



GRADO UNIVERSITARIO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

El metrónomo de Beethoven
Modelado físico de un misterio histórico

CURSO: 2016/2017

Almudena Martín Castro



GRADO UNIVERSITARIO EN FÍSICA

El metrónomo de Beethoven

Modelado físico de un misterio histórico

REALIZADO POR:

Almudena Martín Castro

DIRIGIDO POR:

Álvaro Perea Covarrubias

FACULTAD:

Facultad de Ciencias

Madrid, septiembre de 2017

El metrónomo de Beethoven

Modelado físico de un misterio histórico

Almudena Martín Castro

PALABRAS CLAVE:

metrónomo, doble péndulo, tempo, interpretación musical, extracción de información musical

RESUMEN:

Beethoven fue uno de los primeros compositores en acoger la invención del metrónomo para transmitir con mayor precisión su legado musical. Sin embargo, dos siglos después, el carácter de sus anotaciones metronómicas resulta controvertido. Consideradas, en general, más rápidas de lo que musicalmente podría considerarse adecuado, algunos autores han apuntado a un posible defecto en el metrónomo como origen del problema.

Esta es la hipótesis que se analiza en el presente trabajo. En primer lugar, y tras una breve introducción a las aportaciones realizadas desde la musicología que resultan imprescindibles para comprender el alcance de la polémica, se analizan los principales trabajos científicos que han abordado el problema desde la perspectiva física de la mecánica del metrónomo y sus resultados. A continuación, se argumenta que los modelos matemáticos utilizados en dichos trabajos previos no reflejan con precisión el comportamiento de un metrónomo real y, por tanto, sus conclusiones quedan en entredicho. En su lugar, se propone un modelo de doble péndulo más completo que considera (*i*) una corrección para ángulos grandes, (*ii*) una corrección debida a la masa del mecanismo y (*iii*) rozamiento y fuerza impulsora, y se plantean distintos posibles fallos en el mecanismo que podrían haber dado lugar a una descalibración del metrónomo. La validez de este modelo queda demostrada mediante un estudio experimental de un metrónomo moderno, lo que a la postre aporta una metodología para hallar los parámetros del metrónomo original de Beethoven a partir de planos y fotografías antiguas. Finalmente, se extraen y analizan los *tempi* de 36 integrales sinfónicas dirigidas por 36 directores distintos y se contrastan con las anotaciones originales de Beethoven a través de la lente del modelo teórico y las posibles distorsiones propuestas para tratar de arrojar luz sobre un misterio histórico.

El metrónomo de Beethoven

Modelado físico de un misterio histórico

Almudena Martín Castro

KEYWORDS:

metronome, double pendulum, tempo, musical performance, music information retrieval

ABSTRACT:

Beethoven was one of the first composers to adopt the use of the metronome to transmit his musical ideas more accurately. Ironically, two centuries after his death his metronome markings are still under dispute as they are considered, in general, too quick to be played. As a result, some performers and academics have suggested that Beethoven's "sick metronome" is to be blamed for the controversy.

The present work analyses this hypothesis and explores the relation between slow performance *tempi* and those produced by a broken metronome. First, a short introduction contextualises Beethoven's metronome markings within the field of Musicology, a discipline that will be fundamental to understand their controversial nature. Next, we analyse other scientific papers that focus on the mechanical characteristics of the metronome. Some of the proposed mathematical models fail to describe the metronome accurately and, therefore, their conclusions are questioned. A more complete double-pendulum model is proposed, which takes into account the necessary corrections due to the amplitude of the pendulum movement, its complete mass and the effect of friction and impulse forces. Additionally, different distortions to the model that could have affected the metronome's frequency are analysed. This new model is validated empirically through the study of a contemporary metronome. As a result, we develop a methodology for approximating Beethoven's metronome parameters (its masses and dimensions) through the analysis of ancient metronome photographs. Finally, we analyse 36 complete symphonic recordings (all the symphonies directed by 36 different conductors) and compare their *tempi* with Beethoven's metronome markings with the aid of the proposed metronome theoretical model, casting new light over this historical mystery.

D. Álvaro Perea Covarrubias, profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Educación a Distancia, como director del Trabajo Fin de Grado de D.^a Almudena Martín Castro

Informa:

que el presente trabajo, titulado:

El metrónomo de Beethoven: Modelado físico de un misterio histórico

Ha sido realizado y redactado por la mencionada alumna bajo mi dirección, y con esta fecha autorizo su presentación.

Madrid, a de de 2017

Fdo. Álvaro Perea Covarrubias

Los abajo firmantes autorizan a que la presente copia de Trabajo Fin de Grado se ubique en la biblioteca del centro y/o facultad para ser libremente consultada por las personas que lo deseen.

Madrid, a de de 2017

Fdo. Álvaro Perea Covarrubias

Fdo. Almudena Martín Castro

Agradecimientos

A Iñaki Úcar, por la música compartida.
Sin su apoyo y su colaboración, este trabajo no habría sido posible.

Índice general

Índice de figuras	xv
Índice de tablas	xvii
1. Introducción	1
1.1. Contexto	1
1.1.1. El problema de la notación	1
1.1.2. El metrónomo de Winkel	2
1.1.3. Beethoven y el metrónomo	3
1.1.4. Polémica en torno a los <i>tempi</i> de Beethoven	4
1.2. Motivación	5
1.3. Objetivos	6
2. Estado del arte	7
2.1. Aportaciones desde la musicología	7
2.1.1. Románticos	7
2.1.2. Historicistas	8
2.2. Aportaciones desde la física	9
2.2.1. Talbot, 1971	9
2.2.2. Forsén <i>et al.</i> , 2013	9
3. Modelo teórico	11
3.1. Descripción del metrónomo	11
3.2. El periodo del péndulo doble	12
3.2.1. Corrección para ángulos grandes	13
3.2.2. Corrección debida a la masa de la varilla	15
3.2.3. Rozamiento y fuerza impulsora	15
3.2.4. Análisis energético	19
3.2.5. Resumen	20
3.3. Perturbaciones a la frecuencia	21
3.3.1. Variación de las distancias al eje, R y r	22

ÍNDICE GENERAL

3.3.2. Variación de la proporción entre masas, M'	23
3.3.3. Aumento del rozamiento	24
4. Resultados experimentales	27
4.1. Validación del modelo teórico	27
4.2. El metrónomo de Beethoven a partir de fotografías	31
5. Análisis de interpretaciones sinfónicas	37
5.1. Metodología	37
5.2. Resultados	43
6. Conclusiones	47
Referencias	49

Índice de figuras

3.1. Funcionamiento del metrónomo	12
3.2. Esquema del metrónomo y los parámetros usados para calcular Ω	13
3.3. Valor de la frecuencia en función de r para distintos valores de μ'	16
3.4. Trayectoria del metrónomo en el plano de fases para distintos valores de c	17
3.5. Valor de la frecuencia en función de r para distintos valores de τ_{roz}	19
3.6. Frecuencia reproducida en función de la frecuencia escrita para distintas variaciones de R	22
3.7. Frecuencia reproducida en función de la frecuencia escrita para distintas variaciones de M'	24
3.8. Frecuencia reproducida en función de la frecuencia escrita para distintas valores de τ_{roz}	25
4.1. Ángulo de máxima oscilación para distintas marcas del metrónomo	28
4.2. Frecuencia experimental y teórica frente a la marca metronómica	30
4.3. Metrónomo de Mälzel esquematizado en la patente de Londres de 1815.	32
4.4. Metrónomos de la exposición <i>Auf Takt!</i> (colección Tony Bingham).	33
4.5. Ajuste polinómico de la frecuencia al cuadrado respecto a la distancia r de la masa superior m al eje para los distintos metrónomos estudiados.	34
4.6. Valores de M' y μ' calculados a partir del ajuste de Ω^2 con r	35
5.1. Armónicos más frecuentes en función del tipo de compás	41
5.2. Ejemplo representativo de la metodología de tratamiento de datos	42
5.3. Distribución del <i>tempo</i> interpretativo normalizado para cada director	43
5.4. <i>Tempo</i> interpretativo en función del <i>tempo</i> de Beethoven para cada tipo de interpretación	44
5.5. Comparación de los <i>tempi</i> interpretativos con dos modelos de metrónomo descalibrado	46

Índice de tablas

4.1. Parámetros del metrónomo Neewer.	30
4.2. Datos y dimensiones de los metrónomos utilizados en el análisis.	34
4.3. Parámetros estimados para el metrónomo de Beethoven.	35
5.1. Lista de grabaciones de integrales sinfónicas estudiadas	38

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo, se introducirá el problema del metrónomo de Beethoven. Se dará, en primer lugar, un breve contexto histórico para comprender algunos de los retos que presenta la notación musical, las implicaciones que tuvo la invención del metrónomo a comienzos del s. XIX y cómo Beethoven entró en contacto con él. Se explicarán brevemente las bases de la polémica que rodea sus marcas metronómicas dando paso a la motivación y los objetivos del presente trabajo.

1.1. Contexto

1.1.1. El problema de la notación

La mayoría de las tradiciones musicales de distintas culturas se transmiten únicamente de manera oral. Este fue el caso de la música occidental durante la mayor parte de su historia. Hacia el s. IX, los primeros intentos de codificar los sonidos musicales, de fijarlos sobre el papel, consistían apenas en ayudas a la memoria del intérprete que debía, en todo caso, conocer la música antes de poder interpretar su escritura [1]. Desde aquel punto de partida, la notación musical evolucionó enormemente. Poco a poco fueron apareciendo sistemas que codificaban las frecuencias de los sonidos: primero indicando su altura de manera relativa, poco a poco, consolidando marcos más absolutos.

Del mismo modo, y aunque de forma más tardía, las duraciones de los sonidos empezaron a ser anotadas. Hacia el s. XIV existía ya un sistema de símbolos similar al contemporáneo que permitía codificar las duraciones relativas de los sonidos entre sí. Y esta es la palabra clave: duración *relativa*. Si bien el intérprete de una partitura podía identificar qué notas duraban más que otras y en qué proporción (lo que comúnmente conocemos como “ritmo”), la velocidad global —el *tempo*— a la que esta partitura debía interpretarse seguía dependiendo, principalmente, de su intuición musical.

En general, las convenciones culturales solían dar respuesta a este último interrogante: los compositores no tenían necesidad de indicar la velocidad o *tempo* de una

1. INTRODUCCIÓN

partitura dado que este era obvio por el contexto. Poco a poco comenzaron a introducirse indicaciones de carácter —como *Allegro*, *Andante*, *Adagio*— en un intento por eliminar este último reducto de ambigüedad. Sin embargo, la imprecisión inherente a estos términos era cada vez más insuficiente para compositores que, con el transcurso de las décadas, se habían ido convirtiendo en autores; en artistas. Fue necesario esperar hasta 1816 para que apareciese un marco de referencia temporal verdaderamente absoluto y unívoco gracias a la invención del metrónomo.

1.1.2. El metrónomo de Winkel

Un metrónomo es un dispositivo capaz de emitir una señal, generalmente acústica, a intervalos regulares de tiempo, según una frecuencia elegida por el usuario. Cada una de estas señales marca lo que en música se conoce como un *pulso* y, en consecuencia, el metrónomo indica la frecuencia deseada en *pulsos por minuto* o *ppm*.

Puesto que el objetivo del aparato es producir intervalos regulares de tiempo, no debe resultar extraño que los primeros metrónomos, a finales del s. XVII, basasen su funcionamiento en el péndulo simple [2]. Las propiedades del péndulo se conocían desde tiempos de Galileo Galilei, el primero en experimentar con una masa suspendida de un trozo de cuerda. Fue el célebre físico italiano quien descubrió que el periodo de un péndulo depende de su longitud, no de su masa o de la amplitud del movimiento. No obstante, aquellos primitivos metrónomos adolecían de dos fuertes defectos: su tamaño y su limitada autonomía. En primer lugar, el rango de *tempi* utilizados en música (típicamente, entre 40 ppm y 200 ppm) y el hecho de utilizar el semiperiodo como medida del pulso obligaba a construir péndulos de más de dos metros de altura y a variar su longitud para los *tempi* más rápidos hasta los 11 cm. Estos dispositivos distaban mucho de ser trasladables o cómodos. Pero además, no disponían de ningún mecanismo que impulsase el péndulo para contrarrestar el rozamiento, por lo que no era posible prolongar su movimiento durante un tiempo razonable.

No habría que esperar mucho para que apareciese un salto cualitativo en ambos sentidos. Hacia 1812, en Ámsterdam, Dietrich Nikolaus Winkel (1780-1826) estaba experimentando con distintos tipos de péndulos [3]. Descubrió que, utilizando una varilla rígida, era posible situar dos masas en sus extremos y hacerlas oscilar en torno a un eje con un periodo regular. Esta sencilla modificación permitiría reducir los metrónomos hasta un tamaño de unos 30 cm. Quizás por ello, dándose cuenta de las aplicaciones que el péndulo doble tendría en el mundo de la música, Winkel invirtió tres años más en perfeccionar el funcionamiento de su metrónomo: añadió un mecanismo de resorte para impulsar su movimiento y para marcar los pulsos mediante un leve sonido. En 1815 envió un informe acerca de su nuevo invento a la Academia de Ciencias de los Países Bajos que fue muy elogiado. Lo que no podía saber, en aquel momento, es que no obtendría ningún beneficio por su trabajo.

Si bien hoy recordamos a Winkel como el verdadero inventor del primer metrónomo mecánico, su época no le trató con el mismo reconocimiento. Winkel había publicado

su trabajo ante la Academia de Ciencias, pero cometió el error de no patentarlo. Otro peculiar personaje de la época, Johann Nepomuk Mälzel (1772–1838) —peor inventor, probablemente, pero mucho mejor hombre de negocios—, supo aprovechar aquel descuido. Tras intentar comprarle el invento al mismo Winkel sin éxito, el mismo año de 1815 construyó su propia copia, añadió una pequeña escala junto a la masa movable y se aseguró de que fuese patentada bajo su nombre: primero en París, luego también en Londres [4] y Viena. Para cuando Winkel quiso reaccionar, ya era demasiado tarde: las fábricas de Mälzel habían conseguido popularizar el invento, e incluso los editores de partituras usaban como referencia las siglas MM (Metronómo de Mälzel).

1.1.3. Beethoven y el metrónomo

Hoy sabemos que la historia de la música no debe mucho a la inventiva de Mälzel. No se puede decir lo mismo de su relación con Beethoven. Ambos se conocían de antemano: Mälzel tenía una gran fama como constructor e inventor, por lo que el compositor había recurrido a él previamente en busca de dispositivos, como trompetillas, que ayudasen a mitigar su creciente sordera. Tan pronto como Mälzel sacó a la venta “su” metrónomo (y, probablemente, con fines promocionales), debió de enviarle una copia al que era, sin duda, el músico más relevante de su época: Ludwig van Beethoven [5].

A principios de 1817, ya existe constancia del uso del metrónomo por parte de Beethoven. En una carta dirigida Hofrath von Mosel, Beethoven dice haber querido siempre abandonar los “inconsistentes términos *Allegro*, *Andante*, *Adagio* y *Presto*” y tener ahora la oportunidad de hacerlo gracias al metrónomo de Mälzel [6]. El compositor acogió con entusiasmo la llegada del nuevo invento y, de hecho, las suyas son las primeras indicaciones metronómicas que se conservan en la historia de la música.

Todo ello es coherente con su figura de compositor minucioso, consciente de su rol como artista y, por ende, especialmente preocupado por que su música fuese interpretada rigurosamente, tal y como había sido concebida. Esto es especialmente cierto en lo tocante a lo que constituye el mayor legado de Beethoven y su obra más característica: sus nueve sinfonías. En 1817, Beethoven ya había compuesto las ocho primeras, pero, tan pronto como pudo hacer uso del metrónomo, se dedicó a revisarlas y a anotar los *tempi* apropiados para su interpretación. Estos *tempi* serían publicados en *Leipziger Allgemeine Musikzeitung* en diciembre de 1817 [5]. La novena sinfonía, finalizada en 1824 y publicada en 1826, nacería ya con sus correspondientes marcas metronómicas.

La paradoja de esta historia es que, a pesar de la minuciosidad, a pesar de toda la intencionalidad manifestada por Beethoven en lo referente al *tempo* de sus obras, las indicaciones metronómicas que han llegado hasta nuestros días no han servido para clarificar la interpretación de sus obras. Más bien todo lo contrario: a día de hoy existe una fuerte polémica, no resuelta por intérpretes ni por académicos, acerca de la naturaleza y la “corrección” de dichas anotaciones.

1. INTRODUCCIÓN

1.1.4. Polémica en torno a los *tempi* de Beethoven

El origen de la discrepancia es múltiple: en primer lugar y, especialmente en el caso de la novena sinfonía, existen dudas sobre la fiabilidad de las fuentes documentales donde aparecen dichas anotaciones. Peter Stadlen [7] analizó la existencia de múltiples inconsistencias entre diversos manuscritos y primeras ediciones. Algunas de ellas podrían deberse a simples errores tipográficos pero, además, parece que debido a la ya completa sordera de Beethoven en 1826 (año en que publicó los *tempi* de la novena) fue su sobrino Karl quien tomó estas anotaciones, pudiendo haber cometido errores de bulto que se manifiestan en inconsistencias musicales de diversa índole.

No obstante, las principales reservas acerca de los *tempi* de Beethoven proceden de su propia música: a ojos de muchos intérpretes y críticos musicales, gran parte de sus anotaciones son claramente absurdas. En general, se consideran mucho más rápidas de lo que la propia partitura *pide*, o de lo que *musicalmente* se considera adecuado. Existe, en consecuencia, una disputa entre aquellos que persiguen interpretaciones más rigurosas históricamente, fieles a la supuesta voluntad escrita de Beethoven, y aquellos que deciden ignorar abiertamente sus anotaciones metronómicas, alegando posibles errores en las mismas y apuntando a la propia naturaleza de la música y al buen criterio de los intérpretes como fuentes más fiables para dirimir esta cuestión.

