

ШУМЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ЕПИСКОП К. ПРЕСЛАВСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
ФАКУЛТЕТ ПО ТЕХНИЧЕСКИ НАУКИ

KONSTANTIN PRES LAVSKY UNIVERSITY OF SHUMEN
FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
FACULTY OF TECHNICAL SCIENCE

МАТТЕХ 2020

СБОРНИК НАУЧНИ ТРУДОВЕ

МАТТЕХ 2020

CONFERENCE PROCEEDINGS

Том 1

Математика и Природни науки

**Компютърна информатика и
компютърни информационни технологии**

**Обучението по математика и
информатика**

Икономика и управление

Volume 1

Mathematics and Natural Sciences

**Computer Informatics and
Computer Information Technologies**

**Mathematics and Informatics
Education**

Economics and Management

Том 2

**Комуникационна и компютърна
техника и технологии**

**Информационни, технически и икономически
проблеми на системите за сигурност**

Геодезия, фотограметрия и картография

Общо инженерство и технически системи

Студентска секция

Volume 2

**Communication and
Computer Technologies**

**Information, Technical and Economical Problems
of Security Systems**

Geodesy, Photogrammetry and Cartography

General Engineering and Technical Systems

Student's Section

**Ш У М Е Н
2020**

Настоящият сборник съдържа научни доклади, изнесени на проведената през октомври 2020 година в Шуменския университет научна конференция с международно участие MATTEX 2020 с резултатите от научните изследвания на преподаватели, докторанти, специалисти и студенти от Шуменския университет, други учебни заведения, фирми и организации. Конференцията беше частично финансирана от проект РД-08-139/04.02.2020 на Шуменски университет.

Всички доклади, публикувани в сборника, са рецензирани.

This volume contains the reports presented on the Scientific Conference with international participation MATTEX 201820 held at Konstantin Preslavsky University of Shumen in October 2020. The reports contain the results of the research of lecturers, PhD students, specialists and undergraduate students at Konstantin Preslavsky University of Shumen, other Higher Education Institutions, companies and research organizations. The conference was partially supported by project RD-08-14639/04.02.2020 of Shumen University.

All papers published in this volume have been reviewed.

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ:

Проф. д-р Вежди Хасанов
Проф. д. н. Борислав Стоянов
Проф. д. н. Иво Михайлов
Проф. д. н. Наталия Павлова
Доц. д-р Радостина Енчева
Доц. д-р Радка Русева
Доц. д-р Корнелия Тодорова
Доц. д-р Станимир Железов
Проф. д. н. Кшиштоф Шчипиорски, Полша
Проф. к. п. н. Василий Швеца, Украйна
Проф. д-р Атанас Стефанов, САЩ
Проф. д-р Варга Калантаров, Турция

EDITORIAL BOARD:

Prof. Vejdi Hasanov, PhD
Prof. Borislav Stoyanov, DSc
Prof. Ivo Michailov, DSc
Prof. Natalia Pavlova, DSc
Assoc. Prof. Radostina Encheva, PhD
Assoc. Prof. Radka Ruseva, PhD
Assoc. Prof. Kornelia Todorova, PhD
Assoc. Prof. Stanimir Zhelezov, PhD
Prof. Krzysztof Szczypiorski, DSc, Poland
Prof. Vasyl Oleksandrovych Shvets, PhD, Ukraine
Prof. Atanas Stefanov, PhD, USA
Prof. Varga Kalantarov, PhD, Turkey

© Университетско издателство “Епископ Константин Преславски”
Konstantin Preslavsky University Press

ISSN: 1314-3921

ON SOME APPLICATIONS OF COUPLED FIXED (OR BEST PROXIMITY) POINTS

BOYAN G. ZLATANOV

ABSTRACT: We present some possible generalizations of the notion of coupled fixed (or best proximity) points and their applications. We enrich the class of cyclic maps with coupled fixed (or best) proximity points, so that the technique can be applied not only for symmetric systems. We define a new notion of coupled fixed (or best proximity) points that can be applied in the investigation of existence, uniqueness and stability of market equilibrium in duopoly markets.

KEYWORDS: Coupled fixed points, Coupled best proximity points, Modular function space, Partially ordered metric space, Duopoly market

1 Introduction and Preliminaries

The Banach contraction principle states that in a complete metric space (X, ρ) any contraction map $T : X \rightarrow X$ has a fixed point, i.e. $\min\{\rho(x, Tx) : x \in X\} = 0$. A lot of results in modelling real world processes in applied mathematics lead to the problem of finding $\min\{\rho(x, Tx) : x \in X\}$. It may happen that the above minimum is greater than zero. One approach for solving the above mentioned problems uses the notion of a best proximity point is introduced in [7], where a sufficient condition for the existence and the uniqueness of best proximity points in uniformly convex Banach spaces is obtained.

A constructed model may depends on two parameters, i.e. $F : X \times X \rightarrow X$. The notion of coupled fixed points [9] ($x = F(x, y)$, $y = F(y, x)$) and of a coupled best proximity points ($\rho(x, F(x, y)) = \rho(y, F(y, x)) = \text{dist}(A, B)$) for an ordered pair (F, G) , $F : A \times A \rightarrow B$, $G : B \times B \rightarrow A$, where $A, B \subset X$ [10, 23], is relevant in this context.

We have tried to present some possible generalizations of the notion of coupled fixed (or best proximity) points, that enrich the set of applications of this notion.

2 Coupled fixed points in partially ordered metric spaces

Following [2, 9] let X be a set and let \preceq be a partial order in X , then (X, \preceq) is called a partially ordered set. We call two elements $x, y \in X$ comparable if either $x \preceq y$ or $y \preceq x$. We denote $x \succeq y$ if $y \preceq x$. We say that $x \prec$ if $x \preceq y$ but $x \neq y$. Let (X, ρ) be a metric space with a partial order \preceq , then the triple (X, ρ, \preceq) is called a partially ordered metric space.

Definition 1. ([2, 9]) Let (X, \preceq) be a partially ordered set and let $F : X \times X \rightarrow X$. The function F is said to have the mixed monotone property if

$$\text{for any } x_1, x_2, y \in X \text{ such that } x_1 \preceq x_2 \text{ there holds } F(x_1, y) \preceq F(x_2, y)$$

and

$$\text{for any } y_1, y_2, x \in X \text{ such that } y_1 \preceq y_2 \text{ there holds } F(x, y_1) \succeq F(x, y_2).$$

Definition 2. ([2, 9]) Let $F : X \times X \rightarrow X$. An ordered pair $(x, y) \in X \times X$ is called coupled fixed point of F if $x = F(x, y)$ and $y = F(y, x)$.

Let (X, ρ, \preceq) be a partially ordered complete metric space. We endow the product space $X \times X$ with the following partial order $(u, v) \preceq (x, y)$, provided that $x \succeq u$ and $y \preceq v$ holds simultaneously and with the following metric $d((x, y), (u, v)) = \rho(x, u) + \rho(y, v)$ for $(x, y), (u, v) \in X \times X$.

Every where for a partially ordered metric space (X, ρ, \preceq) we will consider the product space $(X \times X, d, \preceq)$ endowed with the mentioned above partial order and metric.

The first results about existence of coupled fixed points for maps with the mixed monotone property was obtained in [9] and applications was presented for solving the initial value problem for systems of differential equations. Later this results was generalized in [2] and the technique seems to have the potential for further generalizations and applications

Theorem 3. ([2]) *Let $F : X \times X \rightarrow X$ be a continous mapping having the mixed monotone property on X . Assume that there exists a $k \in [0, 1)$ with $\rho(F(x, y), F(u, v)) \leq \frac{k}{2}(\rho(x, u) + \rho(y, v))$ holds for every $x \geq u$ and every $y \leq v$. If there exist $x_0, y_0 \in X$ such that $x_0 \leq F(x_0, y_0)$ and $y_0 \geq F(y_0, x_0)$, then F has a coupled fixed point (x, y) .*

If in addition every pair of elements has either a lower bound or an uper bound the the coupled fixed point is unique.

Let us mention that Ekeland's variational principle holds for any l.s.c maps $T : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, provided that X is a partially ordered complete metric space. Unfortunately, when investigating contraction type of maps $F : X \times X \rightarrow X$, satisfying the mixed monotone property in a partially ordered complete metric space $X \times X$, the contraction conditions holds only for part of the points $(x, y), (u, v) \in X \times X$. Thus we can not apply Ekeland's variational principle, as it is done in [6]. A generalization Ekeland's variational principle, on classes of subsets of partially ordered complete metric space $X \times X$, which need not to be compact or even closed, is obtained in [25]. It is applied in the investigations of coupled fixed points for maps that satisfy the mixed monotone property [25].

Let (X, ρ) be a metric space. Following [3] an extended real valued function $T : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ on X is called lower semicontinuous (for short l.s.c) if $\{x \in X : f(x) > a\}$ is an open set for each $a \in (-\infty, +\infty]$. Equivalently T is l.s.c if and only if at any point $x_0 \in X$ there holds $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$. A function T is called to be proper function, provided that $T \not\equiv +\infty$.

Theorem 4. ([25]) *Let (X, ρ, \preceq) be a partially ordered complete metric space, $(X \times X, d, \preceq)$ and $F : X \times X \rightarrow X$ be a continuous map with the mixed monotone property. Let*

$$V \times V = \left\{ (x^{(1)}, x^{(2)}) \in X \times X : x^{(1)} \preceq F(x^{(1)}, x^{(2)}) \text{ and } x^{(2)} \succeq F(x^{(2)}, x^{(1)}) \right\} \neq \emptyset.$$

Let $T : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be a proper, l.s.c, bounded from below function. Let $\varepsilon > 0$ be arbitrary chosen and fixed and let $u_0 \in V \times V$ be an ordered pair such that the inequality $T(u_0) \leq \inf_{V \times V} T(v) + \varepsilon$ holds. Then there exists an ordered pair $x \in V \times V$, such that

(i) $T(x) \leq \inf_{u \in V \times V} T(u);$

(ii) $d(x, u_0) \leq 1;$

(iii) *For every $w \in V \times V$ different from $x \in V \times V$ holds the inequality $T(w) > T(x) - \varepsilon d(w, v)$.*

An alternative proof of the next theorem from [1], with the help of Theorem 4 is presented in [25].

Theorem 5. ([25]) Let (X, ρ, \preceq) be a partially ordered complete metric space, $(X \times X, d, \preceq)$ and $F : X \times X \rightarrow X$ be a continuous map with the mixed monotone property. Let there exists $\alpha \in [0, 1)$, so that the inequality

$$(1) \quad \rho(F(x, y), F(u, v)) + \rho(F(y, x), F(v, u)) \leq \alpha\rho(x, u) + \alpha\rho(y, v)$$

holds for all $x \succeq u$ and $y \preceq v$. If there exists at least one ordered pair (x, y) , such that $x \preceq F(x, y)$ and $y \succeq F(y, x)$, then there exists a coupled fixed points (x, y) of F .

If in addition every pair of elements in $X \times X$ has an lower or an upper bound, then the coupled fixed point is unique.

The next results is a corollary of Theorem 5, which slightly generalizes the result from [9].

Corollary 6. ([25]) Let (X, ρ, \preceq) be a partially ordered complete metric space, $(X \times X, d, \preceq)$ and $F : X \times X \rightarrow X$ be a continuous map with the mixed monotone property. Let there exists $\alpha, \beta \in [0, 1)$, $\alpha + \beta < 1$ so that the inequality

$$(2) \quad \rho(F(x, y), F(u, v)) \leq \alpha\rho(x, u) + \beta\rho(y, v)$$

holds for all $x \succeq u$ and $y \preceq v$. If there exists at least one ordered pair (x, y) , such that $x \preceq F(x, y)$ and $y \succeq F(y, x)$, then there exists a coupled fixed points (x, y) of F .

If in addition every pair of elements in $X \times X$ has an lower or an upper bound, then the coupled fixed point is unique.

Example 7. ([25]) We would like to finish with a particular example. Let $X = \ell_1$, endowed with its classical norm $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ and the metric $\rho_1(x, y) = \|x - y\|$. Let us define a partial order in X by $x \preceq y$, if $|x_i| \leq |y_i|$ for all $i \in \mathbb{N}$. Let us define $F : X \times X \rightarrow X$ by $F(x, y) = \left\{ \frac{|x_i|}{2} - \frac{|y_i|}{3} + \frac{1}{2^i} \right\}_{i=1}^{\infty}$. Let us consider the ordered pair $(x_0, y_0) = \left(\left\{ \frac{2}{5 \cdot 2^i} \right\}_{i=1}^{\infty}, \left\{ \frac{2}{2^i} \right\}_{i=1}^{\infty} \right)$. Then the map F satisfies the conditions of Corollary 6 with the additional assumption and consequently F has a unique coupled fixed point.

It was proved in [4] the existence and uniqueness of coupled fixed points for Kannan type maps in metric space. A generalization in the context of mixed monotone maps in partially ordered metric spaces is resented in [25].

Theorem 8. ([25]) Let (X, ρ, \preceq) be a partially ordered complete metric space, $(X \times X, d, \preceq)$ and $F : X \times X \rightarrow X$ be a continuous map with the mixed monotone property. Let there exists $\alpha \in [0, 1/2)$, so that the inequality

$$(3) \quad \rho(F(x, y), F(u, v)) \leq \alpha\rho(x, F(x, y)) + \alpha\rho(u, F(u, v))$$

holds for all $x \succeq u$ and $y \preceq v$. If there exists at least one ordered pair (x, y) , such that $x \preceq F(x, y)$ and $y \succeq F(y, x)$, then there exists a coupled fixed point (x, y) of F .

3 Modified Coupled fixed (or best proximity) points

Let (X, ρ) be a metric space. We define a distance between two subsets $A, B \subset X$ by $\text{dist}(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}$.

Definition 9. ([26]) Let A_x, A_y, B_x and B_y be nonempty subsets of a metric space (X, ρ) , $F : A_x \times A_y \rightarrow B_x$, $f : A_x \times A_y \rightarrow B_y$. An ordered pair $(\xi, \eta) \in A_x \times A_y$ is called a coupled point of (F, f) if

$$\xi = F(\xi, \eta) \text{ and } \eta = f(\xi, \eta).$$

Just to fit some of the formulas in the text field let us denote $d_i = d(A_i, B_i)$, $i \in \{x, y\}$.

Definition 10. ([26]) Let A_x, A_y, B_x and B_y be nonempty subsets of a metric space (X, ρ) , $F : A_x \times A_y \rightarrow B_x$, $f : A_x \times A_y \rightarrow B_y$. An ordered pair $(\xi, \eta) \in A_x \times A_y$ is called a coupled best proximity point of (F, f) if

$$\rho(\xi, F(\xi, \eta)) = \text{dist}(A_x, B_x) \text{ and } \rho(\eta, f(\xi, \eta)) = \text{dist}(A_y, B_y).$$

Definition 11. ([26]) Let A_x, A_y, B_x and B_y be nonempty subsets of X . Let $F : A_x \times A_y \rightarrow B_x$, $f : A_x \times A_y \rightarrow B_y$, $G : B_x \times B_y \rightarrow A_x$ and $g : B_x \times B_y \rightarrow A_y$. For any pair $(x, y) \in A_x \times A_y$ we define the sequences $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ by $x_0 = x$, $y_0 = y$ and

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= F(x_{2n}, y_{2n}), & y_{2n+1} &= f(x_{2n}, y_{2n}) \\ x_{2n+2} &= G(x_{2n+1}, y_{2n+1}), & y_{2n+2} &= g(x_{2n+1}, y_{2n+1}) \end{aligned}$$

for all $n \geq 0$.

If $f(x, y) = F(y, x)$, $g(x, y) = G(y, x)$, $A_x = A_y = A$ and $B_x = B_y = B$ we get the notions and the results from [1, 2, 9, 10, 13, 14].

