, L) = 0, \end{aligned} \right\} (a)$$

где ψ_1, ψ_2 — гиперболические координаты объекта, B, L — геодезические координаты объекта.

Характерной особенностью данного класса алгоритмов является решение итеративным методом системы уравнений (а), что требует введения начального приближения (так называемых счислимых координат). Логическая схема алгоритма этого класса состоит из следующих операторов: $P_1 B_2 Z_3 A_4 A_5 P_6 B_7$, где P_1 — логический оператор, выполняющий функцию определения типа ГРНС; B_2, B_7 — операторы ввода и вывода информации; Z_3 — оператор засылки начального приближения (счислимых координат); A_4 — арифметический опе-

ратор, решающий обратную геодезическую задачу; A_5 — арифметический оператор, решающий систему нелинейных уравнений; P_6 — логический оператор, проверяющий условие окончания итеративного процесса.

§ 37. Построение прямого алгоритма преобразования гиперболических координат в геодезические

Прямой алгоритм, как известно, содержит последовательное преобразование гиперболических координат в полярные и полярных координат в геодезические. Оператор, осуществляющий перевод гиперболических координат в полярные, основывается на решении системы уравнений сферических гипербол. При этом часть поверхности эллипсоида, на которой располагаются гиперболические радионавигационные системы (ГРНС) и ее рабочая зона, заменяется сферической поверхностью с радиусом, равным среднему радиусу кривизны данного участка эллипсоида. Ниже будут исследованы возможности применения данного типа алгоритмов в зависимости от дальности действия ГРНС и требуемой точности определения местоположения, а также исследованы численные методы, позволяющие оптимально решать поставленную задачу в смысле сокращения объема памяти ЦВМ, времени решения, учета тактических особенностей ГРНС и удобства эксплуатации в реальных условиях, построен прямой алгоритм преобразования координат.

Прежде чем составить систему уравнений сферических гипербол, необходимо рассмотреть геометрический принцип работы ГРНС (рис. 10). Так как в общем случае пара гипербол Ψ_1 и Ψ_2 может иметь две точки пересечения, возникает неоднозначность решения задачи преобразования координат.

Разобьем таким образом рабочую зону ГРНС, чтобы в каждой части зоны задача решалась однозначно. Такой разбивке соответствуют две области ω_1 и ω_2 , что вытекает из самого определения гиперболических координат. Условимся в дальнейшем называть область ω_1 область, ограниченную базовым углом $\beta_1 > 180^\circ$, а область ω_2 — область, ограниченную углом $\beta_2 < 180^\circ$. Тогда область ω_1 содержит прямой лепесток и два бо-

ковых лепестка рабочей зоны ГРНС, а область ω_{II} — обратный лепесток.

Местными полярными координатами назовем координаты, определяющие положение объекта относительно радионавигационных станций. За начало этих координат примем точку, в которой находится ведущая радионавигационная станция; полярный угол α будем отсчитывать от продолжения второй базовой линии; вторая полярная координата s — геодезическая линия

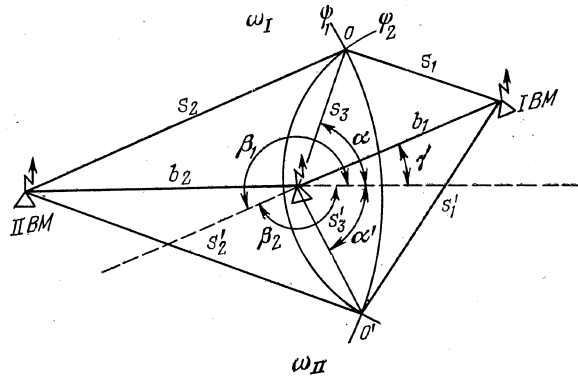


Рис. 10

между ведущей станцией и объектом. Условимся первой ведомой станцией называть станцию, находящуюся от ведущей справа, если смотреть на область ω_I со стороны ведущей станции. Эти определения справедливы при наличии в ГРНС одной ведущей станции; для ГРНС, имеющих две несовмещенные ведущие станции, данные определения необходимо дополнить.

Предположим, что имеем гиперболические координаты Ψ_1 и Ψ_2 , а также поправки к ним $\Delta\Psi_1$ и $\Delta\Psi_2$, связанные с распространением радиоволн. Причем Ψ_1 и Ψ_2 могут выдаваться приемоиндикатором ГРНС в размерностях времен (например, целых и долей микросекунд) или в фазовых циклах, поэтому их необходимо для дальнейших вычислений привести к линейному эквиваленту по формуле

$$a_i = (\Psi_i + \Delta\Psi_i)c - b_i \quad (i = 1, 2), \quad (VIII.1)$$

где c — скорость распространения радиоволн (если Ψ_1

и Ψ_2 даны в микросекундах) или длина волн (если Ψ_1 и Ψ_2 даны в фазовых циклах); b_i — длины базовых линий в метрах.

Предположим, что эти гиперболы имеют две точки пересечения (см. рис. 10). Составим системы уравнений сферических гипербол для двух пересечений.

Для области ω_I :

$$\left. \begin{aligned} \cos s_1 &= \cos s_3 \cos b_1 + \sin s_3 \sin b_1 \cos(\alpha - \gamma), \\ \cos s_2 &= \cos s_3 \cos b_2 - \sin s_3 \sin b_2 \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (VIII.2)$$

и области ω_{II} :

$$\left. \begin{aligned} \cos s'_1 &= \cos s'_3 \cos b_1 + \sin s'_3 \sin b_1 \cos(\alpha' + \gamma), \\ \cos s'_2 &= \cos s'_3 \cos b_2 - \sin s'_3 \sin b_2 \cos \alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (VIII.3)$$

Используя зависимость

$$s_i = s_3 + a_i \quad (i = 1, 2) \quad (VIII.4)$$

и подставляя в системы (VIII.2) и (VIII.3) $s'_3 + a_1$ и $s'_3 + a_2$ после преобразований получаем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} s_3 &= \frac{2 \sin \frac{b_1 + a_1}{2} \sin \frac{b_1 - a_1}{2}}{\sin a_1 + \sin b_1 \cos(\alpha - \gamma)}, \\ \operatorname{tg} s_3 &= \frac{2 \sin \frac{b_2 + a_2}{2} \sin \frac{b_2 - a_2}{2}}{\sin a_2 - \sin b_2 \cos \alpha}; \end{aligned} \right\} \quad (VIII.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} s'_3 &= \frac{2 \sin \frac{b_1 + a_1}{2} \sin \frac{b_1 - a_1}{2}}{\sin a_1 + \sin b_1 \cos(\alpha' + \gamma)}, \\ \operatorname{tg} s'_3 &= \frac{2 \sin \frac{b_2 + a_2}{2} \sin \frac{b_2 - a_2}{2}}{\sin a_2 - \sin b_2 \cos \alpha'}; \end{aligned} \right\} \quad (VIII.6)$$

где b_1, b_2 — длины базовых линий; a_1, a_2 — гиперболические координаты; $s_3, s'_3, \alpha, \alpha'$ — искомые полярные координаты; $\gamma = 180^\circ - \beta_2$.

Приравняем соответственно правые части уравнений в системах (VIII.5) и (VIII.6) и после преобразования получим уравнения относительно искомых углов α и α' :

$$k_1 + k_2 \cos(\alpha - \gamma) + k_3 \cos \alpha = 0, \quad (\text{VIII.7})$$

$$k_1 + k_2 \cos(\alpha' + \gamma) + k_3 \cos \alpha' = 0, \quad (\text{VIII.8})$$

где

$$k_1 = \sin \frac{b_2 - a_2}{2} \sin \frac{b_2 - a_2}{2} \sin a_1 - \sin \frac{b_1 + a_1}{2} \sin \frac{b_1 - a_1}{2} \sin a_2,$$

$$k_2 = \sin \frac{b_2 + a_2}{2} \sin \frac{b_2 - a_2}{2} \sin b_1,$$

$$k_3 = \sin \frac{b_1 + a_1}{2} \sin \frac{b_1 - a_1}{2} \sin b_2.$$

Укажем два других способа решения уравнений (VIII.7), (VIII.8), основанных на методах численного анализа. Первым способом является метод половинного деления, при котором искомый угол будет определяться по формуле

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \text{sign } \zeta_{i+1} \alpha_0 2^{-(i+1)}, \quad (\text{VIII.9})$$

где $\text{sign } \zeta_{i+1}$ — знак невязки уравнения (VIII.9) при подстановке текущего значения угла; α_0 — начальное значение угла: $\alpha_0 = \frac{\beta_1}{2}$ для области ω_1 ; $\alpha_0 = \frac{\beta_2}{2}$ для области ω_2 ; $i = 0, 1, \dots, n$.

Окончание вычислений может проверяться или по разнице между предыдущим и последующим значениями вычисленного угла, или по величине невязки. Последний способ в среднем уменьшает число итераций.

Если необходимо получить ошибку метода в вычислениях угла, не превышающую $0,1''$, что вполне удовлетворяет нашим точностным требованиям, то максимальное число итераций можно рассчитать таким образом: пусть $|\alpha_i - \alpha_{i+1}| \leq 0,1''$, тогда при $\alpha_0 \leq 120'' = 432\,000''$ необходимо $n \leq 23$.

Несмотря на незначительное увеличение времени решения метод половинного деления более выгоден в данном случае для реализации в СБЦВМ, что объясняется простотой построения программы, однообразием вычислений, наличием лишь подпрограммы \cos , отсутствием операции деления, автоматическим получением искомого угла в нужном квадранте.

Вторым численным методом является метод Ньютона, по которому угол α определяется:

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad (\text{VIII.10})$$

где

$$\left. \begin{aligned} f(\alpha) &= k_1 + k_2 \cos(\alpha \mp \gamma) + k_3 \cos \alpha, \\ f'(\alpha) &= k_2 \sin(\alpha \mp \gamma) - k_3 \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.11})$$

За начальное приближение принимаются те же величины, что и в методе половинного деления.

После определения угла α вторая полярная координата определяется из системы формул:

$$\text{tg } s_3' = \frac{2 \sin \frac{b_1 + a_1}{2} \sin \frac{b_1 - a_1}{2}}{\sin a_1 + \sin b_1 \cos(\alpha \mp \gamma)},$$

$$\text{tg } s_3'' = \frac{2 \sin \frac{b_2 + a_2}{2} \sin \frac{b_2 - a_2}{2}}{\sin a_2 - \sin b_2 \cos \alpha},$$

$$y = \frac{\text{tg } s_3' + \text{tg } s_3''}{2},$$

$$s_{3,\text{ср}} = (((-0,14285714y^2 + 0,2)y^2 - 0,33333333)y^2 + 1)y,$$

где для повышения точности расстояние s_3 определяют из двух сферических треугольников (см. рис. 10) и берут их среднее значение. Результаты расчетов показывают, что максимальная ошибка при расстояниях до 800 км не превышает 3 м, до 2000 км — 30 м. Это вполне удовлетворяет требованиям, предъявляемым к преобразованию координат для современных ГРНС ближнего и среднего радиусов действия.

Прежде чем определить по углу α (или α') азимут с ведущей станции на объект, необходимо сделать следующее замечание. В практике размещения радионавигационных станций используют правило, при котором первую ведомую станцию размещают справа от ведущей, если смотреть на обслуживаемую акваторию, стоя спиной к ведущей станции. Поэтому для того, чтобы однозначно определить азимут, в алгоритм решения необходимо ввести признак P размещения станций. Тогда, если фактическое размещение станций совпадает с размещением по правилу, указанному на с. 236 данного параграфа, то признак P принимается равным $+1$, при несов-

падении — равным — 1. Учитывая данное замечание, значение азимута A_0 вычисляются по формулам:

$$A_0 = A_{II} - 180^\circ - \alpha \text{ область } \omega_I A_{II} \geq 90^\circ \quad P = +1,$$

$$A_0 = A_{II} - 180^\circ + \alpha' \text{ область } \omega_{II} A_{II} \geq 90^\circ$$

$$A_0 = A_{II} + 180^\circ - \alpha \text{ область } \omega_I A_{II} \leq 90^\circ \quad P = +1,$$

$$A_0 = A_{II} + 180^\circ + \alpha' \text{ область } \omega_{II} \leq 90^\circ$$

$$A_0 = A_{II} - 180^\circ + \alpha \text{ область } \omega_I \quad P = -1.$$

$$A_0 = A_{II} - 180^\circ - \alpha' \text{ область } \omega_{II}$$

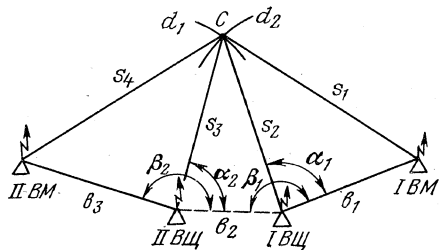


Рис. 11

Рассмотрим решение задачи преобразования координат в полярные при таком расположении радионавигационных станций, когда имеется две несовмещенные ведущие станции (рис. 11). Пусть нам известны длины базовых линий b_1, b_2, b_3 , азимуты с ведущих станций на свои ведомые A_I, A_{II} и соответственно базовые углы β_1, β_2 и, наконец, гиперболические координаты объекта a_1, a_2 . Обозначим неизвестные расстояния от станций до объекта соответственно s_1, s_2, s_3, s_4 , угол между расстоянием s_2 и базовой линией $b_1 - \alpha_1$; угол между расстоянием s_3 и базовой линией $b_2 - \alpha_2$. Рассмотрим две пары сферических треугольников (см. рис. 11). По формулам косинуса стороны запишем для каждого треугольника:

$$\left. \begin{aligned} \cos s_1 &= \cos s_2 \cos b_1 + \sin s_2 \sin b_1 \cos \alpha_1, \\ \cos s_3 &= \cos s_2 \cos b_2 + \sin s_2 \sin b_2 \cos (\beta_1 - \alpha_1), \\ \cos s_2 &= \cos s_3 \cos b_2 + \sin s_3 \sin b_2 \cos \alpha_2, \\ \cos s_4 &= \cos s_3 \cos b_3 + \sin s_3 \sin b_3 \cos (\beta_2 - \alpha_2). \end{aligned} \right\} \text{(VIII.12)}$$