Los defensores de la primera postura argumentan que la supuesta antimusicalidad de las anotaciones de Beethoven no es tal; que sus *tempi*, de hecho, pueden ser interpretados y que la divergencia entre los intérpretes contemporáneos se debe, más bien, a modas surgidas a partir del Romanticismo que alteran la visión musical de Beethoven, o bien, a las diferencias en la composición de las orquestas y sus instrumentos. Quienes defienden, en cambio, que las anotaciones podrían no ser fiables apuntan a distintas fuentes de error. En primer lugar, de tipo documental, como ya se ha dicho: bien el editor o bien el sobrino de Beethoven podrían haber cometido distintos tipos de erratas. Pero existen otras explicaciones plausibles: para cuando Beethoven anotó los *tempi* de sus sinfonías, estaba ya casi completamente sordo. Quizás no pudo utilizar correctamente el metrónomo al no conseguir oír sus *clicks*. Quizás no veía bien en qué punto se alineaba la masa con la escala. Quizás su propia audición interna de las obras alteraba profundamente su velocidad. O quizás, incluso, fuese el metrónomo el origen de todo el problema.

Existe constancia documental de que, al menos en dos ocasiones, el metrónomo de Beethoven no funcionaba correctamente [6]. En 1819, Beethoven escribe a su amigo, el copista Ferdinand Ries, disculpándose por no poder enviarle todavía los *tempi* de su Sonata para piano n.º 29 porque el metrónomo estaba roto. En otra carta, en 1825, vuelve a desear que su “metrónomo enfermo” recupere su pulso regular con ayuda del relojero. Se especula que el propio Beethoven, irascible como su caricatura lo recuerda o quizás con síntomas de envenenamiento por plomo [3], podría haber lanzado el metrónomo en un ataque de rabia. Si por este motivo, o a causa de algún rozamiento interno, el metrónomo hubiese ralentizado o acelerado su pulso, Beethoven se habría visto obligado a alterar la posición de la masa móvil para configurar las frecuencias

deseadas. Pero, al anotar la frecuencia marcada por un metrónomo así descalibrado, todas sus indicaciones resultarían... *extrañas*.

1.2. Motivación

Mucho se ha especulado sobre el metrónomo de Beethoven. Desde la musicología, tanto aquellos que creen que sus anotaciones reflejan fielmente la voluntad del compositor como los que desconfían de ellas suelen buscar en la historia, en los documentos escritos de la época, respuestas a esta cuestión. Este tipo de análisis ha aportado puntos de vista muy interesantes al debate, pero, al no poder extraer nueva información de este tipo de fuentes y al no conservarse el metrónomo del propio compositor, resulta improbable que logren zanjar la cuestión.

Además, para analizar las divergencias entre las distintas interpretaciones de la música de Beethoven, muchos musicólogos han tomado la duración de las mismas como aproximación global al *tempo* interpretativo. Esta metodología resulta bastante limitada: por un lado, no permite comparar los *tempi* de movimientos que tienen varias indicaciones metronómicas distintas sucesivas y, por otro, impide comparar interpretaciones que siguen distintos criterios en cuanto a las repeticiones de la partitura. Pero, sobre todo, se obvia que el *tempo* de una pieza puede ser bastante irregular, existiendo *accelerandi*, *ritardandi* y pausas de distinta índole que pueden afectar a la duración total de la interpretación. Aproximar el *tempo* interpretativo de este modo es equivalente a intentar describir la velocidad de un coche durante una parte de un trayecto conociendo únicamente la distancia recorrida y la duración total del viaje.

Por otra parte, las aportaciones hechas desde la física han resultado también limitadas. Los modelos de metrónomo publicados hasta la fecha no resisten una validación experimental y, por tanto, las posibles averías propuestas no resultan realistas. Pero, sobre todo, hasta ahora no se ha intentado comprobar si estas averías “explican” aquello que en primer término da lugar a la polémica: la divergencia entre las marcas metronómicas escritas por Beethoven y los *tempi* seguidos por sus intérpretes.

Existe la necesidad, por tanto, de plantear un modelo analítico más completo y preciso del metrónomo de Beethoven y de las distintas distorsiones que podrían haberlo descalibrado. Pero, sobre todo, existe la oportunidad de contrastar este planteamiento puramente mecánico con información que, en trabajos previos, ha quedado relegada al mundo de la musicología: los *tempi* de las interpretaciones musicales.

Hoy en día, podemos acceder a un catálogo sin precedentes de interpretaciones musicales. Desde hace pocos años, además, existen algoritmos para medir el *tempo* de dichas interpretaciones de manera continua y automatizada gracias a software de análisis de sonido. Con acceso a todos estos datos, es posible analizar con mucho más detalle de qué manera divergen las interpretaciones de las obras de Beethoven y sus anotaciones metronómicas. Si, como apuntan algunos, estas anotaciones adoleciesen de algún error de tipo sistemático (debido al mal funcionamiento del metrónomo), y si este error pudiese ser corregido por la intuición musical y los conocimientos de los intérpretes

1. INTRODUCCIÓN

contemporáneos, entonces debería ser posible ajustar la divergencia existente a algún modelo analítico de metrónomo averiado, lo que nos permitiría arrojar luz sobre la polémica con la evidencia más robusta hasta la fecha.

1.3. Objetivos

En este trabajo nos proponemos analizar sistemáticamente la hipótesis del metrónomo roto de Beethoven. Para ello:

- Se propondrá un modelo analítico que describa con precisión el funcionamiento del metrónomo mecánico de péndulo doble.
- Se analizarán distintas distorsiones que puedan alterar su frecuencia.
- Por último, se comparará la divergencia existente entre los *tempi* escritos por Beethoven y los *tempi* escogidos por diversos intérpretes contemporáneos.

Bajo la hipótesis analizada, los *tempi* de las interpretaciones deberían corresponder a la frecuencia reproducida por un péndulo doble averiado o mal calibrado, mientras que las anotaciones de Beethoven vendrían dadas por las marcas de la escala de ese mismo metrónomo.

Capítulo 2

Estado del arte

En el Capítulo 1, se ha presentado la polémica existente en torno a las marcas metronómicas de Beethoven. La mayor parte de las aportaciones a esta cuestión proceden del ámbito académico de la musicología. No obstante, la hipótesis del metrónomo roto ha sido analizada también por físicos y matemáticos. En este capítulo se describen brevemente algunos de estos trabajos.

2.1. Aportaciones desde la musicología

Muchos musicólogos e intérpretes han intentado arrojar luz sobre las controvertidas anotaciones metronómicas de Beethoven. Podríamos decir que existen, principalmente, dos corrientes de opinión [8]: por un lado, están aquellos que defienden que dichas anotaciones reflejan fielmente la voluntad del compositor y deben ser respetadas (denominados *autenticistas* o *historicistas*); por otro, aquellos que abogan por una interpretación más laxa o que desconfían abiertamente de las anotaciones (denominados *no historicistas* o *románticos*).

2.1.1. Románticos

Parece que la desviación de los intérpretes respecto a las marcas metronómicas de Beethoven data ya de tiempos del compositor. Evidentemente, no contamos con grabaciones de la época que permitan verificarlo, pero sí se han conservado los tiempos de interpretación de Sir George Smart (1776-1867), un director que llegó a conocer en vida a Beethoven en 1825 y a hablar con él acerca de sus sinfonías. Smart dejó anotadas las duraciones de sus propias representaciones y, si bien omitió bastantes detalles, parece que sus *tempi* no diferían mucho de los de los directores *románticos* contemporáneos [9]: eran, por tanto, más lentos que los pedidos por Beethoven. Por otra parte, el propio biógrafo de Beethoven, Anton Felix Schindler, hoy muy criticado, llegó a falsificar datos para desacreditar estas marcas metronómicas, a su parecer demasiado rápidas [5].

2. ESTADO DEL ARTE

La disidencia de los intérpretes debió de agravarse debido a la influencia de Richard Wagner quien, a partir de mediados de siglo, da lugar a toda una escuela interpretativa orquestal. Como director, Wagner tendió a ralentizar la música de Beethoven en busca de una expresión más personal (más *wagneriana*), un estilo más *romántico* (de ahí la denominación) que ha trascendido hasta nuestros días.

Desde el mundo de la academia, las marcas metronómicas también han encontrado firmes detractores. Nicholas Temperley afirmó que las marcas de Beethoven son “prácticamente inútiles como guías para velocidad interpretativa” [9]. En consecuencia, defiende que la única forma de determinar la velocidad apropiada para la música de Beethoven es analizando interpretaciones. Temperley acomete esta tarea comparando la duración de distintas versiones, incluida la de Sir George Smart.

Uno de los musicólogos que dedicó más esfuerzo al análisis de esta cuestión fue Peter Stadlen. En 1967, publicó un artículo [7] analizando la fiabilidad de las marcas metronómicas de la novena sinfonía (y, en concreto, del Trio del segundo movimiento) desde un punto de vista documental. Años más tarde, en 1982, extiende este trabajo a un análisis más general sobre las marcas metronómicas de Beethoven en todo su repertorio [5]. Para ello, documenta los *tempi* escogidos por 10 directores orquestales, 4 ensembles, 7 cuartetos y 7 pianistas. A continuación, etiqueta las marcas de Beethoven como “demasiado rápidas” o “factibles” en función de cuántos intérpretes se adhieren a ellas. Concluye que, de las 135 marcas analizadas, al menos 66 son claramente problemáticas y posiblemente incorrectas. El trabajo de Stadlen resulta limitado y hasta cierto punto subjetivo por los medios utilizados (el autor no pudo sino medir manualmente los *tempi* de las distintas interpretaciones), pero, sin duda, supone un importante referente para el presente trabajo.

2.1.2. Historicistas

La influencia de Wagner prevaleció sin oposición durante el s. XX, especialmente entre los directores alemanes, hasta la llegada del movimiento historicista en los años 80. Este movimiento (también llamado *interpretación auténtica*, *interpretación de periodo* o *interpretación históricamente informada*, *H.I.*) es un movimiento interpretativo que se caracteriza por intentar reproducir de la manera más fiel posible la música de otros periodos históricos, tal y como era representada en dichos periodos. En muchos casos, esto implica la utilización de instrumentos de época, pero afecta también a otros criterios interpretativos y estilísticos como podría ser el *tempo*.

Entre los musicólogos, el primero en denunciar la falta de rigor de los intérpretes en lo tocante a las marcas metronómicas de Beethoven fue Rudolf Kolisch (1942). Kolish defiende que las marcas son perfectamente factibles y fiables y, creyéndolo así, decide ir más allá: basándose en ellas, trata de fundamentar una metodología que le permite inferir los *tempi* ausentes de partituras donde Beethoven no llegó a anotarlo [10]. En la misma línea se pronunciaron, años más tarde, Hermann Beck y Herbert Seifert [8].

2.2. Aportaciones desde la física

Beethoven debió de utilizar uno de los primeros modelos de metrónomo fabricados por Mälzel. Por este motivo, parece posible que distintos fallos de construcción hubiesen afectado a su funcionamiento, aún no perfeccionado. Si bien esta hipótesis toca de manera directa un problema mecánico, pocos trabajos han tratado de indagar sobre el tema desde este ámbito. Contamos, no obstante, con dos precedentes que plantean distintos modelos de péndulo y analizan su posible mal funcionamiento: los trabajos de Lawrence Talbot y de Sture Forsén *et. al.*

2.2.1. Talbot, 1971

Animado por Peter Stadlen, Lawrence Talbot decidió analizar el efecto del rozamiento sobre el funcionamiento de un metrónomo [11]. Para ello, parte de un modelo basado en el péndulo simple al que añade una fuerza de rozamiento estático y la fuerza restauradora del muelle como una fuerza instantánea.

Utilizando variables adimensionales y representando la trayectoria en el plano de fases, Talbot consigue calcular el periodo con rozamiento en función del periodo original. Asimismo, determina que la energía aportada por el muelle en cada periodo es una constante del movimiento que además es independiente de la frecuencia. Esto le permite analizar el efecto de un aumento de la fricción sobre el periodo y limitar el rango de valores que puede llegar a tomar.

Si bien Talbot comprueba que un aumento del rozamiento podría haber ralentizado el pulso del metrónomo, concluye que este fenómeno no es suficiente para explicar el origen de las marcas y su divergencia respecto a las interpretaciones contemporáneas. Arguye que un aumento del rozamiento habría dado lugar a un movimiento demasiado asimétrico del doble péndulo que habría sido evidente para el compositor.

2.2.2. Forsén *et al.*, 2013

En su trabajo de 2013 [3], Sture Forsén y sus colaboradores retoman el problema del péndulo de Beethoven. En este caso, se proponen analizar cómo distintos desplazamientos de la masa inferior del metrónomo podrían haber dado lugar a su descalibración. Para ello, parten de un modelo muy sencillo de doble péndulo y calculan el valor del periodo en función de las dos masas y sus distancias al eje del metrónomo.

El análisis planteado en este trabajo es puramente teórico y bastante especulativo. Dado que los parámetros del metrónomo de Beethoven (los valores de las masas y las distancias) a día de hoy son desconocidos, los autores utilizan una única referencia interpretativa para ajustar su modelo: el primer movimiento de la Sonata n.º 29 *Hammerklavier* para piano cuyo *tempo* Beethoven fijó en 138 ppm. De acuerdo con el pianista Wilhelm Kempff, estas “erróneas [sic] marcas metronómicas pueden privar a este movimiento de su radiante majestuosidad”. Por ello, Forsén *et al.* suponen que

2. ESTADO DEL ARTE

esta marca podría haberse correspondido a un *tempo* real de 110 ppm (el *tempo* que Kempff sigue, aproximadamente, en su interpretación al piano).

Si bien la base física provista en este trabajo es apropiada, no resiste una validación experimental. Por otra parte, al no utilizar más que un *tempo* como referencia para ajustar el modelo, los parámetros propuestos dan lugar a absurdos cuando intentan aplicarse a otras marcas metronómicas.

Capítulo 3

Modelo teórico

En este capítulo, se describirá inicialmente el funcionamiento de un metrónomo mecánico. Para ello, se partirá de un modelo analítico básico y se propondrán distintas correcciones que permitan describir mejor su movimiento. Se analizarán a continuación distintas perturbaciones (maneras de “romper” el metrónomo) que puedan alterar la frecuencia. Las anotaciones metronómicas de Beethoven se caracterizan por ser anómalamente rápidas, por lo que nos centraremos en aquellas perturbaciones que ralenticen el movimiento del péndulo sin alterar la posición de la masa superior (aquella que el compositor habría manipulado para configurar el pulso deseado) o, en general, pudiendo pasar desapercibidas.

3.1. Descripción del metrónomo

El metrónomo del propio Beethoven se perdió en una exposición celebrada en Viena en 1921 [11]. Sabemos, no obstante, que fue uno de los primeros modelos fabricados por Mälzel y su funcionamiento coincide con el descrito en la patente de 1815 [4].

Las características básicas del diseño original pueden consultarse en la Figura 3.1, y coinciden, esencialmente, con el funcionamiento de un metrónomo contemporáneo. El péndulo doble consta de dos masas unidas entre sí por una varilla rígida. Esta varilla, a su vez, está sujeta perpendicularmente a un eje (c en la figura, donde se representa de perfil) que permite a las dos masas oscilar en torno a la posición de equilibrio. La masa mayor, en la parte inferior de la varilla, cuelga a una distancia fija del eje. La masa superior puede deslizarse sobre la varilla y quedar fija en distintos puntos, permitiendo así al usuario variar la frecuencia marcada por el metrónomo. Una escala situado tras la varilla indica la frecuencia asociada a cada punto.

A este sencillo sistema se añade una fuerza excitadora basada en un mecanismo de escape de reloj y un muelle en espiral (resorte) que permite almacenar energía. El eje del péndulo cuenta con dos paletas (a y b en la figura) que interactúan con la rueda dentada del escape (K). Cuando el péndulo se mueve hacia un lado, la rueda es frenada por una

3. MODELO TEÓRICO

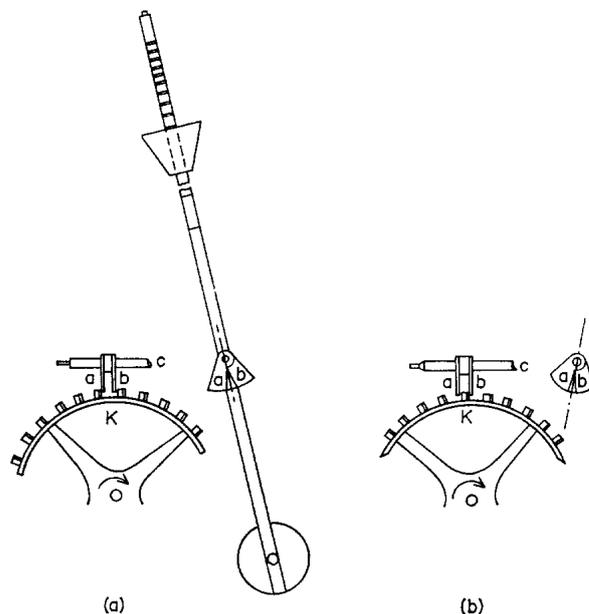


Figura 3.1: Funcionamiento del metrónomo (recreación de L. Talbot [11] a partir de los dibujos de la patente de Londres de 1815 [4]). La figura muestra dos vistas de la rueda de escape (plano perpendicular al del movimiento del péndulo) y dos detalles del eje del metrónomo con sus dos paletas. (a) Cuando el péndulo se inclina hacia un lado, la paleta *a* detiene el avance de la rueda de escape. A medida que el péndulo avanza hacia la posición de equilibrio, la rueda tiene espacio para avanzar entre las dos paletas impulsando a su paso el movimiento del péndulo. (b) Una vez el péndulo supera la posición de equilibrio y alcanza cierta inclinación en el sentido opuesto, el siguiente de la rueda choca contra la paleta *b* produciendo el *click* característico del metrónomo.

de las paletas. En el momento en que el péndulo alcanza su posición central, la rueda avanza impulsando el movimiento, pero inmediatamente después vuelve a ser frenada por el impacto del siguiente diente sobre la paleta del lado opuesto, y así sucesivamente.

Los *clicks* del metrónomo son producidos por el choque sucesivo de los dientes de la rueda de escape contra las paletas del eje. Este sonido es amplificado por la caja de resonancia que contiene al metrónomo.

3.2. El periodo del péndulo doble

Resulta sencillo hallar el periodo de un péndulo doble como el del metrónomo mediante mecánica lagrangiana. Para ello, consideramos un sistema de dos masas moviéndose en dos dimensiones con tres ligaduras, a saber: la distancias de las respectivas masas al eje y el ángulo de giro, que debe ser idéntico para ambas. De este modo, obtenemos un

3.2 El periodo del péndulo doble

sistema con un único grado de libertad cuyo lagrangiano resulta ser:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(MR^2 + mr^2) - g(1 - \cos\theta)(MR - mr) \quad (3.1)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, M es la masa inferior del péndulo, R es la distancia que la separa del eje, m es la masa superior y r su distancia al eje (ver Figura 3.2). Se ha llamado θ al ángulo formado por la varilla del metrónomo con la vertical —la posición de equilibrio— y $\dot{\theta}$ a su derivada respecto del tiempo.