3.1 Coupled fixed points

Theorem 12. ([26]) Let A_x, A_y, B_x and B_y be nonempty subsets of a complete metric space (X, ρ) , $F : A_x \times A_y \rightarrow B_x$, $f : A_x \times A_y \rightarrow B_y$, $G : B_x \times B_y \rightarrow A_x$ and $g : B_x \times B_y \rightarrow A_y$. Let there exist $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, $\max\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\} < 1$, such that

$$(4) \quad \rho(F(x, y), G(u, v)) + \rho(f(z, w), g(t, s)) \leq \alpha\rho(x, u) + \beta\rho(y, v) + \gamma\rho(z, t) + \delta\rho(w, s)$$

for all $(x, y) \in A_x \times A_y$, $(u, v) \in B_x \times B_y$, $(z, w) \in A_x \times A_y$ and $(t, s) \in B_x \times B_y$. Then

(I) There exists a unique pair (ξ, η) in $A \cap B$, which is a common coupled fixed point for the maps F and G . Moreover the iteration sequences $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, defined in Definition 11 converge to ξ and η respectively.

(II) a priori error estimates hold $\max\{\rho(x_n, \xi), \rho(y_n, \eta)\} \leq \frac{k^n}{1-k}(\rho(x_1, x_0) + \rho(y_1, y_0))$;

(III) a posteriori error estimates hold $\max\{\rho(x_n, \xi), \rho(y_n, \eta)\} \leq \frac{k}{1-k}(\rho(x_{n-1}, x_n) + \rho(y_{n-1}, y_n))$;

(IV) The rate of convergence $\rho(x_n, \xi) + \rho(y_n, \eta) \leq k(\rho(x_{n-1}, \xi) + \rho(y_{n-1}, \eta))$ for the sequences of successive iterations. .

If put $A_x = A_y = A$, $B_x = B_y = B$, $f(x, y) = F(y, x)$, $g(x, y) = G(y, x)$, $z = y$, $w = x$, $t = v$, $s = u$, $\gamma = \beta$ and $\delta = \alpha$, then we get the results from [14] as corollary. More over it is proven in [26] that in this case $\xi = \eta$.

3.2 Coupled best proximity points

Definition 13. ([26]) Let A_x, A_y, B_x and B_y be nonempty subsets of a metric space (X, ρ) , $F : A_x \times A_y \rightarrow B_x$, $f : A_x \times A_y \rightarrow B_y$, $G : B_x \times B_y \rightarrow A_x$ and $g : B_x \times B_y \rightarrow A_y$. The ordered pair of orderer pairs $((F, f), (G, g))$ is said to be a cyclic contraction ordered pair if there exist non-negative numbers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, such that $\max\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\} < 1$ and there holds the inequality

$$(5) \quad \begin{aligned} S_1 &= \rho(F(x, y), G(u, v)) + \rho(f(z, w), g(t, s)) \\ &\leq \alpha\rho(x, u) + \beta\rho(y, v) + \gamma\rho(z, t) + \delta\rho(w, s) + (1 - (\alpha + \gamma))d_x + (1 - (\beta + \delta))d_y \end{aligned}$$

for all $(x, y), (z, w) \in A_x \times A_y$ and $(u, v), (t, s) \in B_x \times B_y$.

Just to fit some of the formulas in the text field we will denote $P_{n,m}(x, y) = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|$ and $W_{n,m}(x, y) = P_{n,m}(x, y) - (d_x + d_y) = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| - (d_x + d_y)$, where $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ and $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ be the sequences defined in Definition 11 and $k = \max\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\}$, where $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are the constants from Definition 13.

Theorem 14. ([26]) Let A_x, A_y, B_x and B_y be nonempty convex subsets of a uniformly convex Banach space $(X, \|\cdot\|)$, $F : A_x \times A_y \rightarrow B_x$, $f : A_x \times A_y \rightarrow B_y$, $G : B_x \times B_y \rightarrow A_x$ and $g : B_x \times B_y \rightarrow A_y$. Let the ordered pair $((F, f), (G, g))$ be a cyclic contraction. Then (F, f) has a unique coupled best proximity point $(\xi, \eta) \in A_x \times A_y$ and (G, g) has a unique coupled best proximity point $(\zeta, \varsigma) \in B_x \times B_y$, (i.e. $\|\xi - F(\xi, \eta)\| = d_x$, $\|\eta - f(\xi, \eta)\| = d_y$ and $\|\zeta - G(\zeta, \varsigma)\| = d_x$, $\|\varsigma - g(\zeta, \varsigma)\| = d_y$). Moreover $\zeta = F(\xi, \eta)$, $\varsigma = f(\xi, \eta)$, $\xi = G(\zeta, \varsigma)$ and $\eta = g(\zeta, \varsigma)$. For any arbitrary point $(x, y) \in A \times A$ there hold $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \xi$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} = \eta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \zeta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+1} = \varsigma$ and $\|\xi - \zeta\| + \|\eta - \varsigma\| = d_x + d_y$. Moreover there hold

$$(6) \quad \begin{aligned} G(F(\xi, \eta), f(\xi, \eta)) &= \xi, \quad g(F(\xi, \eta), f(\xi, \eta)) = \eta, \\ F(G(\zeta, \varsigma), g(\zeta, \varsigma)) &= \zeta, \quad f(G(\zeta, \varsigma), g(\zeta, \varsigma)) = \varsigma. \end{aligned}$$

If in addition $(X, \|\cdot\|)$ has a modulus of convexity of power type with constants $C > 0$ and $q > 1$, then

(i) a priori error estimates hold

$$\|\xi - x_{2m}\| \leq P_{0,1}(x, y) \sqrt[q]{\frac{W_{0,1}(x, y)}{Cd_x}} \cdot \frac{\sqrt[q]{k^{2m}}}{1 - \sqrt[q]{k^2}}; \quad \|\eta - y_{2m}\| \leq P_{0,1}(x, y) \sqrt[q]{\frac{W_{0,1}(x, y)}{Cd_y}} \cdot \frac{\sqrt[q]{k^{2m}}}{1 - \sqrt[q]{k^2}};$$

(ii) a posteriori error estimates hold

$$\begin{aligned} \|\xi - x_{2n}\| &\leq P_{2n,2n-1}(x, y) \sqrt[q]{\frac{W_{2n,2n-1}(x, y)}{Cd_x}} \cdot \frac{\sqrt[q]{k}}{1 - \sqrt[q]{k^2}}; \\ \|\eta - y_{2n}\| &\leq P_{2n,2n-1}(x, y) \sqrt[q]{\frac{W_{2n,2n-1}(x, y)}{Cd_y}} \cdot \frac{\sqrt[q]{k}}{1 - \sqrt[q]{k^2}}. \end{aligned}$$

If put $A_x = A_y = A$, $B_x = B_y = B$, $f(x, y) = F(y, x)$, $g(x, y) = G(y, x)$, $z = y$, $w = x$, $t = v$, $s = u$, $\gamma = \beta$ and $\delta = \alpha$, then we get the results from [14] as corollary. More over it is proven in [26] that in this case $\xi = \eta$ and $\zeta = \varsigma$.

Let us say that this additional results from [26] ($\xi = \eta$ and $\zeta = \varsigma$ for the case of coupled best proximity points and $\xi = \eta$ for the case of coupled fixed points), is not unnatural, as far as all the applications and/or examples presented in [1, 2, 9, 10, 13, 14] are for symmetric systems of equation.

Example 15. ([26]) *Let us consider the system of nonlinear equations:*

$$(7) \quad \begin{cases} 36x + e^y = e + 68 \\ 4 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + 18y = \pi + 18. \end{cases}$$

Let us consider the functions $F(x, y) = -\frac{x}{8} - \frac{e^y}{32} + \frac{e-60}{32}$, $G(x, y) = -\frac{x}{8} - \frac{e^y}{32} - \frac{e-60}{32}$, $f(x, y) = -\frac{\arctan(\frac{x}{2})}{4} - \frac{y}{8} + \frac{\pi-14}{16}$, $g(x, y) = -\frac{\arctan(\frac{x}{2})}{4} - \frac{y}{8} - \frac{\pi-14}{16}$. Then $F : [2, +\infty) \times [1, 1.5] \rightarrow (-\infty, -2]$, $f : [2, +\infty) \times [1, 1.5] \rightarrow [-1.5, -1]$, $G : (-\infty, -2] \times [-1.5, -1] \rightarrow [2, +\infty)$, $g : (-\infty, -2] \times [-1.5, -1] \rightarrow [1, 1.5]$ and the system

$$(8) \quad \begin{cases} x - F(x, y) = 4 \\ y - f(x, y) = 2 \end{cases}$$

is equivalent to (7). The ordered pair $((F, f), (G, g))$ is a cyclic contraction with constants $\frac{1}{8}, \frac{e^{1.5}}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}$ therefore and the unique solution of (8) is $(2, 1)$.

Some application for solutions of symmetric linear systems is presented in [13, 14] and for arbitrary linear systems [12]. In both articles [12, 13] it is presented a technique of choosing of a parameter μ , so that to increase the rate of convergence up the upper bound of the convergence.

4 Modular function spaces

The class of all nonzero regular convex function modular defined on Ω will be denoted by \mathfrak{R} . An extensive presentation of modular function spaces and fixed point theory in modular function spaces can be found in [18, 19, 21, 22].

Definition 16. ([22]) *Let ρ be a convex function modular.*

(a) *A modular function space is the vector space $L_\rho(\Omega, \Sigma)$, or briefly L_ρ , defined by*

$$L_\rho = \{f \in \mathcal{M} : \rho(\lambda f) \rightarrow 0 \text{ as } \lambda \rightarrow 0\};$$

(b) *The following formula defines a norm in L_ρ (frequently called Luxemburg norm):*

$$\|f\|_\rho = \inf \left\{ \alpha > 0 : \rho\left(\frac{f}{\alpha}\right) \leq 1 \right\}.$$

A simple example of a modular function space is L_p endowed with the convex modular $\int_\Omega |f(\omega)|^p d\omega$ and ℓ_p endowed with the convex modular $\sum_{i=1}^p |x_i|^p$.

The notion of uniform convexity is generalized by $UCi, UUCi$ for $i = 1, 2$.

Definition 17. ([22]) *Let $\rho \in \mathfrak{R}$ and $i \in \{1, 2\}$. Let $r > 0, \varepsilon > 0$. Define*

$$D_i(r, \varepsilon) = \{(f, g) : f, g \in L_\rho, \rho(f) \leq r, \rho(g) \leq r, \rho\left(\frac{f-g}{i}\right) \geq \varepsilon r\}.$$

Let

$$\delta_i(r, \varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{1}{r} \rho \left(\frac{f+g}{2} \right) : (f, g) \in D_i(r, \varepsilon) \right\} > 0 \text{ if } D_i(r, \varepsilon) \neq \emptyset$$

and

$$\delta_i(r, \varepsilon) = 1 \text{ if } D_i(r, \varepsilon) = \emptyset.$$

(i) We say that ρ satisfies (UCi) if for any $r > 0$, $\varepsilon > 0$ there holds the inequality $\delta_i(r, s) > 0$.

(ii) We say that ρ satisfies (UUCi) if for every $s \geq 0$, $\varepsilon > 0$ there exists $\eta_i(s, \varepsilon) > 0$, depending on s and ε such that $\delta_i(r, s) > \eta_i(s, \varepsilon) > 0$ for $r > s$.

Following [23] an iterated sequence for the ordered pair of maps (F, G) is defined.

Definition 18. ([15]) Let A and B be nonempty subsets of a functional modular space X . Let $F : A \times A \rightarrow B$ and $G : B \times B \rightarrow A$. For any pair $(x, y) \in A \times A$ we define the sequences $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ by $x_0 = x$, $y_0 = y$ and

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= F(x_{2n}, y_{2n}), & y_{2n+1} &= F(y_{2n}, x_{2n}) \\ x_{2n+2} &= G(x_{2n+1}, y_{2n+1}), & y_{2n+2} &= G(y_{2n+1}, x_{2n+1}) \end{aligned}$$

for all $n \geq 0$.

4.1 Coupled Fixed Points in Modular Function Spaces

Definition 19. ([15]) Let A and B be nonempty subsets of a functional modular space X , $F : A \times A \rightarrow A$. An ordered pair $(x, y) \in A \times A$ is said to be a coupled fixed point of F in A if $x = F(x, y)$ and $y = F(y, x)$.

Definition 20. ([15]) Let A be nonempty subsets of a functional modular space X , $F : A \times A \rightarrow A$ is said to be a ρ -contraction if there exist non-negative numbers α, β , such that $\alpha + \beta < 1$ and there holds the inequality

$$\rho(F(x, y) - F(u, v)) \leq \alpha \rho(x - u) + \beta \rho(y - v)$$

for all $x, y, u, v \in A$.

Theorem 21. ([15]) Let $\rho \in \mathfrak{R}$. Let $A \subset L_\rho$ be nonempty, ρ -closed and ρ -bounded. Let $F : A \times A \rightarrow A$ be a ρ -contraction. Then F has unique coupled fixed points $(x, y) \in A$. Moreover for any $(x_0, y_0) \in A$ the sequences $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ defined by the equations:

$$(9) \quad x_1 = F(x_0, y_0), y_1 = F(y_0, x_0), x_{n+1} = F(x_n, y_n), y_{n+1} = F(y_n, x_n)$$

converge to the unique coupled fixed points $(x, y) \in A$ (i.e $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n - x) = 0$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n - y) = 0$).

4.2 Coupled Best Proximity Points in Modular Function Spaces

Definition 22. ([15]) Let A and B be nonempty subsets of a functional modular space X , $F : A \times A \rightarrow B$ and $G : B \times B \rightarrow A$. The ordered pair (F, G) is said to be a cyclic contraction if there exist non-negative numbers α, β , such that $\alpha + \beta < 1$ and there holds the inequality

$$\rho(F(x, y) - G(u, v)) \leq \alpha\rho(x - u) + \beta\rho(y - v) + (1 - (\alpha + \beta))d(A, B)$$

for all $(x, y) \in A \times A$ and $(u, v) \in B \times B$.

Definition 23. ([15]) Let A and B be nonempty subsets of a functional modular space X , $F : A \times A \rightarrow B$. An ordered pair $(x, y) \in A \times A$ is called a coupled best proximity point of F if

$$\rho(x - F(x, y)) = \rho(y - F(y, x)) = d.$$

Theorem 24. ([15]) Let $\rho \in \mathfrak{R}$. Assume that ρ satisfies (UC1), has the Δ_2 -property and be uniformly continuous. Let $A, B \subseteq L_\rho$ be ρ -closed, ρ -bounded, convex subsets and $F : A \times A \rightarrow B$ and $G : B \times B \rightarrow A$ be an order cyclic ρ -contraction pair (F, G) . Then there exists a unique order pair $(x, y) \in A \times A$ such that (x, y) is a coupled ρ -best proximity point of F in A (i.e. $\rho(x - F(x, y)) + \rho(y - F(y, x)) = 2d(A, B)$). There holds $x = G(F(x, y), F(y, x))$, $y = G(F(y, x), F(x, y))$ the order pair $(F(y, x), F(x, y))$ is a coupled ρ -best proximity point of G in B . More over for any initial guess $(x_0, y_0) \in A \times A$ the iterated sequences $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ defined by

$$(10) \quad \begin{aligned} x_{2n+1} &= F(x_{2n}, y_{2n}), y_{2n+1} = F(y_{2n}, x_{2n}), \\ x_{2n+2} &= G(x_{2n+1}, y_{2n+1}), y_{2n+2} = G(y_{2n+1}, x_{2n+1}), \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

satisfied $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_{2n} - x) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_{2n} - y) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_{2n+1} - F(x, y)) = 0$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_{2n+1} - F(y, x)) = 0$.