Как и в формулах (VIII.2) и (VIII.3), заменим s_1 и s_4 на $s_2 + a_1$ и $s_3 + a_2$. Тогда систему (VIII.12) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \cos (s_2 + a_1) &= \cos s_2 \cos b_1 + \sin b_2 \sin b_1 \cos \alpha_1, \\ \cos s_3 &= \cos s_2 \cos b_2 + \sin s_2 \sin b_2 \cos (\beta_1 - \alpha_1), \\ \cos s_2 &= \cos s_3 \cos b_2 + \sin s_3 \sin b_2 \cos \alpha_2, \\ \cos (s_3 + a_2) &= \cos s_3 \cos b_3 + \\ &+ \sin s_3 \sin b_3 \cos (\beta_2 - \alpha_2). \end{aligned} \right\} \text{(VIII.13)}$$

После исключения α_1, α_2, s_3 получим уравнение относительно s_2

$$F(s_2) = k_3 (\cos a_2 - \cos b_3) - k_4 \sin b_3 (k_5 \cos \beta_2 - k_6 \sin \beta_2), \quad \text{(VIII.14)}$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\cos (s_2 + a_1) - \cos s_2 \cos b_1}{\sin b_2 \sin b_1}, \quad k_2 = \sqrt{1 - k_1^2}, \\ k_3 &= \cos s_2 \cos b_2 + \sin b_2 \sin s_2 (\cos \beta_1 k_1 + \sin \beta_1 k_2), \\ k_4 &= \sqrt{1 - k_3^2}, \quad k_5 = \frac{\cos s_2 - \cos b_2 k_3}{k_4 \sin b_2}, \quad k_6 = \sqrt{1 - k_5^2}. \end{aligned}$$

Из уравнения (VIII.14) методом половинного деления найдем искомое расстояние

$$s_{2(i+1)} = s_{2i} + \text{sign } \xi_{i+1} s_0 2^{-(i+1)}, \quad \text{(VIII.15)}$$

где s_0 — половина максимальной дальности для данной ГРНС. После вычисления расстояния s_2 угол α_1 определится из формулы (VIII.13). Азимут с ведущей станции A_0 на объект вычисляется по формуле

$$A_0 = A_I - \alpha_1. \quad \text{(VIII.16)}$$

Оператор A_6 решает прямую геодезическую задачу с помощью метода Рунге — Кутты — Ингланда (см. § 35).

Для систем ближнего радиуса действия шаг интегрирования можно брать равным расстоянию s_3 , вычисленному в операторе A_4 ; для систем среднего радиуса действия шаг интегрирования можно брать равным $1/3$ вычисленного расстояния.

§ 38. Обратный алгоритм преобразования гиперболических координат в геодезические

Наличие геодезической задачи в обратном типе алгоритмов позволяет производить преобразование координат на поверхности эллипсоида для любых ГРНС практически при любых расстояниях от объекта до радионавигационных станций, и ошибка формул алгоритма зависит от способа решения обратной геодезической задачи. Другим преимуществом этого типа алгоритмов является то обстоятельство, что число ведущих станций (одна или две) практически не влияет на построение алгоритмов в отличие от прямых алгоритмов.

В § 32 было показано, что оптимальным способом решения обратной геодезической задачи на любые расстояния (до 20 тыс. км) является способ с разложением подынтегрального выражения эллиптического интеграла II рода в цепные дроби. Поэтому этот способ и используется как основа разработанного в данной работе алгоритма преобразования гиперболических координат в геодезические. В каждом цикле вычисления приращений к счислимым координатам оператор A_4 решает обратную геодезическую задачу (ОГЗ) столько раз, сколько имеется в ГРНС станций, а число обращений к подпрограммам ОГЗ задается оператором B_2 .

Важным моментом данного типа алгоритмов является определение начального приближения (счислимых координат). При выборе начального приближения необходимо учитывать неоднозначность гиперболических ГРНС. Так, при неудачном выборе счислимых координат итеративный процесс вычисления геодезических координат может привести к «зеркальной» точке. В одной из работ [20] показано, что общих законов для выбора счислимых координат нет и выбор должен осуществляться в зависимости от конкретного расположения ГРНС и положений судна относительно станций. Экспериментальным путем (моделированием на ЦВМ различных расположений ГРНС и судна) было определено, что при нахождении судна в рабочей зоне ГРНС, ограниченной углами пересечений гипербол $30^\circ \leq \gamma \leq 150^\circ$, можно выбирать начальное приближение, дающее устойчивую сходимость итеративного процесса, в радиусе не менее 55,6 км от обсервованной точки. Такой радиус практи-

чески всегда известен, по данным других навигационных средств (например инерциальных). В последующих обсервациях за счислимые координаты принимаются предыдущие обсервованные геодезические координаты.

Обсервованные геодезические координаты определяются по данному алгоритму итеративным путем. Пусть $B_{сч}$, $L_{сч}$ — приближенное решение системы (а). Положим

$$\left. \begin{aligned} B &= B_{сч} + \Delta B, \\ L &= L_{сч} + \Delta L. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.17})$$

Подставляя в систему (а) равенства (VIII.17), получим

$$\left. \begin{aligned} F_1(B_{сч} + \Delta B, L_{сч} + \Delta L) &= 0, \\ F_2(B_{сч} + \Delta B, L_{сч} + \Delta L) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.18})$$

Применяя формулу Тейлора и ограничиваясь линейными членами относительно ΔB и ΔL , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} F_1(B_{сч}, L_{сч}) + \Delta B F_{1B}^1(B_{сч}, L_{сч}) + \\ + \Delta L F_{1L}^1(B_{сч}, L_{сч}) &= 0, \\ F_2(B_{сч}, L_{сч}) + \Delta B F_{2B}^1(B_{сч}, L_{сч}) + \\ + \Delta L F_{2L}^1(B_{сч}, L_{сч}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.19})$$

Отсюда

$$B = - \frac{1}{(B_{сч}, L_{сч})} \times \left| \begin{array}{l} F_1(B_{сч}, L_{сч}) F'_{1L}(B_{сч}, L_{сч}) \\ F_2(B_{сч}, L_{сч}) F'_{2L}(B_{сч}, L_{сч}) \end{array} \right|, \quad (\text{VIII.20})$$

$$\Delta L = - \frac{1}{(B_{сч}, L_{сч})} \times \left| \begin{array}{l} F_{1B}^1(B_{сч}, L_{сч}) F_1(B_{сч}, L_{сч}) \\ F'_{2B}(B_{сч}, L_{сч}) F_2(B_{сч}, L_{сч}) \end{array} \right| \quad (\text{VIII.21})$$

и окончательно

$$\left. \begin{aligned} B &= B_{сч} + \Delta B, \\ L &= L_{сч} + \Delta L. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.22})$$

Производные F'_{iB} , F'_{iL} определяются из известной дифференциальной зависимости между геодезическими

координатами двух точек поверхности эллипсоида и длиной геодезической линии, соединяющей эти точки. Для данного случая будем иметь

$$\left. \begin{aligned} F'_{iB} &= \frac{c}{V^3} (\cos A_{0-iEM} - \cos A_{0-iВЦ}), \\ F'_{iL} &= \frac{c}{V} (\sin A_{0-iBM} - \sin A_{0-iВЦ}), \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.23})$$

а функции $F_i(B, L)$ есть

$$F_i(B, L) = a_{iсч} - a_{iоб}, \quad (\text{VIII.24})$$

где c — полярный радиус эллипсоида; A_{0-iBM} — азимут со счислимой точки на i -ю ведомую станцию; $A_{0-iВЦ}$ — азимут со счислимой точки на i -ю ведущую станцию.

Обозначив

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{c}{V^3} (\cos A_{0-1BM} - \cos A_{0-1ВЦ}), \\ m_2 &= \frac{c}{V^3} (\cos A_{0-2BM} - \cos A_{0-2ВЦ}), \\ n_1 &= \frac{c}{V} (\sin A_{0-1BM} - \sin A_{0-1ВЦ}) \cos B_{сч}, \\ n_2 &= \frac{c}{V} (\sin A_{0-2BM} - \sin A_{0-2ВЦ}) \cos B_{сч}, \\ \delta a_1 = F_1 &= a_{1сч} - a_{1об}; \quad \delta a_2 = F_2 = a_{2сч} - \\ &- a_{2об}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.25})$$

и подставив их в систему (VIII.20) и (VIII.21), определим $\Delta B, \Delta L$:

$$\left. \begin{aligned} \Delta B &= \frac{n_2 \delta a_1 - n_1 \delta a_2}{m_1 n_2 - n_1 m_2}, \\ \Delta L &= \frac{m_1 \delta a_2 - m_2 \delta a_1}{m_1 n_2 - n_1 m_2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.26})$$

Окончание итеративного процесса проверяется в операторе P_6 условием

$$\left. \begin{aligned} |\delta a_1| &\leq \xi, \\ |\delta a_2| &\leq \xi, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.27})$$

где ξ — наперед заданная малая величина, которая определяется точностью ГРНС.

§ 39. Комбинированный алгоритм решения гиперболической засечки

Введение вручную в ЦВМ счислимых координат при разовых наблюдениях или при пересечении объектом базовых линий и их продолжений приводит к увеличению ручного труда оператора и времени решения задачи, а также возникает возможность получения ошибочного результата (в частности, «зеркальной» точки).

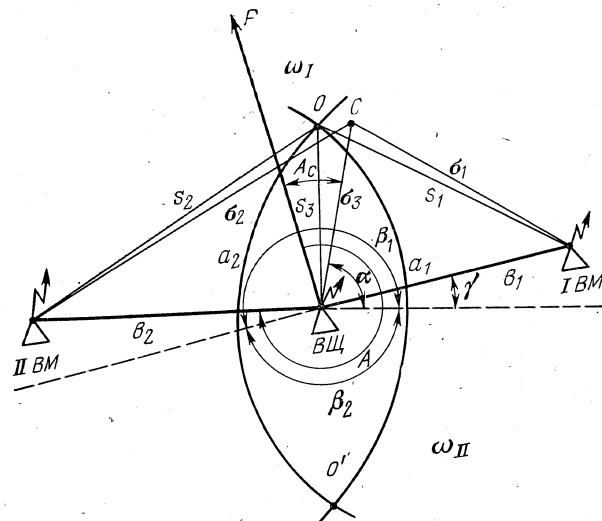


Рис. 12

В предлагаемом алгоритме расчет и введение счислимых координат производится на ЦВМ, что приводит к незначительному удлинению (порядка 15—20%) общей программы алгоритма.

Вследствие того, что в общем случае пара гипербол, образованная ГРНС, может иметь две точки пересечения, или, говоря другими словами, две пары геодезических координат, разобьем рабочую зону ГРНС на две области таким образом, чтобы в каждой из областей задача преобразования координат решалась однозначно (рис. 12). Условимся областью ω_I обозначать ту область рабочей зоны ГРНС, которая ограничена продолжения-

ми базовых линий и углом между ними $\beta \geq 180^\circ$, другую часть рабочей зоны обозначим ω_{II} .

Первой ведомой станцией будет станция, которая находится справа от ведущей станции, если стоять спиной к последней и лицом к области ω_I .

Для однозначного решения данной задачи оператору необходимо лишь первоначально задать ЦВМ номер области, в которой находится объект. Практически это осуществляется переключением ключа (тумблера) на ЦВМ в одно или другое положение и при этом ЦВМ автоматически выбирает номер области, производит расчет счислимых координат и решает конечную задачу. Счислимые координаты рассчитываем по формулам сферической тригонометрии, последовательно определяя счислимые полярные координаты σ_3 , а α объекта — по полученным с приемоиндикатора гиперболическим координатам; и затем решаем прямую геодезическую задачу на сфере. Сфера берется радиусом, равным среднему радиусу кривизны эллипсоида на широте ведущей станции.

За начало полярных координат принята ведущая станция и продолжение второй базовой линии. Первоначально определяем угол α между продолжением второй базовой линии и счислимым расстоянием σ_3 , решая уравнение [20],

$$k_1 = \cos(\alpha \mp \gamma) k_2 \cos \alpha + k_3 = 0, \quad (\text{VIII.28})$$

где

$$k_1 = \sin b_1 \sin \frac{b_2 + a_2}{2} \sin \frac{b_2 - a_2}{2},$$

$$k_2 = \sin b_2 \sin \frac{b_1 + a_1}{2} \sin \frac{b_1 - a_1}{2},$$

$$k_3 = \sin a_1 \sin \frac{b_2 + a_2}{2} \sin \frac{b_2 - a_2}{2} -$$

$$- \sin a_2 \sin \frac{b_1 + a_1}{2} \sin \frac{b_1 - a_1}{2},$$

b_1, b_2 — длины базовых линий; a_1, a_2 — гиперболические координаты; $\gamma = 180^\circ - \beta_2$.