Si suponemos que el ángulo que alcanza el péndulo no es muy grande, podemos expandir en serie de Taylor el $\cos\theta$. De este modo, obtenemos:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(MR^2 + mr^2) - \frac{1}{2}\theta^2(MR - mr) \quad (3.2)$$

Utilizando las ecuaciones de Lagrange, obtendremos la frecuencia angular del movimiento, Ω , que se relaciona con el *tempo* marcado por el metrónomo (en pulsos por minuto) mediante la siguiente fórmula:

$$\text{Tempo [ppm]} = 60\Omega/\pi \quad (3.3)$$

donde la frecuencia angular viene dada por

$$\Omega = \left(g \frac{MR - mr}{MR^2 + mr^2} \right)^{1/2} \quad (3.4)$$

Este es, precisamente, el modelo del que parten Forsén *et al.*. Sin embargo y como veremos en el siguiente capítulo, resulta poco descriptivo cuando intenta validarse experimentalmente. Para mejorar las predicciones de este modelo, es necesario aplicar una serie de correcciones: en primer lugar, (i) en un metrónomo real, las oscilaciones difícilmente pueden considerarse pequeñas, llegando a alcanzar un ángulo máximo de entre 40° y 60° (dependiendo del metrónomo y de la fuerza ejercida por el muelle); por otra parte, (ii) el metrónomo utiliza una varilla metálica para unir las dos masas de manera rígida, y la masa de esta varilla no resulta despreciable, afectando de manera significativa al centro de masas y al momento de inercia del sistema, y por último, (iii) debe incorporarse al modelo el efecto del rozamiento debido a la rueda de escape, así como el de la fuerza impulsora.

3.2.1. Corrección para ángulos grandes

La aproximación para ángulos pequeños permite expresar el $\cos(\theta)$ como una serie de potencias del ángulo. Sin embargo, como se ha mencionado, los ángulos típicos

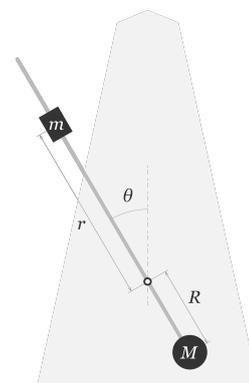


Figura 3.2: Esquema del metrónomo y los parámetros usados para calcular Ω .

3. MODELO TEÓRICO

recorridos por un metrónomo pueden alcanzar los 60° , en cuyo caso, el error de la aproximación de θ es casi del 10%. Para hallar la frecuencia del oscilador de manera más precisa, podemos expresar la velocidad angular en función de la energía total del sistema e integrar en el tiempo para hallar el valor del periodo.

La energía del sistema será igual a la energía potencial del péndulo doble cuando este alcanza su máximo ángulo θ_{\max} y la velocidad se hace nula:

$$\begin{aligned} E &= g(1 - \cos \theta)(MR - mr) + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(mr^2 + MR^2) \\ &= g(1 - \cos \theta_{\max})(MR - mr) \end{aligned} \quad (3.5)$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= 2g \frac{mr - MR}{mr^2 + MR^2} (\cos \theta_{\max} - \cos \theta) \\ \dot{\theta} &= \frac{d\theta}{dt} = \Omega_0 \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{\max})} \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde hemos llamado Ω_0 a la frecuencia angular calculada a partir de la aproximación para ángulos pequeños obtenida en la Ecuación (3.4).

Una vez hallada la velocidad angular, es posible calcular el tiempo durante el que transcurre el movimiento a partir de la velocidad instantánea y cada elemento diferencial de la trayectoria. Integrando el cociente $d\theta/\dot{\theta}$ desde 0 hasta el ángulo máximo θ_{\max} , por simplicidad, y usando la igualdad $\cos \theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$, obtendremos la duración de un cuarto del periodo:

$$\int_0^{T/4} dt = \frac{T}{4} = \frac{T_0}{4\pi} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{(\sin^2 \theta_{\max}/2 - \sin^2 \theta/2)}} \quad (3.7)$$

donde $T_0 = 2\pi/\Omega_0$ es el periodo para ángulos pequeños. Recurriendo ahora al cambio de variable $\sin \alpha = \sin(\theta/2)/\sin(\theta_{\max}/2)$ y usando $a = \sin^2(\theta_{\max}/2)$ para simplificar la notación, obtenemos una integral elíptica de primera especie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{2d\alpha}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \alpha}} \\ &= T_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 a^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 a^6 + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por tanto, para ángulos grandes, el periodo del metrónomo será algo mayor que su valor estimado a segundo orden en θ . No obstante, dado que el valor de θ_{\max} en un metrónomo oscila entre los 40° y los 60° , esta corrección tendrá un valor comprendido entre $T/T_0 \approx 1.03$ y $T/T_0 \approx 1.07$, siendo prácticamente despreciable.

3.2.2. Corrección debida a la masa de la varilla

Para construir este tipo de péndulo, es necesario utilizar una varilla rígida, generalmente metálica, cuya masa dista mucho de ser despreciable. Por tanto, debe aplicarse una corrección a la posición de los centros de masas y a los momentos de inercia. Si llamamos μ a la masa de la varilla, la frecuencia angular resulta ser:

$$\Omega = \left(g \frac{MR + \mu \frac{R_{\max}}{R_{\max} + r_{\max}} R_{\max}/2 - mr - \mu \frac{r_{\max}}{R_{\max} + r_{\max}} r_{\max}/2}{MR^2 + \mu \frac{R_{\max}}{R_{\max} + r_{\max}} R_{\max}^2/3 + mr^2 + \mu \frac{r_{\max}}{R_{\max} + r_{\max}} r_{\max}^2/3} \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

donde r_{\max} y R_{\max} son las longitudes de la varilla por encima y por debajo del eje, respectivamente. Dividiendo ahora ambos miembros de la fracción entre m (llamaremos $M' = M/m$ a la proporción entre las masas, y $\mu' = \mu/m$) y usando la igualdad

$$\frac{R_{\max}}{R_{\max} + r_{\max}} = 1 - \frac{r_{\max}}{R_{\max} + r_{\max}} \quad (3.10)$$

obtenemos:

$$\Omega = \left(g \frac{M'R - \mu'(r_{\max} - R_{\max})/2 - r}{M'R^2 + \mu'(R_{\max}^2 + r_{\max}^2 - r_{\max}R_{\max})/3 + r^2} \right)^{1/2} \quad (3.11)$$

Para ciertos valores fijos de M' y R , la masa de la varilla tenderá a ralentizar todas las frecuencias del metrónomo en una cantidad proporcional al valor de μ' y bastante significativa. Si tomamos, por ejemplo, la configuración de partida supuesta por Forsén *et al.*, con $M' = 5$ y $R = 50$ mm, y corregimos con un valor de $\mu' = 0.5$, $R_{\max} = R$ y $r_{\max} = 220$ mm, vemos que las frecuencias máximas se reducen hasta un 25 %, mientras que las más lentas llegan a detenerse completamente. En la Figura 3.3 se muestra cómo varían las distintas frecuencias dentro del rango del metrónomo (entre 50 y 160 ppm) para los parámetros definidos y distintos valores de μ' . El modelo de Forsén parte de la suposición de que la masa de la varilla es despreciable ($\mu' = 0$). Sin embargo, tomando como referencia un metrónomo contemporáneo, hemos medido que $\mu' \approx 0.5$ y no parece probable que los metrónomos del s. XIX contasen con una varilla más fina o con materiales mucho más ligeros que los disponibles hoy en día. Por otra parte, vemos que incluso un valor pequeño de μ' puede afectar significativamente al valor de la frecuencia marcada por el metrónomo.

3.2.3. Rozamiento y fuerza impulsora

Debido al funcionamiento del mecanismo de escape, el impacto de los dientes de la rueda de escape contra las paletas del péndulo introduce fuerzas de fricción no desdeñables. Por su parte, el muelle de torsión se encarga de devolver al sistema la energía perdida debido a este y otros posibles rozamientos, restaurando las condiciones iniciales.

3. MODELO TEÓRICO

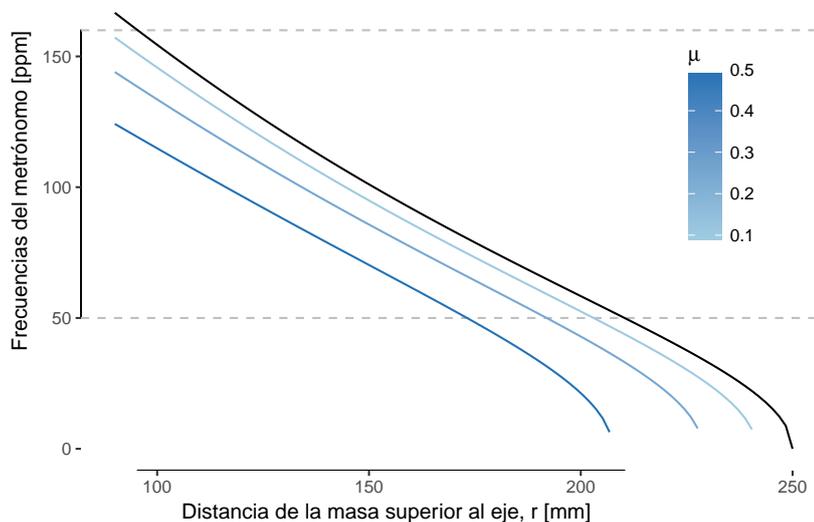


Figura 3.3: Valor de la frecuencia en ppm en función de r para $R = 50$ mm y $M' = 5$ y distintos valores de μ' . El valor $\mu' = 0$ se corresponde con el modelo sin corregir.

Siguiendo el trabajo publicado por Talbot [11], modelizaremos estos elementos del sistema como una fuerza instantánea, $F(\theta)$, y una fuerza de rozamiento por deslizamiento que se opone al sentido del movimiento. La ecuación cinética resultante es:

$$\ddot{\theta} + \theta^2 = -c \cdot \text{sign} \dot{\theta} + F(\theta) \quad (3.12)$$

donde los puntos denotan las sucesivas derivadas del ángulo respecto a la variable adimensional $t' = \Omega t$. Por otra parte, haciendo un análisis dinámico del problema, podemos hallar que c es un valor positivo, también adimensional, proporcional al torque ejercido por la fuerza de rozamiento τ_{roz} , e inversamente proporcional al momento de inercia I y a la frecuencia angular al cuadrado:

$$c = \frac{\tau_{\text{roz}}}{\Omega^2 I} \quad (3.13)$$

Puesto que la fuerza impulsora se ha supuesto instantánea y actúa restaurando las condiciones iniciales, podemos estudiar el movimiento a partir de un semiperiodo y prescindir de esta fuerza en la Ecuación (3.12). Multiplicando por $\dot{\theta}$, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \left[\dot{\theta}^2 + \theta^2 + 2\theta c \cdot \text{sign} \dot{\theta} \right] = 0 \quad (3.14)$$

cuya solución

$$\dot{\theta}^2 + (\theta + c \cdot \text{sign} \dot{\theta})^2 = \text{cte.} \quad (3.15)$$

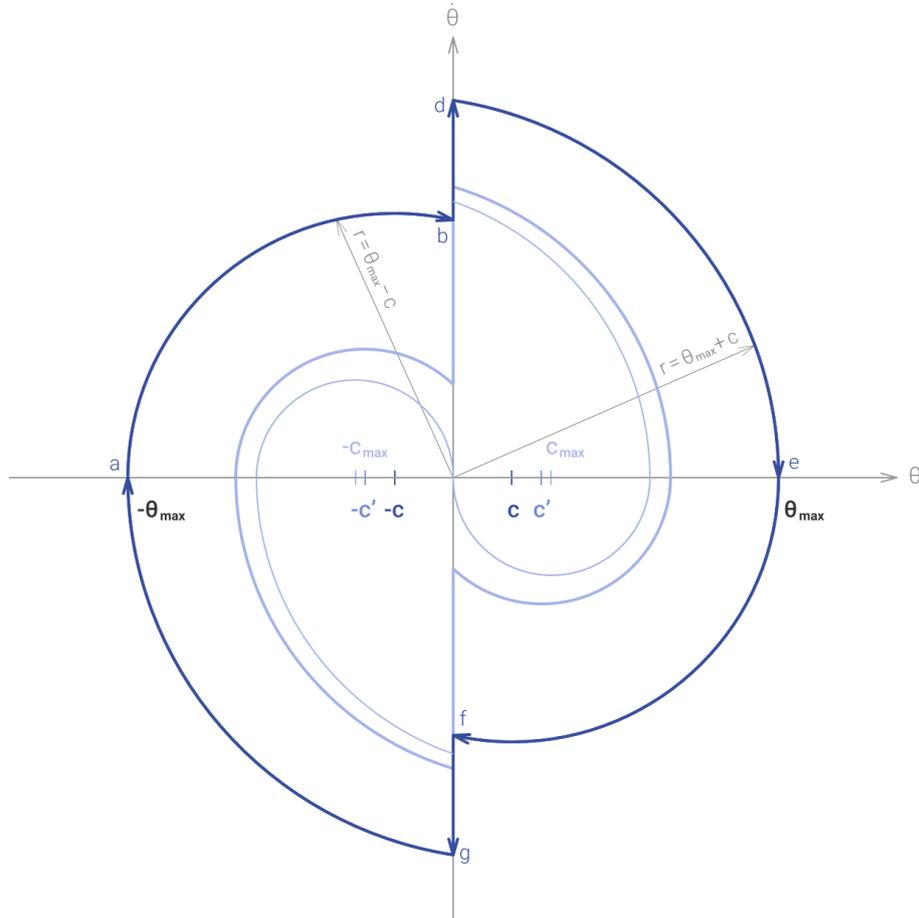


Figura 3.4: Trayectoria del metrónomo en el plano de fases para distintos valores de c . A medida que este valor aumenta (debido a un aumento del coeficiente de rozamiento), la amplitud del movimiento se reduce, hasta llegar al caso límite en que $c_{\max} = \theta_{\max}/2$.

describe una trayectoria en el plano de fase, representado en la Figura 3.4, formada por arcos de circunferencia centrados en $(\theta = -c \cdot \text{sign } \dot{\theta}, \dot{\theta} = 0)$. El radio de estos arcos queda determinado por las condiciones iniciales del movimiento: la energía potencial máxima se alcanza cuando $\dot{\theta} = 0$. En estos puntos, $\theta = \theta_{\max}$ (puntos a y e de la figura). Al pasar por la posición de equilibrio, $\theta = 0$, el péndulo recibe un nuevo impulso que aumenta repentinamente su energía cinética sin alterar su posición (puntos b y f). En el plano de fase, podemos observar que el péndulo cambia bruscamente a un nuevo arco de circunferencia, con el mismo centro pero aumentando su radio (puntos d y g).

En base a esta trayectoria, podemos calcular el periodo del movimiento, T . Dado que, según el presente modelo, la fuerza excitadora se limita a restaurar las condiciones iniciales, bastará con analizar un semiperiodo del movimiento. Si tomamos, por ejemplo,

3. MODELO TEÓRICO

la mitad donde $\dot{\theta} > 0$:

$$\frac{T}{2} \cdot \Omega = \int_{-\theta_{\max}}^0 \frac{d\theta}{\dot{\theta}} + \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} \quad (3.16)$$

En el primer tramo, de $-\theta_{\max}$ a 0, el radio de la trayectoria es igual a $(\theta_{\max} - c)$, mientras que, en el segundo tramo, pasa a ser $(\theta_{\max} + c)$.

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 + (\theta + c)^2 &= (\theta_{\max} - c)^2, & -\theta_{\max} < \theta < 0 \\ \dot{\theta}^2 + (\theta + c)^2 &= (\theta_{\max} + c)^2, & 0 < \theta < \theta_{\max} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Despejando ahora $\dot{\theta}$ y resolviendo la integral (3.16):

$$\frac{T}{2} \cdot \Omega = \pi + \sin^{-1} \left(\frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \right) \quad (3.18)$$

donde $\epsilon = c/\theta_{\max}$ debe tomar un valor $0 \leq \epsilon \leq 1/2$ para que la Ecuación (3.18) tenga solución real. Esta misma cota nos permite hallar el valor máximo del periodo:

$$T_{\max} = \frac{2\pi}{\Omega} \left(1 + \frac{1}{\pi} \sin^{-1}(1) - \frac{1}{\pi} \sin^{-1}(1/3) \right) = T_0 \cdot 1.3918 \quad (3.19)$$

Ahora bien, este valor máximo teórico se corresponde con una situación en la que el rozamiento es suficiente para frenar totalmente el péndulo en un semiperiodo. Talbot argumenta que en dicha situación se produciría una fuerte asimetría entre cada mitad del semiperiodo. En el caso más extremo, la segunda mitad (desde que el péndulo alcanza el ángulo máximo hasta que regresa a la posición de equilibrio) llegaría a durar 2.55 veces más que la primera (desde que recibe la fuerza impulsora hasta que alcanza θ_{\max}). Por ello, Talbot piensa que este comportamiento irregular debería haber llamado la atención a Beethoven, haciéndole abandonar el uso del metrónomo.