Definition 25. ([15]) Let A and B be nonempty subsets of a modular function space X , $F : A \times A \rightarrow B$ and $G : B \times B \rightarrow A$. The ordered pair (F, G) is said to be a cyclic ρ -Kannan contraction pair if there exist non-negative number α , such that $\alpha < 1/2$ and there holds the inequality

$$\rho(F(x, y) - G(u, v)) \leq \alpha(\rho(x - F(x, y)) + \rho(u - G(u, v))) + (1 - 2\alpha)d(A, B)$$

for all $(x, y) \in A \times A$ and $(u, v) \in B \times B$.

Theorem 26. ([15]) Let $\rho \in \mathfrak{R}$. Assume that ρ satisfies (UC1), has the Δ_2 -property and be uniformly continuous. Let $A, B \subseteq L_\rho$ be ρ -closed, ρ -bounded, convex subsets, $F : A \times A \rightarrow B$ and $G : B \times B \rightarrow A$ and the ordered pair (F, G) be an cyclic ρ -Kannan contraction pair. Then there exists a unique order pair $(x, y) \in A \times A$ such that (x, y) is a coupled ρ -best proximity points of F in A (i.e. $\rho(x - F(x, y)) + \rho(y - F(y, x)) = 2d(A, B)$). There holds $x = G(F(x, y), F(y, x))$, $y = G(F(y, x), F(x, y))$ the order pair $(F(y, x), F(x, y))$ is a coupled ρ -best proximity points of G in B . More over for any initial guess $(x_0, y_0) \in A \times A$ the iterated sequences $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ defined by

$$(11) \quad \begin{aligned} x_{2n+1} &= F(x_{2n}, y_{2n}), y_{2n+1} = F(y_{2n}, x_{2n}), \\ x_{2n+2} &= G(x_{2n+1}, y_{2n+1}), y_{2n+2} = G(y_{2n+1}, x_{2n+1}), \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

satisfied

$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_{2n} - x) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_{2n} - y) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_{2n+1} - F(x, y)) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_{2n+1} - F(y, x)) = 0$.

4.3 Applications

Example 27. [15] Let $p \in [1, +\infty)$, $a > 0$, $\alpha, \beta \in (0, 1)$ be such that $\alpha + \beta < 1$ and $(1 - \alpha - \beta)a = \gamma$. Let us consider the system of equations

$$(12) \quad \begin{cases} |(1 + \alpha)x + \beta y + \gamma|^p = (2a)^p \\ |\alpha x + (1 + \beta)y + \gamma|^p = (2a)^p \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

It is easy to check that by using a Computer Algebra Software that the ordered pair (a, a) is a solution of (10) if $p \in \mathbb{N}$. If we try to solve this system for $p \notin \mathbb{N}$ then the computer will give no answer.

Let us consider the space $\mathbb{R}_{|\cdot|^p}$ of all reals endowed with the function modular $\rho_p(\cdot) = |\cdot|^p$, then ρ_p has the Δ_2 -property and is uniformly continuous. Thus we can apply Theorem 26 in \mathbb{R}_p .

By considering $A = [a, b]$, $B = [-b, -a]$ for $0 < a < b$, $F(x, y) = -\alpha x - \beta y - \gamma$ and $G(x, y) = -\alpha x - \beta y + \gamma$ it follows that (F, G) is an order cyclic ρ -contraction pair and from Theorem 26 and thus there exists a unique order pair $(x, y) \in A \times A$ such that (x, y) is a coupled ρ -best proximity point of F in A (i.e. $\rho_p(x - F(x, y)) = (2a)^p$ and $\rho_p(y - F(y, x)) = (2a)^p$, which just (10)).

By a suitable choice of $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ and p we get the examples from [10, 14, 23]

5 A variant of the modified cyclic maps, applied in the investigation of equilibrium in duopoly markets

In order to apply the technique of coupled best proximity points and coupled fixed points in economics we will generalize the mentioned up to now notions.

Let us first start with a duopoly model [8, 24] - two companies competing for same consumers and striving to meet the demand with overall production of $Z = x + y$. The market price is defined as $P(Z) = P(x + y)$, which is the inverse of the demand function. Market players have cost functions $c_1(x)$ and $c_2(y)$, respectively. Assuming that both firms are acting rationally, the profit functions are $\Pi_1(x, y) = xP(x + y) - c_1(x)$ and $\Pi_2(x, y) = yP(x + y) - c_2(y)$ of the first and the second firm, respectively. The goal of each company is to maximize its profit, i.e. $\max\{\Pi_1(x, y) : x, \text{ assuming that } y \text{ is fixed}\}$ and $\max\{\Pi_2(x, y) : y, \text{ assuming that } x \text{ is fixed}\}$. Provided that functions P and $c_i, i = 1, 2$ are differentiable, we get the equations

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Pi_1(x, y)}{\partial x} = P(x + y) + xP'(x + y) - c'_1(x) = 0 \\ \frac{\partial \Pi_2(x, y)}{\partial y} = P(x + y) + yP'(x + y) - c'_2(y) = 0. \end{cases}$$

The solution of (13) presents the equilibrium pair of production in the duopoly market [8, 24].

Often equations (13) have solutions in the form of $x = b_1(y)$ and $y = b_2(x)$, which are called response functions [8].

It may turn out difficult or impossible to solve (13) thus it is often advised to search for an approximate solution. Another drawback, when searching of an approximate solution is that it may be not stable. Fortunately we can find an implicit formula for the response function in (13) i.e.

$$x = \frac{c'_1(x) - P(x + y)}{P'(x + y)} = F(x, y) \quad \text{and} \quad y = \frac{c'_2(y) - P(x + y)}{P'(x + y)} = f(x, y).$$

It is still possible that we may end up with response functions, that do not lead to maximization of the profit Π . As it is often assumed, each participant response depends its own production

level and that of the pothor payers. E.g. if at a moment n the output quantities are (x_n, y_n) , and the first player changes its productions to $x_{n+1} = F(x_n, y_n)$, then the second one will also change its output to $y_{n+1} = f(x_n, y_n)$. We have an equilibrium if there are two productions x and y , such that $x = F(x, y)$ and $y = f(x, y)$, where $F : A_x \times A_y \rightarrow A_x$ and $f : A_x \times A_y \rightarrow A_y$.

Focusing on response functions, allows to put together Cournot and Bertand models. Indeed let the first company have reaction be $F(X, Y)$ and the second one $f(X, Y)$, where $X = (x, p)$ and $Y = (y, q)$. Here x and y denote the output quantity and (p, q) are the prices set by players. In this case companies can compete in terms of both price and quantity.

Definition 28. ([5]) Let A_x, A_y be nonempty subsets of X . Let $F : A_x \times A_y \rightarrow A_x$, $f : A_x \times A_y \rightarrow A_y$. For any pair $(x, y) \in A_x \times A_y$ we define the sequences $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ by $x_0 = x$, $y_0 = y$ and $x_{n+1} = F(x_n, y_n)$, $y_{n+1} = f(x_n, y_n)$ for all $n \geq 0$.

5.1 Coupled fixed points

Definition 29. ([5]) Let A_x, A_y be nonempty subsets of a metric space (X, ρ) , $F : A_x \times A_y \rightarrow A_x$, $f : A_x \times A_y \rightarrow A_y$. An ordered pair $(\xi, \eta) \in A_x \times A_y$ is called a coupled fixed point of (F, f) if $\xi = F(\xi, \eta)$ and $\eta = f(\xi, \eta)$.

Definition 30. ([5]) Let A_x, A_y be nonempty subsets of a metric space (X, ρ) . Let there exist a subset $D \subseteq A_x \times A_y$ and maps $F : D \rightarrow A_x$ and $f : D \rightarrow A_y$, such that $(F(x, y), f(x, y)) \subseteq D$ for every $(x, y) \in D$. The ordered pair of ordered pairs (F, f) is said to be a cyclic contraction of type one ordered pair if there exist non-negative numbers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, such that $\max\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\} < 1$ and there holds the inequality

$$(14) \quad \rho(F(x, y), F(u, v)) + \rho(f(z, w), f(t, s)) \leq \alpha\rho(x, u) + \beta\rho(y, v) + \gamma\rho(z, t) + \delta\rho(w, s)$$

for all $(x, y), (u, v), (z, w), (t, s) \in D$.

Theorem 31. ([5]) Let A_x, A_y be nonempty and closed subsets of a complete metric space (X, ρ) . Let there exist a closed subset $D \subseteq A_x \times A_y$ and maps $F : D \rightarrow A_x$ and $f : D \rightarrow A_y$, such that $(F(x, y), f(x, y)) \subseteq D$ for every $(x, y) \in D$. Let the ordered pair (F, f) be a cyclic contraction of type one. Then

1. There exists a unique pair (ξ, η) in D , which is a unique coupled fixed point for the ordered pair (F, f) . Moreover the iteration sequences $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, defined in Definition 38 converge to ξ and η respectively, for any arbitrary chosen initial guess $(x, y) \in A_x \times A_y$;
2. a priori error estimates hold $\max\{\rho(x_n, \xi), \rho(y_n, \eta)\} \leq \frac{k^n}{1-k}(\rho(x_1, x_0) + \rho(y_1, y_0))$;
3. a posteriori error estimates hold $\max\{\rho(x_n, \xi), \rho(y_n, \eta)\} \leq \frac{k}{1-k}(\rho(x_{n-1}, x_n) + \rho(y_{n-1}, y_n))$;
4. rate of convergence for the sequences of successive iterations

$$\rho(x_n, \xi) + \rho(y_n, \eta) \leq k(\rho(x_{n-1}, \xi) + \rho(y_{n-1}, \eta)),$$

where $k = \max\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\}$.

5.2 Application of coupled fixed points in economics

We can state Theorem 31 in an economic language.

Assumption 32. ([5]) *Let there is a duopoly market, satisfying the following assumptions:*

1. *The two firms are producing homogeneous goods that are perfect substitutes.*
2. *The first firm can produce qualities from the set A_x and the second firm can produce qualities from the set A_y , where A_x and A_y be closed, nonempty subsets of a complete metric space (X, ρ)*
3. *Let there exist a closed subset $D \subseteq A_x \times A_y$ and maps $F : D \rightarrow A_x$ and $f : D \rightarrow A_y$, such that $(F(x, y), f(x, y)) \subseteq D$ for every $(x, y) \in D$, be the response functions for firm one and two respectively*
4. *Let there exist $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, $\max\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\} < 1$, such that the inequality*

$$(15) \quad \rho(F(x, y), F(u, v)) + \rho(f(z, w), f(t, s)) \leq \alpha\rho(x, u) + \beta\rho(y, v) + \gamma\rho(z, t) + \delta\rho(w, s)$$

holds for all $(x, y), (u, v), (z, w), (t, s) \in A_x \times A_y$.

We will present an example, where each player is producing a single product, goods being perfect substitutes.

Example 33. ([5]) *Let us consider a market with two competing firms, each firm producing just one product, and both goods are perfect substitutes. Let the two firms produce quantities $x \in A_x$ and $y \in A_y$, respectively, where $A_x, A_y \subset [0, +\infty)$ and (X, ρ) be the complete metric space $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Let us consider the response functions of player one be $F(x, y) = 80 - \frac{x}{2} - \frac{y}{8}$, and of player two be $f(x, y) = 70 - \frac{x}{3} - \frac{y}{6}$, $A_x = [0, 210]$, $A_y = [0, 320]$.*

The ordered pair (F, f) is a cyclic map of type one and therefore there exist a equilibrium pair (x, y) in the market. We get in this case that the equilibrium pair of the production of the two firms is $(49.51, 45.85)$ and the total production will be $x + y = 95.36$.

Table 1: Values of the iterated sequence (x_n, y_n) if started with $(40, 60)$

n	0	1	2	5	10	20	30
x_n	40	52.5	47.92	49.85	49.49	49.51205	49.51219
y_n	60	46.6	44.72	46.11	45.83	45.85354	45.85366

Table 2: Number n of iterations needed by the a priori estimate if started with $(100, 20)$

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
n	41	53	66	79	91

Table 3: Number n of iterations needed by the a posteriori estimate if started with $(100, 20)$

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
n	14	18	23	27	32

Let us consider a classical example [24], where the price function is a linear and so are the cost functions of both players.

Example 34. ([5, 24]) Assuming the feasible market price is defined by $P(x,y) = 120 - x - y$, it is expected that additional output x from the first company as well as extra production y of the second one will cause decrease in prices. Therefore under equilibrium conditions $x + y$ will be the total production of the two firms and it will also be reflected in prices. Let the two firms have cost functions equal to $30x$ and $20y$, respectively. The profit of the first one is $\Pi_1(x,y) = xP(x,y) - 30x = x(120 - x - y) - 30x = 90x - x^2 - xy$ and the profit of the second one is $\Pi_2(x,y) = yP(x,y) - 20y = y(120 - x - y) - 20y = 100y - y^2 - xy$. Following Cournot model after solving (13) we get the response functions $F : D \rightarrow A_x$ and $f : D \rightarrow A_y$ of the two firms $F(y) = \frac{90-y}{2}$ and $f(x) = \frac{100-x}{2}$, where $A_y = [0, 90]$, $A_x = [0, 100]$ and $D = A_x \times A_y$.

The ordered pair (F, f) is a cyclic map of type one and therefore there exist an equilibrium pair (x, y) in the market.

We will present an example, where each player is producing two product types, goods from each type being perfect substitutes.

Let us consider a market with two competing firms, and each firm is producing two product types. Let us assume that each firm produces at least 1 item from each product, i.e. $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 1$. Let us denote the production of the two players by $x = (x_1, x_2)$ and $y = (y_1, y_2)$, respectively.

Let the market of the two goods be endowed with the p norm.

Example 35. ([5]) Let us consider the response functions $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ and $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ defined by

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{90 - \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{y_1 + y_2}{3}}{3}, \\ \frac{90 - \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{y_1 + y_2}{3}}{3}; \end{cases} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{100 - \frac{x_1 + x_2}{4} - \frac{y_1 + y_2}{3}}{4}, \\ \frac{100 - \frac{x_1 + x_2}{4} - \frac{y_1 + y_2}{3}}{4}. \end{cases}$$

where

1. $A_x = [0, 30] \times [0, 30]$ and $A_y = [0, 25] \times [0, 25]$

2. $D = [0, 30] \times [0, 30] \times [0, 25] \times [0, 25]$

The ordered pair (F, f) satisfies Assumption 32 with constants $\alpha = \frac{p-1}{3}$, $\beta = \frac{p-1}{9}$, $\gamma = \frac{2}{6}$ and $\delta = \frac{p-1}{9}$. Thus there exists an equilibrium pair (x, y) .

We will present an example, where the players are producing a single product and compete on both quantities and prices.

There is a large number of goods where companies can compete on both quality and prices. In this case the equilibrium would depend on balanced decision on what market share to target at a reasonable price. Let us assume that there are only two major players that produce homogeneous products. The first company can produce qualities from the set $A_x \subseteq [0, \infty)$ at a price $p \in P_x \subseteq [0, \infty)$ and the second one can produce qualities from the set $A_y \subseteq [0, \infty)$ at a price $p \in P_y \subseteq [0, \infty)$, where A_x, A_y, P_x, P_y be nonempty subsets. Let $A_x \times P_x, A_y \times P_y$ be subsets of a complete metric space (\mathbb{R}^2, ρ) .

Assumption 36. ([5]) Let there is a duopoly market, satisfying the following assumptions:

1. The two firms are producing homogeneous, perfect substitute products.
2. The first firm can produce qualities from the set A_x at a price $p \in P_x$ and the second firm can produce qualities from the set A_y at a price $p \in P_x$, where $A_x \times P_x, A_y \times P_y$ be nonempty, closed subsets of a complete metric space (\mathbb{R}^2, ρ) .
3. Let there exists a closed subset $D \subseteq A_x \times P_x \times A_y \times P_y \rightarrow A_x$, such that $F : D \rightarrow A_x \times P_x$, $f : D \rightarrow A_y \times P_y$ and $(F(x, p, y, q), f(x, p, y, q)) \subseteq D$ for every $(x, p, y, q) \in D$ be the response functions for firm one and two respectively.