Данное уравнение решаем методом половинного деле-

ния, т. е. искомый угол α определяем из серии итераций

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \text{sign } \delta_{i+1} \alpha_i 2^{-(i+1)},$$

где

$$\alpha_0 = \begin{cases} \frac{\beta_I}{2} & \text{для области } \omega_I, \\ \frac{\beta_{II}}{2} & \text{для области } \omega_{II}. \end{cases}$$

Знак минус в уравнении (VIII.28) берется для области ω_I ; а плюс — для области ω_{II} ; δ_{i+1} — невязка $(i+1)$ -й итерации; $i=0, 1, 2, 3 \dots$.

Преимуществом данного метода решения уравнения (VIII.28) является то, что в отличие от классических методов решения таких типов уравнений не требуется решения квадратных уравнений с последующим вычислением обратных тригонометрических функций и приведением их в нужный квадрант. Счислимое расстояние σ_3 вычисляется по формуле

$$\sigma_3 = \arccos \left(\frac{k_4}{\sqrt{k_4^2 + k_5^2}} \right), \quad (\text{VIII.29})$$

где

$$k_4 = \sin a_2 - \sin b_2 \cos \alpha,$$

$$k_5 = 2 \sin \frac{b_2 + a_2}{2} \sin \frac{b_2 - a_2}{2}.$$

Определение азимута с ведущей станции на счислимую точку проводится по формуле

$$A_c = A \mp 180^\circ,$$

где знак минус соответствует области ω_I , а плюс соответствует области ω_{II} . A — азимут с ведущей станции на вторую ведомую. Счислимые геодезические координаты будут

$$B_c = \arcsin (\sin B_{\text{ВЩ}} \cos \sigma_3 + \cos B_{\text{ВЩ}} \sin \sigma_3 \cos A_c),$$

$$L_c = L_{\text{ВЩ}} + \arcsin \left(\frac{\sin \sigma_3 \sin A_c}{\cos B_c} \right)$$

где $B_{\text{ВЩ}}, L_{\text{ВЩ}}$ — координаты ведущей станции.

Подставляя вычисленные счислимые координаты и известные координаты трех станций в алгоритм обрат-

ной геодезической задачи, вычисляем три расстояния s_1, s_2, s_3 , по которым определяем счислимые гиперболические координаты

$$a_{c_1} = s_1 - s_3,$$

$$a_{c_2} = s_2 - s_3.$$

Затем вычисляем поправки к счислимым геодезическим координатам

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_{c_i} &= \frac{c_1 m_2 - m_1 c_2}{(r_1 m_2 - r_2 m_1) M_c}, \\ \Delta L_{c_i} &= \frac{c_2 r_1 - c_1 r_2}{N_c (r_1 m_2 - r_2 m_1) \cos B_{c_i}}, \end{aligned} \right\}, \quad (\text{VIII.30})$$

где

$$r_1 = \cos A_1 - \cos A_3,$$

$$r_2 = \cos A_2 - \cos A_3,$$

$$m_1 = \sin A_1 - \sin A_3,$$

$$m_2 = \sin A_2 - \sin A_3,$$

$$c_1 = a_{c_1} - a_1,$$

$$c_2 = a_{c_2} - a_2,$$

$$M_c = \frac{c}{V_c^3}, \quad N_c = \frac{c}{V_c}.$$

A_1, A_2, A_3 — азимуты со счислимой точки на передающие станции.

Новые счислимые геодезические координаты определяются соответственно

$$\left. \begin{aligned} B_{c_{i+1}} &= B_{c_i} + \Delta B_{c_i}, \\ L_{c_{i+1}} &= L_{c_i} + \Delta L_{c_i}. \end{aligned} \right\}$$

§ 40. Решение гиперболической засечки в прямоугольных сфероидических координатах p, q

Как указывалось в § 33, для решения геодезических задач (при расстояниях до 2000 км) можно использовать систему прямоугольных сфероидических координат благодаря относительно простоте решения.

Рассмотрим решение гиперболической засечки в прямоугольных сфероидических координатах p, q [23].

Воспользуемся известным приемом, т. е. будем вначале определять некоторые поправки $\Delta p, \Delta q$ к приближенным координатам p_c, q_c , а затем уже искомые координаты объекта.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= p_c + \Delta p, \\ q_0 &= q_c + \Delta q. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.31})$$

Для определения Δp и Δq рассмотрим влияние изменения координат конечной точки $A_2 (p_2, q_2)$ геодезической линии $A_1 A_2$ на ее длину s (рис. 13).

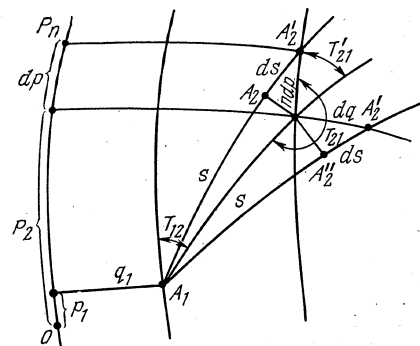


Рис. 13

Пусть координата p_2 изменилась на dp , тогда длина геодезической линии получит приращение

$$ds_{p_2} = -n \cos T_{21} dp. \quad (\text{VIII.32})$$

Соответственно при изменении координаты q_2 на dq_2 будем иметь

$$ds_{q_2} = -\sin T_{21} dq. \quad (\text{VIII.33})$$

Сложив уравнения (VIII.32) и (VIII.33), найдем

$$ds = ds_{p_2} + ds_{q_2} = -n \cos T_{21} dp - \sin T_{21} dq. \quad (\text{VIII.34})$$

Для точки O (рис. 14) мы имеем измеренные разности расстояний $a_{1изм} = s_1 - s_2$, $a_{2изм} = s_3 - s_1$, а для точки C — вычисленные разности расстояний $a_{1б} = s_{1б} - s_{2б}$; $a_{2б} = s_{3б} - s_{2б}$. Обозначим

$$\delta_1 = a_{1изм} - a_{1б},$$

$$\delta_2 = a_{2изм} - a_{2b}.$$

Тогда для определения приращений Δp и Δq при переходе от точки C к точке O , используя соотношение (VIII.34), можно записать систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} n\Delta p (\cos T_2 - \cos T_1) + \Delta q (\sin T_2 - \sin T_1) - \\ - \delta_1 = 0, \\ n\Delta p (\cos T_2 - \cos T_3) + \\ + \Delta q (\sin T_2 - \sin T_3) - \delta_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.35})$$

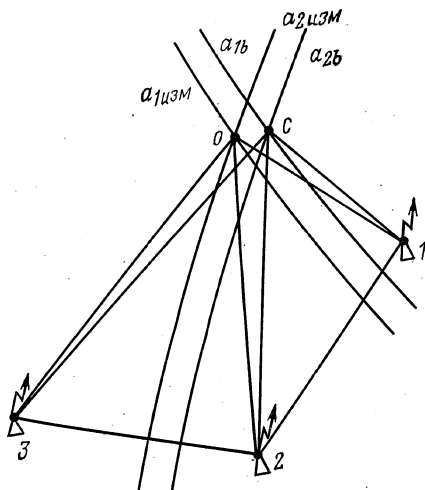


Рис. 14

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= n (\cos T_2 - \cos T_1), \\ f_2 &= n (\cos T_2 - \cos T_3), \\ h_1 &= \sin T_2 - \sin T_1, \\ h_2 &= \sin T_2 - \sin T_3, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.36})$$

где T_1, T_2, T_3 — дирекционные углы со счислимой точки на радионавигационные станции; n — коэффициент сближения ординат, вычисляемый в точке C ,

$$\begin{aligned} n &= 1 - \frac{V_0^2}{2N_0^2} q_c^2 + \\ &+ \frac{1}{4N_0^3} p_c q_c^2 e'^2 \sin 2B_0 + \frac{q_c^4}{24N_0^4}, \end{aligned} \quad (\text{VIII.37})$$

где B_0 — широта начала прямоугольных сферодических координат. С учетом (VIII.36) систему (VIII.35) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} f_1 \Delta p + h_1 \Delta q - \delta_1 = 0, \\ f_2 \Delta p + h_2 \Delta q - \delta_2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.38})$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \Delta p &= \frac{h_2 \delta_1 - h_1 \delta_2}{\Delta}, \\ \Delta q &= \frac{f_1 \delta_2 - f_2 \delta_1}{\Delta}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.39})$$

где

$$\Delta = f_1 h_2 - h_1 f_2.$$

Подставив вычисленные значения Δp и Δq в уравнение (VIII.31), получим

$$\left. \begin{aligned} p_{i+1} &= p_i + \Delta p_i, \\ q_{i+1} &= q_i + \Delta q_i, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.40})$$

где $i=1, 2, \dots$

Итеративный вычислительный процесс определения obserвованных координат заканчивается при условии

$$\left. \begin{aligned} |a_{1B_i} - a_{1изм}| &\leq \varepsilon, \\ |a_{2B_i} - a_{2изм}| &\leq \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.41})$$

где ε — заранее заданная малая величина.

Величины s_i и T_i получают из решения обратной геодезической задачи, для чего можно использовать систему формул Гельмерта [37],

$$s \cos T_{12} = \Delta p \left\{ 1 - \left(\frac{q_2^2}{2R^2} - \frac{\Delta q^2}{6R^2} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{q_2^4}{12R^4} - \frac{q_2^2 \Delta q^2}{12R^4} + \frac{7\Delta q^4}{360R^4} \right) - \\
& - \left(\frac{q_1 q_2}{2R^2} + \frac{2\Delta q^2}{15R^2} \frac{\Delta p^2}{3R^2} - \dots \right), \\
s \sin T_{12} = \Delta q + \frac{\Delta p^2}{R^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(q_1 + \frac{\Delta q}{3} \right) - \right. \\
& - \frac{1}{3} \left[\left(q_1 + 2\Delta q \right) \frac{q_1^2}{R^2} + \right. \\
& \left. \left. + \left(q_1 + \frac{2}{15} \Delta q \right) \frac{\Delta q^2}{R^2} \right] + \dots \right\}, \quad (\text{VIII.42})
\end{aligned}$$

где

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad q = \frac{q_1 + q_2}{2}, \quad R = \frac{c}{V^2},$$

$$\Delta p = p_2 - p_1, \quad \Delta q = q_2 - q_1,$$

c — полярный радиус кривизны эллипсоида.

Для проверки точности и области применения формул (VIII.31) — (VIII.42) было рассчитано на ЦВМ несколько полигонов в прямоугольной сфероидической системе координат с различным расположением радионавигационных станций. Моделирование показало, что методические ошибки данных формул удовлетворяют точностным требованиям, предъявляемым к определению местоположения по гиперболическим координатам радионавигационных систем ближнего и среднего радиусов действия типа БРАС, ДЕКА, ЛОРАН-С.

§ 41. Алгоритм преобразования гиперболических координат в координаты Гаусса — Крюгера

Алгоритмы преобразования гиперболических координат в координаты Гаусса — Крюгера можно строить по тем же логическим структурным схемам, что и алгоритмы преобразования гиперболических координат в геодезические, т. е. разрабатывать алгоритмы прямого типа или обратного. Но в данном случае возникает дополнительная задача. В СССР приняты две системы координатных зон: шестиградусная и трехградусная. По-

этому может возникнуть следующий случай, при котором станции ГРНС и объект судна будут находиться в разных координатных зонах. При этом необходимо решать дополнительную задачу по преобразованию координат из одной зоны в другую.

Известны два пути решения этой задачи. Первый путь заключается в том, что от прямоугольных координат переходят к геодезическим и по геодезическим координатам вычисляют прямоугольные координаты в системе второй зоны. Известен и другой путь, при котором по прямоугольным координатам в данной зоне непосредственно вычисляются прямоугольные координаты в системе другой зоны. Построение алгоритмов преобразования гиперболических координат в координаты Гаусса — Крюгера с использованием любого из указанных путей является трудоемким и неэффективным способом.

Преобразование гиперболических координат в координаты Гаусса — Крюгера ведется по следующей структурно-логической схеме: $P_1 B_2 A_3 P_4 A_5 B_6$, где P_1 — логический оператор, выполняющий функцию определения типа ГРНС, от которой осуществляется прием гиперболических координат; B_2, B_6 — операторы ввода и вывода информации; A_3 — арифметический оператор, выполняющий преобразование гиперболических координат в геодезические; P_4 — логический оператор, вычисляющий желаемую координатную зону; A_5 — арифметический оператор преобразования геодезических координат в координаты Гаусса — Крюгера.

Арифметический оператор A_5 представляет совокупность следующих формул:

$$\Delta X = (((A_1 + A_2 + A_3) C_7 + A_4 + A_5) l^2 + A_6 + A_7 + A_1 + A_8) l^2 + 0,5) l^2 C_6 C Z_1(B), \quad (\text{VIII.43})$$

$$x = X + \Delta X, \quad (\text{VIII.44})$$

$$y = ((A_9 + A_{10} - C_1(0,075 + A_{11} C_1)) l^2 + (C_2 - C_5 + A_{12}) A_{13} l^2 + 0,5) l C_1 C Z_1(B) 2', \quad (\text{VIII.45})$$

где

$$C_1 = \cos B, \quad A_1 = 0,375e'^2 c_3,$$

$$C_2 = C_1^2, \quad A_2 = -0,08055556,$$

$$C_3 = C_2^2, \quad A_3 = -0,45833333e'^2 C_2,$$

$$\begin{aligned}
C_4 &= \sin B, & A_4 &= 0,08472222C_3, \\
C_5 &= C_4^2, & A_5 &= 0,001388889, \\
C_6 &= C_1C_4, & A_6 &= 0,20833333C_2, \\
C_7 &= C_6^2, & A_7 &= -0,041666667C_5, \\
Z_1(B) &= (1 + e'^2 \cos^2 B)^{-1/2}, & A_8 &= 0,166666667e'^2C_2C_3, \\
& & A_9 &= 0,1A_6C_2, \\
& & A_{10} &= 0,058333333e'^2C_2C_3, \\
& & A_{11} &= 0,241666667e'^2, \\
& & A_{12} &= e'^2C_3, \\
& & A_{13} &= 0,083333333,
\end{aligned}$$

X — длина дуги меридиана.