Resulta difícil estimar cuál podría haber sido la magnitud máxima del rozamiento no obviamente perceptible para el compositor. Sin embargo, gracias a nuestro cálculo de c (3.13), podemos saber que este efecto habría sido mayor para las frecuencias más lentas, un fenómeno que Talbot no analiza en su trabajo. Efectivamente, expresando c explícitamente y sabiendo que Ω es función de r (dado que en un metrónomo, los demás parámetros permanecen fijos), encontramos que

$$\epsilon = \frac{c(r)}{\theta_{\max}} = \frac{\tau_{\text{roz}}}{I(r)\Omega^2(r)\theta_{\max}} = \frac{\tau_{\text{roz}}}{\tau_{g,\max}(r)} \quad (3.20)$$

El numerador de esta fracción es el torque que ejerce la fuerza de rozamiento debida a la presión de la rueda de escape sobre la paleta; este torque puede considerarse constante. El denominador, en cambio, es el valor máximo del torque que ejerce la

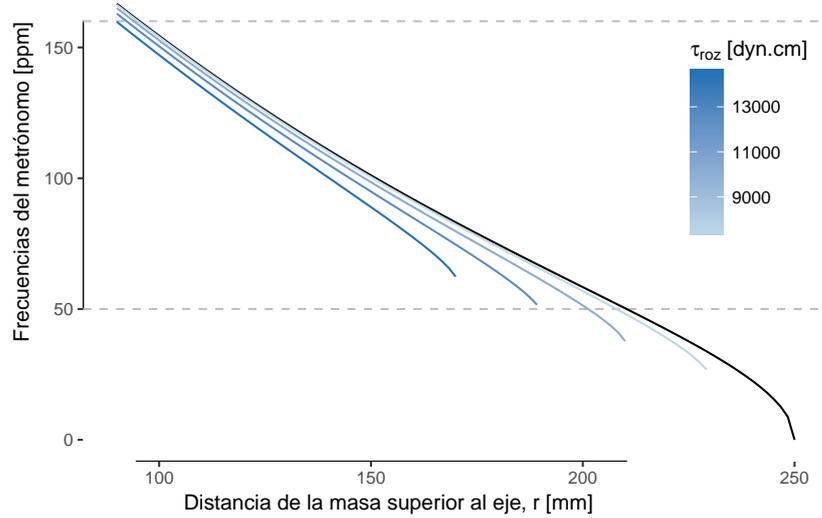


Figura 3.5: Valor de la frecuencia en ppm en función de r para $R = 50$ mm y $M' = 5$, $\mu' = 0$ y distintos valores de τ_{roz} . La línea negra corresponde a una situación sin rozamiento. La primera línea (azul claro) corresponde a un rozamiento capaz de frenar la oscilación más lenta del metrónomo, 50 ppm ($\epsilon(r = 210.3) = 1/2$). Para cualquier rozamiento mayor que este, el metrónomo deja de oscilar en parte de su rango.

gravidad sobre el péndulo y es dependiente de la frecuencia (o, lo que es lo mismo, dependiente de r , puesto que los demás parámetros permanecen fijos en el metrónomo). El valor de ϵ disminuirá con el torque máximo de la gravedad y, por tanto, afectará en menor medida a las frecuencias más altas. Por otra parte, el rozamiento vendrá acotado ($\epsilon \leq 1/2$) por las frecuencias más lentas, lo cual resulta coherente desde un punto de vista energético: son aquellas frecuencias para las que el doble péndulo tiene menor energía potencial y pueden ser frenado más fácilmente.

Esta dependencia del rozamiento con la frecuencia puede observarse en la Figura 3.5. Para un mismo torque de rozamiento, el valor de ϵ aumenta a medida que disminuye la frecuencia. Cuando $\epsilon = 1/2$, el metrónomo deja de oscilar y la línea se detiene. En la figura, además del modelo sin rozamiento (en negro) se han representado varios valores del torque que podrían ser de interés: la primera línea (azul claro) corresponde a una situación en la que el metrónomo funcionaría en todo su rango pero se detendría, debido al rozamiento, al llegar a la marca de 50 ppm. Cualquier valor del rozamiento superior a este haría que el metrónomo se detuviese en parte de su rango, si bien seguiría funcionando para las frecuencias más altas.

3.2.4. Análisis energético

Como se ha dicho hasta ahora, podemos suponer que el muelle impulsor se limita a restaurar las condiciones iniciales del movimiento. Un aspecto interesante de esta

3. MODELO TEÓRICO

condición es que, independientemente de las condiciones iniciales, la trayectoria tenderá a estabilizarse sobre un ciclo límite cuyas características dependerán de la magnitud de la fuerza restauradora y del rozamiento.

Efectivamente, puesto que el impulso viene dado por una componente de la fuerza del muelle (que podemos suponer constante) y la distancia sobre la que actúa solo depende de las características geométricas de las paletas y los dientes de la rueda de escape, el trabajo ejercido por el muelle en cada periodo es independiente de la frecuencia del péndulo.

Regresando a la trayectoria sobre el plano de fases (Figura 3.4), podemos observar que este aporte de energía produce un incremento brusco de la velocidad del péndulo. Usando argumentos geométricos, resulta fácil hallar que

$$\Delta\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_d^2 - \dot{\theta}_b^2 = 4\theta_{\max}c \quad (3.21)$$

donde se ha denotado mediante subíndices el valor de $\dot{\theta}$ en los puntos b y d de la figura, respectivamente. Por otra parte, el incremento de la energía cinética del péndulo será:

$$\Delta E = \frac{1}{2}I\Delta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}I\Omega^2\Delta\dot{\theta}^2 = \text{cte.} \quad (3.22)$$

Utilizando ahora la igualdad (3.21) y la definición de c (3.13), hallamos que el ángulo máximo del movimiento es independiente de la frecuencia:

$$\Delta E = 2\theta_{\max}\tau_{\text{roz}} = \text{cte.} \implies \theta_{\max} = \frac{\Delta E}{2\tau_{\text{roz}}} \quad (3.23)$$

En cambio, el ángulo máximo decrecerá a medida que aumente el coeficiente de rozamiento dinámico y con él, el torque τ_{roz} , como puede observarse en la Figura 3.4.

3.2.5. Resumen

Hemos partido de un modelo analítico de péndulo doble muy sencillo para hallar la frecuencia del metrónomo. Este modelo se basaba en tres idealizaciones: la aproximación del movimiento para ángulos pequeños, una varilla de masa despreciable y la ausencia de fuerzas de rozamiento. Tras analizar la validez de estas aproximaciones, podemos obtener una expresión más precisa para la frecuencia:

$$\Omega = f_{\text{ang}}^{-1}(\theta_{\max}) \cdot f_{\text{roz}}^{-1}(\epsilon) \cdot \sqrt{g \frac{M'R - \frac{\mu'}{2}(r_{\max} - R_{\max}) - r}{M'R^2 + \frac{\mu'}{3}(R_{\max}^2 + r_{\max}^2 - r_{\max}R_{\max}) + r^2}} \quad (3.24)$$

donde $f_{\text{ang}}(\theta_{\max})$ y $f_{\text{roz}}(\epsilon)$ son las correcciones al periodo debidas a la amplitud del movimiento y a la fricción, descritas en apartados anteriores.

$$f_{\text{ang}}(\theta_{\text{max}}) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_{\text{max}}}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^8\left(\frac{\theta_{\text{max}}}{2}\right) + \dots \quad (3.25)$$

$$f_{\text{roz}}(\epsilon) = 1 + \frac{1}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right) - \frac{1}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\right) \quad (3.26)$$

La masa de la varilla se ha incorporado en la fórmula básica de la frecuencia y será uno de los factores que más afecten a su valor. A su vez, todas las masas se han expresado como cantidades adimensionales, ya que serán únicamente sus proporciones (y no su magnitud real) lo que afecte al valor de la frecuencia.

Por último, hemos hecho un breve análisis energético del funcionamiento del metrónomo. Este análisis revela que la amplitud de oscilación del péndulo doble viene determinada por el rozamiento y la fuerza restauradora del metrónomo, y será de especial importancia a la hora de estudiar los efectos de un posible aumento del rozamiento.

3.3. Perturbaciones a la frecuencia

Existen distintos fenómenos que podrían alterar los parámetros del modelo presentado dando lugar a una variación de la frecuencia. Si algo así hubiese sucedido con el metrónomo de Beethoven, podría explicar las extrañas anotaciones del compositor.

La idea básica es la siguiente: digamos que Beethoven quiere medir el valor de un determinado pulso que tiene en mente con ayuda de su metrónomo. Para hacerlo, desplaza la masa superior tomando como referencia numérica la escala del metrónomo, que asocia un valor de la frecuencia a cada valor de r . Si el metrónomo está correctamente calibrado, la frecuencia escrita sobre la escala (en adelante, Ω_{esc}) será igual a la frecuencia reproducida por el metrónomo y elegida por Beethoven (Ω_{rep}). Ahora bien, si el metrónomo estuviese roto, cuando la masa superior se situase sobre cierto valor de r , reproduciría una frecuencia Ω_{rep} que ya no coincidiría con la indicada en la escala, Ω_{esc} . En concreto, si la perturbación hubiese hecho que para un mismo valor de r la frecuencia disminuyese, el resultado sería que $\Omega_{\text{esc}} > \Omega_{\text{rep}}$, explicando así las anotaciones metronómicas extrañamente rápidas. Conocer la perturbación nos permitiría, a su vez, calcular Ω_{rep} en función de la frecuencia anotada por Beethoven Ω_{esc} .

Esto es, precisamente lo que nos proponemos en este apartado. Para distintas posibles distorsiones, analizaremos cómo varía Ω_{rep} en función de Ω_{esc} . Nos centraremos, concretamente, en distorsiones que puedan ralentizar el funcionamiento del metrónomo sin dar lugar a irregularidades o desperfectos claramente visibles o que llamen la atención del usuario. Plantearemos, en primer lugar, el efecto que tendría la modificación de las distintas masas que caracterizan el metrónomo y sus respectivas distancias al eje. A continuación, analizaremos el efecto de un posible aumento del rozamiento suponiendo que la energía aportada por el muelle impulsor no varía.

3. MODELO TEÓRICO

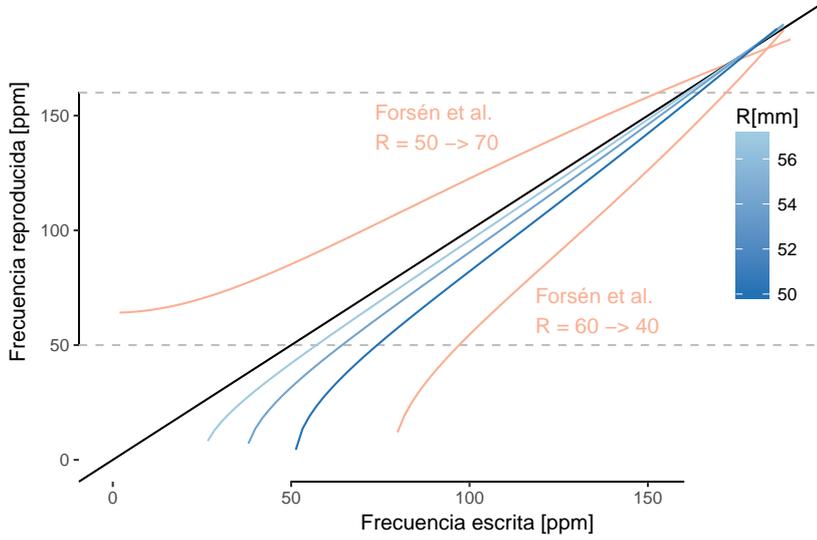


Figura 3.6: Frecuencia reproducida en función de la frecuencia escrita para distintas variaciones de R respecto a un valor de fábrica $R = 60$ mm, con $M' = 5$ y $\mu' = 0.5$. En negro se representa la situación sin rotura, donde $\Omega_{\text{esc}} = \Omega_{\text{rep}}$. En rojo se representan las hipótesis propuestas por Forsén *et al.*

3.3.1. Variación de las distancias al eje, R y r

Una de las posibles alteraciones del metrónomo, planteada ya por Forsén *et al.*, consistiría en una modificación de la distancia entre la masa inferior y el eje, R (quizás debido a un golpe sufrido por el metrónomo).

Partiendo de la Ecuación (3.24) y con la ayuda de la derivada, vemos que Ω es creciente con R hasta alcanzar un máximo para $R = g/(2\Omega^2)$ o, lo que es lo mismo,

$$\frac{r}{R} = -1 + \sqrt{1 + \beta} \quad (3.27)$$

donde, para simplificar la notación, se ha utilizado

$$\beta = \frac{1}{R^2} \left(M'R^2 - \frac{\mu'}{2}(r_{\text{max}} - R_{\text{max}})R - \frac{\mu'}{3}(r_{\text{max}}^2 + R_{\text{max}}^2 - r_{\text{max}}R_{\text{max}}) \right) \quad (3.28)$$

Es decir, un desplazamiento de la masa inferior hacia abajo (un aumento de R) dará lugar a una disminución de la frecuencia solo para aquellos valores de r que verifiquen:

$$r < R(-1 + \sqrt{1 + \beta}) \quad (3.29)$$

Sin embargo, en un metrónomo típico, esta condición se cumplirá exclusivamente para las frecuencias más rápidas (aquellas dadas por un r más corto) o para ninguna

frecuencia dentro de su rango en absoluto. Esto es, precisamente, lo que sucede en uno de los casos planteados por Forsén *et al.* Los autores proponen una situación en la que la masa inferior del metrónomo se desplaza desde una posición a 5 cm del eje hasta 7 cm. Sin embargo, esta variación solo ralentizaría las frecuencias superiores a 167 ppm, fuera del rango del metrónomo de Beethoven, tal y como se muestra en la Figura 3.6.

Resulta más difícil pensar, por otra parte, en un accidente que propiciase que la longitud de R disminuyese. Forsén *et al.* sugieren que el metrónomo podría haber caído boca abajo dando lugar a un desplazamiento de la masa inferior hacia el eje, desde los 6 hasta los 4 cm. Pero, en tal caso, al volver a poner el metrónomo en vertical, nada hubiese impedido que la masa volviese a su posición original o que se desprendiese por completo. No obstante, si por algún motivo la masa inferior del metrónomo hubiese quedado suelta, su punto de contacto con la varilla y, por tanto, el punto de aplicación del torque, podría ser más alto que el inicial (el centro de masas, suponemos). En tal caso, la variación de R estaría limitada por el tamaño de la masa y todas las frecuencias para las que $r > R(-1 + \sqrt{1 + \beta})$ (en este caso, todas las frecuencias dentro del rango del metrónomo) se verían ralentizadas.

En la Figura 3.6, puede verse cómo esta disminución de R habría afectado a la frecuencia reproducida por el metrónomo (la “deseada” o percibida por Beethoven). En rojo se representan las dos variaciones de R propuestas por Forsén según su modelo simplificado: de 50 a 70 mm y de 60 a 40 mm. Vemos que la variación de 50 a 70 mm no produce una reducción de la frecuencia en el rango deseado. Por su parte, la variación de 60 a 40 mm habría dado lugar a que todas las frecuencias por debajo 80 ppm (según la escala del metrónomo) se detuviesen, error que habría sido evidente para Beethoven. Por último, las líneas azules representan variaciones dentro de los límites argumentados aquí con el modelo propuesto en la sección anterior: supuesta una masa con forma de disco y radio 1 cm, se varía el valor de R desde 60 a 50 mm, con $M' = 5$ y una corrección por la masa de la varilla de $\mu' = 0.5$ (como se ha visto, las correcciones por el ángulo y el rozamiento resultan despreciables frente a esta).

Por último, es fácil comprobar también que Ω es homogéneamente decreciente con r . Sin embargo, si la masa superior hubiese estado suelta (único modo en que el valor de r podría haber aumentado) Beethoven, probablemente, lo habría percibido.

3.3.2. Variación de la proporción entre masas, M'

Del mismo modo que un golpe podría haber causado un desplazamiento de la masa inferior M del metrónomo, quizás podría haber causado alguna rotura que hubiese alterado su magnitud y, por tanto, la proporción entre masas M' .

Utilizando de nuevo la derivada de la Ecuación (3.24), observamos que Ω es creciente con M' siempre que $\Omega^2 < g/R$. Puesto que las masas y longitudes solo pueden tomar valores positivos, esta desigualdad se verifica siempre, es decir: cualquier disminución de la masa inferior del péndulo o cualquier aumento en la masa superior daría lugar a una disminución de la frecuencia, tal y como puede observarse en la Figura 3.7.

3. MODELO TEÓRICO

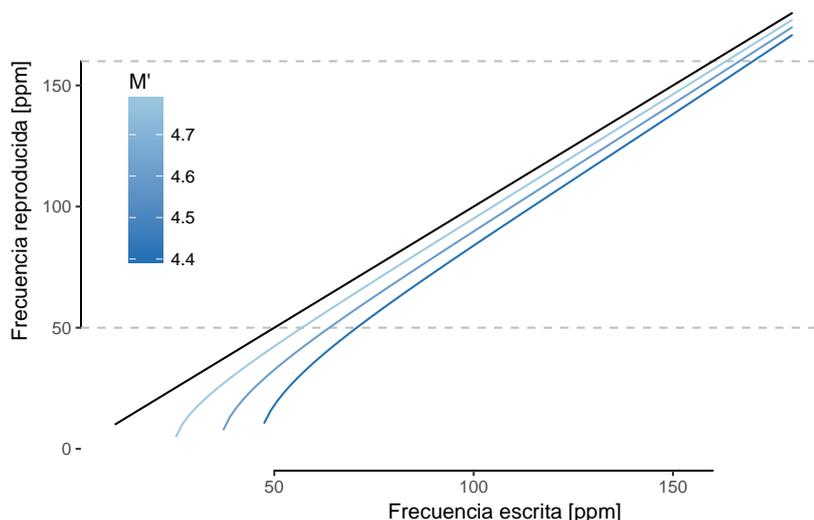


Figura 3.7: Frecuencia reproducida en función de la frecuencia escrita para distintas variaciones de la masa adimensionalizada M' respecto a un valor de fábrica $M' = 5$, con $\mu' = 0.5$ y $R = 50$ mm. En negro, se representa la situación sin rotura, donde $\Omega_{\text{esc}} = \Omega_{\text{rep}}$.

No obstante y, si bien desconocemos de qué material estaba hecha la masa inferior del metrónomo de Beethoven, resulta bastante razonable suponer (por lo que sabemos de otros metrónomos de la época) que Mälzel utilizó cobre u otro metal parecido en su fabricación. Esto hace que la rotura de la masa parezca, en principio, improbable.

3.3.3. Aumento del rozamiento

Un aumento de la fricción debido, por ejemplo, a una mala lubricación del metrónomo, podría haber ralentizado su funcionamiento. De hecho, como se vio en el apartado destinado al análisis energético (Sección 3.2.4), el coeficiente de rozamiento no solo afecta al valor de τ_{roz} sino que también reduce la amplitud del movimiento, θ_{max} . Por ello, cualquier aumento del rozamiento repercute cuadráticamente en el valor de ϵ , el parámetro que finalmente caracteriza la variación de la frecuencia.

$$\begin{aligned} \Delta E &= \text{cte.} = 2\tau_{\text{roz}}\theta_{\text{max}} \\ \epsilon &\propto \tau_{\text{roz}}/\theta_{\text{max}} \propto \tau_{\text{roz}}^2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Sin embargo, esto significa también que un aumento del rozamiento será capaz de frenar las frecuencias más lentas del metrónomo. Estas impondrán, por tanto, una cota máxima sobre el valor que τ_{roz} puede tomar. En la Figura 3.8 puede observarse este fenómeno. En cuanto τ_{roz} supera $\approx 10^4$ dyn-cm, el metrónomo empieza a no funcionar en parte de su rango. Pero, incluso para los valores del rozamiento que superan este umbral, su efecto es poco pronunciado sobre las frecuencias más rápidas.