4. Let there exist $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, $\max\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\} < 1$, such that the inequality

(16)

$$\rho(F(X, Y), F(U, V)) + \rho(f(Z, W), f(T, S)) \leq \alpha\rho(X, U) + \beta\rho(Y, V) + \gamma\rho(Z, T) + \delta\rho(W, S),$$

where we use the notations $X = (x, p_1)$, $Y = (y, q_1)$, $U = (u, p_2)$, $V = (v, q_2)$, $Z = (z, p_3)$, $W = (w, q_3)$, $T = (t, p_4)$, $S = (s, q_4)$, holds for all $(x, p_1, y, q_1), (u, p_2, v, q_2), (z, p_3, w, q_3), (t, p_4, s, q_4) \in D$.

Then there exists a unique pair (ξ, p, η, q) in $A_x \times P_x \times A_y \times P_y$, which is a common coupled fixed point for the maps F and f , i.e. a market equilibrium pair. Moreover the iteration sequences $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, $\{p_n\}_{n=0}^\infty$, $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ and $\{q_n\}_{n=0}^\infty$, defined in Definition 11 converge to ξ , p , η , and q respectively and the error estimates from Theorem 31 hold.

Example 37. ([5]) Let us consider a market with two competing firms, producing the same product, and selling it at a price p and q respectively, i.e. $X = (x, p), Y = (y, q)$. Let us consider the response functions $F(X, Y) = (F_1(X, Y), F_2(X, Y))$ and $f(X, Y) = (f_1(X, Y), f_2(X, Y))$ defined by

$$F(X, Y) = \begin{cases} \frac{90 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}}{3}, \\ 4 - \frac{p}{2} - \frac{q}{3}, \end{cases} \quad f(X, Y) = \begin{cases} \frac{100 - \frac{x}{4} - \frac{y}{3}}{4} \\ 5 - \frac{p}{4} - \frac{q}{3}. \end{cases}$$

Let $X = (x, p)$ and $Y = (y, q)$ be subsets of $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ (the two dimensional Euclidean space). Let

1. $A_x = [0, 100] \times [0, 5]$ and $A_y = [0, 100] \times [0, 4]$
2. $D = [0, 100] \times [0, 5] \times [0, 100] \times [0, 4]$

The ordered pair (F, f) satisfies Assumption 36 with constants $\alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{1}{3\sqrt{2}}$, $\gamma = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ and $\delta = \frac{1}{4\sqrt{2}}$. Thus there exists a unique equilibrium pair (x, y) .

5.3 A variational technique in the investigation of equilibrium in duopoly markets

We modify Definition 1 in order to apply a result about coupled fixed points in partially ordered metric spaces with functions that satisfy the mixed monotone property.

Definition 38. ([17]) Let (Z, \preceq) be a partially ordered and $X, Y \subseteq Z$, let $F : X \times Y \rightarrow X$ and $f : X \times Y \rightarrow Y$. The ordered couple (F, f) is said to have the mixed monotone property if

$$\text{for any } x_1, x_2, y \in X \text{ such that } x_1 \preceq x_2 \text{ there holds } F(x_1, y) \preceq F(x_2, y)$$

and

$$\text{for any } y_1, y_2, x \in X \text{ such that } y_1 \preceq y_2 \text{ there holds } f(x, y_1) \succeq f(x, y_2).$$

By using a variation of Theorem 4 we get the next result.

Theorem 39. ([17]) Let there is an oligopoly and let us assume that the two firms are producing homogeneous product completely replaceable with each other. The first firm can produce qualities from the set X and the second firm can produce qualities from the set Y , where X and Y be nonempty subsets of a partially ordered complete metric space (Z, ρ, \preceq) . Let $F : X \times Y \rightarrow X$, $f : X \times Y \rightarrow Y$ be the response functions for firm one and two respectively. Let there exists $\alpha \in (0, 1)$, such that

$$(17) \quad \rho(F(x, y), F(u, v)) + \rho(f(x, y), f(u, v)) \leq \alpha\rho(x, u) + \alpha\rho(y, v)$$

holds for all $x \succeq u$ and $y \preceq v$. If there exists at least one ordered pair $(x, y) \in X \times Y$, such that $x \preceq F(x, y)$ and $y \succeq f(x, y)$, then there exists a market equilibrium point (x, y) , which is a coupled fixed points of (F, f) .

If in addition every pair of elements in $X \times Y$ has an lower or an upper bound, then the coupled fixed point is unique.

Example 40. ([17]) Let us consider a market with two competing firms, each firm produces two product and any one of the items is completely replaceable with the similar product of the other firm. Let us assume that the the second firm enters the market, i.e. if the productions are (x_1, x_2) and (y_1, y_2) of the first and the second firm, respectively, then $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$. Let endow the production set \mathbb{R} with the euclidean norm $\|\cdot\|_2$. Let us consider the response functions $F(x_1, x_2, y_1, y_2)$ and $f(x_1, x_2, y_1, y_2)$ defined by

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x_1+y_1}{3} + 1 \\ \frac{x_2+y_2}{4} + 1 \end{cases}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x_1+y_1}{3} + 1 \\ \frac{x_2+y_2}{2} + 1 \end{cases}.$$

The ordered pair (F, f) satisfies Theorem 39 and therefor there exists a market equilibrium. the partial order and the assumptions may be considered as a second player enters the economy. In this case the first player will decrease its production and the second one will increase it.

5.4 Coupled best proximity points

Definition 41. ([5]) Let A_x, A_y be nonempty subsets of a metric space (X, ρ) , $F : A_x \times A_y \rightarrow A_x$, $f : A_x \times A_y \rightarrow A_y$. An ordered pair $(\xi, \eta) \in A_x \times A_y$ is called a coupled best proximity point of (F, f) if $\rho(\eta, F(\xi, \eta)) = \rho(\xi, f(\xi, \eta)) = \text{dist}(A_x, A_y)$.

Definition 42. ([5]) Let A_x, A_y be nonempty subsets of a metric space (X, ρ) . Let there exist a subset $D \subseteq A_x \times A_y$ and maps $F : D \rightarrow A_x$ and $f : D \rightarrow A_y$, such that $(F(x, y), f(x, y)) \in D$ for every $(x, y) \in D$. The ordered pair of ordered pairs (F, f) is said to be a cyclic contraction of type two

ordered pair if there exist non-negative numbers α, β , such that $\alpha + \beta < 1$ and there holds the inequality

$$(18) \quad \rho(F(x, y), f(u, v)) \leq \alpha\rho(x, v) + \beta\rho(y, u) + (1 - (\alpha + \beta))\text{dist}(A_x, A_y)$$

for all $(x, y), (u, v) \in D$.

Simply to fit a few of the equations within the content field let us denote $d = \text{dist}(A_x, A_y)$, $P_{n,m}(x, y) = \|x_n - y_m\|$ and $W_{n,m}(x, y) = P_{n,m}(x, y) - d = \|x_n - y_m\| - d$, where $x = \{x_n\}_{n=0}^\infty$ and $y = \{y_n\}_{n=0}^\infty$.

Theorem 43. ([5]) Let A_x, A_y be nonempty, closed and convex subsets of a uniformly convex Banach space $(X, \|\cdot\|)$. Let there exist a closed and convex subset $D \subseteq A_x \times A_y$ and maps $F : D \rightarrow A_x$ and $f : D \rightarrow A_y$, such that $(F(x, y), f(x, y)) \subseteq D$ for every $(x, y) \in D$. Let the ordered pair (F, f) be a cyclic contraction of type two. Then (F, f) has a unique coupled best proximity point $(\xi, \eta) \in A_x \times A_y$, (i.e. $\|\eta - F(\xi, \eta)\| = \|\xi - f(\xi, \eta)\| = d$). For any initial guess $(x, y) \in A_x \times A_y$ there hold $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \eta$, $\|\xi - \eta\| = d$, $\xi = F(\xi, \eta)$ and $\eta = f(\xi, \eta)$.

If in addition $(X, \|\cdot\|)$ has a modulus of convexity of power type with constants $C > 0$ and $q > 1$, then

1. a priori error estimates hold

$$\|\xi - x_m\| \leq M_0 \sqrt[q]{\frac{\max\{W_{0,1}(x, y), W_{0,0}(x, y)\}}{Cd}} \cdot \frac{\sqrt[q]{(\alpha + \beta)^m}}{1 - \sqrt[q]{\alpha + \beta}};$$

$$\|\eta - y_m\| \leq N_0 \sqrt[q]{\frac{\max\{W_{0,1}(y, x), W_{0,0}(y, x)\}}{Cd}} \cdot \frac{\sqrt[q]{(\alpha + \beta)^m}}{1 - \sqrt[q]{\alpha + \beta}};$$

2. a posteriori error estimates hold

$$\|\xi - x_n\| \leq M_{n-1} \sqrt[q]{\frac{\max\{W_{n-1,n}(x, y), W_{n-1,n-1}(x, y)\}}{Cd}} c;$$

$$\|\eta - y_n\| \leq N_{n-1} \sqrt[q]{\frac{\max\{W_{n-1,n}(y, x), W_{n-1,n-1}(y, x)\}}{Cd}} c,$$

where $M_n = \max\{\|x_n - y_n\|, \|x_n - y_{n+1}\|\}$, $N_n = \max\{\|x_n - y_n\|, \|y_n - x_{n+1}\|\}$ and $c = \frac{\sqrt[q]{\alpha + \beta}}{1 - \sqrt[q]{\alpha + \beta}}$.

5.5 Players' production sets have an empty intersection

Theorem 43 can be stated in the economy language.

Assumption 44. ([5]) Let there is a duopoly market, satisfying the following assumptions:

1. The two firms are producing homogeneous perfect substitute products.
2. The first firm can produce qualities from the set A_x and the second firm can produce qualities from the set A_y , where A_x and A_y be nonempty, closed and convex subsets of a uniformly convex Banach space $(X, \|\cdot\|)$

3. Let there exist a closed and convex subset $D \subseteq A_x \times A_y$ and maps $F : D \rightarrow A_x$ and $f : D \rightarrow A_y$, such that $(F(x, y), f(x, y)) \subseteq D$ for every $(x, y) \in D$, be the response functions for firm one and two respectively

4. Let there exist $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$, such that

$$(19) \quad \|F(x, y) - f(u, v)\| \leq \alpha \|x - v\| + \beta \|y - u\| + (1 - (\alpha + \beta))d$$

for all $(x, y), (u, v) \in A_x \times A_y$, where $d = \text{dist}(A_x, A_y) = \inf\{\|x - y\| : x \in A_x, y \in A_y\}$.

Then there exists a unique pair (ξ, η) in $A_x \times A_y$, which is a coupled best point for the pair of maps (F, f) , i.e. a market equilibrium pair. Moreover the iteration sequences $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ and $\{y_n\}_{n=0}^\infty$, defined in Definition 11 converge to ξ and η respectively.

If in addition $(X, \|\cdot\|)$ has a modulus of convexity of power type with constants $C > 0$ and $q > 1$, then the error estimates from Theorem 43 hold.

We will illustrate last result with an example, where players' production sets have an empty intersection, each player is producing two goods.

Example 45. ([5]) Let us consider a market with two competing firms, each firm produces two product and any one of the items is completely replaceable with the similar product of the other firm. Let us assume that the first firm can produce much less quantities than the second one, i.e. if x_1, x_2 be the quantities produced by the first firm and y_1, y_2 be the quantities produced by the second one and, then $x_1, x_2 \in [0, 1]$ and $y_1, y_2 \in [2, 3]$. Let $A_x = [0, 1] \times [0, 1]$ $A_y = [2, 3] \times [2, 3]$ be considered as subsets of $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Let us consider the response functions $F(x_1, x_2, y_1, y_2)$ and $f(x_1, x_2, y_1, y_2)$ defined by

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{3x_1}{8} + \frac{x_2}{8} - \frac{3y_1}{16} - \frac{y_2}{16} + 1 \\ \frac{x_1}{8} + \frac{3x_2}{8} - \frac{y_1}{16} - \frac{3y_2}{16} + 1 \end{cases}, \quad f(x, y) = \begin{cases} -\frac{3x_1}{16} - \frac{x_2}{16} + \frac{3y_1}{4} + \frac{y_2}{4} + \frac{5}{4} \\ -\frac{x_1}{16} - \frac{3x_2}{16} + \frac{y_1}{4} + \frac{3y_2}{4} + \frac{5}{4} \end{cases}.$$

The ordered pair (F, f) satisfies Assumption 44 with constants $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{8}$. Thus there exists an equilibrium pair $(x, y) = ((x_1, x_2), (y_1, y_2))$.

REFERENCES:

- [1] V. Berinde, *Generalized coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal., **74**(18), 7347–7355 (2011).
- [2] Bhaskar, T.G., Lakshmikantham, V. *Fixed Point Theorems in Partially Ordered Metric Spaces and Applications*. Nonlinear Anal., **65** (7), 1379–1393 (2006).
- [3] Borwein, J., Zhu, Q., *Techniques of Variational Analysis*, Springer, CMS Books in Mathematics, (2005).
- [4] Choudhury, B.S., Pranati Maity.: *Cyclic coupled fixed point result using Kannan type contractions*. J. Oper. Article ID 876749, 5 pages (2014)
- [5] Dzhabarova, Y., Kabaivanov, S., Ruseva, M., Zlatanov, B., *Existence, Uniqueness and Stability of Market Equilibrium in Oligopoly Markets*. Administrative Sciences, **10**(3), Article number 70 (2020). <https://doi.org/10.3390/admsci10030070>
- [6] Ekeland, I.: *Nonconvex minimization problems*. Bull. Amer. Math. Soc. **1**(3), 443–474 (1979)
- [7] Eldred, A. Veeramani, P. *Existence and Convergence of Best Proximity Points*. J. Math. Anal. Appl., **323** (2), 1001–1006 (2006). <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.10.081>.