Для эллипсоида Красовского коэффициенты $A_1, A_3, A_9, A_{10}, A_{11}$ и A_{12} имеют вид $A_1 = 0,002526944C_3, A_3 = -0,003546822, A_9 = 0,001123086, A_{10} = 0,000393080C_2C_3, A_{11} = 0,001586809, A_{12} = 0,006738523C_3$.

Данные формулы (VIII.43) — (VIII.45) осуществляют преобразование геодезических координат в координаты Гаусса — Крюгера с точностью:

	$l < 3^\circ$	$l < 6^\circ$
x	0,03 м	0,1 м
y	0,05 м	0,4 м

Глава IX

РЕШЕНИЕ ГЛАВНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА РАЗЛИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Рассмотрим способы вычисления координат на: 1) поверхности, имеющей ребра, 2) апосфере, 3) трехосном эллипсоиде.

Как указывалось ранее, начало внутренней геометрии поверхностей было положено работой Гаусса «Общие исследования о кривых поверхностях», появившейся в 1827 г. С тех пор раздел геометрии, рассматривающий геометрию малых участков регулярных поверхностей, настолько детально разработан, что все принципиальные вопросы могут считаться решенными.

Однако применяемые здесь методы дифференциальной геометрии в их обычной форме приложимы только к регулярным поверхностям, т. е. поверхностям, задаваемым уравнениями, содержащими функции, дифференцируемые достаточно большое число раз (обычно не менее трех). А между тем, нерегулярные поверхности заслуживают не меньшего внимания, потому что они также часто встречаются в жизни и могут быть изготовлены, скажем, из бумаги. Например, любой многогранник, конус или поверхность линзы с острыми краями не являются регулярными. Далее, условия дифференцируемости, налагаемые на поверхности в дифференциальной геометрии, далеко не всегда бывают оправданы геометрическим существом задачи, а вызваны скорее удобствами аналитического аппарата.

Метод исследования внутренней геометрии выпуклых поверхностей носит исключительно геометрический характер. Сущность его состоит в том, что сначала изучают выпуклые многогранники, а потом полученные для них результаты переносят на любые выпуклые поверхности путем предельного перехода. Что касается решения главных геодезических задач, то все дальнейшие рассуждения основаны, по существу, на двух теоремах, первая из которых позволяет построить поверхность, вторая — оценить точность вычислений.

Теорема 1. Для всякой поверхности вращения, имеющей спрямляемый меридиан, существует сходящая к ней последовательность поверхностей, состоящая из шаровых поясов.

Теорема 2. Пусть последовательность выпуклых поверхностей вращения F_n сходится к поверхности вращения F и пусть точки M_n сходятся к точке $M \in F$. Из точек M_n исходят геодезические M_nN_n длины s_0 с постоянным значением азимута A . Тогда точки N_n сходятся к точке N , расстояние равно MN и азимут $A_{MN} = A$.

На основании этих теорем можно вписать в эллипсоид вращения поверхность, состоящую из шаровых поясов, кроме того, они показывают, что если поставленную задачу решать не на эллипсоиде вращения, а на поверхности, состоящей из шаровых поясов, и полученные результаты перенести на эллипсоид, то ошибка будет уменьшаться с увеличением номера поверхности.

Целесообразность решения главных геодезических

задач не на эллипсоиде, а на поверхности, состоящей из шаровых поясов, основана на том, что поверхность, состоящая из шаровых поясов, в некотором смысле проще поверхности эллипсоида вращения. Именно интегралы, выражающие длины геодезических линий, а также разность долгот на эллипсоиде вращения являются эллиптическими интегралами, а на поверхности, состоящей из шаровых поясов, мы имеем дело с интегралами, которые берутся в конечном виде, однако шаровой пояс приближает поверхность эллипсоида вращения на небольшой площади, а для решения задач на большие расстояния приходится строить несколько поясов [21].

Чтобы уменьшить сложность вычислений при больших расстояниях, английские геодезисты М. Хотин в 1946 г. и Рейнсфорд в 1951 г. предложили вести вычисления не на эллипсоиде, а на апосфере, изображая эллипсоид на ней равноугольно [2], [29]. Для вычислений требуются таблицы гиперболических функций и изометрических широт.

В СССР также выполнялась работа по исследованию возможностей применения апосферы для решения различного рода геодезических задач на апосфере [56], не считая ряда дипломных работ, выполненных на кафедре высшей геодезии МИИГАиК.

Результаты исследований свидетельствуют, что использование апосферы для решения некоторых задач вполне возможно, а для решения задач, например линейной и гиперболической засечек, более выгодно и более эффективно, чем это принято в существующей практике. Конечно, как и в предыдущем случае, речь идет о решении задач на ограниченные расстояния.

В последующих параграфах в основном будут даны примеры расчетов на апосфере, так как теория апосферы достаточно полно изложена в курсах по дифференциальной геометрии [27], [41].

Имея в виду современную точность линейных и угловых измерений, требования навигации, ракетной техники и т. д., при решении геодезических задач следует учитывать трехосность фигуры Земли. Трехосный эллипсоид считается наиболее общей моделью планетных фигур для условий, когда еще не учитывается несимметрия Северного и Южного полушарий. Замечания о том, что современную геодезическую практику в достаточной степени

удовлетворяют двухосный эллипсоид и существующие способы решения геодезических задач на этой поверхности, не должны служить препятствием к дальнейшим теоретическим и практическим действиям в области сфероидической геодезии.

§ 42. Способ аппроксимации пояса эллипсоида вращения шаровым поясом

Участок поверхности эллипсоида можно достаточно хорошо аппроксимировать участком поверхности сферы, причем точность аппроксимации улучшается с уменьше-

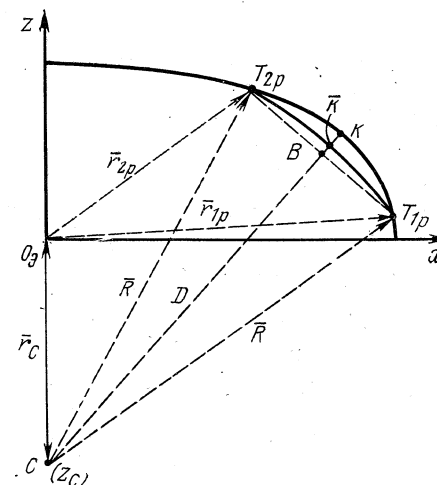


Рис. 15

нием размера аппроксимирующего участка. Один из способов аппроксимации предложен В. Ф. Еремеевым [38] и заключается в следующем.

В меридиональном сечении эллипсоида берутся две точки T_{1p} и T_{2p} . Эти две точки соединяются хордой (рис. 15). Из середины хорды восставляется перпендикуляр до пересечения с поверхностью эллипсоида, и через три точки проводится сфера. При этом в общем случае центр сферы не лежит на оси вращения эллипсоида. Такой способ позволяет очень хорошо аппроксимировать

эллипсоид сферой при долготах, несильно отличающихся от долготы, выбранного меридионального сечения, так как радиусы кривизны сферы и эллипсоида близки друг к другу. Однако существенным недостатком этого метода является то, что по мере удаления по долготе от меридионального сечения точность аппроксимации резко падает и будет самой низкой при долготе, отличающейся на 180° от выбранной (исключение составляет полярная область).

Другой метод предложен А. Е. Сержановым [62]. В этом методе также берутся две точки T_{1p} и T_{2p} в меридиональном сечении, но сфера строится только по этим двум точкам, причем накладывается дополнительное условие, чтобы центр сферы лежал на оси вращения эллипсоида. При этом пояс поверхности эллипсоида между параллелями, проходящими через точки T_{1p} и T_{2p} , будет аппроксимироваться шаровым поясом, причем точность аппроксимации на всех долготах будет одинакова.

Найдем в этом случае уравнение аппроксимирующей сферы. Уравнение эллипсоида в параметрической форме имеет вид

$$X = a \cos u \cos L,$$

$$Y = a \cos u \sin L,$$

$$Z = b \sin u.$$

Не нарушая общности, можно рассматривать меридиональное сечение, соответствующее $L=0$. Тогда координаты точек T_{1p} и T_{2p} , расположенных на поверхности эллипсоида, запишутся таким образом:

$$\text{для точки } T_{1p} \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= a \cos u_1, \\ z_1 &= b \sin u_1; \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.1})$$

$$\text{для точки } T_{2p} \quad \left. \begin{aligned} x_2 &= a \cos u_2, \\ z_2 &= b \sin u_2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.2})$$

Угловой коэффициент к прямой $T_{1p}T_{2p}$ выразится формулой

$$k = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} = \frac{b(\sin u_2 - \sin u_1)}{a(\cos u_2 - \cos u_1)}. \quad (\text{IX.3})$$

Найдем угловой коэффициент k' прямой BC . По условию перпендикулярности $k' = -\frac{1}{k}$. Тогда

$$k' = -\frac{a(\cos u_2 - \cos u_1)}{b(\sin u_2 - \sin u_1)}. \quad (\text{IX.4})$$

Уравнение прямой BC будет

$$z - \frac{z_1 + z_2}{2} = k' \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right), \quad (\text{IX.5})$$

или

$$\begin{aligned} z - \frac{b(\sin u_1 + \sin u_2)}{2} &= \\ &= -\frac{a(\cos u_2 - \cos u_1)}{b(\sin u_2 - \sin u_1)} \left[x - \frac{a(\cos u_1 + \cos u_2)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{IX.6})$$

Примем в уравнении (IX.6) $x=0$, найдем координаты точки C — центра окружности, т. е.

$$z_C = \frac{b^2 - a^2}{2b} (\sin u_2 + \sin u_1). \quad (\text{IX.7})$$

Для радиуса искомой окружности можно написать

$$R = |\bar{r}_{1p} - \bar{r}_C| = |\bar{r}_{2p} - \bar{r}_C|, \quad (\text{IX.8})$$

где \bar{r}_{1p} и \bar{r}_{2p} — векторы (см. рис. 15), направленные из начала координат O_3 в точки T_{1p} и T_{2p} соответственно; \bar{r}_C — вектор, направленный из начала координат в центр окружности.

В координатной форме уравнение (IX.8) будет

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(x_1 - x_C)^2 + (z_1 - z_C)^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_C)^2 + (z_2 - z_C)^2}. \end{aligned} \quad (\text{IX.9})$$

Учитывая, что $x_C=0$, а координаты точек даются выражениями (IX.1) и (IX.2), получим из уравнения (IX.9)

$$R = \sqrt{a^2 \cos^2 u_1 + (b \sin u_1 - z_C)^2}, \quad (\text{IX.10})$$

или

$$R = \sqrt{a^2 \cos^2 u_2 + (b \sin u_2 - z_C)^2}. \quad (\text{IX.11})$$

Между точками эллипсоида и точками шарового пояса установим взаимно однозначное соответствие следующим образом: взяв произвольную точку K на поверхности эллипсоида, соединим ее лучом с центром шарово-

го пояса C . Точку пересечения \bar{K} луча CK с шаровым поясом будем считать соответствующей точке K .

Найдем параметрическое уравнение шарового пояса в системе координат с началом в центре сферы. Уравнение эллипсоида в этой системе координат имеет вид

$$\left. \begin{aligned} X &= a \cos u \cos L, \\ Y &= a \cos u \sin L, \\ Z &= a \sin u - z_c. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.12})$$

Координаты точки \bar{K} получим из координат точки K путем умножения их на коэффициент подобия $\lambda = \lambda(u)$:

$$\left. \begin{aligned} X &= \lambda(u) a \cos u \cos L, \\ Y &= \lambda(u) a \cos u \sin L, \\ Z &= \lambda(u) (b \sin u - z_c). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.13})$$

Неизвестный пока коэффициент $\lambda(u)$ найдем из условия, что для сферы должно выполняться соотношение

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \quad (\text{IX.14})$$

В нашем случае

$$R^2 = \lambda^2(u) [a^2 \cos^2 u + (b \sin u - z_c)^2], \quad (\text{IX.15})$$

откуда получим

$$\lambda(u) = \frac{R}{\sqrt{a^2 \cos^2 u + (b \sin u - z_c)^2}}. \quad (\text{IX.16})$$

Подставив выражение (IX.16) в (IX.13), найдем уравнение шарового пояса

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{R}{D(u)} a \cos u \cos L, \\ Y &= \frac{R}{D(u)} a \cos u \sin L, \\ Z &= \frac{R}{D(u)} (b \sin u - z_c), \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.17})$$

где

$$D(u) = \sqrt{a^2 \cos^2 u + (b \sin u - z_c)^2}. \quad (\text{IX.18})$$

Получим коэффициенты первой квадратичной формы для шарового пояса. Дифференцируя выражение (IX.17), имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= -\frac{R}{D^3(u)} a \cos L (b \sin u - z_c) (b - z_c \sin u), \\ \frac{\partial Y}{\partial u} &= -\frac{R}{D^3(u)} a \sin L (b \sin u - z_c) \times \\ &\times (b - z_c \sin u), \\ \frac{\partial Z}{\partial u} &= \frac{R}{D^3(u)} \cos u (b - z_c \sin u). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.19})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial L} &= -\frac{R}{D(u)} a \cos u \sin L, \\ \frac{\partial Y}{\partial L} &= \frac{R}{D(u)} a \cos u \cos L, \\ \frac{\partial Z}{\partial L} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.20})$$

Подставляя уравнения (IX.19) и (IX.20) в формулы для вычисления коэффициентов первой квадратичной формы g_{ij} [см. § 9, (II.127)], имеем

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= \frac{R_i^2 a^2}{D_i^4(u)} (b - z_c \sin u)^2, \\ g_{12} &= 0, \quad g_{22} = \frac{R_i^2 a^2}{D_i^2(u)} \cos^2 u. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.21})$$

§ 43. Основные соотношения для геодезической линии на шаровом поясе

Уравнения шарового пояса (IX.17) записаны в координатах u и L , которые являются координатами точки на шаровом поясе, соответствующей точке на эллипсоиде с теми же координатами.