3.3 Perturbaciones a la frecuencia

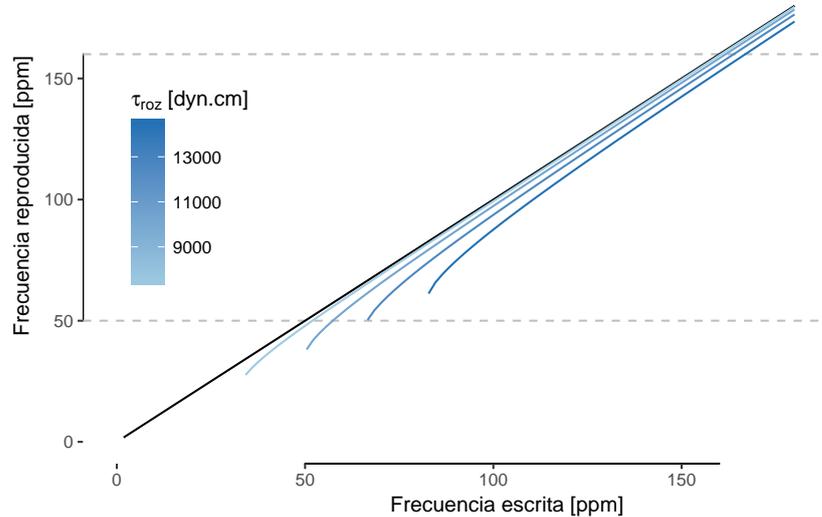


Figura 3.8: Frecuencia reproducida en función de la frecuencia escrita para distintas variaciones valores del τ_{roz} . En negro, se representa el comportamiento de un metrónomo de fábrica, supuesto libre de rozamiento.

Cabe argumentar que Beethoven podría haber seguido utilizando su metrónomo incluso si algunas frecuencias lentas no hubiesen estado disponibles. Le habría bastado con tomar como referencia frecuencias el doble de rápidas medidas cada dos pulsos. De hecho, consta que el compositor tuvo que llevar su dispositivo a reparar en varias ocasiones debido a su movimiento irregular (una irregularidad que también se explicaría por un aumento del rozamiento). Quizás, antes de recurrir al relojero una vez más y prescindir de su metrónomo, Beethoven prefirió utilizar exclusivamente las frecuencias más rápidas del dispositivo. En tal caso y como situación límite, solo habría necesitado utilizar el rango superior a 80 ppm (dado que el metrónomo abarca hasta 160 ppm). En la Figura 3.8, se representa en azul más oscuro el caso correspondiente a un rozamiento capaz de frenar todas las frecuencias inferiores a este valor. Vemos que, incluso asumiendo esta hipótesis extrema, el efecto del rozamiento sobre las frecuencias más rápidas es bastante limitado.

Capítulo 4

Resultados experimentales

Para comprobar la validez del modelo propuesto en el capítulo anterior, estudiaremos experimentalmente un metrónomo contemporáneo, cuyo mecanismo es esencialmente equivalente al patentado en 1815. El objetivo último es poder aplicar los resultados al análisis de fotografías de metrónomos antiguos y aproximar así los parámetros físicos relevantes (masas y distancias al eje) del metrónomo de Beethoven.

4.1. Validación del modelo teórico

Los metrónomos actuales no divergen esencialmente del modelo que debió de manejar Beethoven. Existen, no obstante, dos diferencias destacables: su tamaño y el rango de frecuencias que abarcan. A partir de 1830, aproximadamente, Mälzel empezó a comercializar un nuevo modelo de metrónomo más pequeño (unos 20 cm frente a los 30 cm del modelo anterior) que abarcaba un rango de *tempi* más amplio (de 40 ppm a 208 ppm frente a los 50-160 ppm originales). Este es el modelo que ha llegado a nuestros días y que Beethoven (fallecido en 1827) no llegó a conocer [5].

Más allá de estos cambios paramétricos, el funcionamiento del invento a nivel mecánico sigue siendo el mismo. Por ello, un metrónomo contemporáneo nos servirá para validar el modelo analítico presentado en el capítulo anterior. En este caso, se ha escogido un metrónomo de la marca Neewer, con un mecanismo de acero y una caja de resonancia de material plástico.

En primer lugar, estudiamos algunos rasgos básicos de su funcionamiento: a partir de vídeos comprobamos que el metrónomo oscila a una frecuencia casi idéntica cuando se mueve bajo el impulso de la rueda de escape o sin él (cuando se le ha agotado la cuerda). Además, los distintos cuartos de su periodo son bastante regulares. En el caso de las frecuencias más lentas (40 ppm), se ha medido una diferencia del 13.82 % entre la segunda mitad del semiperiodo y la primera, lo que corresponde a un valor máximo de $\epsilon = 0.1$. El rozamiento por deslizamiento, por tanto, será despreciable (el mecanismo, de hecho, está profusamente lubricado).

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

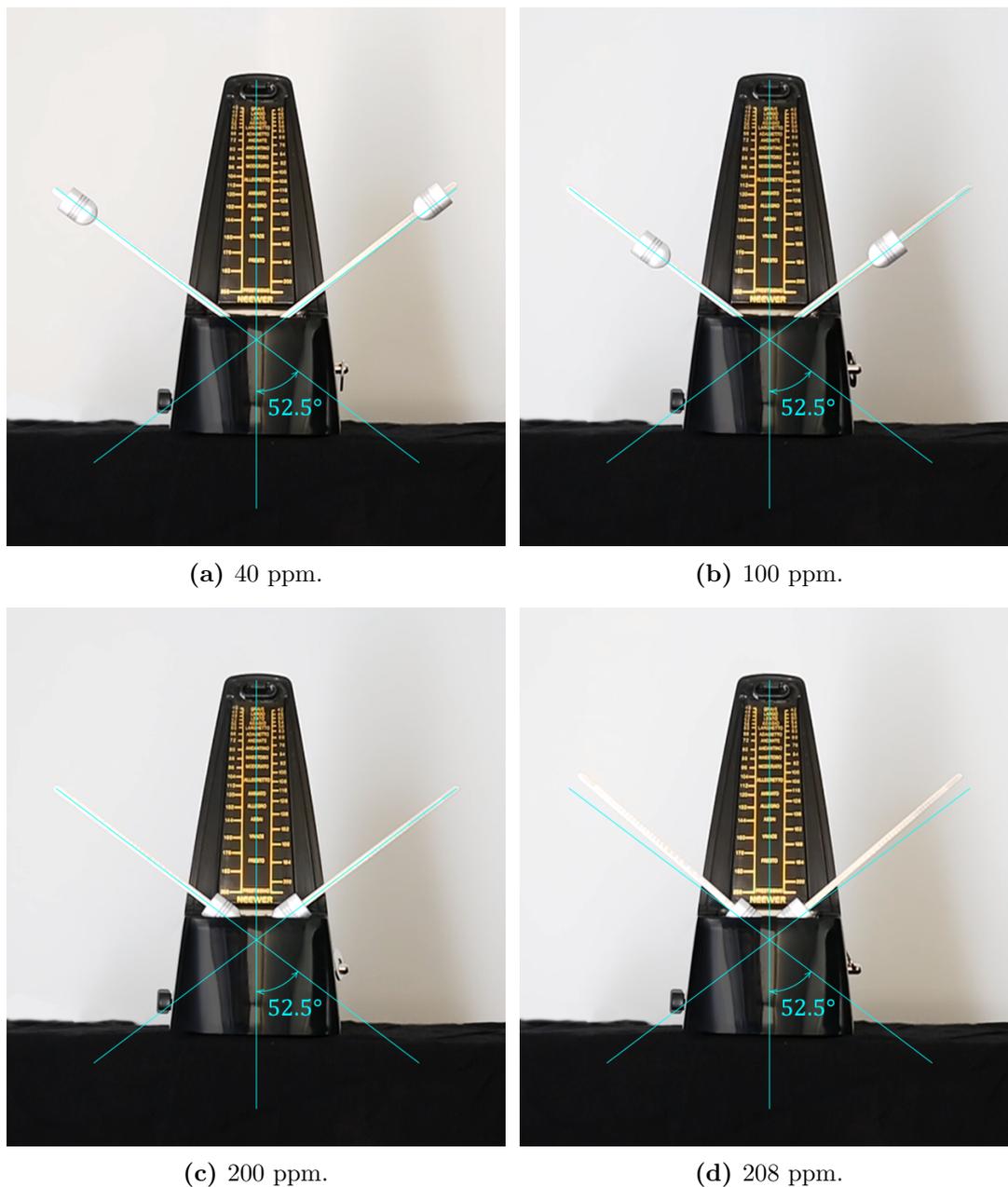


Figura 4.1: Ángulo de máxima oscilación para distintas marcas del metrónomo: 40, 108, 200 y 208 ppm. Puede observarse que la amplitud del movimiento es la misma en todos los casos (unos $52.5(3)^\circ$) excepto para la marca de 208 ppm ($48.7(3)^\circ$).

Por otra parte, se verifica que el ángulo máximo del movimiento es independiente de la frecuencia, tal y como predice el modelo y como puede observarse en la Figura 4.1. Cada imagen ha sido generada a partir de una grabación a 50 fotogramas por segundo. Con ayuda de software de edición de vídeo se han seleccionado los fotogramas correspondientes a la amplitud máxima alcanzado por el péndulo durante su movimiento para distintas marcas metronómicas (40, 108, 200 y 208 ppm). El error de la medida se ha estimado en base a la velocidad de captura de la cámara. Como excepción, puede observarse que el ángulo de oscilación para la frecuencia máxima, 208 ppm, es ligeramente menor al resto: $48.5(3)^\circ$ frente a los $52.5(3)^\circ$ que consistentemente se alcanzan en todo el rango del metrónomo.

A continuación, nos interesa comparar las frecuencias marcadas por el metrónomo con aquellas calculadas teóricamente a partir de los parámetros relevantes del modelo (M , m , μ , r , etc.). Para ello, procedemos como sigue:

- Para las distintas posiciones del metrónomo, se anota el valor de la frecuencia nominal Ω_{esc} (la marca metronómica indicada en la escala del cuerpo del metrónomo).
- Se miden experimentalmente las frecuencias reproducidas por el metrónomo, Ω_{rep} . Para ello, se graban 15 segundos de audio para cada marca metronómica tras esperar 5 segundos a que su movimiento se estabilice. Los audios se normalizan y elevan al cuadrado para la detección de picos. Por último, se extrae el periodo para cada frecuencia como el promedio de la diferencia temporal entre picos, utilizando para todo ello el lenguaje de programación R [12, 13, 14].

Una vez finalizado todo el proceso de medición de frecuencias, se procedió a desmontar el metrónomo para medir masas y longitudes de los componentes:

- Se miden las distintas masas (superior, inferior y varilla) con ayuda de una báscula de precisión.
- El valor de r para cada marca metronómica se mide a partir de una fotografía de la varilla del metrónomo colocada sobre papel milimetrado y con ayuda del programa Fiji [15, 16]. Sobre la varilla pueden verse las marcas a modo de muescas sobre las que se sitúa masa superior del metrónomo en las posiciones fijadas por el fabricante para cada pulso de la escala. Estas marcas no coinciden con la posición del centro de masas de m , sino con su extremo superior. Por ello, se calcula también la distancia entre este punto y el centro de masas. Restando ambos valores, se obtiene r .
- Se mide, asimismo, la distancia de la masa inferior R y las longitudes de la varilla a ambos lados del eje, R_{max} y r_{max} (siempre a partir de la misma fotografía).

Los valores de las masas (M , m y μ), las longitudes fijas (r_{max} y R_{max}) y la amplitud de la oscilación (θ_{max}) se incluyen en la Tabla 4.1. La Figura 4.2 muestra los

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Tabla 4.1: Parámetros del metrónomo Neewer.

Masas [g]			Longitudes [mm]			Ángulo [°]
M	m	μ	r_{\max}	R	R_{\max}	θ_{\max}
30.80(1)	7.10(1)	3.80(1)	138.0(3)	36.4(3)	46.3(3)	52.5(3)

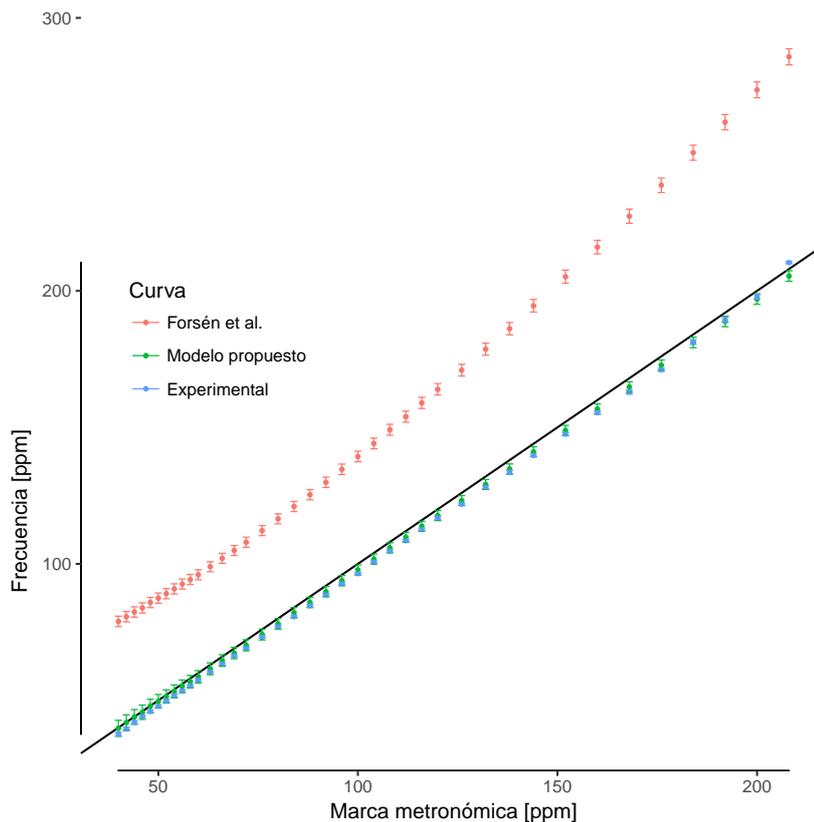


Figura 4.2: Frecuencia experimental y teórica (modelo propuesto y modelo de Forsén *et al.*) frente a la marca metronómica para el metrónomo de marca Neewer. La línea negra se corresponde con la relación 1:1.

valores de la frecuencia teórica y la frecuencia experimental Ω_{rep} en función de la marca metronómica Ω_{esc} . Asimismo, se incluye como referencia una representación de los valores de la frecuencia calculados a partir del modelo de Forsén. Puede verse que los valores calculados con el presente modelo se ajustan dentro del error a los valores de la frecuencia medidos experimentalmente. Son más exactos, de hecho, que los marcados por la escala del fabricante.

Por otra parte, vemos que las frecuencias experimentales tienden a acelerarse ligeramente cuando alcanzan los valores más rápidos de la escala, reduciendo su diferencia respecto a la marca de la escala o, para el último valor (208 ppm), incluso superándola. En estos casos, la distancia de la masa m al eje del doble péndulo es ya muy pequeña

(del orden de la altura de la masa) por lo que, probablemente, la aproximación de su posición mediante el centro de masas ya no sea válida. Un consecuencia de esto es que, para la marca de 208 ppm, el ángulo de oscilación se reduce, tal y como se observó en la Figura 4.1.

4.2. El metrónomo de Beethoven a partir de fotografías

De acuerdo con Forsén *et al.*, en la década de los 80 y tras una larga investigación, Stadlen logró recuperar el metrónomo de Beethoven encontrando que su masa inferior se había perdido. Sin embargo, estos autores no han conseguido averiguar los parámetros del metrónomo. Tampoco se ha encontrado ninguna referencia adicional al hallazgo de Stadlen referido por Forsén, ni siquiera en los trabajos del propio Stadlen.

Sabemos, en cualquier caso, gracias a una descripción de principios del s. XX, que el aparato medía 31 cm de alto y abarcaba un rango de frecuencias de entre 50 y 160 ppm [5], como corresponde al primer modelo de Mälzel y que aparece esquematizado en la patente de 1815 [4]. Este modelo es hoy muy difícil de encontrar y apenas se conservan algunos ejemplares en contados museos y colecciones particulares.

Gracias a estos museos, no obstante, hoy es posible localizar fotografías de metrónomos de este tipo convenientemente medidos y catalogados. El análisis de estas imágenes nos permite conocer los distintos valores de r correspondientes a cada valor de la escala del propio metrónomo Ω_{esc} . De este modo, realizando un ajuste polinómico, podemos estimar un conjunto de valores de M' y R y μ' coherentes con las dimensiones y el rango de frecuencias de estos metrónomos.