- [8] Friedman, J., *Oligopoly Theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [9] Guo, D., Lakshmikantham, V., *Coupled Fixed Points of Nonlinear Operators with Applications*. *Nonlinear Anal.*, **11** (5) (1987), 623–632. [http://dx.doi.org/10.1016/0362-546X\(87\)90077-0](http://dx.doi.org/10.1016/0362-546X(87)90077-0).
- [10] Animesh Gupta, Rajput, S.S., Kaurav, P.S. *Coupled Best Proximity Point Theorem in Metric Spaces*. *Int. J. Anal. Appl.*, **4** (2) (2014), 201–215.
- [11] Hristov, M., Ilchev, A., Zlatanov, B.. *Coupled fixed points for Chatterjea type maps with the mixed monotone property in partially ordered metric spaces* AIP Conference Proceedings, 2172, Article number 060003 2019
- [12] Hristov, M., Ilchev, A., Zlatanov, B.. *One some application on coupled and best proximity points theorems* AIP Conference Proceedings, (to appear) 2020.
- [13] A. Ilchev, *On an application of coupled best proximity points theorems for solving systems of linear equations*, AIP Conference Proceedings, **2048**(2018):050003.
- [14] Ilchev, A., Zlatanov, B. *Error Estimates for Approximation of Coupled Best Proximity Points for Cyclic Contractive Maps*. *Applied Mathematics and Computation*, **290** (2016), 412–425.
- [15] Ilchev, A., Zlatanov, B. *Coupled Fixed Points and Coupled best Proximity Points in Modular Function Spaces*. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **118** (4) (2018), 957-977.
- [16] Işık, H., Türkoğlu, D. *Coupled Fixed Point Theorems for New Contractive Mixed Monotone Mappings and Applications to Integral Equations*. *Filomat*, **28** (6) (2014), 1253–1264.
- [17] Kabaivanov, S., Zlatanov, B., *A Variational Principle, Coupled Fixed Points and Market Equilibrium* (preprint) 2020.
- [18] Khamsi, M.A., Kozłowski, W.M. *Fixed Point Theory in Modular Function Spaces*. Birhäuser Heidelberg New York Dordrecht London (2015).
- [19] Khamsi, M.A., Kozłowski, W.M., Reich, S. *Fixed Point Theory in Modular Function Spaces*. *Nonlinear Anal.*, **14** (11) (1990), 935–953. [http://dx.doi.org/10.1016/0362-546X\(90\)90111-S](http://dx.doi.org/10.1016/0362-546X(90)90111-S).
- [20] Khamsi, M.A., Kozłowski, W.M., Chen Shutao. *Some Geometrical Properties and Fixed Point Theorems in Orlicz Spaces*. *J. Math. Anal. Appl.*, **155** (2) (1991), 393–412.
- [21] Kozłowski, W.M., *Modular Function Spaces*. Marcel Dekker Inc. New York and Basel (1988).
- [22] Kozłowski, W.M., *Advancements in Fixed Point Theory in Modular Function Spaces*. *Arabian Journal of Mathematics*, **1** (4) (2012), 477–494. <http://dx.doi.org/10.1007/s40065-012-0051-0>.
- [23] Sintunavarat, W., Kumam, P., *Coupled Best Proximity Point Theorem in Metric Spaces*. *Fixed Point Theory Appl.*, **2012/1/93** (2012).
- [24] Smith, A. *A Mathematical Introduction to Economica*. Basil Blackwell Limited, 1987.
- [25] Zlatanov, B., *A Variational Principle and Coupled Fixed Points*, *Journal of Fixed Point Theory Applications* (2019) 21:69.
- [26] Zlatanov, B., *Coupled best proximity points for cyclic contractive maps and their applications*, *Fixed Point Theory*, to appear, 2021.

A NOTE ON THE USE OF FUZZY LOGIC IN THE EVALUATION OF STUDENTS' TEST RESULTS

VANYA A. IVANOVA, BOYAN G. ZLATANOV

ABSTRACT: *In this article, we describe the use of fuzzy logic and fuzzy sets in the evaluation of students' results in distance testing at the Faculty of Mathematics and Informatics of the University of Plovdiv. We are trying to reevaluate borderline grades, i.e. test scores that vary marginally but because of which students with a dissimilarity of a single point or so are assigned different grades. For this purpose, we consider an additional criterion. We compare the results obtained by the use two kinds of fuzzy functions.*

KEYWORDS: *fuzzy set, fuzzy logic, fuzzy function, test evaluation*

1 Introduction

One of the most important indicators of the quality of education is the result from it presented as a grade, based on some assessment of a learner's knowledge and skills. Grades can have various functions, for example diagnostic – for quality control; didactic – for control and evaluation; motivational – to help student get motivated for higher achievements; formative – to form self-control skills in the student, etc. However, students with similar abilities may be assigned different grades if their achievements are borderline cases, for example, a student who has scored 29 points out of 60 will fail, while another one with 30 or 31 points will pass the test, which can be viewed as unfair. In an attempt to find a reasonable and impartial solution to this problem, we have used fuzzy logic in [3, 4] to review the test results in English of 78 first-year students of Informatics. The test comprises 60 closed questions awarding one point for a correct answer, and one open question with a maximum of 4 points.

2 Fuzzy sets

The idea of fuzzy sets, introduced by Lofti Zadeh [5], is quite simple. It represents some uncertainty, which is due to imprecision or vagueness rather than to randomness. A typical example can be set $A = \{\text{if someone is younger than or equal to 25 years of age, we consider him/her young}\}$; set $B = \{\text{if someone is older than 25 years of age, we consider him/her to be old}\}$. We can define the characteristic functions of sets A and B in the following way:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 25 \\ 0, & x > 0 \end{cases}, \quad \mu_B(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 25 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

If a person is 16 years of age, we obtain that $\mu_A(16) = 1$ and $\mu_B(16) = 0$. Therefore, he/she belongs to the group of young people.

A problem arises if a person is 26 years of age – is he/she young or old? Now, we can modify the membership functions μ_A and μ_B to suit our example. Fuzzy sets are considered with respect to a nonempty base set X of elements of interest (in our case X will be the set of all people). The essential idea is that each element $x \in X$ is assigned a membership grade μ_A to set A , taking values in $[0, 1]$, with $\mu_A(x) = 0$ corresponding to non-membership, $0 < \mu_A(x) < 1$ to partial membership, and $\mu_A(x) = 1$ to full membership. One possible definition that provides an example of fuzzy sets

of the young and old people can be:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 20 \\ -\frac{x}{10} + 3, & 20 < x \leq 30 \\ 0, & x > 30 \end{cases}, \quad \mu_B(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 20 \\ \frac{x}{10} - 2, & 20 < x \leq 30 \\ 1, & x > 30. \end{cases}$$

We can plot the function μ_A with red color and μ_B with blue color (Figure 1).

Now, a person who is 24 years old can be viewed as partly young and partly old. In fact, we get that he/she belongs to the set of young people with a degree $\mu_A(24) = 0.6$ and to the set of old people $\mu_B(24) = 0.4$. If we consider a person of 17 years of age, he/she belongs to the set of young people with a degree $\mu_A(17) = 1$ and to the set of old people with a degree $\mu_B(17) = 0$ so he/she is definitely a young person.

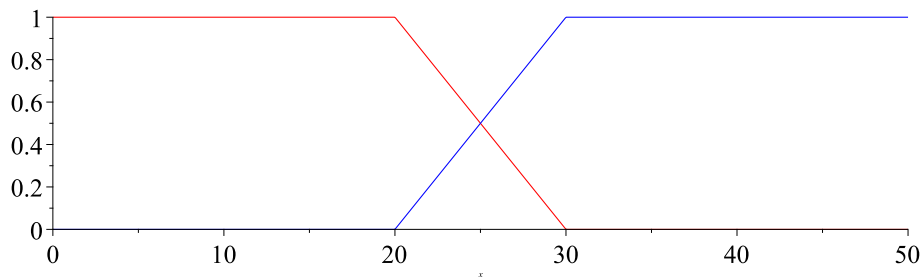


Figure 1: Plots of μ_{young} and μ_{old} .

There are different functions that can be used to assign a membership grade. The previous example illustrates the so called trapezium membership function. Owing to the use of the bell-shaped function (Figure 2), when the age of a person gets closer and closer to the limit of 30 years, the degree of his/her membership grade to the set of young people approaches 1 more rapidly, and this is evident from $\mu_{old}(27) = 0.9$ (Figure 1) and $v_{old}(27) = 0.97$ (Figure 2). If a person's age is close to the boundary value of 30, his/her membership grade, calculated with the help of the bell-shaped function, is closer to one than if it is calculated with a trapezium membership function. A sample for such a membership function is displayed in Figure 2.

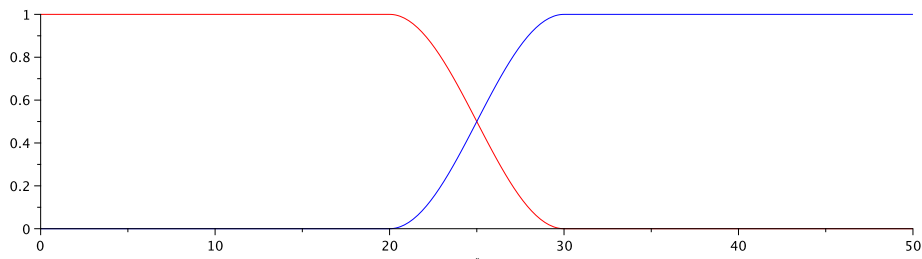


Figure 2: Plots of v_{young} and v_{old} .

3 Fuzzification of score metrics

As pointed out by the authors [1, 2], it is difficult and unfair to assign a Good grade to a student who has obtained, for example, 60 points, and to assign a Very good grade to another one with 61 points. Therefore, in an attempt to evaluate students' test results more fairly, the use of

fuzzy sets is justifiable [3, 4]. Two different fuzzy functions were used for this purpose: trapezium functions in [3] (Figure 1) and bell-shaped functions in [4]. We will try to evaluate if there is a statistical difference in the use of the two different types of functions investigated in [3, 4].

We have considered the test results in English of 78 first-year students of Informatics. The test comprises 60 closed questions awarding one point for a correct answer, and one open question with a maximum of 4 points. The maximum total number of points is 64. By the classical marking system, a student will fail on the exam for points in the range of [0, 31]; the range for a satisfactory grade is [32, 39], a good grade the range is [40, 47], [48, 55] for a very good grade, and for an excellent mark - [56, 64].

Let $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ be two functions.

We have defined five functions that represent the fuzzy membership functions to the sets of grades.

$$\mu_F = \mu_{Fail} = \begin{cases} 1 & x < x_1 \\ f(x_1, x_2, x) & x_1 \leq x < x_2 \\ 0 & x_2 \leq x \leq x_9 \end{cases}, \quad \mu_S = \mu_{Satisfis.} = \begin{cases} 0 & x_0 \leq x < x_1 \\ g(x_1, x_2, x) & x_1 \leq x < x_2 \\ 1 & x_2 \leq x < x_3 \\ f(x_3, x_4, x) & x_3 \leq x < x_4 \\ 0 & x_4 \leq x \leq x_9 \end{cases},$$

$$\mu_G = \mu_{Good} = \begin{cases} 0 & x_0 \leq x < x_3 \\ g(x_3, x_4, x) & x_3 \leq x < x_4 \\ 1 & x_4 \leq x < x_5 \\ f(x_5, x_6, x) & x_5 \leq x < x_6 \\ 0 & x_6 \leq x \leq x_9 \end{cases}, \quad \mu_V = \mu_{VeryGood} = \begin{cases} 0 & x_0 \leq x < x_5 \\ g(x_5, x_6, x) & x_5 \leq x < x_6 \\ 1 & x_6 \leq x < x_7 \\ f(x_7, x_8, x) & x_7 \leq x < x_8 \\ 0 & x_8 \leq x \leq x_9 \end{cases}$$

$$\mu_E = \mu_{Excellent} = \begin{cases} 0 & x_0 \leq x < x_7 \\ g(x_7, x_8, x) & x_7 \leq x < x_8 \\ 0 & x_8 \leq x \leq x_9 \end{cases}$$

We can consider for the trapezium functions $f(a, b, x) = \frac{x-b}{a-b}$ and $g(a, b, x) = \frac{a-x}{a-b}$, and for the bell-shaped functions $f(a, b, x) = \frac{\cos\left(\frac{a\pi}{a-b} - \frac{\pi}{a-b}\right)}{2} + \frac{1}{2}$, $g(a, b, x) = \frac{\cos\left(\frac{(2a-b)\pi}{a-b} - \frac{\pi}{a-b}\right)}{2} + \frac{1}{2}$.

We need to select another criterion that depends on a student's score in order to decide what grade to assign him/her in case the points that they have received in a test do not belong definitely to a given set [3, 4]. Consequently, the second assessment that will be applied to estimate a student's knowledge will be their result of the open question.

For the fuzzy functions defined on the basis of the overall score, we consider $x_0 = 0$, $x_1 = 29.4$, $x_2 = 34.6$, $x_3 = 37.4$, $x_4 = 42.6$, $x_5 = 45.4$, $x_6 = 50.6$, $x_7 = 53.4$, $x_8 = 58.6$, $x_9 = 64$, and for the results of the open question $y_0 = 0$, $y_1 = 1.3$, $y_2 = 1.9$, $y_3 = 1.9$, $y_4 = 2.5$, $y_5 = 2.5$, $y_6 = 3.1$, $y_7 = 3.1$, $y_8 = 3.7$, $y_9 = 4$ for both the trapezium functions and the bell-shaped functions.

The Fuzzy Associative matrix [1] provides a convenient way to directly combine the input relations in order to obtain the fuzzified output results. The input values for the results from the open question are across the top of the matrix and the input values for the total score of the test are down left in the matrix, where μ (the left column) presents the fuzzy functions defined on the overall score and ν (the first row) presents the fuzzy functions defined on the open question. We have used the classical Bulgarian grading scale.

Table 1: The fuzzy associative matrix

	v_{Fail}	$v_{Satisfactory}$	v_{Good}	$v_{VeryGood}$	$v_{Excellent}$
μ_{Fail}	2	2	3	3	4
$\mu_{Satisfactory}$	2	3	3	4	4
μ_{Good}	2	3	4	5	5
$\mu_{VeryGood}$	3	4	5	5	6
$\mu_{Excellent}$	3	4	5	6	6

The rules for performing set operations of union (AND) and intersection (OR) are of most interest [1]. For union, we look at the degree of membership for each set and pick the lower one of the two, that is: $\mu_{A \cap B} = \min(\mu_A, \mu_B)$ and for intersection, we look at the degree of membership for each set and pick the higher one of the two, that is $\mu_{A \cup B} = \max(\mu_A, \mu_B)$.

In accordance with [1], we need to calculate the grade for each student, whose test is not unquestionably a part of a given set. To do so, we can refer to the table where the function F registers the minimums of μ and v . The maximum membership grade, which is acquired from the table, represents the corrected grade from the associative matrix.

Table 2: The various combinations of the minimums of μ and v , calculated by use of F

$F(\mu_F(p), v_F(q))$	$F(\mu_F(p), v_S(q))$	$F(\mu_F(p), v_G(q))$	$F(\mu_F(p), v_V(q))$	$F(\mu_F(p), v_E(q))$
$F(\mu_S(p), v_F(q))$	$F(\mu_S(p), v_S(q))$	$F(\mu_S(p), v_G(q))$	$F(\mu_S(p), v_V(q))$	$F(\mu_S(p), v_E(q))$
$F(\mu_G(p), v_F(q))$	$F(\mu_G(p), v_S(q))$	$F(\mu_G(p), v_G(q))$	$F(\mu_G(p), v_V(q))$	$F(\mu_G(p), v_E(q))$
$F(\mu_V(p), v_F(q))$	$F(\mu_V(p), v_S(q))$	$F(\mu_V(p), v_G(q))$	$F(\mu_V(p), v_V(q))$	$F(\mu_V(p), v_E(q))$
$F(\mu_E(p), v_F(q))$	$F(\mu_E(p), v_S(q))$	$F(\mu_E(p), v_G(q))$	$F(\mu_E(p), v_V(q))$	$F(\mu_E(p), v_E(q))$

It is easy to observe that Table 2 has no more than four places where the numbers are different from zero. Let us now consider a student with an overall score of $p = 47$ points and a score of the open question of $q = 3.6$ points. Normally, he/she will get a grade Good 4. The Fuzzified grade with a trapezium (Table 3) and bell-shaped (Table 4) of a student with $p = 47$ and $q = 3.6$ are presented.

Table 3: Fuzzified with trapezium functions

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0.07	0.51
0	0	0	0.07	0.49
0	0	0	0	0

Table 4: Fuzzified grade bell-shaped functions

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0.005	0.485
0	0	0	0.005	0.494
0	0	0	0	0

Therefore, if the grade of the student is fuzzified with the trapezium function, he/she will get a Good (4) mark, but if the bell-shaped function is used, then the grade will be Very Good (5).

More examples are presented in [3, 4].

As commented in [3, 4], fuzzification should be used so that the distribution of the grades before and after it do not differ statistically. It is called a *fair correction* of the marks, because it guarantees that the overall score results of the students remain unchanged. After the process of fuzzification, we get that 46 marks have been fuzzified.

We check the T -test with Paired Samples before the fuzzification and after it.