В дальнейшем можно поступать по-разному. Именно: подставить значения для коэффициентов первой квадратичной формы (IX.21) в известные уравнения:

$$s = \int_{u_1}^{u_2} \frac{g_{11} g_{22}}{\sqrt{g_{11} g_{22} - c^2}} du, \quad L = L_0 + \int_{u_1}^{u_2} \frac{c \sqrt{g_{11}}}{\sqrt{c^2 - g_{11} g_{22}}} du.$$

После интегрирования

$$s = R_1 \left[\arcsin \frac{\frac{b \sin u_2 - z_c}{D_1(u_2)}}{\sqrt{1 - c^2/R_1^2}} - \arcsin \frac{\frac{b \sin u_1 - z_c}{D_1(u_1)}}{\sqrt{1 - c^2/R_1^2}} \right], \quad (\text{IX.22})$$

а также

$$L_2 = L_1 + \arctg \frac{\frac{c(b \sin u_2 - z_c)}{R_1 D(u_2)}}{\sqrt{\frac{a^2 \cos^2 u_2}{D^2(u_2)} - \frac{c^2}{R_1^2}}} - \arctg \frac{\frac{c(b \sin u_1 - z_c)}{R_1 D(u_1)}}{\sqrt{\frac{a^2 \cos^2 u_1}{D^2(u_1)} - \frac{c^2}{R_1^2}}}. \quad (\text{IX.23})$$

Сделаем несколько замечаний по полученным формулам.

Формулы (IX.22) и (IX.23) в таком виде являются достаточно сложными, а отсутствие геометрической интерпретации затрудняет упрощение этих формул. Кроме того, при их использовании возникает ряд дополнительных трудностей.

1. При решении прямой задачи наиболее сложным является определение приведенной широты второй точки. Для этого необходимо на основании формулы (IX.22) выразить величину u_2 .

В работе [62] получены такие сложные формулы:

$$A = \frac{b \sin u_2 - z_c}{D(u_2)} = \frac{b \sin u_2 - z_c}{\sqrt{a^2 \cos^2 u_2 - (b \sin u_2 - z_c)^2}}, \quad (\text{IX.24})$$

$$\sin u_2 = \frac{bz_c(1-A) \pm Aa \sqrt{b^2 + z_c^2(A^2 - 1) + A^2(a^2 - b^2)}}{b^2 + (a^2 - b^2)A^2}. \quad (\text{IX.25})$$

Кроме того, анализ выбора знака перед корнем в (IX.25), не приведен.

2. При решении обратной геодезической задачи наибольшую трудность представляет определение азимута. При этом из двух уравнений (IX.22) и (IX.23) требуется определить постоянную Клеро c , с помощью которой за-

тем находится азимут. Однако это приводит к решению трансцендентного уравнения.

В настоящей работе выбран иной путь, позволяющий получить более простые соотношения. Он состоит в следующем. Запишем уравнение сферы в сферических координатах \tilde{u}, L [21]:

$$\left. \begin{aligned} X &= R \cos \tilde{u} \cos L, \\ Y &= R \cos \tilde{u} \sin L, \\ Z &= R \sin \tilde{u}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.26})$$

Координата \tilde{u} есть дуга большого круга. Следовательно, соотношения для геодезической линии, выраженные через координаты u и L , можно получить из решения сферических треугольников.

Следовательно, основная задача состоит в установлении соотношения между сферической координатой \tilde{u} и координатой u . Это легко сделать путем сравнения уравнений (IX.17) и (IX.26).

Имеем

$$\cos \tilde{u} = \frac{a}{D(u)} \cos u, \quad (\text{IX.27})$$

$$\sin \tilde{u} = \frac{b \sin u - z_c}{D(u)}, \quad (\text{IX.28})$$

где

$$D(u) = \sqrt{a^2 \cos^2(u) + (b \sin u - z_c)^2}.$$

Из уравнений (IX.27) и (IX.28) следует

$$\operatorname{tg} \tilde{u} = \frac{1}{a} \left(b \operatorname{tg} u - \frac{z_c}{\cos u} \right). \quad (\text{IX.29})$$

Это соотношение принимается за основное, позволяющее определить \tilde{u} через u . Так как \tilde{u} лежит в первой и четвертой четвертях, величину \tilde{u} можно найти только по тангенсу. В дальнейшем потребуются и обратная зависимость, позволяющая определить u через \tilde{u} . Конечно, величину u можно получить итерационным способом по формуле

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{b} \left(a \operatorname{tg} \tilde{u} + \frac{z_c}{\cos u} \right), \quad (\text{IX.30})$$

вытекающей из уравнения (IX.29), взяв в правой части выражения (IX.30) для первого приближения

$$\cos u = \cos \tilde{u}. \quad (\text{IX.31})$$

Получим теперь конечное соотношение, позволяющее найти u через \tilde{u} . Уравнение (IX.30) можно переписать таким образом:

$$\operatorname{tg} \tilde{u} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} u - \frac{z_c}{a} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u}. \quad (\text{IX.32})$$

Из решения этого уравнения получим

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{b^2 - z_c^2} \left[ab \operatorname{tg} \tilde{u} \pm z_c \sqrt{b^2 - z_c^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \tilde{u}} \right]. \quad (\text{IX.33})$$

Для того чтобы определить знак в формуле (IX.33), приведем ее к виду

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{b^2 - z_c^2} \left[ab \operatorname{tg} \tilde{u} \pm \frac{z_c}{(b^2 - z_c^2)} \times \right. \\ \left. \times \cos \tilde{u} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2 - z_c^2) \cos^2 \tilde{u}} \right]. \quad (\text{IX.34})$$

Сравнивая выражения (IX.34) и (IX.30) и учитывая, что за первое приближение в уравнении (IX.30) берется $\cos u = \cos \tilde{u}$, легко устанавливаем, что в формуле (IX.34) необходимо брать знак плюс. Так как $\cos \tilde{u} > 0$, то в формуле (IX.33) необходимо всегда брать знак плюс.

Таким образом, окончательно можно записать

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{b^2 - z_c^2} \left[ab \operatorname{tg} \tilde{u} + z_c \sqrt{b^2 - z_c^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \tilde{u}} \right]. \quad (\text{IX.35})$$

Величину u можно находить только по ее тангенсу

Проведем теперь упрощение формулы, связывающей величины u и \tilde{u} , при условии $D(u) = R$. Эти формулы могут быть использованы в случае, когда первая и вторая точки совпадают с точками T_{1p} и T_{2p} , а также в произвольном случае, если считать допустимой некоторую погрешность.

При $D(u) = R$ формула (IX.28) принимает вид

$$\sin \tilde{u} = \frac{b \sin u - z_c}{R}, \quad (\text{IX.36})$$

а также

$$\sin u = \frac{R \sin \tilde{u} + z_c}{b}. \quad (\text{IX.37})$$

Сами углы при этом однозначно определяются по их синусам. Таким образом, имеются все необходимые выражения, позволяющие перейти от угла u к углу \tilde{u} и обратно.

Покажем, что введением угла \tilde{u} формулы (IX.22) и (IX.23) можно привести к формулам сферической тригонометрии. Формулы (IX.22) и (IX.29) при $D(u) = R$ можно записать следующим образом:

$$\frac{s}{R} = \sigma_2 - \sigma_1, \quad (\text{IX.38})$$

$$L_2 = L_1 + (\gamma_2 - \gamma_1), \quad (\text{IX.39})$$

где

$$1) \operatorname{tg} \gamma_i = \frac{ca(u_i)}{Rb(u_i)}, \quad 2) \sin \sigma_i = \frac{a(u_i)}{f}, \quad (\text{IX.40})$$

$$a(u_i) = b \sin u_i - z_c, \quad (\text{IX.41})$$

$$b(u_i) = \sqrt{a^2 \cos^2 u_i - c^2}, \quad (\text{IX.42})$$

$$f = \sqrt{R^2 - c^2} \quad (i = 1, 2). \quad (\text{IX.43})$$

Из теоремы Клеро следует

$$a \cos u_i \sin A_i = c = \text{const}, \quad (\text{IX.44})$$

откуда

$$a^2 \cos^2 u_i = \frac{c^2}{\sin^2 A_i}. \quad (\text{IX.45})$$

Выражение (IX.42) можно теперь привести к виду

$$b(u_i) = c \operatorname{ctg} A_i. \quad (\text{IX.46})$$

Из формул (IX.10) и (IX.11)

$$R = \sqrt{a^2 \cos^2 u_1 + (b \sin u_1 - z_c)^2},$$

$$R = \sqrt{a^2 \cos^2 u_2 + (b \sin u_2 - z_c)^2}$$

получаем

$$a(u_i) = \sqrt{R^2 - a^2 \cos^2 u_i} \quad (i = 1, 2). \quad (\text{IX.47})$$

Таким образом, используя формулы (IX.46) и (IX.47), из уравнения (IX.40,1) найдем

$$\operatorname{tg} \gamma_i = \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cos^2 u_i} \operatorname{tg} A_i. \quad (\text{IX.48})$$

Введем теперь угол \tilde{u} . Согласно формулам (IX.27) и (IX.28) при $D(u) = R$ имеем

$$\cos \tilde{u} = \frac{a}{R} \cos u_i, \quad (\text{IX.49})$$

$$\sin \tilde{u} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cos^2 u_i}. \quad (\text{IX.50})$$

Откуда

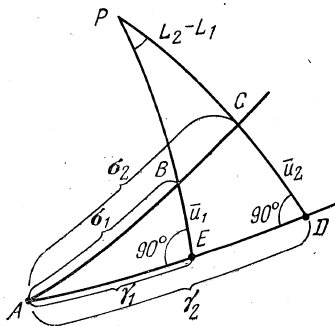


Рис. 16

$$f = \frac{1}{R} \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cos^2 \tilde{u}_i \sin^2 A_i}. \quad (\text{IX.52})$$

Следовательно,

$$\sin \sigma_i = \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cos^2 u_i}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cos^2 u_i \sin^2 A_i}}. \quad (\text{IX.53})$$

Вычисляя тангенс угла по синусу, находим

$$\operatorname{tg} \sigma_i = \frac{\sqrt{1 - a^2/R^2 \cos^2 u_i}}{a/R \cos u_i \cos A_i}. \quad (\text{IX.54})$$

Перейдем теперь к углу \tilde{u} . Используя уравнения (IX.49) и (IX.50), получаем

$$\operatorname{tg} \sigma_i = \frac{\operatorname{tg} \tilde{u}_i}{\cos A_i}. \quad (\text{IX.55})$$

Эта формула также следует из решения сферического треугольника, где \tilde{u}_i — сферическая широта (см. рис. 16).

§ 44. Решение главных геодезических задач на апосфере

А. Решение обратной геодезической задачи на симметричной апосфере. Прежде чем решить задачу, необходимо определить апосферические постоянные А и К [56]. Дальнейшее решение выполняют в такой последовательности.

1. Осуществляют переход от геодезических к апосферическим координатам по формулам

$$q_i = f(B_i) = 2y \frac{1 - Ay^2 + By^4}{1 - Cy^2 + Dy^4} - eu \frac{1 - Au^2 + Bu^4}{1 - Cu^2 + Du^4}, \quad (\text{IX.56})$$

где

$$y = \operatorname{tg} B_i/2, \quad u = e \sin B_i,$$

$$e = 0,08181333 \text{ (3) для эллипсоида Красовского,}$$

$$A = 0,77 \text{ (7); } B = 0,06772487;$$

$$C = 1,11 \text{ (1); } D = 0,23809524.$$

2. Вычисляют вспомогательные величины $\frac{\Delta Bk}{2}$ и BK_0 по формулам:

$$\sin B_i k = \operatorname{th} kq_i, \quad (\text{IX.57})$$

$$B_i k = \arcsin(\operatorname{th} kq_i) = 2 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{th} \frac{kq_i}{2} \right), \quad (\text{IX.58})$$

$$\frac{\Delta Bk}{2} = \frac{1}{2} (B_2 k - B_1 k),$$

$$Bk_0 = \frac{1}{2} (B_2 k + B_1 k). \quad (\text{IX.59})$$

Для вычисления гиперболического тангенса можно пользоваться разложением в цепную дробь, т. е.

$$\operatorname{tg} z = z \frac{1 + Ez^2 + Fz^4}{1 + Gz^2 + Hz^4}, \quad (\text{IX.60})$$

где $E=0,11(1)$; $F=0,00105820$; $G=0,44(4)$; $H=0,01587302$.