Para realizar dicho ajuste, debemos convertir una función racional como la que define la frecuencia al cuadrado en una combinación lineal de términos polinómicos:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_0^n a_i x^i}{1 + \sum_1^m b_i x^i} = a_0 + \sum_1^n a_i x^i - f(x) \sum_1^m b_i x^i \quad (4.1)$$

Partiendo de (3.24), despreciando la corrección por el rozamiento ($f_{\text{roz}}(\epsilon) \approx 1$) e identificando $f(x) = \Omega^2$ y $x = r$, obtenemos lo siguiente:

$$\Omega^2 = a_0 + b_2 \left(\frac{g}{f_{\text{ang}}^2} r + \Omega^2 r^2 \right) \quad (4.2)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, f_{ang} es la corrección debida al ángulo de

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

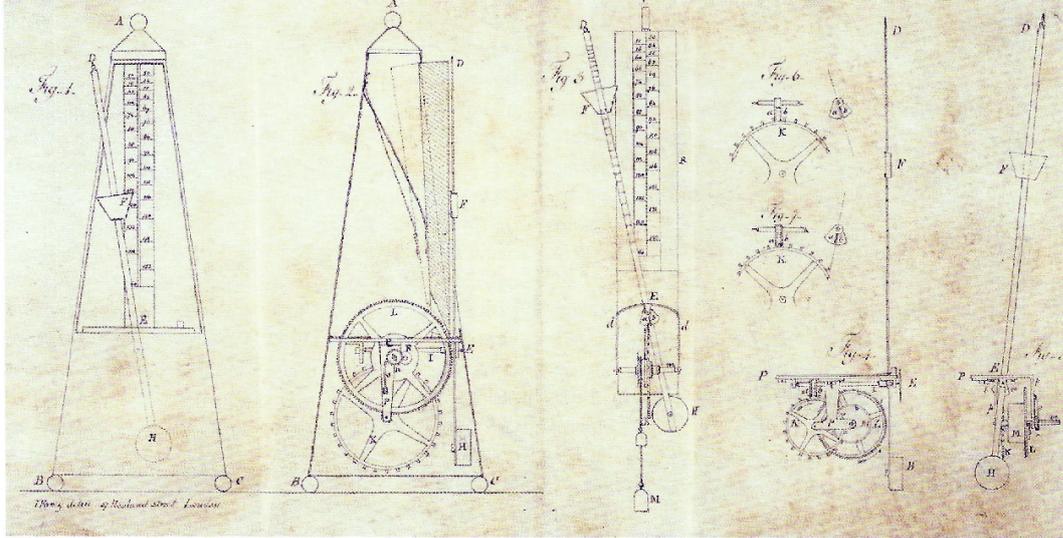


Figura 4.3: Metrónomo de Mälzel esquematizado en la patente de Londres de 1815.

oscilación θ_{\max} descrita en (3.25) y los coeficientes:

$$a_0 = \frac{g}{f_{\text{áng}}^2} \cdot \frac{M'R - \frac{\mu'}{2}(r_{\max} - R_{\max})}{M'R^2 + \frac{\mu'}{3}(R_{\max}^2 + r_{\max}^2 - R_{\max}r_{\max})} \quad (4.3)$$

$$b_2 = - \frac{1}{M'R^2 + \frac{\mu'}{3}(R_{\max}^2 + r_{\max}^2 - R_{\max}r_{\max})} \quad (4.4)$$

El ajuste polinómico nos devolverá, por tanto, dos coeficientes con los que debemos hallar cuatro incógnitas (R , R_{\max} , M' y μ'). Evidentemente, esto no es posible, pero resulta razonable suponer que (i) la masa inferior cuelga, aproximadamente, del extremo de la varilla y, por tanto, $R \approx R_{\max}$ y (ii) podemos estimar que, por una cuestión de optimización del espacio, la masa inferior llegará prácticamente hasta la base del metrónomo. Esto nos permitirá hallar una horquilla de valores de M' y μ' coherentes con el análisis de las imágenes y, probablemente, no muy alejados de los valores reales.

Para el ajuste, se ha escogido el esquema de la patente original de 1815 (Figura 4.3) y tres fotografías de metrónomos antiguos de la colección Tony Bingham incluidos en el catálogo de la exposición *Auf Takt!* [17] (Figura 4.4, designados mediante la numeración del citado catálogo). Dos de ellos (TB 06 y TB 07) fueron fabricados en París en 1816 y aparecen sellados como “59” y “116”. El tercer metrónomo (TB 10) fue fabricado en Londres entre 1825 y 1830.

El proceso de medición seguido es el siguiente:

- Con ayuda del programa Fiji [15, 16], se establece la escala de cada imagen. La altura de los metrónomos fotografiados h figura en el catálogo y se ha incluido en

4.2 El metrónomo de Beethoven a partir de fotografías

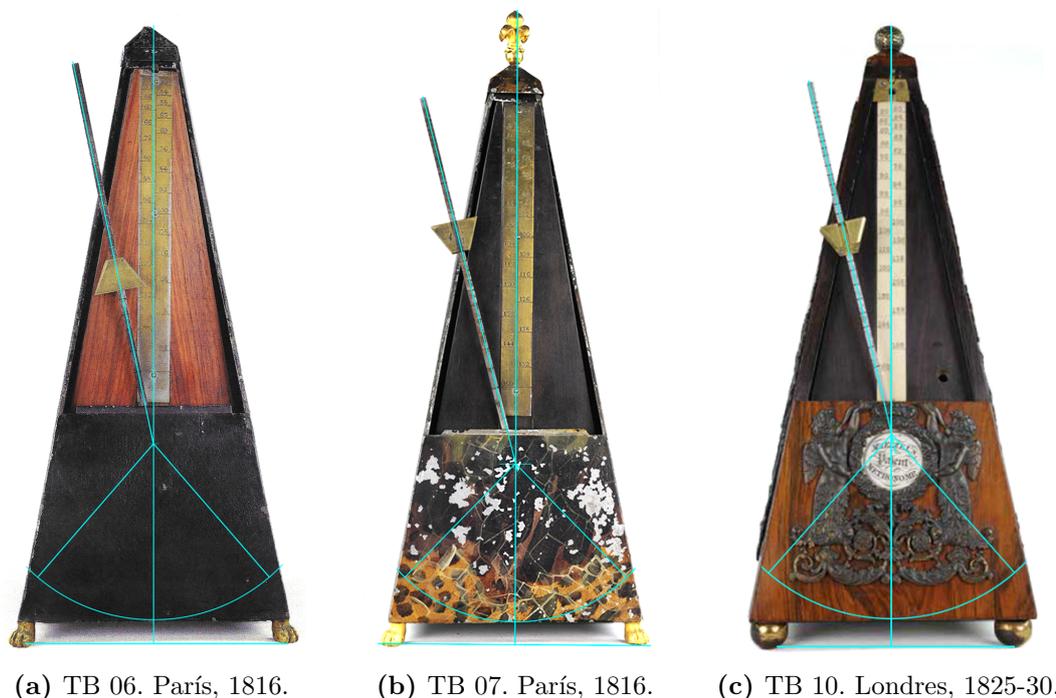


Figura 4.4: Metrónomos de la exposición *Auf Takt!* (colección Tony Bingham).

la Tabla 4.2. La altura del metrónomo de la patente se ha supuesto igual a 310 mm, de acuerdo con el metrónomo más antiguo de los analizados (TB 06).

- Una vez definida la escala, se miden las distancias al eje de las marcas de la varilla sobre las que se sitúa la masa superior, m . Se mide, asimismo, la distancia del centro de masas de m a su extremo superior. En todos los casos, m resulta tener forma trapezoidal, por lo que el cálculo del centro de masas puede hacerse por medios geométricos. Restando ambas distancias, se obtienen los valores de r necesarios para el ajuste.
- Se mide la longitud superior de la varilla r_{\max} y la distancia del eje a la base del metrónomo, h_b (ambos valores se incluyen en la Tabla 4.2).
- El valor de R se mide de manera directa en el caso de la patente ($R = 63(1)$ mm). Para los demás metrónomos, dado que la masa inferior se encuentra oculta, se estima, según lo observado en la patente, que el centro de masas inferior M podría situarse unos 2 cm por encima de la base. Por tanto, para el ajuste de los metrónomos del catálogo, utilizamos:

$$R = h_b - 20 \pm 5 \quad (4.5)$$

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Tabla 4.2: Datos y dimensiones de los metrónomos utilizados en el análisis.

Metrónomo	Origen	Fecha	Dimensiones [mm]		
			h	h_b	r_{\max}
Patente	Londres	1815	310	81.3(5)	190.3(6)
TB 06	París	1816	310	88.3(14)	195(3)
TB 07	París	1816	332	84.9(11)	198(2)
TB 10	Londres	1825-30	330	90.4(11)	193(2)

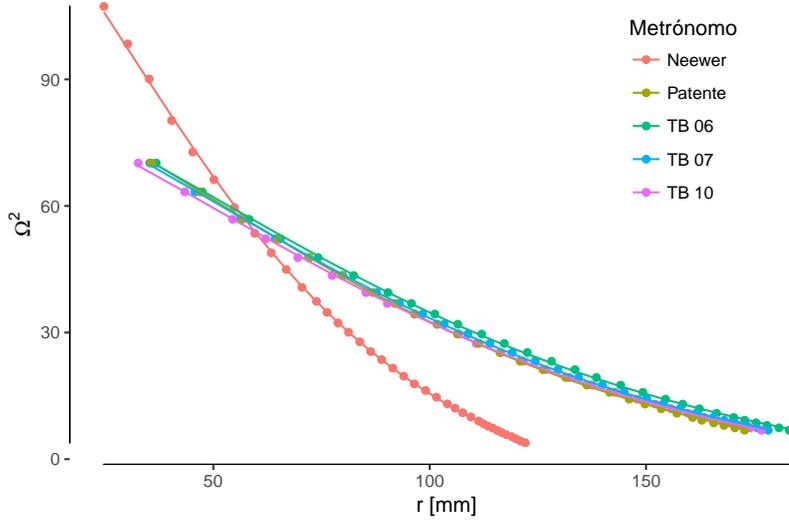


Figura 4.5: Ajuste polinómico de la frecuencia al cuadrado respecto a la distancia r de la masa superior m al eje para los distintos metrónomos estudiados.

- Por último, se estima el valor del ángulo de oscilación máximo, θ_{\max} , en unos 40° , teniendo en cuenta la anchura de la base de estos metrónomos y suponiendo que R llega casi hasta abajo.

La Figura 4.5 representa el ajuste de la frecuencia al cuadrado respecto a la distancia de la masa superior al eje, r , para los distintos metrónomos analizados. Se incluye asimismo, como referencia, la gráfica equivalente correspondiente al metrónomo contemporáneo (Neewer). En todos los casos el ajuste resulta ser muy bueno, con un valor del coeficiente de determinación ajustado $r^2 > 0.999$.

En la Figura 4.6 pueden compararse los valores de M' y μ' calculados a partir de dicho ajuste, despejando de las relaciones (4.3) y (4.4). De nuevo, se ha incluido el metrónomo Neewer, cuyos parámetros son conocidos, para comprobar la validez de la metodología. Para este metrónomo, los valores obtenidos a partir del ajuste coinciden, dentro del error, con los valores conocidos de μ' y M' (señalados con asterisco rojo en la figura) siempre que, para el cálculo de estas masas adimensionalizadas, se incluya la masa del extremo inferior de la varilla (el fragmento que va de R a R_{\max}) como parte de

4.2 El metrónomo de Beethoven a partir de fotografías

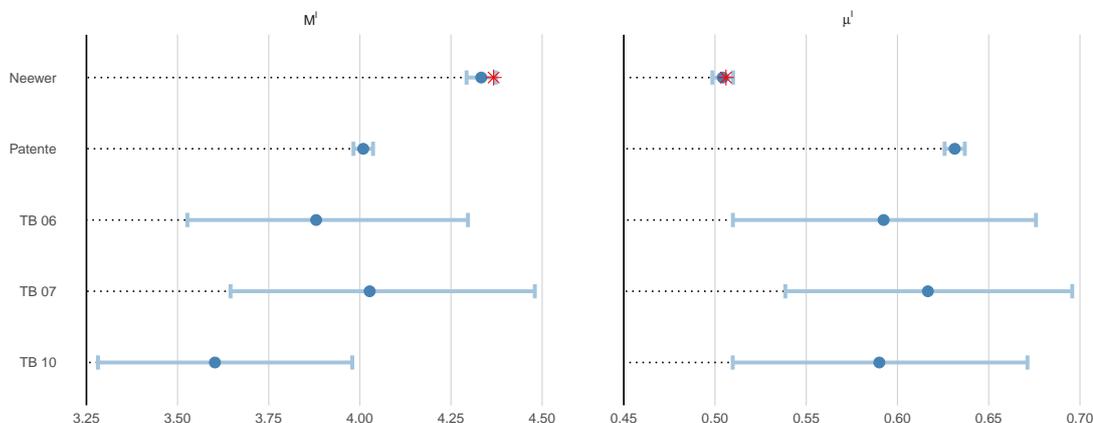


Figura 4.6: Valores de M' y μ' calculados a partir del ajuste de Ω^2 con r . Los valores reales de estas masas adimensionalizadas se incluyen, en rojo, para el metrónomo Neewer.

la masa M . Esta corrección es necesaria, dado que hemos considerado que $R = R_{\max}$.

Los demás metrónomos ofrecen, asimismo, resultados bastante razonables. Los valores de μ' son ligeramente superiores a los del metrónomo contemporáneo. Esto podría explicarse por la mayor longitud de la varilla (suponiendo que la masa superior m fuese similar a la del metrónomo contemporáneo). Por su parte, la masa adimensionalizada M' coincide en gran medida para los dos metrónomos de 1816 (TB 06 y TB 07) y para la estimación realizada a partir del esquema de la patente de 1815. El modelo de 1825-30 (TB 10) parece divergir ligeramente en este aspecto: su masa es sensiblemente menor a la del resto, quizás por tratarse de un modelo más moderno.

Los parámetros calculados a partir de fotografías para los metrónomos fabricados un año después de la publicación de la patente, TB 06 y 07, están muy próximos y coinciden dentro del error con los calculados a partir del esquema de la patente. Esto demuestra que dicho esquema se realizó a escala con gran precisión, lo que nos permite tomar el parámetro R , oculto en las fotografías, de dicho dibujo. Por tanto, utilizaremos los valores M' y μ' ajustados a partir del esquema de la patente para modelizar el metrónomo de Beethoven (4.3).

Tabla 4.3: Parámetros estimados para el metrónomo de Beethoven.

M'	μ'	$R[\text{mm}]$	$r_{\max}[\text{mm}]$
4.01(3)	0.631(6)	63(1)	190.3(6)

Capítulo 5

Análisis de interpretaciones sinfónicas

En este capítulo, nos proponemos comparar las marcas metronómicas de Beethoven con los *tempi* seguidos en distintas grabaciones de sus obras. La hipótesis de partida es que, en caso de que el metrónomo de Beethoven hubiese estado roto, los intérpretes que basan el *tempo* en las claves idiomáticas de la música escrita podrían haber aproximado con mayor acierto el *tempo* de estas sinfonías. En tal caso, la divergencia entre las marcas y los *tempi* interpretados coincidirían con la producida por un metrónomo descalibrado mediante alguno de los métodos expuestos en la Sección 3.3.

A continuación, se describe la metodología, en la que se detallan las grabaciones estudiadas, así como el proceso de adquisición y limpieza de datos. Seguidamente, se presentan los resultados y se contrastan con los desarrollos teóricos del Capítulo 3.

5.1. Metodología

Las nueve sinfonías de Beethoven constituyen su obra más característica y su máspreciado legado. Quizás por ello, tan pronto como pudo hacer uso de su metrónomo, el compositor añadió marcas metronómicas en todas ellas con un gran nivel de detalle. Por su parte, muchos directores contemporáneos han grabado estas piezas en forma de integral, dando lugar a un catálogo muy completo y diverso de grabaciones.

En este trabajo, se han seleccionado 36 de estas integrales sinfónicas, dirigidas por 36 directores distintos. El listado puede verse en la Tabla 5.1 junto con otros detalles de las grabaciones. Los directores han sido clasificados como (i) *historicistas* (o *históricamente informados*, H.I.), (ii) *de influencia historicista* y (iii) *románticos* o *no historicistas*, de acuerdo con [8] y las críticas que suelen acompañar a estas grabaciones. Según la convención, de facto, se consideran *historicistas* aquellas interpretaciones que utilizan instrumentos de época y se acogen a los criterios más típicos de este movi-

5. ANÁLISIS DE INTERPRETACIONES SINFÓNICAS

Tabla 5.1: Lista de grabaciones de integrales sinfónicas estudiadas. La tabla incluye nombre y apellido del director/a, la orquesta, el año de grabación, el sello discográfico y el UPC (*Unique Product Code*) del CD. La última columna recoge el tipo de interpretación (Int.), clasificada como *históricamente informada* (H.I.) o *de influencia historicista* (Infl.).

Director/a	Orquesta	Grabación	Sello	UPC	Int.
Abbado, Claudio	Berliner Philharmoniker	2000-2001	DG	028947758648	Infl.
Barenboim, Daniel	West-Eastern Divan Orchestra	2011	Decca	028947835110	
Bernstein, Leonard	Wiener Philharmoniker	1977-1979	DG	028947492429	
Böhm, Karl	Wiener Philharmoniker	1969-1972	DG	028947919490	
Brüggen, Frans	Orchestra of the 18th Century	1984-1992	Decca	028947874362	H.I.
Chailly, Riccardo	Gewandhausorchester Leipzig	2007-2009	Decca	028947834922	Infl.
Cluytens, André	Berliner Philharmoniker	1957-1960	Erato	5099964830353	
Davis, Colin	Staatskapelle Dresden	1995	Philips	028947568834	
Ferencsik, Janos	Hungarian State Orchestra	1969-1976	Hungaroton	5991810401321	
Furtwängler, Wilhelm	Philharmonia Orchestra Berliner Philharmoniker Wiener Philharmoniker Philharmonisches Staatsorchester Hamburg	1947-1954	Andromeda	3830257490937	
Gardiner, John Eliot	Orchestre Révolutionnaire et Romantique	1991-1994	DG	028943990028	H.I.
Gielen, Michael	SWR Sinfonieorchester Baden-Baden Freiburg	1997-2000	Hänssler	4010276025078	Infl.
Haitink, Bernard	Royal Concertgebouw Orchestra	1985-1987	Philips	0028944207323	
Harnoncourt, Nikolaus	Chamber Orchestra of Europe	1990-1991	Teldec	0809274976826	Infl.
Hickox, Richard	Northern Sinfonia of England	1984-1988	Resonance	0680125050427	Infl.
Hogwood, Christopher	The Academy of Ancient Music	1985-1989	Decca	028945255125	H.I.
Hugget, Monica & Goodman, Roy	The Hanover Band	1982-1988	Nimbus	0710357514425	H.I.
Immerseel, Jos Van	Anima Eterna Orchestra	2005-2007	Zigzag	3700551732197	H.I.
Jochum, Eugen	Concertgebouw Orchestra	1967-1969	Philips	0028947581475	
Karajan, Herbert von	Philharmonia Orchestra	1951-1955	Warner	5099951586324	
Kegel, Herbert	Dresdner Philharmonie	1982-1984	Capriccio	4006408500001	
Klemperer, Otto	Philharmonia Orchestra	1960	Arts	0017685125225	
Leinsdorf, Erich	Boston Symphony Orchestra	1961-1969	RCA	0886919168228	
Masur, Kurt	Leipzig Gewandhausorchester	1972- 1975	Philips	0028947527220	
Mengelberg, Willem	Royal Concertgebouw Orchestra	1940	Archipel	4035122401929	
Muti, Riccardo	Philadelphia Orchestra	1985-1988	Warner	5099909794627	
Norrington, Roger	London Classical Players	1987-1990	Erato	5099908342324	H.I.
Pletnev, Mikhail	Russian National Orchestra	2007	DG	0028947764090	
Polizzi, Antonino	Prague Symphony Orchestra Budapest Symphony Orchestra	1986-1994	Polymnie	3576079901205	
Rattle, Simon	Wiener Philharmoniker	2002	EMI	5099991562425	Infl.
Solti, Georg	Chicago Symphony Orchestra	1986-1989	Decca	0028943040020	
Szell, George	Cleveland Orchestra Chorus	1956-1964	Sony	0888837371520	
Toscanini, Arturo	NBC Symphony Orchestra	1949-1952	RCA	0828765570220	
Tremblay, Jean-Philippe	Orchestre de la Francophonie	2009	Analekta	0774204997526	Infl.
Walter, Bruno	Columbia Symphony Orchestra	1958-1959	Sony	5099750231227	
Wand, Günter	NDR Symphony Orchestra	1985-1988	RCA	0743218910920	

miento interpretativo; se consideran *de influencia historicista* aquellas interpretaciones realizadas con instrumentos contemporáneos, pero que, según diversas fuentes, adoptan criterios de interpretación historicistas en otros sentidos, y, por último, se consideran *románticas* todas aquellas anteriores a los años 80 o, de manera más general, aquellas que no se acogen a criterios historicistas.