The T -test with Paired Samples using bell-shaped function returns the following:

- Standard T-Test with Paired Samples
- Null Hypothesis:
- Sample drawn from populations with difference of means equal to 0
- Alt. Hypothesis:
- Sample drawn from population with difference of means not equal to 0
- Sample Size: 46
- **Result: [Accepted]**

On the other hand, the T -test with Paired Samples using bell-shaped function returns:

- Standard T-Test with Paired Samples
- Null Hypothesis:
- Sample drawn from populations with difference of means equal to 0
- Alt. Hypothesis:
- Sample drawn from population with difference of means not equal to 0
- Sample Size: 46
- **Result: [Rejected]**

4 Conclusion

We would like to point out that when the fuzzy sets get bigger, it is better to use the bell-shaped functions as long as the distributions do not differ statistically.

5 Acknowledgment

The first author wishes to acknowledge the partial support of the Bulgarian Ministry of Education and Science, grant MU19-FMI-010 of NPD at the University of Plovdiv "Paisii Hilen-darski".

REFERENCES:

- [1] Syed Fahad Allam Shah, "Intelligent Testing using Fuzzy Logic" in *Iskander M. (Eds.) Innovations in E-learning, Instruction Technology, Assessment, and Engineering Education*. (Dordrecht: Springer, 2007), pp. 95–98.
- [2] M. Ghomshei, *Fuzzy Logic in Engineering Education and Evaluation of Graduate Attributes* (Proc. Canadian Engineering Education Association (CEEA-ACEG18), Conf. Paper 152, 2018).
- [3] V. Ivanova, B. Zlatanov, Application of Fuzzy Logic in Online Test Evaluation in English as a Foreign Language at University Level, AIP Conference Proceedings, 2172, Article number 040009, 2019
- [4] V. Ivanova, B. Zlatanov, Implementation of fuzzy functions aimed at fairer grading of students' tests, *Education Sciences*, Volume 9, Issue 3, September 2019, Article number 214
- [5] L.A. Zadeh, *Fuzzy Sets* (Information and Control, vol. 8, Issue 3, 1965), pp. 338–353.

THE INVERSE WEIERSTRASS ITERATIVE METHOD AS A PROJECTION METHOD FOR SOLVING EIGENVALUE PROBLEM*

GYURHAN H. NEDZHIBOV

ABSTRACT: *In this work we present a new method for solving the eigenvalue problem of a companion matrix. We show that the introduced method is equivalent to the Inverse Weierstrass iterative method for simultaneous extraction of all polynomial roots. Based on this dependence, we get some new theoretical properties for the Inverse Weierstrass method.*

KEYWORDS: *Companion matrix, Eigenvalue problem, Projection methods, Polynomial root-finding methods, Inverse Weierstrass method*

1 Introduction

We consider the particular eigenvalue problem: find a scalar $\lambda \in \mathbb{C}$ and a non-zero vector $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ such that

$$(1) \quad A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

where A is the following (*inverse*) *companion matrix* of order n with complex entries and with only simple, and non-zero eigenvalues

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{1}{a_0} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ where } a_0 \neq 0.$$

Let us denote by $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ the two by two distinct and non-zero eigenvalues of A . Then it is immediate to verify that the eigenvector associated with $\frac{1}{\lambda_s}$ has the form

$$\mathbf{x}_s = (1, \lambda_s, \lambda_s^2, \dots, \lambda_s^{n-1})^T,$$

for $s = 1, \dots, n$. Therefore the eigenvector matrix V of A is the well-known *Vandermonde matrix*

$$(3) \quad V = V(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Thus we have the following eigenvalue decomposition of (2)

$$(4) \quad A = V\Lambda V^{-1},$$

where $\Lambda = \text{diag}\{\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\}$.

*This work is supported by Shumen University under Grant RD-08-112/31.01.2020

2 Projection methods for eigenvalue problems

In this section we give a short introduction to the Projection methods for solving the eigenvalue problem. Given two m -dimensional subspaces \mathcal{K} and \mathcal{L} of \mathbf{C}^n , the basic idea of projection methods is to approximate the exact eigenpair (λ, \mathbf{x}) to the eigenvalue problem (1), by an approximate eigenpair $(\hat{\lambda}, \hat{\mathbf{x}})$, with $\hat{\lambda} \in \mathbf{C}$ and $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{K}$, such that the following *Petrov-Galerkin condition* is satisfied

$$(5) \quad A\hat{\mathbf{x}} - \hat{\lambda}\hat{\mathbf{x}} \perp \mathcal{L}$$

for some given inner product. The subspace \mathcal{K} referred to as the subspace of approximants or the *right subspace* and \mathcal{L} as the *left subspace*.

There are two main classes of projection methods: *orthogonal projection* (Ritz-Galerkin) and *oblique projection* methods (see for more details [1, 2, 4, 5]). In the case of orthogonal projection methods the subspace \mathcal{K} is the same as \mathcal{L} , while in oblique projection techniques subspace \mathcal{K} is different from \mathcal{L} .

We can translate in matrix form the approximate eigenvector $\hat{\mathbf{x}}$ in some basis and express the Petrov-Galerkin condition. Let assume that we have a basis $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ of \mathcal{K} and denote by V the matrix with column vectors $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$. By analogy, let $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ be a basis of \mathcal{L} and denote by W the matrix with column vectors $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$. Usually, the following additional assumption is required

$$(6) \quad W^*V = I,$$

which means that the two bases are biorthogonal, i.e. $(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j) = \delta_{ij}$. Now we can translate the approximate problem into this basis and solve it numerically. Letting

$$\hat{\mathbf{x}} = V\mathbf{u}$$

the condition (5) becomes

$$\langle (A - \hat{\lambda}I)V\mathbf{u}, \mathbf{w}_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Therefore, \mathbf{u} and $\hat{\lambda}$ must satisfy

$$(7) \quad B_m\mathbf{u} = \hat{\lambda}\mathbf{u},$$

where

$$(8) \quad B_m = W^*AV.$$

In this way, we reduced the initial eigenvalue problem to the smaller $m \times m$ eigenvalue problem. Each eigenvalue $\hat{\lambda}$ of B_m is called a *Ritz value*, and $V\mathbf{u}$ is called *Ritz vector*, where \mathbf{u} is the eigenvector of B_m associated with $\hat{\lambda}$.

In the case of orthogonal projection methods the matrix B_m has the form $B_m = V^*AV$. In this case, the method for solving the reduced eigenvalue problem (7) is also known as the *Rayleigh-Ritz procedure*.

We can also reformulate projection methods in terms of projection operators as follows.

Case 1. Orthogonal projection methods. Let $P_{\mathcal{H}}$ be the orthogonal projector onto \mathcal{H} , then condition (5) has the form

$$(9) \quad A\hat{\mathbf{x}} - \hat{\lambda}\hat{\mathbf{x}} \perp \mathcal{H}$$

or equivalently,

$$P_{\mathcal{H}}(A - \hat{\lambda}I)\hat{\mathbf{x}} = 0, \quad (\hat{\lambda} \in \mathbf{C}, \hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{H})$$

or

$$(10) \quad P_{\mathcal{H}}A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\lambda}\hat{\mathbf{x}}.$$

Hence, we have replaced the initial problem (1) by an eigenvalue problem for the linear transformation $P_{\mathcal{H}}A|_{\mathcal{H}}$ which is from \mathcal{H} to \mathcal{H} . The last equation is equivalent to

$$(11) \quad P_{\mathcal{H}}AP_{\mathcal{H}}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\lambda}\hat{\mathbf{x}}, \quad (\hat{\lambda} \in \mathbf{C}, \hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{H}),$$

which involves the operator

$$(12) \quad A_m = P_{\mathcal{H}}AP_{\mathcal{H}}.$$

This is an extension of $P_{\mathcal{H}}A|_{\mathcal{H}}$ to the whole space. Equation (10) will be referred to as the Galerkin approximation problem.

Case 2. Oblique projection methods. Let $Q_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}$ be the oblique projector onto \mathcal{H} and orthogonal to \mathcal{L} . This projector has the following properties:

$$(13) \quad Q_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}\mathbf{z} \in \mathcal{H} \quad \text{and} \quad (I - Q_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}})\mathbf{z} \perp \mathcal{L}.$$

for any vector $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$. Then the orthogonality condition (5) is equivalent to

$$Q_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}(A - \hat{\lambda}I)\hat{\mathbf{x}} = 0, \quad (\hat{\lambda} \in \mathbf{C}, \hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{H})$$

or

$$(14) \quad Q_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\lambda}\hat{\mathbf{x}}.$$

Thus, the eigenvalue problem for matrix A is replaced by the eigenvalue problem of the linear operator $Q_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}A|_{\mathcal{H}}$. In this case, we can define an extension A_m by analogy to the definition of (12) in two different ways. One possible presentation could be

$$(15) \quad A_m = Q_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}AQ_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}$$

or, the more useful extension

$$(16) \quad A_m = Q_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}AP_{\mathcal{H}}.$$

Then by analogy to (11) we get the approximation problem

$$(17) \quad A_m\hat{\mathbf{x}} = \hat{\lambda}\hat{\mathbf{x}}, \quad (\hat{\lambda} \in \mathbf{C}, \hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{H}).$$

Therefore in both cases (11) and (17), the Ritz values are actually the eigenvalues of the operator A_m , and the Ritz vectors are the corresponding eigenvectors belonging to \mathcal{H} .

There are different ways to construct the subspaces \mathcal{H} and \mathcal{L} . We can work with subspaces of both fixed and variable dimensions. Some of the well-known examples when the subspace dimension is fixed to one are the *Power method* and *Rayleigh quotient iteration* (see [2, 9]). In other projection methods the dimension of the subspace \mathcal{H} is increasing, usually one starts with a subspace of dimension one, and the dimension increases by one at each iteration step. Some of the most popular methods of this type use the so-called *Krylov subspace*. Such examples are Arnoldi method, Lanczos method and incomplete orthogonalization (see [1, 3]). Methods like *Davidson* and *Jacobi-Davidson method* are with increasing subspace dimension and without using Krylov subspaces (see [6, 7]).

3 A new iterative scheme for diagonalization of matrix (2)

We introduce the following new iterative scheme for finding all the eigenvalues and corresponding left, and right eigenvectors of the inverse companion matrix (2).

Algorithm-1: Diagonalization of the inverse companion matrix

Input: A , initial vector $\mathbf{z}^{(0)}$ (where $z_i^{(0)} \neq z_j^{(0)}$ for $i \neq j$), tolerance $\varepsilon \ll 1$.

Output: Approximate eigenvalues and eigenvector matrices:

$$\lambda = (\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}), V(\lambda), W(\lambda).$$

1: Set $k=0$.

2: **While** not converged **do**

3: Compute the Vandermonde matrix $V_k = V(\mathbf{z}^{(k)})$.

4: Compute the inverse Vandermonde matrix $W_k^* = V(\mathbf{z}^{(k)})^{-1}$.

5: **For** $i=1:n$ **do**

6: Compute next eigenvalue estimate

$$z_i^{(k+1)} = \rho_k = (\mathbf{w}_i^{(k)})^* A \mathbf{v}_i^{(k)},$$

where $\mathbf{v}_i^{(k)}$ is the i -th column vector of V_k ,

and $(\mathbf{w}_i^{(k)})^*$ is the i -th row vector of W_k^*

7: **End for**

8: **Set** $k=k+1$.

8: **If** $\|\mathbf{z}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k)}\|_2 < \varepsilon$ **then**

9: **Set** $\lambda = \mathbf{z}^{(k+1)}$, $V = V_k$, $W = W_k^*$.

10: **break**

11: **End If**

12: **End While**

Where $z_i^{(k)}$ is the k -th approximation of the eigenvalue $\frac{1}{\lambda_i}$ ($i = 1, \dots, n$). The right and left approximate eigenvectors associated with eigenvalue $\frac{1}{\lambda_i}$ are denoted by $\mathbf{v}_i^{(k)}$ and $\mathbf{w}_i^{(k)}$, respectively. On step 6 of *Algorithm-1*, the two-sided *Rayleigh quotient*

$$(18) \quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(A, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}^* A \mathbf{x}}{\mathbf{y}^* \mathbf{x}}$$

is used for computing the approximate eigenvalue. Formula (18) is introduced for the first time by Ostrowski in [8] (see also [9, 10]).

We will show that the presented *Algorithm-1* can be formulated in terms of projection methods. Without loss of generality we fix the value of index i on step 6 of *Algorithm-1*. Let denote by

$$(19) \quad \mathcal{H}_i = \text{span}\{\mathbf{v}_i^{(k)}\}$$

the right subspace and by

$$(20) \quad \mathcal{L}_i = \text{span}\{(\mathbf{w}_i^{(k)})^*\}$$

the left subspace associated with $\frac{1}{\lambda_i}$ at iteration step k . It is obvious that the biorthogonality condition (6) is valid. Then the corresponding reduced eigenvalue problem (7)-(8) of (1) has the following trivial form

$$(\mathbf{w}_i^{(k)})^* A \mathbf{v}_i^{(k)} \mathbf{y} = \hat{\lambda}_i \mathbf{y},$$

where the matrix B_m is a scalar ($m = 1$) and it is identical to the Rayleigh quotient (18). In other words, we unambiguously obtain the Ritz value

$$\hat{\lambda}_i = z_i^{(k+1)} = \rho(\mathbf{v}_i^{(k)}, \mathbf{w}_i^{(k)}).$$

which is the next approximation of $\frac{1}{\lambda_i}$. Furthermore, it is immediate to verify that the residual vector of approximate eigenpair $\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_i}, \mathbf{v}_i^{(k)}\right)$

$$\mathbf{r}_i^{(k)} = A \mathbf{v}_i^{(k)} - \frac{1}{\hat{\lambda}_i} \mathbf{v}_i^{(k)}$$

is orthogonal to \mathcal{L}_i , i.e. the Petrov-Galerkin condition (5) is satisfied. With this, we confirmed that the approach of *Algorithm-1* is an oblique projection method with subspaces \mathcal{H}_i and \mathcal{L}_i having dimensions fixed to one.

4 Equivalence of Inverse Weierstrass method and introduced Algorithm-1

In this section we use the same notations as in the previous two sections. Let $P(z)$ be a monic polynomial of degree $n \geq 2$

$$(21) \quad P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0,$$

where $a_0 \neq 0$ and with n distinct zeros. Let $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ be pairwise distinct roots of $P(z)$.

In our previous work [11] we suggested the Inverse Weierstrass iterative method defined by the sequence

$$(22) \quad \mathbf{z}^{(k+1)} = \phi(\mathbf{z}^{(k)}), k = 0, 1, 2, \dots$$

where $\phi : \mathcal{D} \subset \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ is a vector valued function with components

$$(23) \quad \phi_i(\mathbf{z}^{(k)}) = \frac{z_i^{(k)}}{1 - \frac{P(z_i^{(k)})}{a_0} \prod_{j \neq i}^n \frac{z_j^{(k)}}{z_j^{(k)} - z_i^{(k)}}}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

and \mathcal{D} is the set of all vectors in \mathbf{C}^n with distinct components.

In [11] it is also shown that the entries of the matrix

$$(24) \quad H(\mathbf{z}) = V^{-1}(\mathbf{z})AV(\mathbf{z}),$$

where $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ and the matrices A and $V(\mathbf{z})$ are defined by (2) and (3), respectively, have the form

$$(25) \quad H_{ii} = \frac{1 - \frac{P(z_i)}{a_0} \prod_{j \neq i}^n \frac{z_j}{z_j - z_i}}{z_i} \quad \text{and} \quad H_{ij} = -\frac{P(z_j)}{a_0} \frac{1}{z_i} \prod_{j \neq i}^n \frac{z_j}{z_j - z_i}, \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Let now consider again *Algorithm-1*, step 6. The two-sided *Rayleigh quotient* computed on this step is exactly the diagonal element H_{ii} of (24), which approximates the ratio $\frac{1}{\lambda_i}$. From this and from expression (22) we conclude that the Inverse Weierstrass method is equivalent to introduced *Algorithm-1*.