3. Решают обратную геодезическую задачу в такой последовательности:

$$\operatorname{tg} Ak_0 = \frac{\cos Bk_0 \sin \frac{lk}{2}}{\sin \Delta B \frac{k}{2} \cos \frac{lk}{2}} = \frac{U}{P},$$

$$\operatorname{tg} \Delta Ak_0 = \frac{\sin Bk_0 \sin \frac{lk}{2}}{\cos \Delta B \frac{k}{2} \cos \frac{lk}{2}} = \frac{U'}{P'},$$

$$\sin \frac{s^\circ}{2} = \frac{\cos Bk_0 \sin lk/2}{\sin Ak_0} = \frac{\sin \Delta Bk/2 \cos \frac{lk}{2}}{\cos Ak_0}, \quad (\text{IX.61})$$

$$A_{12} = Ak_0 - \Delta Ak_0,$$

$$A_{21} = Ak_0 + \Delta Ak_0 \pm 180^\circ,$$

$$s_\rho = \frac{s_{\text{ан}}}{\rho^\circ} A,$$

где $l = L_2 - L_1$.

Б. Решение прямой геодезической задачи на симметричной апосфере. Решение этой задачи выполняется в следующем порядке.

1. Переход от геодезических координат к апосферическим по формуле

$$q_1 = f(B_1) = 2 \operatorname{arth} \left(\operatorname{tg} \frac{B_1}{2} \right) - e \operatorname{arth} (e \sin B_1)$$

или в виде цепных дробей

$$q_1 = 2y \frac{1 - Ay^2 + By^4}{1 - Cy^2 + Dy^4} - eu \frac{1 - Au^2 + Bu^4}{1 - Cu^2 + Du^4},$$

где

$$y = \operatorname{tg} B_1/2, \quad u = e \sin B_1.$$

2. Вычисление вспомогательных величин

$$\sin B_1 k = \operatorname{th} kq_1, \quad B_1 k = \arcsin (\operatorname{th} kq_1) =$$

$$= 2 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{th} \frac{kq_1}{2} \right)$$

или в виде цепных дробей

$$\operatorname{tg} z = z \frac{1 + Ez^2 + Fz^4}{1 + Gz^2 + Hz^4},$$

где

$$z = kq_1, \quad s_{\text{ан}}^0 = \frac{s_\rho}{A} \rho^\circ.$$

3. Непосредственное решение прямой геодезической задачи производится по формулам

$$\sin B_2 k = \sin B_1 k \cos s_{\text{ан}} + \cos B_1 k \sin s_{\text{ан}} \cos A_{12},$$

$$\sin lk = \frac{\sin s_{\text{ан}} \sin A_{12}}{\cos B_2 k},$$

$$kq_2 = f(B_2 k) = 2 \operatorname{Arth} \left(\operatorname{tg} \frac{B_2 k}{2} \right)$$

или в виде цепных дробей

$$\operatorname{Arth} u = u \frac{1 - Au^2 + Bu^4}{1 - Cu^2 + Du^4},$$

где

$$u = \operatorname{tg} \frac{B_2 k}{2}, \quad A = 0,77(7),$$

$$B = 0,067724867,$$

$$q_2 = \frac{kq_2}{k}, \quad C = 1,11(1),$$

$$D = 0,238095238.$$

4. Переход от координат на апосфере к координатам на эллипсоиде происходит в таком порядке [56]:

$$B_2 = B_0 + \Delta B = 2 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{th} \frac{q_2}{2} \right) + \arcsin (\operatorname{th} \Delta q).$$

Так как Δq неизвестно, то переход от q_2 к B_2 выполняется методом приближений.

1-е приближение.

$$B' = B_0, \quad B_0 = 2 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{th} \frac{q}{2} \right) = 2 \operatorname{arctg} \left(z \frac{1 + Ez^2 + Fz^4}{1 + Gz^2 + Hz^4} \right),$$

где $z = \frac{q^2}{2}$,

$$\Delta B' = \arcsin (\operatorname{th} \Delta q'),$$

где $\Delta q' = e \operatorname{Arth} (e \sin B')$, $e = 0,08181333$ (3) для эллипсоида Красовского.

2-е приближение.

$$B'' = B' + \Delta B'.$$

3-е приближение.

$$B''' = B' + \Delta B'',$$

где

$$\Delta B'' = \arcsin (\operatorname{th} \Delta q''),$$

$$\Delta q'' = e \operatorname{arth} (e \sin B'') = eu \frac{1 - Au^2 + Bu^4}{1 - Cu^2 + Du^4}$$

и т. д., здесь $u = e \sin B''$

Процесс повторяется до тех пор, пока $B^n - B^{n-1} \leq \leq 0,001''$.

Переход от апосферической долготы к геодезической выполняется по формулам

$$l = \frac{lk}{k}, \quad L_2 = L_1 + l.$$

§ 45. Решение линейной засечки на апосфере

Сначала решаем обратную задачу на апосфере по формулам, указанным в § 44, в результате получим s_{12} , A_{12} и A_{21} . Для получения геодезических координат

пункта 3, кроме расстояния s_{13} , необходимо знать азимуты A_{13} . Для определения азимутов мы должны решить на апосфере треугольник, редуцированный на апосферу, при помощи формул

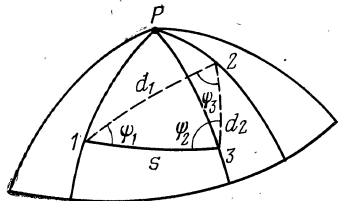


Рис. 17

$$s_{\text{ап}}^0 = \frac{s_3}{A} \rho^\circ, \quad d_{i\text{ап}}^0 = \frac{d_{i3}}{A} \rho^\circ, \quad (\text{IX.62})$$

где A — радиус апосферы.

Тогда углы Ψ_1 и Ψ_2 (рис. 17) определяем по формулам

$$\cos \Psi_1 = \frac{\cos d_2 - \cos d_1 \cos s}{\sin d_1 \sin s}, \quad (\text{IX.63})$$

$$\cos \Psi_2 = \frac{\cos d_1 - \cos d_2 \cos s}{\sin d_2 \sin s}.$$

Получив Ψ_1 и Ψ_2 , определяем апосферические координаты (B, L) пункта 3 по формулам

$$\begin{aligned} \sin B_3 k &= \sin B_1 k \cos d_1 + \cos B_1 k \sin d_1 \cos (A_{12} - \Psi_1) = \\ &= \sin B_2 k \cos d_2 + \cos B_2 k \sin d_2 \cos (\Psi_2 + A_{21}), \end{aligned} \quad (\text{IX.64})$$

$$\sin lk_{31} = \frac{\sin d_1 \sin (A_{12} - \Psi_1)}{\cos B_3 k}, \quad (\text{IX.65})$$

$$\sin lk_{23} = \frac{\sin d_2 \sin (A_{21} + \Psi_2)}{\cos B_3 k}. \quad (\text{IX.66})$$

Переход от апосферической долготы к геодезической долготе осуществляется по формулам

$$l = \frac{lk}{k}, \quad L_3 = L_1 + l, \quad L_3 = L_2 \pm l. \quad (\text{IX.67})$$

Переход от апосферической широты к геодезической осуществляется по формулам, рассмотренным в § 44.

§ 46. Решение гиперболической засечки на апосфере

Если для района, где действует система радионавигации, заранее подобрать подходящие параметры апосферы (K, A, R) , то можно решать гиперболическую засечку в геодезических координатах на апосфере с помощью простых сферических формул.

Гиперболическая засечка может быть решена в два этапа.

1. Определение длины и азимута геодезической линии BT по измеренным разностям расстояний $(d_1 - d_2)$, $(d_3 - d_2)$.

2. Определение геодезических координат определяемого пункта $T(B_T, L_T)$ (рис. 18).

В первую очередь определяется азимут A_{BT} линии BT , затем ее длина d_2 . Для этого можно использовать любое сферическое решение гиперболической засечки [57]

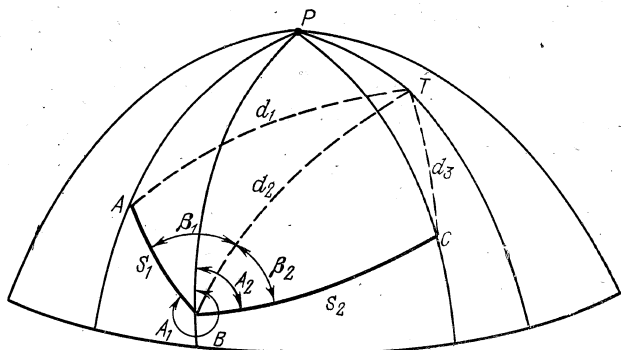


Рис. 18

Имеем

$$\kappa \sin A_{BT} + \eta \cos A_{BT} + v = 0, \quad (IX.68)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= k' \sin s_2 \sin A_2 - \sin s_1 \sin A_1, \\ \eta &= k' \sin s_2 \cos A_2 - \sin s_1 \cos A_1, \\ v &= k' \sin(2r_2) - \sin(2r_1) \text{ при} \\ k' &= \frac{\cos 2r_1 - \cos s_1}{\cos 2r_2 - \cos s_2}, \end{aligned} \right\} \quad (IX.69)$$

здесь $2r_1 = d_1 - d_2$, $2r_2 = d_3 - d_2$.

Измеренные величины $2r_1$, $2r_2$, а также длины базисных сторон s_1 и s_2 разворачиваются предварительно на апосферу по формулам

$$s_{\text{ап}}^0 = \frac{s_{\text{эл}}}{A} \rho^0, \quad 2r_{\text{ап}}^0 = \frac{2r_{\text{эл}}}{A} \rho^0, \quad (IX.70)$$

где A — радиус апосферы.

Решение уравнения (IX.68) при условии $v^2 < \kappa^2 + \eta^2$ можно выполнить таким образом.

Положим $\text{tg } \varphi = \eta/\kappa$,

тогда

$$\sin(A_{BT} + \varphi) = -v/\kappa \cos \varphi. \quad (IX.71)$$

Тогда азимут линий BT можно определить по формуле

$$A_{BT} = n\pi + (-1)^n (A_{BT} + \varphi) - \varphi. \quad (IX.72)$$

При $n=1$ формула (IX.72) примет вид

$$A_{BT} = \pi + (-1) (A_{BT} + \varphi) - \varphi. \quad (IX.73)$$

Длина определяемой линии BT находится по формулам сферической тригонометрии

$$\text{tg } d_2 = \frac{\cos 2r_1 - \cos s_1}{\sin 2r_1 + \sin s_1 \cos \beta_1} = \frac{\cos 2r_2 - \cos s_2}{\sin 2r_2 + \sin s_2 \cos \beta_2}, \quad (IX.74)$$

где

$$\beta_1 = A_{BA} - A_{BT}, \quad \beta_2 = A_{BT} - A_{BC}.$$

Для определения координат B_T и L_T пункта T следует решать прямую задачу по формулам, приведенным в § 44.

§ 47. Решение главных геодезических задач на трехосном эллипсоиде по геодезической линии на расстояния до $s \geq 500$ км

В основу способа решения задач положим известное разложение в ряды по Гауссу разностей широт, долгот и азимутов со средними аргументами.

Положим, что s — длина геодезической линии проходит через пункты $P_1(B_1, L_1)$ и $P_2(B_2, L_2)$. Пункт $P_m(B_m, L_m)$ есть середина отрезка s . Ясно, что координаты точки $P_m(B_m, L_m)$, расположенной на середине дуги s между пунктами $P_1(B_1, L_1)$ и $P_2(B_2, L_2)$, не будут равны среднему значению координат этих точек, т. е.

$$\frac{B_1 + B_2}{2} = B, \quad \frac{L_1 + L_2}{2} = L.$$

Эти координаты будет иметь пункт $P(B, L)$, находящийся на некотором расстоянии от $P_m(B_m, L_m)$.

Зависимость между этими координатами дается известными выражениями [90]

$$\left. \begin{aligned} B &= B_m + \frac{1}{8} \left(\frac{d^2 B}{ds^2} \right)_{P_m} s^2 + \text{чл}_4, \\ \Delta B &= \left(\frac{dB}{ds} \right)_{P_m} s + \frac{1}{24} \left(\frac{d^3 B}{ds^3} \right)_{P_m} s^3 + \text{чл}_5; \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.88})$$

$$\left. \begin{aligned} L &= L_m + \frac{1}{8} \left(\frac{d^2 L}{ds^2} \right)_{P_m} s^2 + \text{чл}_4, \\ \Delta L &= \left(\frac{dL}{ds} \right)_{P_m} s + \frac{1}{24} \left(\frac{d^3 L}{ds^3} \right)_{P_m} s^3 + \text{чл}_5; \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.89})$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_m + \frac{1}{8} \left(\frac{d^2 \alpha}{ds^2} \right) s^2 + \text{чл}_4, \\ \Delta \alpha &= \left(\frac{d\alpha}{ds} \right)_{P_m} s + \frac{1}{24} \left(\frac{d^3 \alpha}{ds^3} \right)_{P_m} s^3 + \text{чл}_5; \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.90})$$

где

$$\begin{aligned} B_2 - B_1 &= \Delta B, \\ L_2 - L_1 &= \Delta L, \\ \alpha_2 - \alpha_1 - 180^\circ &= \Delta \alpha, \\ \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 180^\circ}{2} &= \alpha. \end{aligned}$$

Прямая геодезическая задача. По существу формулы (IX.88), (IX.89) и (IX.90) решают поставленную задачу в общем виде.

Конечная цель — получить формулы для разностей координат и азимутов в функции B и α .