Dentro de esta extensa colección de grabaciones, se ha optado por trabajar únicamente con las ocho primeras sinfonías por los motivos que siguen. Por un lado, la complejidad de la novena sinfonía (especialmente en lo tocante al último movimiento) hace que sea más difícil medir el *tempo* por medios computacionales. Por otra parte, existen dudas sobre la fiabilidad documental de algunos de los *tempi* de esta sinfonía [7], publicados meses antes de la muerte del compositor. Esta incertidumbre podría haber afectado a algunas de las interpretaciones, enturbiando el análisis que se quiere realizar aquí.

A pesar de esta restricción, el resultado es una colección de 1188 pistas de audio, más de 169 horas de música. Evidentemente, no es posible medir el *tempo* de todas estas grabaciones a mano en un tiempo razonable. Por ello, y también para evitar la subjetividad que un proceso así conllevaría, se recurre a métodos computacionales, si bien tampoco están exentos de dificultad.

La extracción del *tempo* de una grabación musical no es, en absoluto, un problema sencillo. Cada año se celebran competiciones con el objetivo de automatizar una tarea que, como humanos, nos resulta del todo trivial: dada una pieza musical, ¿dónde se sitúa el pulso?, ¿cuándo se debe “dar la palmada”? No es de extrañar que los orígenes de la investigación en este campo hundan sus raíces en la psicología de la música: para detectar el *tempo* de una grabación debemos comprender, en paralelo, cómo los humanos percibimos eso que llamamos pulso.

El problema se complica especialmente en el caso de la música clásica. Por un lado, la ausencia de una base percusiva (como una batería) dificulta la detección de picos de energía claramente diferenciados en la señal acústica. Por otro, el ritmo suele ser menos regular y los patrones más complejos que en otros estilos musicales, con frecuentes síncopas y cambios de compás que, incluso para una persona con cierta formación musical, pueden resultar difíciles de seguir. Todo ello se agrava por el hecho de que, en las grabaciones reales, el *tempo* casi nunca es constante.

A día de hoy, existen multitud de algoritmos capaces de abordar este problema con mayor o menor éxito dependiendo del estilo musical. Los que se centran en el análisis de grabaciones reales deben enfrentarse a dos problemas diferenciados. Por un lado, la detección de los ataques musicales (notas u *onsets*) cuyas duraciones definen el ritmo de una pieza. Por otro, la detección de patrones y relaciones jerárquicas existentes en el ritmo que permiten establecer cuál es el pulso regular subyacente. Las estrategias desarrolladas para resolver estos problemas harán que distintos algoritmos obtengan resultados diferentes según el tipo de música analizada. En el presente trabajo, optamos por utilizar un algoritmo desarrollado por G. Percival y G. Tzanetakis [18] [19] que basa la detección del pulso en las relaciones de autosimilaridad del ritmo de una grabación.

5. ANÁLISIS DE INTERPRETACIONES SINFÓNICAS

Este algoritmo es uno de los más fiables en base a una comparativa de 2016 [20] y está implementado en el *framework* de código abierto para análisis de audio Marsyas [21].

Como se ha mencionado anteriormente, una de las dificultades que plantea especialmente la música clásica a la hora de medir el *tempo* es que este suele variar a lo largo de una grabación. Incluso en aquellas ocasiones en las que la partitura indica una única marca metronómica (lo que correspondería, supuestamente, a un *tempo* constante), los intérpretes suelen oscilar en torno a ese valor, acelerando en algunos momentos de la pieza y decelerando en otros. Esto es lo que se conoce como *interpretación expresiva*. En el caso de las sinfonías de Beethoven, además, no es extraño que dentro de un mismo movimiento, el compositor indique varios *tempi* distintos sucesivos.

Por todo ello, para describir de manera precisa el *tempo* de una grabación, no bastará con medir un único valor. Más bien, será necesario muestrear el archivo de audio de manera continua mediante una ventana deslizante con cierto solape. La estrategia seguida es la siguiente:

- Se calcula el tamaño de ventana para cada movimiento sinfónico. La ventana se define como una fracción de la duración de la pista de audio, de forma que su duración media es de 30 segundos. De esta manera, se obtiene un mismo número de muestras para cada movimiento sinfónico, independientemente del intérprete o la duración.
- Se define, asimismo, un tamaño de salto de la ventana deslizante igual a la décima parte de la misma (solapamiento del 90 %).
- Por cada pista y muestra (posición de la ventana), se extrae el fragmento de audio y se analiza con Marsyas, que devuelve el *tempo* reconocido.
- Todo el proceso se automatiza mediante *scripts* y cada muestra se numera ordenadamente según su posición en la pista de audio original.

El resultado es un muestreo continuo del *tempo* de cada grabación. Sin embargo, los datos “en bruto” que devuelve Marsyas no son válidos para el análisis. Debido a la propia naturaleza del algoritmo de detección, que implica la detección de patrones periódicos y relaciones de autosemejanza rítmica, muchos de los *tempi* detectados por Marsyas son, en realidad, múltiplos o submúltiplos del *tempo* real de la muestra. En este trabajo hemos denominado *armónicos* a estos *tempi* correctamente detectados salvo por un factor racional debido a su similitud evidente con el fenómeno físico homónimo.

La limpieza de armónicos de los datos procedentes de Marsyas se ha llevado a cabo de manera automatizada con R [12, 14, 22] según los siguientes pasos:

- Se marcan las secciones donde existe un cambio de *tempo* o un cambio de compás indicado por Beethoven en la partitura de la sinfonía.
- Se clasifican los distintos movimientos y secciones según su tipo de compás (de subdivisión ternaria, binario de subdivisión ternaria o ternario de subdivisión

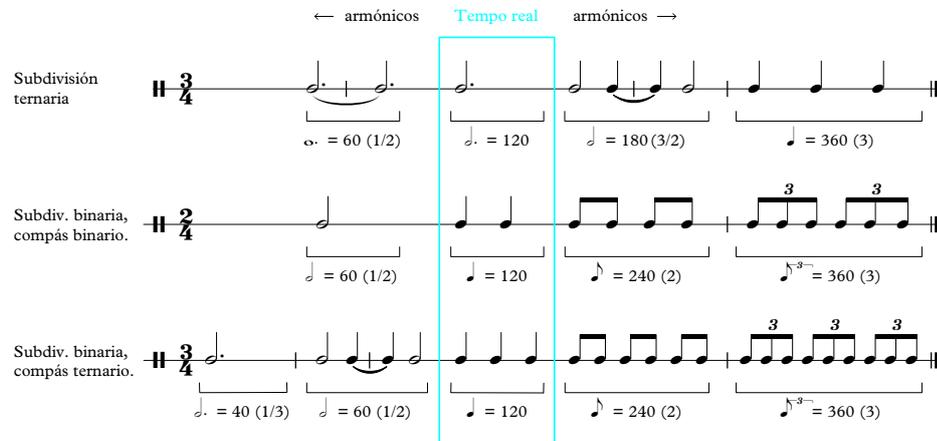


Figura 5.1: Armónicos más frecuentes en función del tipo de compás. De manera puntual, también se detectaron: (i) en los compases de subdivisión ternaria, armónicos 2 y 3/4; (ii) en los compases de subdivisión binaria, armónico 3/2 debido a la presencia ocasional de tresillos; (iii) en compases ternarios de subdivisión binaria, armónico 2/3.

binaria). Esta clasificación es relevante dado que determina qué armónicos habrán sido detectados por Marsyas con mayor probabilidad en cada sección. En la Figura 5.1 se muestran los armónicos más comunes para cada tipo de compás.

- Se agrupan los datos por director, sinfonía, movimiento y sección, y se localiza el pico de cada histograma, que nos indica el *tempo* más detectado en cada grabación. Estos picos se comparan con la marca metronómica de Beethoven para determinar si, dentro de cierto error y teniendo en cuenta el tipo de compás, coinciden con alguno de sus armónicos. En tal caso, el pico es corregido: se divide su valor entre el del armónico coincidente.
- Los picos corregidos se utilizan, a continuación, como referencia para corregir los demás valores del *tempo*. El proceso es idéntico al del paso anterior: si el *tempo* de una muestra coincide con alguno de los armónicos del pico, su valor es dividido por el del armónico.
- Por último, se corrigen los valores del *tempo* por continuidad. En una grabación típica, el *tempo* puede llegar a variar bastante, alejándose lo suficiente del pico como para que la primera corrección por armónicos no resulte del todo efectiva. En estos casos, aprovechamos que el *tempo* varía (en general) de forma suave: cada dato se compara con el de las dos muestras inmediatamente anteriores en busca de armónicos y se corrige en caso necesario. Además, se eliminan por interpolación los *outliers*, definidos como los valores de *tempo* que se alejan 2 desviaciones estándar más allá del pico.

5. ANÁLISIS DE INTERPRETACIONES SINFÓNICAS

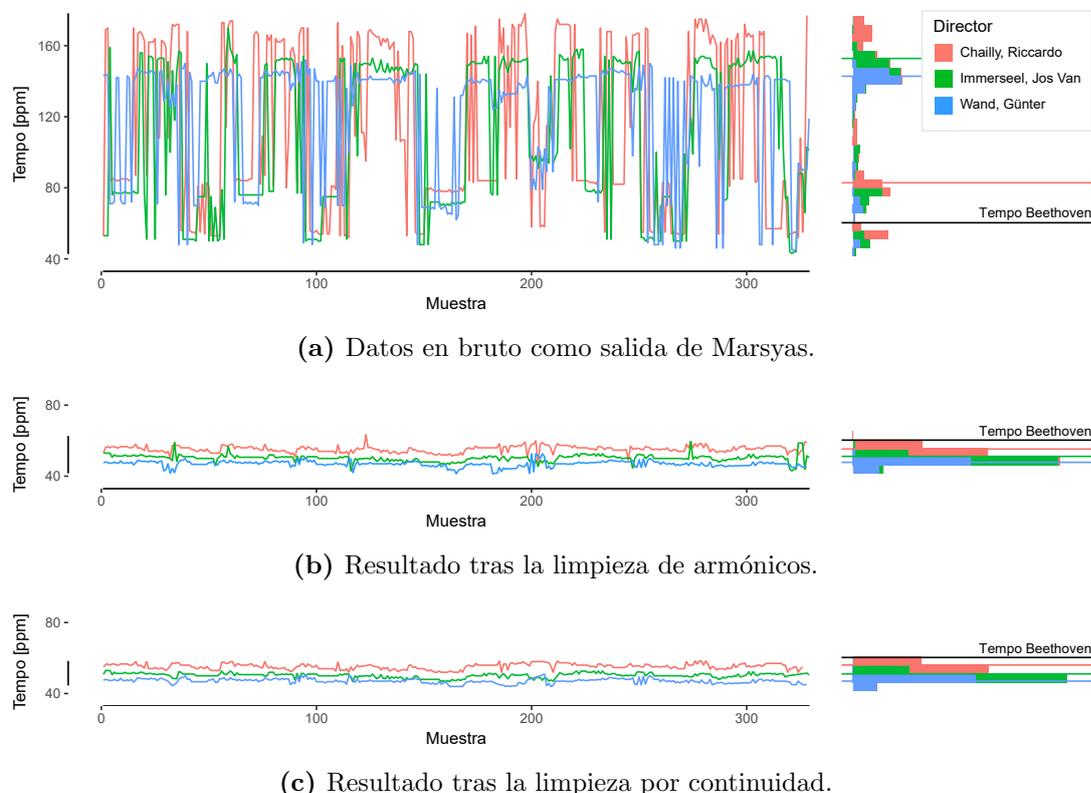


Figura 5.2: Ejemplo representativo de la metodología de tratamiento de datos. Se muestran las series temporales de tres directores para el primer movimiento de la Sinfonía n.º 3 en tres estadios distintos del proceso. Al margen, se representan los histogramas en horizontal. Sobre estos, las líneas rectas de colores representan los picos de cada histograma, mientras que la línea negra representa la marca metronómica de Beethoven.

La Figura 5.2 muestra un ejemplo representativo de esta metodología para un movimiento sinfónico y tres directores distintos. La Figura 5.2a muestra los datos en bruto tras el análisis con Marsyas, y puede verse que los picos detectados inicialmente se alejan bastante de la marca metronómica de Beethoven. Sin embargo, si nos fijamos en el histograma, a la derecha, es fácil observar que los datos se agrupan en torno a tres valores, a saber: el *tempo* real de la grabación (más lento, la “fundamental”), el armónico 2 y el armónico 3. El pico correspondiente a Chailly se sitúa sobre el segundo armónico y los de los otros directores, sobre el armónico 3. Dividiendo el valor de estos picos entre su armónico correspondiente y usándolos como referencia para corregir los demás valores del *tempo*, se obtiene el resultado que puede verse en la Figura 5.2b. Si bien este punto intermedio presenta todavía algunas anomalías, puede observarse que la limpieza por armónicos resulta fundamental. El último paso consiste en corregir por continuidad y eliminar los *outliers*. El resultado puede verse en la Figura 5.2c.

5.2. Resultados

Una vez obtenidos y limpiados los datos, tenemos una descripción muy precisa del *tempo* interpretativo de las sinfonías de Beethoven. En la Figura 5.3, se muestra la distribución del *tempo* normalizado (el *tempo* interpretativo dividido entre la marca metronómica de Beethoven) para el conjunto de las grabaciones de cada director estudiado.

Podemos observar, en primer lugar, que el *tempo* interpretativo es en general más lento que el *tempo* marcado por Beethoven (como cabía esperar, por otra parte). El director que más se aproxima a las marcas metronómicas del compositor es Riccardo Chailly pero, incluso en este caso, la mediana de su distribución se sitúa ligeramente por debajo de la relación 1:1.

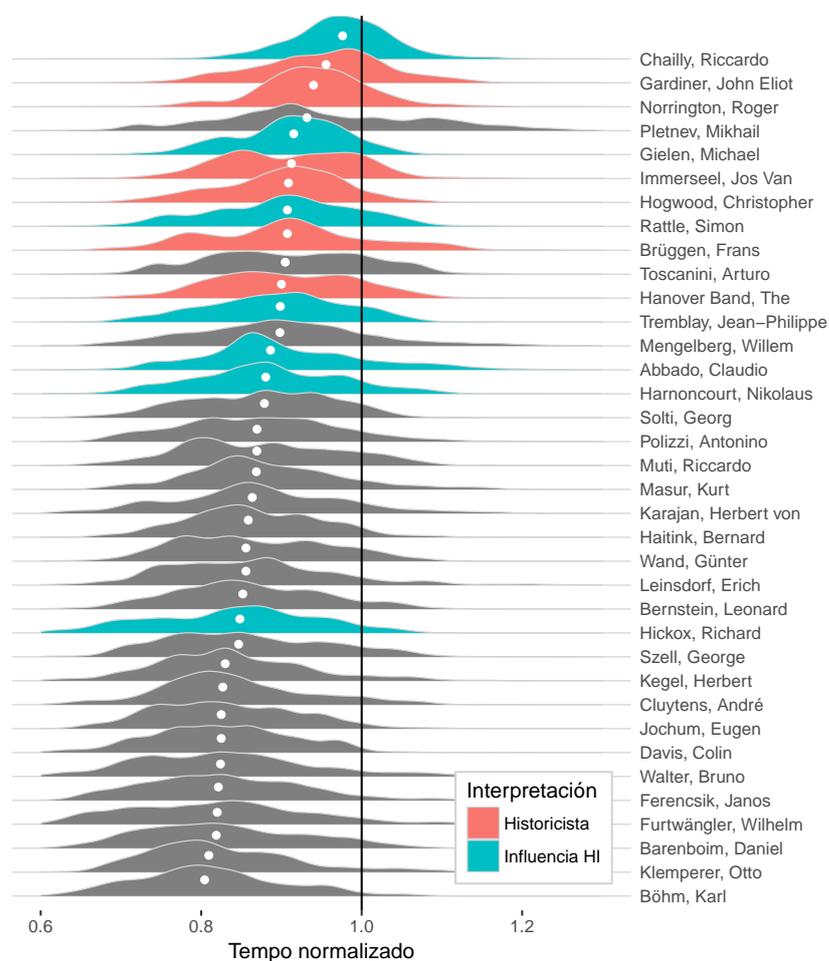


Figura 5.3: Distribución del *tempo* interpretativo normalizado para cada director. En negro se muestra el *tempo* de Beethoven. Los puntos blancos indican la mediana de la distribución para cada director. Se resaltan en color los intérpretes H.I. y de influencia H.I.