5 Convergence analysis

Our main purpose in this section is to apply some of the known convergence results on Projection methods to the considered *Algorithm-1*.

Let now consider *Algorithm-1* for the fixed value of the index i . The orthogonal projector $P_{\mathcal{H}_i}$ onto \mathcal{H}_i defined by (19) has the form

$$(26) \quad P_{\mathcal{H}_i} = \frac{\mathbf{v}_i^{(k)}(\mathbf{v}_i^{(k)})^*}{\|\mathbf{v}_i^{(k)}\|_2^2}$$

and the oblique projector $Q_{\mathcal{H}_i}^{\mathcal{L}_i}$ onto \mathcal{H}_i along the orthogonal complement of \mathcal{L}_i defined by (20) has the form

$$(27) \quad Q_{\mathcal{H}_i}^{\mathcal{L}_i} = \mathbf{v}_i^{(k)}(\mathbf{w}_i^{(k)})^*.$$

If we consider the exact eigenpair $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$ as an approximate eigenpair of the operator A_m , then the following estimates hold for the corresponding residual vector. For the sake of simplicity, we omit the superscript (k) .

To investigate the distance between the Ritz value and the exact eigenvalue we can use the following theorem.

Theorem 1. *Let A be diagonalizable with eigenvalue decomposition (4)*

$$A = V\Lambda V^{-1},$$

where $\Lambda = \text{diag}\{\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\}$. Let $(\frac{1}{\hat{\lambda}_i}, \hat{\mathbf{x}}_i)$ be an approximate eigenpair of A computed by *Algorithm-1* with the corresponding residual vector

$$\mathbf{r}_i = \left(A - \frac{1}{\hat{\lambda}_i} I \right) \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Then there exists an eigenvalue λ_i of A such that

$$(28) \quad \left| \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\hat{\lambda}_i} \right| \leq k(V) \|\mathbf{r}_i\|_2,$$

where $k(V) = \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2$ denotes the condition number of V .

Proof: The result is obvious if $\lambda_i = \hat{\lambda}_i$. Let assume that $\lambda_i \neq \hat{\lambda}_i$, then the matrix $A - \frac{1}{\hat{\lambda}_i}I$ is nonsingular and we have

$$\left(A - \frac{1}{\hat{\lambda}_i}I\right)^{-1} = V \left(\Lambda - \frac{1}{\hat{\lambda}_i}I\right)^{-1} V^{-1},$$

which implies

$$1 \leq \|\hat{\mathbf{x}}_i\|_2 = \left\| \left(A - \frac{1}{\hat{\lambda}_i}I\right)^{-1} \mathbf{r}_i \right\|_2 = \left\| V \left(\Lambda - \frac{1}{\hat{\lambda}_i}I\right)^{-1} V^{-1} \mathbf{r}_i \right\|_2 \leq k(V) \frac{\|\mathbf{r}_i\|_2}{\min_j \left| \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\hat{\lambda}_i} \right|}.$$

Rearranging the terms we get the result of the theorem.

A similar approach to Theorem 1 for studying the convergence of Ritz values is the next theorem, where both left and right residuals are used. This is the two-sided analogous of the known Bauer-Fike theorem (see [1, 10]).

Theorem 2. Let we have the eigenvalue decomposition (4) of A

$$A = V \Lambda V^{-1},$$

where $\Lambda = \text{diag}\{\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\}$. Let $(\frac{1}{\hat{\lambda}_i}, \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{y}}_i)$ be an approximate eigentriplet of A computed by Algorithm-1 with the corresponding residual vectors

$$\mathbf{r}_i = \left(A - \frac{1}{\hat{\lambda}_i}I\right) \hat{\mathbf{x}}_i \text{ and } \mathbf{s}_i^* = \hat{\mathbf{y}}_i^* \left(A - \frac{1}{\hat{\lambda}_i}I\right), \quad (i = 1, \dots, n).$$

Then there exists an eigenvalue $\frac{1}{\lambda_i}$ of A such that

$$(29) \quad \left| \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\hat{\lambda}_i} \right| \leq \sqrt{k(V) \|\mathbf{r}_i\|_2 \|\mathbf{s}_i\|_2},$$

where $k(V)$ denotes the condition number of V .

Proof: If $\frac{1}{\lambda_i}$ is an eigenvalue of A the result is obvious. Let suppose the opposite. Then the matrix $A - \frac{1}{\hat{\lambda}_i}I$ is nonsingular and we have

$$1 = |\hat{\mathbf{y}}_i^* \hat{\mathbf{x}}_i| = \left| \mathbf{s}_i^* \left(A - \frac{1}{\hat{\lambda}_i}I\right)^{-2} \mathbf{r}_i \right| = \left| \mathbf{s}_i^* V \left(\Lambda - \frac{1}{\hat{\lambda}_i}I\right)^{-2} V^{-1} \mathbf{r}_i \right| \leq$$

by using that the matrix $(\Lambda - \frac{1}{\hat{\lambda}_i}I)$ is diagonal

$$\leq k(V) \|\mathbf{s}_i\|_2 \|\mathbf{r}_i\|_2 \left\| \left(\Lambda - \frac{1}{\hat{\lambda}_i}I\right)^{-2} \right\|_2,$$

which implies by rearranging the terms

$$\min_{\lambda_i} \left| \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\hat{\lambda}_i} \right| \leq \sqrt{k(V) \|\mathbf{s}_i\|_2 \|\mathbf{r}_i\|_2}.$$

From the last expression, we get the result of the theorem.

It is important to remark that the estimates obtained in Theorem 1 and Theorem 2 depend on the quantity $k(V)$ which is not known, and so these are *a priori* results. Such estimates are of great value in assessing the relative performance of algorithms.

6 Conclusion

Our goal in this study was to introduce a new iterative method for diagonalization of the inverse companion matrix. We have shown that this method can be considered as an oblique projection method. Using this we proved some analogs of known results from the theory of projection methods. We established an a posterior error bound and error bounds by using the residuals. We also show that the new iterative scheme is equivalent to the known Inverse Weierstrass iterative method for simultaneous approximations of all the zeros of a polynomial.

REFERENCES:

- [1] Y. Saad, *Numerical methods for large eigenvalue problems*, Classics in Applied Mathematics, vol. 66, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2011.
- [2] G. Stewart, *Matrix Algorithms, Volume II: Eigensystems*, SIAM, Philadelphia, 2001.
- [3] G.H. Golub, H.A. van der Vorst, Eigenvalue computation in the 20th century, *J.Comput.Appl.Math.* 123: 35-65, 2000.
- [4] A. Björck, G. Dahlquist, *Numerical Methods in Scientific Computing Volume II*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA 2008.
- [5] B.N. Parlett, *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [6] J. Demmel, J. Dongarra, A. Ruhe, *Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide*, Society fo Industrial and Applied Mathematics, PA, 2000.
- [7] G.L.G. Sleijpen, H.A. van der Vorst, A Jacobi-Davidson iteration method for linear eigenvalue problem, *SIAM J.Matrix Anal. Appl.*, 17: 401-425, 1996.
- [8] A. Ostrowski, On the convergence of the Rayleigh quotient iteration for the computation of the characteristic roots and vectors, I-VI, *Arch. Ration. Mech. Anal.* I 1:233-241, 1958; II 2:423-428, 1958; III 3:325-340, 1959; IV 3:341-347, 1959; V 3:472-481, 1959; VI 4:153-165, 1959.
- [9] B.N. Parlett, The Rayleigh quotient iteration and some generalizations for nonnormal matrices, *Math. Comput.* 28: 679-693, 1974.
- [10] I.N.Zwaan, M.E.Hochstenbach, Krylov-Schur-Type restarts for the two-sided Arnoldi method, *Siam J. Matrix Anal. Appl.*, Vol.38, No.2, pp.297-321, 2017.
- [11] G.H. Nedzhibov, Inverse Weierstrass-Durand-Kerner iterative method, *International Journal of Applied Mathematics*,ISSN:2051-5227 Vol. **28**, Issue 2, pp.1258-1264, (2013).

NEW FORMULAS FOR THREE-POINT BOUNDS ON THE EFFECTIVE CONDUCTIVITY OF MULTI-PHASE SYMMETRIC CELL MATERIALS*

KRASIMIR D. TSVYATKOV

ABSTRACT: *New forms of trial fields for classical variational principles in the context of electrical conductivity are introduced. They generalize to an arbitrary random medium, not necessarily with discrete structure, of the trial fields of Phan-Thien and Milton (1982) introduced by them for an N -phase material with a periodic structure and leading to finding of three-point bounds on the effective conductivity of the composite. These new forms of their trial fields are used for symmetric cell materials and as a result simple formulas are obtained for the corresponding bounds on the effective conductivity of such materials.*

KEYWORDS: *Effective conductivity, Symmetric cell materials, Variational bounds*

1 Introduction

The problem of finding the effective physical properties of a heterogeneous medium requires knowledge of the complete statistical description of the medium [1]. In practice, however, we have only the information given by the first few correlation functions of the medium. Therefore, the only thing that can be rigorously done is to obtain bounds on these properties using this limited information. In the context of electrical conductivity, we will briefly consider finding variational bounds using only the first k -point moments up to $k = 3$ of the scalar random conductivity field $\sigma(\mathbf{x})$ of a d -dimensional medium at $d = 2, 3$. These bounds are referred to as three-point bounds.

We will assume that $\sigma(\mathbf{x})$ is a statistically homogeneous random field and relates the local current density field $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ with the local electric field $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ in the medium according to Ohm's law:

$$(1) \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}),$$

We will also assume that the medium is macroscopically isotropic, i.e. its effective conductivity σ^* , usually defined by the averaged Ohm's law:

$$(2) \quad \langle \mathbf{J}(\mathbf{x}) \rangle = \sigma^* \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}) \rangle,$$

is a scalar quantity; the brackets $\langle \rangle$, hereafter, denote ensemble averaging.

The electric field is irrotational: $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$, i.e. $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x})$, where $\phi(\mathbf{x})$ is the electrical potential, and the current density field, in the absence of internal current sources, is solenoidal:

$$(3) \quad \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0.$$

The problem of finding the solution $\phi(\mathbf{x})$ of this equation under prescribed constant-average electric field, $\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{E}_0$, is equivalent to the classical energy variational principle, according to which among all the statistically homogeneous irrotational fields $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})$ for which $\langle \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{E}_0$, the functional

$$(4) \quad W[\hat{\mathbf{E}}(\cdot)] = \frac{1}{2} \langle \sigma(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \rangle$$

*Partially supported by Scientific Research Grant RD-08-73/23.01.2020 of Shumen University.

is stationary and minimum for this solution, i.e. for the true electric field $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ in the medium; so that $\min W = \frac{1}{2} \sigma^* E_0^2$, $E_0^2 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0$. The ergodic hypothesis for all statistically homogeneous fields is adopted.

The solution $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ can be formally found in the form of a perturbation series for a weakly inhomogeneous medium. This series, truncated after its first integral term, forms the field

$$(5) \quad \widehat{\mathbf{E}}^{(b)}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 + \alpha \mathbf{E}_0 \cdot \int \nabla \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \sigma'(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

where $G(\mathbf{x})$ is the Green function for the Laplace operator in \mathbb{R}^d , i.e. $G(\mathbf{x}) = 1/4\pi|\mathbf{x}|$ for $d = 3$ or $G(\mathbf{x}) = -\ln|\mathbf{x}|/2\pi$ for $d = 2$, and $\alpha = 1/\langle\sigma\rangle$; hereafter, $\Theta'(\mathbf{x}) = \Theta(\mathbf{x}) - \langle\Theta(\mathbf{x})\rangle$ is the fluctuation of a random field $\Theta(\mathbf{x})$ about its mean value $\langle\Theta(\mathbf{x})\rangle$.

In fact, Beran[2] adopted α as an adjustable parameter in (5) and then considered the classical variational principle on the fields $\widehat{\mathbf{E}}^{(b)}(\mathbf{x})$. The energy functional (4), when restricted over this class of trial fields, becomes a quadratic function of α , whose minimization brings forth an upper bound on σ^* :

$$(6) \quad \sigma^* \leq \sigma_u^{(b)}, \quad \sigma_u^{(b)} = \langle\sigma\rangle \left\{ 1 - \frac{m_{2\sigma}^2/d^2}{m_{2\sigma}/d + A_\sigma^{(3)} m_{3\sigma}} \right\},$$

where $m_{2\sigma} = \langle\sigma'^2\rangle/\langle\sigma\rangle^2$, $m_{3\sigma} = \langle\sigma'^3\rangle/\langle\sigma\rangle^3$, and

$$(7) \quad A_\sigma^{(3)} = \frac{1}{d\langle\sigma'^3\rangle} \iint M_3^\sigma(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \nabla \nabla G(\mathbf{z}_1) : \nabla \nabla G(\mathbf{z}_2) d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2$$

is a dimensionless statistical parameter for the medium, depending on the three-point moment $M_3^\sigma(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \langle\sigma'(\mathbf{0})\sigma'(\mathbf{z}_1)\sigma'(\mathbf{z}_2)\rangle$ for the conductivity field $\sigma(\mathbf{x})$; the colon denotes contraction with respect to two pairs of indices.

We are now introducing the more general class of trial fields

$$(8) \quad \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0 \cdot \int \nabla \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \lambda'(\sigma(\mathbf{y})) d\mathbf{y},$$

where $\lambda(\sigma)$ is a varying non-random function of the achieved conductivity values and the field $\lambda'(\sigma(\mathbf{x}))$ is the fluctuation of the random field $\lambda(\sigma(\mathbf{x}))$. Obviously, if $\lambda(\sigma) = \alpha \sigma$ with an adjustable constant α , the fields (8) coincide with the Beran's trial fields (5).

Let us assume only for a moment that the medium is an N -phase composite material. Thus each phase is characterized by its constant conductivity σ_i and its indicator function $\Omega_i(\mathbf{x})$, taking the value 1 if $\mathbf{x} \in i$ -th phase, and 0 otherwise, where $i = 1, \dots, N$. Then conductivity field $\sigma(\mathbf{x})$ is represented as a step function:

$$(9) \quad \sigma(\mathbf{x}) = \sigma_1 \Omega_1(\mathbf{x}) + \dots + \sigma_N \Omega_N(\mathbf{x})$$

and, according to the definition of the function $\lambda(\sigma)$, the field $\lambda(\sigma(\mathbf{x}))$ has the same form:

$$(10) \quad \lambda(\sigma(\mathbf{x})) = \alpha_1 \Omega_1(\mathbf{x}) + \dots + \alpha_N \Omega_N(\mathbf{x}),$$

where $\alpha_i = \lambda(\sigma_i)$, $i = 1, \dots, N$. Therefore, for N -phase medium, the general trial fields (8) can be represented in the form

$$(11) \quad \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0 \cdot \sum_{i=1}^N \alpha_i \int \nabla \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Omega'_i(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y},$$

where $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ is an adjustable constant vector. Keeping in mind that the Fourier transform \mathcal{F} maps the integral terms in (11) into the tensors $\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \omega_i(\mathbf{k})$ in the case of three space dimensions, where $\omega_i(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[\Omega'_i(\mathbf{x})]$, $i = 1, \dots, N$, we note that the fields (11) are the same trial fields introduced through their Fourier series expansions by Phan-Thien and Milton [3] for an N -phase material with periodic internal structure, when the vector \mathbf{E}_0 is chosen to be the unit vector in the x -direction. Thus, it turned out that the trial fields (8), introduced here, are a generalization of the trial fields of Phan-Tien and Milton for an arbitrary statistically homogeneous medium, as well as for a two-dimensional medium. By minimizing the restriction of the energy functional (4) on their trial fields with respect to the vector $\boldsymbol{\alpha}$, they obtained an upper bound for σ^* in a form involving matrix multiplications, the three-point statistics of the medium being represented by a three-dimensional matrix of $N(N-1)^2/2$ different geometrical parameters

$$(12) \quad A_{abc} = \iint \langle \Omega'_a(\mathbf{0}) \Omega'_b(\mathbf{z}_1) \Omega'_c(\mathbf{z}_2) \rangle \nabla \nabla G(\mathbf{z}_1) : \nabla \nabla G(\mathbf{z}_2) \, d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2, \quad a, b, c = 1, \dots, N.$$

It is worth noting that $\Omega_1(\mathbf{x}) + \dots + \Omega_N(\mathbf{x}) = 1$, whence $\Omega'_2(\mathbf{x}) = -\Omega'_1(\mathbf{x})$ at $N = 2$. Taking into account also (9), we conclude that for a two-phase medium the trial fields (11) are reduced to the Beran's fields (5).