Далее имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{dB}{ds} \right)_{P_m} &= \left(\frac{dB}{ds} \right)_P + \left(\frac{\partial}{\partial B} \frac{dB}{ds} \right)_P (B_m - B) + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial L} \frac{dB}{ds} \right) (L_m - L) + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{dB}{ds} \right) (\alpha_m - \alpha) + \text{чл}_4; \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta B &= \left(\frac{dB}{ds} \right)_P s - \frac{1}{8} \left(\frac{\partial}{\partial B} \frac{dB}{ds} \cdot \frac{d^2 B}{ds^2} \right)_P s^3 - \\ &- \frac{1}{8} \left(\frac{\partial}{\partial L} \frac{dB}{ds} \cdot \frac{d^2 L}{ds^2} \right)_P s^3 - \frac{1}{8} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{dB}{ds} \cdot \frac{d^2 \alpha}{ds^2} \right)_P s^3 + \text{чл}_5, \end{aligned} \quad (\text{IX.91})$$

$$\begin{aligned} \Delta L &= \left(\frac{dL}{ds} \right)_P s - \frac{1}{8} \left(\frac{\partial}{\partial B} \frac{dL}{ds} \cdot \frac{d^2 B}{ds^2} \right)_P s^3 - \\ &- \frac{1}{8} \left(\frac{\partial}{\partial L} \frac{dL}{ds} \cdot \frac{d^2 L}{ds^2} \right)_P s^3 - \\ &- \frac{1}{8} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{dL}{ds} \cdot \frac{d^2 \alpha}{ds^2} \right)_P s^3 + \text{чл}_5, \end{aligned} \quad (\text{IX.92})$$

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= \left(\frac{d\alpha}{ds} \right)_P s - \frac{1}{8} \left(\frac{\partial}{\partial B} \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{d^2 B}{ds^2} \right)_P s^3 - \\ &- \frac{1}{8} \left(\frac{\partial}{\partial L} \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{d^2 L}{ds^2} \right)_P s^3 - \\ &- \frac{1}{8} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{d^2 \alpha}{ds^2} \right)_P s^3 + \text{чл}_5. \end{aligned} \quad (\text{IX.93})$$

Дальнейший ход вывода: а) нахождение исходных дифференциальных уравнений и вычисление производных, б) получение рабочих формул путем подстановки найденных производных в уравнения (IX.88), (IX.89) и (IX.90).

Исходные дифференциальные уравнения геодезической линии даны формулами (III.22) — (III.24). Вычисляя производные следующих порядков и подставляя их

значения в (IX.91), (IX.92) и (IX.93), окончательно получим

$$\begin{aligned} \Delta B'' &= \frac{\rho'' s W^3}{a(1-e^2)} \cos \alpha - \\ &- \frac{\alpha_a \rho'' \cdot s W}{a} \left[\frac{W^2}{1-e^2} \left(1 - \frac{3 \cos^2 B}{2W^2} \right) \cos 2L \cos \alpha + \right. \\ &+ \sin B \sin 2L \sin \alpha \left. \right] + \frac{\rho'' s^3 W^5 \cos \alpha}{24a^3(1-e^2)} \left[\frac{2W^2}{1-e^2} + \right. \\ &+ 3 \operatorname{tg}^2 B \sin^2 \alpha - \frac{\cos^2 \alpha}{(1-e^2)^2} (2 + e^2 - \\ &\left. - (8e^2 - 14e^4) \sin^2 B - 9e^4 \sin^4 B \right), \end{aligned} \quad (\text{IX.94})$$

$$\begin{aligned} \Delta L'' &= \frac{\rho'' s W}{a \cos B} \sin \alpha + \alpha_a \frac{\rho'' s W}{a \cos B} \left[\left(1 + \frac{\cos^2 B}{2W^2} \right) \cos 2L \sin \alpha - \right. \\ &- \sin B \sin 2L \cos \alpha \left. \right] + \frac{\rho'' s^3 W^3 \sin \alpha}{24a^3 \cos B} \left(\operatorname{tg}^2 B \sin^2 \alpha - \right. \\ &\left. - \frac{1 - 10e^2 \sin^2 B}{1 - e^2} \cos^2 \alpha \right), \end{aligned} \quad (\text{IX.95})$$

$$\begin{aligned} \Delta \alpha'' &= \frac{\rho'' s W \cdot \operatorname{tg} B}{a} + \\ &+ \alpha_a \frac{\rho'' s W \operatorname{tg} B}{a} \left[\left(1 + \frac{\cos^2 B}{2W^2} \right) \cos 2L \sin \alpha - \right. \\ &- \sin B \sin 2L \cos \alpha \left. \right] + \\ &+ \frac{\rho'' s^3 W^3 \operatorname{tg} B \sin \alpha}{24a^3} \left[\frac{2W^2}{1-e^2} + \operatorname{tg}^2 B \sin^2 \alpha + \right. \\ &\left. + e^2 \frac{\cos^2 \alpha}{(1-e^2)^2} (5 + (4 - 14e^2) \sin^2 B + 5e^2 \sin^4 B) \right]. \end{aligned} \quad (\text{IX.96})$$

Выпишем отдельно члены, учитывающие экваториальное сжатие α_a . Имеем

$$\begin{aligned} \beta(B_2) &= -\alpha_a \frac{\rho'' \cdot s \cdot W}{a} \left[\frac{W^2}{1-e^2} \left(1 - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{3 \cos^2 B}{2W^2} \right) \cos 2L \cos \alpha + \sin B \sin 2L \sin \alpha \right], \end{aligned} \quad (\text{IX.97})$$

$$\beta(L_2) = +\alpha_a \frac{\rho'' s W}{a \cos B} \left[\left(1 + \frac{\cos^2 B}{2W^2} \right) \cos 2L \sin \alpha - \right. \\ \left. \sin B \sin 2L \cos \alpha \right], \quad (\text{IX.98})$$

$$\begin{aligned} \beta(\alpha_2) &= +\alpha_a \frac{\rho'' s W \operatorname{tg} B}{a} \left[\left(1 + \frac{\cos^2 B}{2W^2} \right) \times \right. \\ &\times \cos 2L \sin \alpha - \sin B \sin 2L \cos \alpha \left. \right]. \end{aligned} \quad (\text{IX.99})$$

Из рассмотрения формул (IX.97), (IX.98) и (IX.99) можно заключить, что абсолютный тах величины β принимают при $B=90^\circ$ и определенных значениях L и α . Так $\beta(L_2)$ и $\beta(\alpha_2)$ становятся бесконечно большими при $B=90^\circ$.

Обратная геодезическая задача. Рабочие формулы для решения обратной геодезической задачи, можно получить путем обращения формул (IX.94) (IX.95) и (IX.96). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} s \cos \alpha &= \frac{a(1-e^2)}{\rho'' W^3} \Delta B + \alpha_a \frac{a(1-e^2)}{\rho'' W^3} \left[\left(1 - \frac{3 \cos^2 B}{2W^2} \right) \times \right. \\ &\times \Delta B \cos 2L + \sin B \cos B \Delta L \sin 2L \left. \right] + \frac{s^2 \Delta B}{\rho'' a}, \end{aligned} \quad (\text{IX.100})$$

$$\begin{aligned} s \sin \alpha &= \frac{a \cos B}{\rho'' W} \Delta L + \alpha_a \frac{a}{\rho'' W} \left[\frac{1-e^2}{W^2} \Delta B \sin B \sin 2L - \right. \\ &- \left(1 + \frac{\cos^2 B}{2W^2} \right) \cos B \Delta L \cos 2L \left. \right] + \frac{s^2 \Delta L}{\rho'' a}. \end{aligned} \quad (\text{IX.101})$$

Если не учитывать члены с α_a^2 , то для поправок $\beta(s)$ и $\beta(\alpha)$ получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \beta(s) &= +\alpha_a \frac{a(1-e^2)}{\rho'' W^3} \left[\left(1 - \frac{3 \cos^2 B}{2W^2} \right) \times \right. \\ &\times \Delta B \cos 2L + \sin B \cos B \Delta L \sin 2L \left. \right] \cdot \cos \alpha + \\ &+ \alpha_a \frac{a}{\rho'' W} \left[\frac{1-e^2}{W^2} \Delta B \sin B \sin 2L - \right. \\ &- \left(1 + \frac{\cos^2 B}{2W^2} \right) \cos B \Delta L \cos 2L \left. \right] \sin \alpha, \end{aligned} \quad (\text{IX.102})$$

$$\beta(\alpha) = -\alpha_a \frac{a(1-e^2)}{s \cdot W^3} \left[\left(1 - \frac{3 \cos^2 B}{2W^2} \right) \Delta B \cos 2L + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sin B \cos B \Delta L \sin 2L \Big] \sin \alpha + \\
 & + \alpha_a \frac{a}{sW} \left[\frac{1-e^2}{W^2} \Delta B \sin B \sin 2L - \right. \\
 & \left. - \left(1 + \frac{\cos^2 B}{2W^2} \right) \cos B \Delta L \cos 2L \right] \cos \alpha, \quad (\text{IX.103})
 \end{aligned}$$

$$\beta(\Delta\alpha) = 0. \quad (\text{IX.104})$$

Последние формулы можно упростить, если в них подставить значения ΔB и ΔL из (IX.94) и (IX.95). Тогда для величин $\beta(s)$ и $\beta(\alpha)$ получим вторую группу формул:

$$\begin{aligned}
 \beta(s) = \alpha_a s \Big[\cos 2\alpha \cos 2L + \sin 2\alpha \sin B \sin 2L - \\
 - \frac{\cos^2 B}{2W^2} ((2 + \cos 2\alpha) \cos 2L + e^2 \sin 2\alpha \sin B \sin 2L) \Big], \quad (\text{IX.105})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta(\alpha) = \alpha_a \cdot \rho'' \Big[\cos 2\alpha \sin B \sin 2L - \sin 2\alpha \cos 2L + \\
 + \frac{\cos^2 B}{2W^2} (\sin 2\alpha \cos 2L + 2e^2 \sin^2 \alpha \sin B \sin 2L) \Big], \quad (\text{IX.106})
 \end{aligned}$$

$$\beta(\Delta\alpha) = 0. \quad (\text{IX.107})$$

Приведем численные значения величин $\beta(B_2)$, $\beta(L_2)$, $\beta(\alpha_2)$, $\beta(s)$, $\beta(\alpha)$ [90].

Дано:

$$P_1 \begin{cases} B_1 = 52^\circ 30' 16, 7''; \\ L_1 = 13^\circ 23' 43, 5''; \\ \alpha_1 = 59^\circ 33' 00, 6''; \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} B_2 = 54^\circ 42' 50, 6''; \\ L_2 = 20^\circ 29' 43, 5''; \\ \alpha_2 = 245^\circ 16' 09, 4''; \end{cases}$$

$$s = 529979,57 \text{ м};$$

$$a = \frac{a_0 + a_{90}}{2} = 6377397,16 \text{ м};$$

$$e^2 = 0,006674372;$$

$$a_0 - a_{90} = 345 \text{ м}; \quad \alpha_a = \frac{1}{18486}.$$

а). Значение величин $\beta(B_2)$, $\beta(L_2)$, $\beta(\alpha_2)$. В результате подсчета по формулам (IX.97), (IX.98), (IX.99) по-

лучим $\beta(B_2) = -0,177''$; $\beta(L_2) = +1,647''$; $\beta(\alpha_2) = +1,33''$.

б). Значение величин $\beta(s)$, $\beta(\alpha_1)$, $\beta(\alpha_2)$. В результате подсчета по формулам (IX.105), (IX.106), (IX.107) получим $\beta(s) = -24,29 \text{ м}$; $\beta(\alpha_1) = \beta(\alpha_2) = -7,35''$.

Подчеркнем, что приведенные выше расчеты величин показывают, что в настоящее время решение некоторых задач сфероидической геодезии на поверхности эллипсоида вращения нельзя считать вполне удовлетворительным. Имея в виду все повышающуюся точность измерений, при решении геодезических задач сфероидической геодезии необходимо учитывать трехосность Земли, т. е. учитывать экваториальное сжатие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров С. П.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. *Багратуни Г. В.* Курс сферической геодезии. М., Геодезиздат, 1962.
3. *Белобров А. П.* Использование фазовых систем в океанологических исследованиях. Л., Гидрометеиздат, 1961.
4. *Беспалов Н. А., Курченко Л. А.* Некоторые вопросы оптимизации решения главных геодезических задач. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1979, № 6.
5. *Беспалов Н. А.* Применение векторного и тензорного исчисления к вопросам сферической геодезии. — Труды МИИГАиК, вып. 46, 1961, с. 77—87.
6. *Беспалов Н. А.* Роль основных квадратичных форм в сферической геодезии. — Труды МИИГАиК, вып. 47, 1961, с. 27—35.
7. *Беспалов Н. А.* Теория геодезической линии в тензорном изложении. — Труды МИИГАиК, вып. 47, 1961, с. 37—50.
8. *Беспалов Н. А.* Некоторые соотношения между инвариантами кривой, расположенной на поверхности. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1963, № 3.
9. *Беспалов Н. А.* О применении цепных дробей в сферической геодезии. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1966, № 3, с. 21—28.
10. *Беспалов Н. А.* Новые нелогарифмические формулы для решения некоторых задач сферической геодезии. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка 1966, № 2.
11. *Беспалов Н. А.* Нелогарифмические формулы для вычисления координат. — Геодезия и картография, 1966, № 10.
12. *Беспалов Н. А.* О применении численного анализа в сферической геодезии. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1968, № 2, с. 3—14.
13. *Беспалов Н. А.* Формулы для решения обратной геодезической задачи на любые расстояния. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1969, № 1, с. 3—11.
14. *Беспалов Н. А.* Применение тензорного исчисления в сферической геодезии. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1972, № 1.
15. *Беспалов Н. А.* Решение главных геодезических задач на различных поверхностях. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1972, № 2, с. 2—12.