5. ANÁLISIS DE INTERPRETACIONES SINFÓNICAS

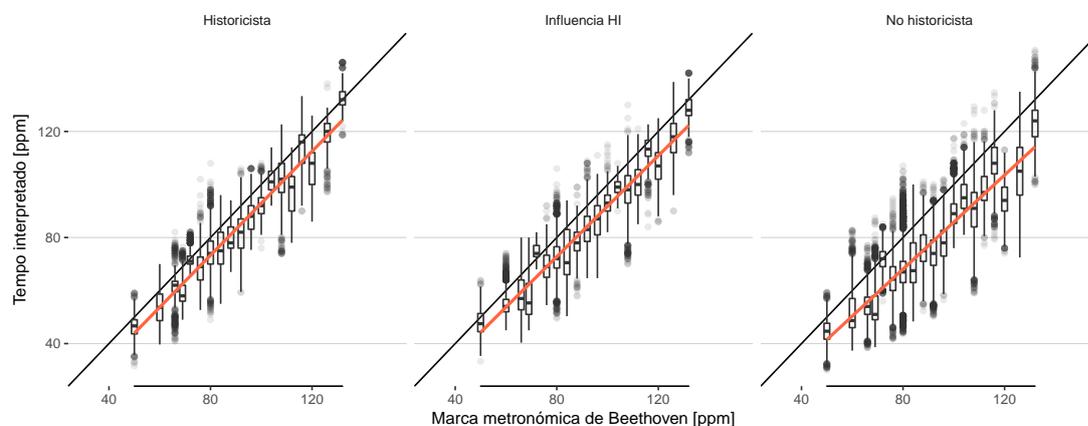


Figura 5.4: *Tempo* interpretativo en función del *tempo* escrito por Beethoven para cada grupo de intérpretes (historicistas, de influencia historicista o no historicistas).

Por otra parte, la influencia del movimiento H.I. resulta también evidente: de las 15 interpretaciones más rápidas (ordenadas según la mediana de su distribución), 12 son historicistas o de influencia historicista. Llama la atención, como excepción, el caso de Mikhail Pletnev. Este director rechaza, en general, los planteamientos del movimiento H.I., pero, además, la crítica lo considera un intérprete de extremos, poco ortodoxo e impredecible. Su distribución, de hecho, es la más dispersa de las estudiadas llegando a dirigir muy por debajo y muy por encima del *tempo* estipulado por Beethoven. Richard Hickox, por otra parte, resulta extrañamente lento comparado con otros directores H.I. Su interpretación se ha considerado de influencia historicista por utilizar proporciones orquestales de cuerda, viento y metal históricamente rigurosas. Sin embargo, es posible que el director no aplicase el mismo criterio en otros aspectos interpretativos como el *tempo*. Por todo ello, en los subsiguientes análisis, se ha optado por descartar la interpretación de Pletnev y por incluir a Hickox dentro de los intérpretes no historicistas.

En la Figura 5.4, puede compararse el *tempo* interpretativo en función de las marcas metronómicas de Beethoven para los distintos tipos de interpretación (historicista, de influencia historicista o no historicista). Puede observarse que el *tempo* elegido por los directores no historicistas es menor en todos los casos. No existe tanta diferencia, en cambio, entre directores historicistas o de influencia H.I. Por otra parte, cabe señalar que la diferencia entre unos y otros es únicamente una cuestión de grado: de hecho, todos los grupos quedan por debajo de la marca metronómica de Beethoven para casi todos los valores (existe una excepción llamativa en la marca de 72 ppm correspondiente al cuarto movimiento de la sinfonía n.º 7, que presenta además poca dispersión) y todos los grupos coinciden, a grandes rasgos, en los *tempi* que más se desvían de la marca (por ejemplo, los 69 ppm del primer movimiento de la Sinfonía n.º 8 o los 120 ppm del segundo movimiento de la Sinfonía n.º 1¹). De alguna manera, parece que el

¹Parece que los compases ternarios marcados a 3 pulsos dan lugar a interpretaciones más lentas.

movimiento H.I. ha aligerado todos los *tempi* en general pero las marcas metronómicas más problemáticas siguen siendo menos atendidas que otras.

Para analizar la hipótesis del metrónomo roto de Beethoven, se descartan tanto directores historicistas como de influencia historicista, ya que —a pesar de que también presentan, en mediana, unos *tempi* inferiores a los prescritos por Beethoven— se les supone un esfuerzo deliberado por aproximarse a las marcas metronómicas.

En la Figura 5.5, se muestran los datos del *tempo* de los directores no historicistas en función de las marcas de Beethoven comparados con dos modelos de metrónomo descalibrado. En la figura superior, se muestran distintos desplazamiento de la masa inferior que producirían un ralentizamiento del metrónomo (siempre dentro del límite impuesto por el radio de la masa M). En la figura inferior, se analiza el efecto que tendría una pequeña disminución de M' debida, quizás, a una hipotética rotura. En ambas gráficas se ha utilizado como configuración de partida los parámetros del metrónomo de Beethoven calculados en el Capítulo 4 y recogidos en la Tabla 4.3.

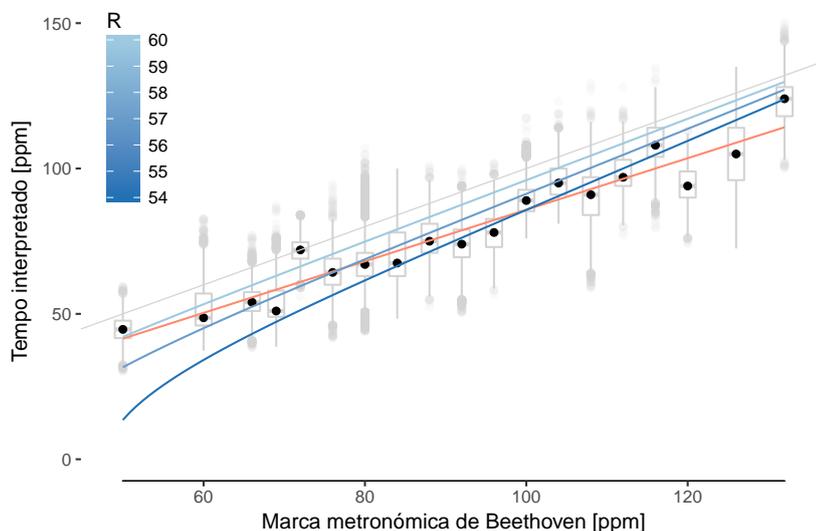
Si bien estos modelos explicarían la tendencia general de los intérpretes a situarse por debajo de las marcas de Beethoven, vemos que la divergencia real es bastante más compleja que la que vendría dada, únicamente, por un metrónomo descalibrado. Por un lado, un desplazamiento de la masa M afectaría en mayor medida a los *tempi* más lentos, mientras que la divergencia entre los *tempi* interpretativos y las marcas de Beethoven es prácticamente constante a lo largo de todo el rango de frecuencias (la pendiente del ajuste lineal para los *tempi* interpretativos, en rojo en la figura, es de 0.9; esto nos indica que, en cualquier caso, la divergencia debería ser mayor para los *tempi* más rápidos).

Sucede algo parecido con el metrónomo descalibrado a causa de una disminución de la masa adimensionalizada M' . En este caso, la diferencia de pendientes entre las líneas del modelo y la línea del ajuste de los *tempi* interpretativos es menos acusada (una disminución de M' tendría un efecto más homogéneo sobre el conjunto de frecuencias) y una disminución de un 10% (hasta $M' = 3.6$) de la masa adimensionalizada parece ajustarse bastante bien a los datos. Sin embargo, la pendiente del ajuste lineal sigue siendo menor también en este caso.

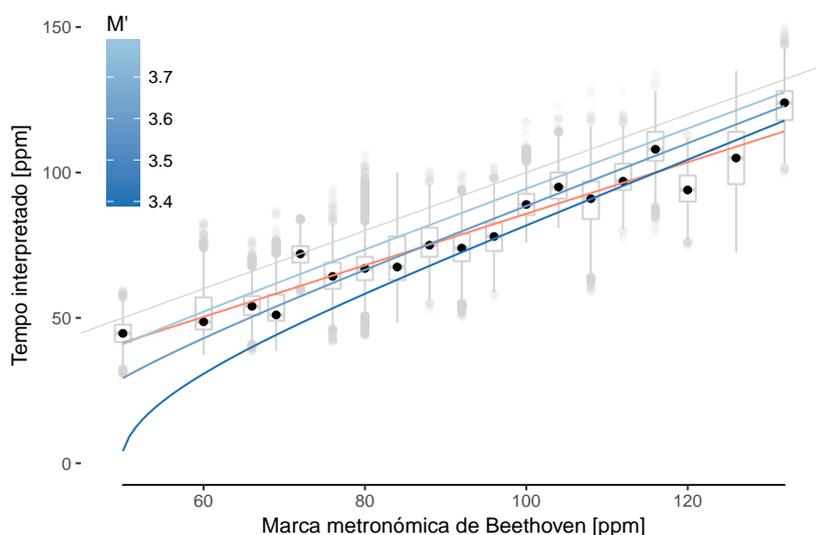
También se ha analizado el efecto que tendría un aumento del rozamiento por deslizamiento analizado en el Capítulo 3 y un posible aumento del ángulo de oscilación, pero ninguno de estos fenómenos podría explicar la magnitud de la divergencia existente entre los *tempi* interpretativos y las marcas de Beethoven.

De manera más general, el ajuste lineal de los datos del *tempo* interpretativo no es demasiado bueno, con un coeficiente de determinación ajustado $r^2 = 0.804$. Si bien estos *tempi* son, en general, más lentos que las marcas metronómicas, la diferencia no es homogénea ni guarda una relación evidente con el valor de la marca. Es posible que distintas cuestiones de carácter sean más relevantes a la hora de explicar estas divergencias pero se requeriría un análisis más detallado en este sentido.

5. ANÁLISIS DE INTERPRETACIONES SINFÓNICAS



(a) Frecuencias reproducidas (en función de la marca escrita) por un metrónomo descalibrado a causa de un desplazamiento de la masa inferior. Las distintas líneas (en azul) corresponden a distintos valores finales de R respecto al valor inicial $R = 63$ [mm].



(b) Frecuencias reproducidas (en función de la marca escrita) por un metrónomo descalibrado a causa de una disminución de la masa inferior (a causa de una rotura, por ejemplo). Las distintas líneas (en azul) corresponden a distintos valores finales de M' respecto al valor inicial $M' = 4.01$.

Figura 5.5: Comparación de los *tempi* interpretativos con dos modelos de metrónomo descalibrado. Se muestran en gris, más tenue, los *tempi* de las grabaciones con su correspondiente ajuste (línea roja). Sobre estos datos se superponen (líneas azules) los *tempi* reproducidos por metrónomos descalibrados por distintos motivos según el modelo elaborado en el Capítulo 3.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se ha analizado de manera sistemática la hipótesis del metrónomo roto de Beethoven como causa de la divergencia entre las marcas metronómicas del compositor y los *tempi* seguidos por sus intérpretes. Para ello:

- Se ha propuesto un modelo analítico que describe con gran precisión el comportamiento del metrónomo mecánico de péndulo doble a partir de sus parámetros físicos relevantes.
- Se han propuesto distintas distorsiones a dicho modelo que alterarían la frecuencia reproducida por el metrónomo. Se ha comparado, asimismo, la frecuencia del metrónomo de fábrica (que vendría indicada por la escala del metrónomo) con la frecuencia reproducida por el metrónomo en tales circunstancias (la frecuencia a la que Beethoven habría imaginado su música).
- Se ha validado el modelo propuesto experimentalmente obteniendo unos resultados que superan en exactitud a trabajos anteriores.
- A la luz de dicho modelo, se han estudiado esquemas y fotografías de otros metrónomos de la época de Beethoven. Se ha propuesto una metodología que, bajo ciertas suposiciones razonables, permite estimar los parámetros de un metrónomo (sus masas adimensionalizadas) a partir de fotografías.
- En base al modelo y a la metodología propuesta, se han estimado los parámetros físicos relevantes del metrónomo de Beethoven, hoy desaparecido.
- Se ha extraído el *tempo* de 36 integrales sinfónicas de manera automatizada y continua mediante un algoritmo de detección del *tempo* de código abierto. Se ha diseñado una metodología que permite limpiar los datos procedentes de este tipo de algoritmos, corrigiendo su error más común (la detección de múltiplos y submúltiplos del *tempo* verdadero) dada una referencia.

6. CONCLUSIONES

- Gracias a la medición automatizada del *tempo* y al proceso de limpieza de datos, se ha obtenido una descripción muy detallada del *tempo* interpretativo en la obra sinfónica de Beethoven. El proceso de limpieza podría refinarse y simplificarse en futuros trabajos y los datos resultantes no están exentos de errores, pero, en su conjunto, suponen una colección sin precedentes en el mundo de la musicología, tanto por su exhaustividad como por su objetividad.
- En base a estos datos, se ha analizado la influencia del movimiento historicista sobre los *tempi* interpretativos a partir de los años 80, constatando que las interpretaciones, en general, se han acelerado desde entonces.
- Por último, se han comparado los *tempi* interpretativos obtenidos con los modelos de metrónomo descalibrado propuestos. Los resultados no son del todo concluyentes. Si bien, a la vista de los datos, resulta evidente que los *tempi* interpretados son casi siempre más lentos que las marcas de Beethoven, la divergencia entre ambos no parece obedecer un patrón claro. Es posible que un metrónomo descalibrado pudiese explicar, de manera generalizada e imprecisa, la premura de las marcas de Beethoven. Pero, en todo caso, habría que analizar otras causas estilísticas y de carácter musical para explicar las diferencias particulares de cada movimiento sinfónico.

En definitiva, el presente modelo ha aportado concreción y rigurosidad a la hipótesis del metrónomo roto de Beethoven, acotando su posible alcance aun sin poder confirmarla más allá de toda duda. Adicionalmente, se han aportado herramientas que abren la puerta a análisis más precisos sobre el *tempo* interpretativo y el funcionamiento del metrónomo.

Referencias

- [1] DONALD J. GROUT AND CLAUDE V. PALISCA. *Historia De La Musica Occidental, 1*. Alianza Música. Grupo Anaya Comercial, 2004. 1
- [2] THOMAS Y. LEVIN. **Integral Interpretation: Introductory Notes to Beethoven, Kolisch and the Question of the Metronome**. *The Musical Quarterly*, **77**(1):81–89, 1993. 2
- [3] STURE FORSÉN, HARRY B. GRAY, L. K. OLOF LINDGREN, AND SHIRLEY B. GRAY. **Was Something Wrong with Beethoven’s Metronome?** *Notices of the AMS*, **60**(9), 2013. 2, 4, 9
- [4] G. AND T. WILKIE. *The Repertory of Patent Inventions: And Other Discoveries and Improvements in Arts, Manufactures, and Agriculture*. 1818. Disponible en: <https://books.google.es/books?id=d080AAAAMAAJ>. 3, 11, 12, 31
- [5] PETER STADLEN. **Beethoven and the Metronome, II**. *Soundings*, **9**:38–73, 1982. 3, 7, 8, 27, 31
- [6] LUDWIG VAN BEETHOVEN AND EMILY ANDERSON. *The letters of Beethoven*. The Letters of Beethoven. Macmillan, 1961. 3, 4
- [7] PETER STADLEN. **Beethoven and the Metronome, I**. *Music and Letters*, **48**(4):330–349, 1967. 4, 8, 39
- [8] LARI DIANNE YOUNG. *Problems regarding the metronome markings in the music of Beethoven*. PhD thesis, 1991. 7, 8, 37
- [9] NICHOLAS TEMPERLEY. **Tempo and repeats in the early nineteenth century**. *Music & Letters*, **47**(4):323–336, 1966. 7, 8
- [10] RUDOLF KOLISCH AND ARTHUR MENDEL. **Tempo and Character in Beethoven’s Music. Part II**. *The Musical Quarterly*, **29**(3):291–312, 1943. 8
- [11] LAWRENCE TALBOT. **A note on Beethoven’s metronome**. *Journal of Sound and Vibration*, **17**(3):323–329, 1971. 9, 11, 12, 16

REFERENCIAS

- [12] R CORE TEAM. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2017. Disponible en: <https://www.R-project.org/>. 29, 40
- [13] UWE LIGGES, SEBASTIAN KREY, OLAF MERSMANN, AND SARAH SCHNACKENBERG. *tuneR: Analysis of music*, 2016. Disponible en: <http://r-forge.r-project.org/projects/tuner/>. 29
- [14] IÑAKI UCAR. *errors: Error Propagation for R Vectors*, 2017. R package version 0.0.2. Disponible en: <https://CRAN.R-project.org/package=errors>. 29, 40
- [15] JOHANNES SCHINDELIN, IGNACIO ARGANDA-CARRERAS, ERWIN FRISE, VERENA KAYNIG, MARK LONGAIR, TOBIAS PIETZSCH, STEPHAN PREIBISCH, CURTIS RUEDEN, STEPHAN SAALFELD, BENJAMIN SCHMID, ET AL. **Fiji: an open-source platform for biological-image analysis**. *Nature methods*, **9**(7):676–682, 2012. 29, 32
- [16] JOHANNES SCHINDELIN, CURTIS T. RUEDEN, MARK C. HINER, AND KEVIN W. ELICEIRI. **The ImageJ ecosystem: An open platform for biomedical image analysis**. *Molecular reproduction and development*, **82**(7-8):518–529, 2015. 29, 32
- [17] TONY BINGHAM AND ANTONY TURNER. *Metronomes and Musical Time. Catalogue of the Tony Bingham Collection of metronomes in the Exhibition AUF TAKT! held in the Museum für Musik, Basel from 20 January to 20 August 2017*. Tony Bingham, 2017. 32
- [18] GRAHAM PERCIVAL AND GEORGE TZANETAKIS. **An effective, simple tempo estimation method based on self-similarity and regularity**. In *2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 241–245, May 2013. 39
- [19] GRAHAM PERCIVAL AND GEORGE TZANETAKIS. **Streamlined Tempo Estimation Based on Autocorrelation and Cross-correlation with Pulses**. *IEEE/ACM Trans. Audio, Speech and Lang. Proc.*, **22**(12):1765–1776, Diciembre 2014. 39
- [20] FREDERIC FONT AND XAVIER SERRA. **Tempo Estimation for Music Loops and a Simple Confidence Measure**. In *17th International Society for Music Information Retrieval Conference (ISMIR 2016)*, New York, 07/08/2016 2016. 40
- [21] GEORGE TZANETAKIS AND PERRY COOK. **MARSYAS: a framework for audio analysis**. *Organised Sound*, **4**(3):169–175, 2000. 40
- [22] HADLEY WICKHAM, ROMAIN FRANCOIS, LIONEL HENRY, AND KIRILL MÜLLER. *dplyr: A Grammar of Data Manipulation*, 2017. R package version 0.7.2. Disponible en: <https://CRAN.R-project.org/package=dplyr>. 40