16. *Беспалов Н. А.* Восходящие цепные дроби и алгоритмы Остроградского. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1972, № 3, с. 3—8.

17. *Беспалов Н. А., Шапошников А. И.* О решении на ЭВМ обратной и прямой геодезических задач на большие расстояния. Геодезия и картография, 1973, № 10.

18. *Беспалов Н. А.* Основные вопросы теории поверхности в сферической геодезии. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1974, № 5, с. 3—16.

19. *Беспалов Н. А., Шапошников А. И.* Применение прямоугольных координат для решения главных геодезических задач на поверхности эллипсоида. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1975, № 2, с. 9—17.

20. *Беспалов Н. А., Шапошников А. И.* Алгоритмы решения обратной геодезической задачи на любые расстояния и преобразования гиперболических координат в геодезические. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1975, № 4.

21. *Беспалов Н. А., Левченко Л. Я.* Решение главных геодезических задач на нерегулярной поверхности. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1975, № 5, с. 13—21.

22. *Беспалов Н. А., Шапошников А. И.* Решение прямой геодезической задачи на поверхности эллипсоида с помощью метода Рунге — Кутты — Инглада. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1976, № 3, с. 11—14.

23. *Беспалов Н. А., Шапошников А. И.* Решение задач разового зонда в прямоугольных сферических координатах. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1976, № 4, с. 3—6.

24. *Беспалов Н. А., Глузов В. П., Васин В. Н.* Некоторые вопросы точности и методики обработки результатов измерений, выполненных радиогеодезическими системами. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1977, № 5, с. 14—19.

25. *Беспалов Н. А.* Экономическая эффективность применения ЭВМ для решения геодезических задач численными методами. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1978, № 6, с. 138—143.

26. *Бессель Ф. В.* Избранные геодезические сочинения. Под ред. Багратуни Г. В. М., Геодезиздат, 1961.

27. *Бляшке В.* Круг и шар. М., Наука, 1967.

28. *Бондарчук П., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. Київ, Наукова думка, 1974.

29. *Буткевич А. В.* Исследования по решению вычислительных задач сферической геодезии. М., Недра, 1964, с. 259.

30. *Бугаевский Л. М.* Проблемы изыскания и использования равноугольных и близких к ним проекций для целей картографии и

геодезии. Автореф. дис. на соиск. уч. степени докт. техн. наук. М., МИИГАиК, 1971.

31. *Векуа И. Н.* Основы тензорного анализа. Тбилиси, изд. Тбилис. ун-та, 1967.

32. *Витковский В. В.* Практическая геодезия. СПб, 1911.

33. *Витман А. И.* Решение геодезических задач на большие расстояния. — Сб. ГУГК, вып. XII, 1945.

34. *Галченкова Р. И.* Фердинанд Миндинг. Л., Наука, 1970, с. 223.

35. *Ганьшин В. Н.* Геометрия земного эллипсоида. М., Недра, 1967, с. 113.

36. *Гаусс К. Ф.* Избранные геодезические сочинения. Т. II. Под общ. ред. С. Г. Судакова. М., Геодезиздат, 1958.

37. *Гельмерт Ф. Р.* Математические и физические теории высшей геодезии. Т. I. Математические теории. Под общ. ред. С. Г. Судакова. М., Геодезиздат, 1962.

38. *Еремеев В. Ф.* Способ решения обратной геодезической задачи на большие расстояния путем вычисления координат «средней» точки геодезической линии. — Труды ЦНИИГАиК, вып. 121, 1957.

39. *Журавский А. М.* Справочник по эллиптическим функциям. М., Изд-во АН СССР, 1941.

40. *Каврайский В. В.* Записки по сфероидической геодезии. Л., ВМА, 1944.

41. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей. Ч. I, II. М.—Л., ГИТТЛ, 1947.

42. *Кларк А.* Геодезия. Перевод В. В. Витковского. СПб, 1890, с. 386.

43. *Коллатц Л.* Численные методы решения дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностран. лит., 1953.

44. *Корнилов В. Е.* Система аппроксимаций Паде для степенных функций. — Изв. Томского политехн. ин-та, т. 154, 1967, с. 20—23.

45. *Красовский Ф. Н.* Избранные сочинения. Т. IV. М., Геодезиздат, 1955.

46. *Красовский Ф. Н.* Избранные сочинения. Т. I. М., Геодезиздат, 1953.

47. *Крылов А. Н.* Лекции о приближенных вычислениях. М.—Л., Гостехиздат, 1950.

48. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.

49. *Лесняк А. Г.* Решение и исследование трех основных задач сфероидической геодезии. Автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. техн. наук. Ленингр. горный ин-т им. Г. В. Плеханова, 1970.

50. *Люстерник Л. А.* Выпуклые фигуры и многогранники. М., ГИТТЛ, 1956.

51. *Мещеряков Г. А.* О математическом аппарате современной геодезии. — Труды НИИГАиК, т. XV. Новосибирск, 1961, с. 103—116.

52. *Мещеряков Г. А.* К вопросу о решении обратной геодезической задачи. — Труды НИИГАиК, т. X. Новосибирск, 1958, с. 103—115.

53. *Мещеряков Г. А.* Теоретические основы математической картографии. М., Недра, 1968.

54. *Морозов В. П.* Курс сфероидической геодезии. М., Недра, 1969.

55. *Морозов В. П.* Итоги науки. М., ВИНТИ, 1979.

56. *Нуеи-Нгок-Тхы.* Решение геодезических задач на апосфере с применением ЭВМ. Автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. техн. наук. МИИГАиК, 1970.

57. *Полевой В. А.* Математическая обработка результатов радиогеодезических измерений. М., Недра, 1971.

58. *Ремез Е. Я.* О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгоритмами М. В. Остроградского для приближения иррациональных чисел. — Сб.: Успехи математических наук, т. VI, вып. 5, 1951.

59. *Русин М. Н.* Решение геодезических задач на большие расстояния по центральному сечению. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка. Межвед. респуб. науч.-техн. сб., 1969, вып. 9.

60. *Рутисхаузер Г.* Алгоритм частных и разностей (пер. с нем.). М., изд-во иностр. лит., 1960.

61. *Сергиенко И. В.* Методы организации вычислительного процесса на вычислительных машинах. — Обзор. АН УССР, ин-т кибернетики. Киев, 1971, с. 162.

62. *Сержанов А. Е.* Прямая геодезическая задача. — Учен. зап. Даг. ун-та, 1961, № 1, с. 39—49.

63. *Слудский Ф. А.* Лекции по высшей геодезии. М., 1894.

64. *Сурнин Ю. В.* О точности решения обратной геодезической задачи (по пунктам, отнесенным к различным референц-эллипсоидам). — Труды НИИГАиК, т. XIV. Новосибирск, 1961, с. 61—70.

65. *Тилло А. А.* Геодезические исследования Гаусса, Бесселя и Ганзена (пер. с нем.). СПб, 1866.

66. *Таблицы эллиптических интегралов.* Т. I. М., изд-во АН СССР, 1962.

67. *Труды топ.-геод. комиссии,* вып. V. М., 1896.

68. *Труды топ.-геод. комиссии,* вып. VIII. М., 1898.

69. *Труды ЦНИИГАиК,* вып. 171. М., 1966.

70. *Труды ЦНИИГАиК,* вып. 73. М., 1950.

71. Труды ЦНИИГАиК, вып. 131, М., 1960.
72. Хандриков М. Ф. Элементарная теория эллиптических функций и интегралов с приложением их к решению основного вопроса геодезии. М., 1867.
73. Хандриков М. Ф. Одно из решений основного вопроса геодезии. Математический сборник, т. 17, вып. 3, 1894.
74. Хлопонин С. С. Некоторые преобразования цепных дробей.— Учен. зап. Марийского пед. ин-та, 1965, т. 26, с. 445—486.
75. Хлопонин С. С. Некоторые преобразования цепных дробей. Автореф. канд. дисс., Куйбышев, 1968.
76. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., ГИТТЛ, 1956, с. 203.
77. Ходорович П. А. Решение главной задачи высшей геодезии методом свободного выбора положения нормальной параллели при конформном изображении поверхности эллипсоида на поверхности шара. Изд. ОМСХИ, 1938.
78. Урмаев Н. А. Сферонидическая геодезия. М., РИО ВТС, 1955.
79. Чебышев П. Л. Избранные труды. М.—Л., Гостехиздат, 1955.
80. Шебшаевич В. С. Введение в теорию космической навигации. М., Советское радио, 1971.
81. Якоби К. Лекции по динамике. Л.—М., ГИТТЛ, 1948.
82. Christoffel E. Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke. Abh. Ak. Wiss. Berlin, 1868.
83. Forsyth A. Lectures on the differential Geometry of curves and surfaces Cambridge, 1920.
84. Halphen G. Traite des fonctions elliptiques et de leurs applications. Paris, 1888.
85. Hotine M. Mathematical Geodesy. Washington, 1969.
86. Joachimsthal F. Anwendung der Differential und Integralrechnung auf die Allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Leipzig, 1872.
87. Legendre A. Traité des fonctions elliptiques des integrales Eulériennes. Paris, 1825—1828.
88. Marussi. Bull. geod., 1948, N 12.
89. Tricomi F. G. Funzioni ellittiche. Bologna, 1951.
90. Schmehl H. Untersuchungen über ein allgemeines Erdellipsoid. Potsdam, 1927.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Введение	4
Раздел I. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ	9
Глава I. Общие основания теории поверхностей	9
§ 1. Введение	9
§ 2. Три основные формы поверхности и их инварианты	12
§ 3. Кривые на поверхности	24
§ 4. Главные направления и главные радиусы кривизны в точке поверхности	27
§ 5. Определение трех кривизн ν , δ , γ кривой на поверхности	29
§ 6. Квадратичные формы основных моделей планет	30
Глава II. Геодезическая линия и специальные координаты на поверхности	36
§ 7. Введение	36
§ 8. Дифференциальные уравнения геодезических линий	39
§ 9. Полугеодезические координаты на поверхности	44
Глава III. Некоторые вопросы геометрии трехосного эллипсоида	47
§ 10. Дифференциальные уравнения различных сетей на поверхности трехосного эллипсоида	48
§ 11. Эллиптически-тригонометрические координаты на поверхности трехосного эллипсоида	53
§ 12. Геодезические линии на трехосном эллипсоиде	57
Раздел II. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ	68
Глава IV. Дробно-рациональные приближения	69
§ 13. Введение	69
§ 14. Некоторые вопросы из теории цепных дробей	72
§ 15. Разложение в цепные дроби некоторых функций	79
§ 16. Вычисление эллиптических интегралов	84
§ 17. Другие способы получения дробно-рационального приближения	90
§ 18. Некоторые обобщения цепных дробей	95
§ 19. Восходящие цепные дроби и первый алгоритм Остроградского	101
§ 20. Ветвящиеся цепные дроби	105
§ 21. Алгоритмы вычисления некоторых функций	111
§ 22. Разложение функций по многочленам Чебышева	120
Глава V. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений	132
§ 23. Введение	132

	Стр.
§ 24. Методы Рунге — Кутта	134
§ 25. Оценка одношаговых методов	138
Раздел III. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ НА РАЗЛИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ	142
Глава VI. Основы методики решения геодезических задач на поверхности эллипсоида вращения	148
§ 26. Основные уравнения при решении главных геодезических задач по геодезической линии на поверхности эллипсоида вращения	148
§ 27. Общий метод решения главных геодезических задач на малые расстояния	156
§ 28. Основные зависимости между длинами геодезических линий, ортогональными координатами и азимутами на поверхности эллипсоида вращения	164
§ 29. Алгоритмы решения основных задач сфероидической геодезии	176
§ 30. Сравнение некоторых классических способов решения главных геодезических задач	185
Глава VII. Различные методы решения главных геодезических задач	199
§ 31. О применении различных кривых для решения главных геодезических задач	199
§ 32. Решение обратной геодезической задачи с помощью приближений Паде	207
§ 33. Решение главных геодезических задач в прямоугольных системах координат $p, q (x, y)$	212
§ 34. Решение главных геодезических задач с помощью эллиптических функций	217
§ 35. Решение прямой геодезической задачи методом Рунге—Кутта — Ингланда	223
§ 36. О точности решения обратной геодезической задачи по пунктам, отнесенным к различным референц-эллипсоидам	226
Глава VIII. Решение гиперболических засечек на эллипсоиде вращения	232
§ 37. Построение прямого алгоритма преобразования гиперболических координат в геодезические	235
§ 38. Обратный алгоритм преобразования гиперболических координат в геодезические	242
§ 39. Комбинированный алгоритм решения гиперболической засечки	245
§ 40. Решение гиперболической засечки в прямоугольных сфероидических координатах p, q	248
§ 41. Алгоритм преобразования гиперболических координат в координаты Гаусса — Крюгера	252
Глава IX. Решение главных геодезических задач на различных поверхностях	254

	Стр.
§ 42. Способ аппроксимации пояса эллипсоида вращения шаровым поясом	257
§ 43. Основные соотношения для геодезической линии на шаровом поясе	261
§ 44. Решение главных геодезических задач на апосфере	267
§ 45. Решение линейной засечки на апосфере	270
§ 46. Решение гиперболической засечки на апосфере	271
§ 47. Решение главных геодезических задач на трехосном эллипсоиде по геодезической линии на расстоянии до $s \leq 500$ км	273
Список литературы	280