Referring to the form (11) of the trial fields of Phan-Thien and Milton [3], it can be easily shown that the trial fields of Pham [4] coincide with them. Therefore, the corresponding bounds obtained by Pham [4] again in a form involving matrix multiplications, but with other statistical geometrical parameters, coincide with the bounds of Phan-Thien and Milton. This conclusion is in line with the finding of Pham [4] that by using computer programs one can check that his bounds in three-dimensional case ($d = 3$) agree with those of Phan-Thien and Milton [3].

While minimizing the energy functional (4) on the class of trial fields (11) is reduced to solving a linear system with respect to the multipliers $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, the problem of minimizing it on the class of fields (8) for an arbitrary, not necessarily medium with a discrete structure, comes down to solving the corresponding Euler-Lagrange equation, which seems to be a complicated, albeit linear, integral equation with respect to the function $\lambda(\sigma)$. That is why here we will turn our attention to the restriction of the energy functional on this more general class of trial fields for symmetric cell materials, which seems to be the first meaningful class of materials for which the Beran bounds [2] are considered, starting with Miller's work [5].

2 Symmetric cell materials and Miller geometrical parameter

The symmetric cell material is constructed as follows. The space is divided into an infinite number of cells in such a way that the resulting geometric structure is statistically homogeneous. In this division, the shapes and sizes of the cells may be different. Then each cell is randomly assigned a constant conductivity σ with some probability density $P(\sigma)$, the value of which does not depend on either the geometry of the cell or the assigned conductivities of the surrounding cells. A classic example of such material is the random (two- or three-dimensional) chessboard.

Another example is the medium obtained when space is divided only into spherical cells whose radii vary from a certain finite to the infinitesimally small value.

It follows from the assumed statistical independence of cell conductivities that [6]

$$(13) \quad \langle \sigma'(\mathbf{r}_1)\sigma'(\mathbf{r}_2)\sigma'(\mathbf{r}_3) \rangle = \langle \sigma'^3 \rangle g_3(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2),$$

where $g_3(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2)$ is the probability that all three points \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , and \mathbf{r}_3 fall into the same cell. Due to the special representation (13), the Beran statistical parameter $A_\sigma^{(3)}$ in (7) is equal to the geometrical parameter

$$(14) \quad \mathcal{G} = \frac{1}{d} \iint g_3(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \nabla \nabla G(\mathbf{z}_1) : \nabla \nabla G(\mathbf{z}_2) d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2,$$

introduced and denoted by G by Miller [5], who considered the Beran bounds for a two-phase medium. He showed that the parameter G does not depend on the sizes and relative positions of the cells, but only on their shapes. Hori [6] expressed the parameter G for a material with an ellipsoidal shape of the cells (with uniform random orientations) through their depolarization factors L_i , $i = 1, 2, 3$, and also introduced tensor $\mathbf{A}^{(3)}$ generalizing G for the case when the medium is not statistically isotropic. The values of the parameter G for some cell shapes, more complex constructions of cell materials, and other known results concerning them, the reader can find in the books of Milton [7, ch. 15] and Torquato [8, ch. 8, 22] and the references in them.

3 Three-point bounds for cell materials

We will now consider deriving an upper bound on the effective conductivity σ^* by using the classical energy principle on the class of trial fields (8) and a lower bound by using its dual classical variational principle on the class of corresponding to them trial fields.

3.1 Upper bound

According to the classical energy principle, the inequality

$$(15) \quad \sigma^* \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0 \leq \widetilde{W}[\lambda(\cdot)]$$

is hold, where $\widetilde{W}[\lambda(\cdot)]$ is the restriction of the energy functional (4) on the class of trial fields (8). The functional \widetilde{W} can be written in the form

$$(16) \quad \widetilde{W}[\lambda(\cdot)] = \mathbf{E}_0 \cdot \widetilde{U}[\lambda(\cdot)] \cdot \mathbf{E}_0,$$

where

$$(17) \quad \begin{aligned} \widetilde{U}[\lambda(\cdot)] = & \langle \sigma \rangle \mathbf{I} + 2 \int \nabla \nabla G(\mathbf{z}) \langle \sigma'(\mathbf{0}) \lambda'(\sigma(\mathbf{z})) \rangle d\mathbf{z} \\ & + \langle \sigma \rangle \iint \langle \lambda'(\sigma(\mathbf{z}_1)) \lambda'(\sigma(\mathbf{z}_2)) \rangle \nabla \nabla G(\mathbf{z}_1) \cdot \nabla \nabla G(\mathbf{z}_2) d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2 \\ & + \iint \langle \sigma'(\mathbf{0}) \lambda'(\sigma(\mathbf{z}_1)) \lambda'(\sigma(\mathbf{z}_2)) \rangle \nabla \nabla G(\mathbf{z}_1) \cdot \nabla \nabla G(\mathbf{z}_2) d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2, \end{aligned}$$

\mathbf{I} being the unit tensor. For the second integral we find

$$(18) \quad \iint \langle \lambda'(\sigma(\mathbf{z}_1)) \lambda'(\sigma(\mathbf{z}_2)) \rangle \nabla \nabla G(\mathbf{z}_1) \cdot \nabla \nabla G(\mathbf{z}_2) d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2 \\ = - \int \nabla \nabla G(\mathbf{z}) \langle \lambda'(\sigma(\mathbf{0})) \lambda'(\sigma(\mathbf{z})) \rangle d\mathbf{z}$$

after four integrations by parts. To arrive at this equation, we relied on the statistical homogeneity of the field $\lambda'(\sigma(\mathbf{x}))$, the basic equation $\Delta G(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x})$ for the Green function, $\delta(\mathbf{x})$ being the Dirac delta function, and the assumption of no long-range correlations, which is certainly fulfilled for symmetric cell materials.

By choosing \mathbf{E}_0 to be the units vectors along the coordinate axes, from (15)–(18) and the equation $\text{tr} [\nabla \nabla G(\mathbf{x})] = \Delta G(\mathbf{x})$ we find

$$(19) \quad \sigma^* \leq \sigma_u, \quad \sigma_u = U [\lambda(\cdot)],$$

where $U = \text{tr} \tilde{\mathbf{U}}$, i.e.

$$(20) \quad U [\lambda(\cdot)] = \langle \sigma \rangle - \frac{2}{d} \langle \sigma' \lambda'(\sigma) \rangle + \frac{1}{d} \langle \sigma \rangle \langle \lambda'^2(\sigma) \rangle + A_\lambda^{(3)} \langle \sigma'^3 \rangle,$$

where

$$(21) \quad A_\lambda^{(3)} = \frac{1}{d \langle \sigma'^3 \rangle} \iint \langle \sigma'(\mathbf{0}) \lambda'(\sigma(\mathbf{z}_1)) \lambda'(\sigma(\mathbf{z}_2)) \rangle \nabla \nabla G(\mathbf{z}_1) : \nabla \nabla G(\mathbf{z}_2) d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2.$$

As already mentioned, the Euler-Lagrange equation for the functional (20) seems difficult to solve for arbitrary medium. If we replace $\lambda(\sigma)$ with $\alpha\sigma$ in (20) and minimize the obtained function of the multiplier α , we will immediately get the upper Beran bound (6).

Since the field $\lambda(\sigma(\mathbf{x}))$ has the same statistical properties as the conductivity field $\sigma(\mathbf{x})$, for symmetric cell material the third moment involved in the integral in (21) is expressed analogously to that in (13), i.e.

$$(22) \quad \langle \sigma'(\mathbf{0}) \lambda'(\sigma(\mathbf{z}_1)) \lambda'(\sigma(\mathbf{z}_2)) \rangle = \langle \sigma'(\mathbf{0}) \lambda'^2(\sigma(\mathbf{0})) \rangle g_3(\mathbf{0}, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2),$$

and therefore $A_\lambda^{(3)} = \langle \sigma' \lambda'^2(\sigma) \rangle G / \langle \sigma'^3 \rangle$, where G is the geometric Miller parameter (14).

Let us remember that the energy functional must be considered for functions $\lambda(\sigma)$ subjected to the constraint

$$(23) \quad \langle \lambda'(\sigma(\mathbf{x})) \rangle = \lambda(\sigma(\mathbf{x})) - \langle \lambda(\sigma(\mathbf{x})) \rangle = 0.$$

It turns out to be more convenient to consider the functional (20) with an argument the functional

$$(24) \quad \lambda'(\sigma) = \lambda(\sigma) - \langle \lambda(\sigma) \rangle = \lambda(\sigma) - \int \lambda(\sigma) P(\sigma) d\sigma,$$

instead of the function $\lambda(\sigma)$, and to introduce the Lagrangian functional

$$(25) \quad \mathcal{L} [\lambda'(\cdot), \Lambda] = U [\lambda'(\cdot)] + \Lambda \langle \lambda'(\sigma(\mathbf{x})) \rangle \\ = \langle \sigma \rangle - \frac{2}{d} \langle \sigma' \lambda'(\sigma) \rangle + \frac{1}{d} \langle \sigma \rangle \langle \lambda'^2(\sigma) \rangle + \langle \sigma' \lambda'^2(\sigma) \rangle G + \Lambda \langle \lambda'(\sigma(\mathbf{x})) \rangle$$

with unknown Lagrange multiplier Λ . The Euler-Lagrange equation for this functional is

$$(26) \quad -\frac{1}{d}\sigma' + \frac{1}{d}\langle\sigma\rangle\lambda'(\sigma) + \sigma'\lambda'(\sigma)G + \frac{1}{2}\Lambda = 0,$$

whose averaging when using the constraint (23) gives $\Lambda = -2\langle\sigma'\lambda'(\sigma)\rangle G$.

Multiplying now the equation (26) by $\lambda'(\sigma)$ and then averaging it, we can express the quadratic part of the functional (20) with its linear one, and thus we get

$$(27) \quad \min U[\lambda(\cdot)] = \langle\sigma\rangle - \frac{1}{d}\langle\sigma'\lambda'(\sigma)\rangle,$$

where $\lambda'(\sigma)$ is the solution of the equation (26). Expressing now the functional $\lambda'(\sigma)$ from this equation, we find

$$(28) \quad \lambda'(\sigma) = \frac{1}{d}\frac{\sigma'}{\tilde{\sigma}} + \frac{1}{\tilde{\sigma}}\langle\sigma'\lambda'(\sigma)\rangle G,$$

where $\tilde{\sigma} = \langle\sigma\rangle/d + G\sigma'$. After averaging now the equation (28) under the constraint (23), we get the linear term

$$(29) \quad \langle\sigma'\lambda'(\sigma)\rangle = \frac{1}{d}\frac{\langle\sigma'/\tilde{\sigma}\rangle}{\langle 1/\tilde{\sigma}\rangle G}.$$

Finally, taking into account (19), (27), and (29), for the best upper bound on σ^* we obtain the formula

$$(30) \quad \sigma_u = \langle\sigma\rangle \left\{ 1 + (1 - \alpha_u(G)) \frac{B_u}{1 - L_u(G) B_u} \right\},$$

where

$$(31) \quad B_u = \left\langle \frac{\sigma(\mathbf{x}) - \langle\sigma\rangle}{\langle\sigma\rangle + L_u(G)(\sigma(\mathbf{x}) - \langle\sigma\rangle)} \right\rangle, \quad \alpha_u(G) = \frac{d^2G - 1}{d^2G}, \quad L_u(G) = dG.$$

3.2 Lower bound

To derive lower bounds on the effective conductivity σ^* we use the complementary energy principle, according to which among all the statistically homogeneous solenoidal trial fields $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x})$ with prescribed constant-average value, $\langle\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\rangle = \mathbf{J}_0$, the functional

$$(32) \quad W[\hat{\mathbf{J}}(\cdot)] = \frac{1}{2}\langle\rho(\mathbf{x})\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\rangle$$

is stationary and minimum for the true current density field $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ in the medium, so that $\min W = \frac{1}{2}\rho^* J_0^2$, $J_0^2 = \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{J}_0$, where $\rho(\mathbf{x}) = 1/\sigma(\mathbf{x})$ and $\rho^* = 1/\sigma^*$ are the local and effective resistivity of the medium, respectively.

For this variational principle, we introduce the trial fields

$$(33) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{J}_0 + \int \nabla \times [\mathbf{J}_0 \times \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \mu'(\sigma(\mathbf{y})) d\mathbf{y} \\ &= \mathbf{J}_0 + \mu'(\sigma(\mathbf{x}))\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_0 \cdot \int \nabla \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu'(\sigma(\mathbf{y})) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

– the counterpart of the fields (8), where $\mu(\sigma)$ is a varying non-random function of the achieved conductivity values and the field $\mu'(\sigma(\mathbf{x}))$ is the fluctuation of the random field $\mu(\sigma(\mathbf{x}))$. The derivation of the best lower bound on σ^* is similar to that of the upper bound, so we will omit some details.

After substituting the trial field (33) into the functional (32), we will get an expression for an upper bound ρ_u on ρ^* :

$$(34) \quad \rho^* \leq \rho_u, \quad \rho_u = U[\mu(\cdot)],$$

where

$$(35) \quad U[\mu(\cdot)] = \langle \rho \rangle + 2 \frac{d-1}{d} \langle \rho \mu'(\sigma) \rangle + \frac{d-2}{d} \langle \rho \mu'^2(\sigma) \rangle + \frac{1}{d} \langle \rho \rangle \langle \mu'^2(\sigma) \rangle + A_\mu^{(3)} \langle \rho'^3 \rangle$$

is a functional involving the statistical parameter

$$(36) \quad A_\mu^{(3)} = \frac{1}{d \langle \rho'^3 \rangle} \iint \langle \rho'(\mathbf{0}) \mu'(\sigma(\mathbf{z}_1)) \mu'(\sigma(\mathbf{z}_2)) \rangle \nabla \nabla G(\mathbf{z}_1) : \nabla \nabla G(\mathbf{z}_2) d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2.$$

If we replace $\mu(\sigma)$ with $\alpha\sigma$ in (35) and minimize the obtained quadratic function of α , we will get the lower bound $\sigma_\ell = 1/\rho_u$ on σ^* of Beran [2].

For symmetric cell materials, $A_\mu^{(3)} = \langle \rho' \mu'^2(\sigma) \rangle G / \langle \rho'^3 \rangle$, where G is again the geometric Miller parameter (14). The corresponding Lagrangian functional

$$(37) \quad \mathcal{L}[\mu'(\cdot), \Lambda] = U[\mu'(\cdot)] + \Lambda \langle \mu'(\sigma(\mathbf{x})) \rangle,$$

considered under the the constraint $\langle \mu'(\sigma(\mathbf{x})) \rangle = 0$, leads to finding the following equation for the functional $\mu'(\sigma)$:

$$(38) \quad \frac{d-1}{d} \rho' + \frac{d-1}{d} \langle \rho \rangle \mu'(\sigma) + \left(\frac{d-2}{d} + G \right) [\rho' \mu'(\sigma) - \langle \rho' \mu'(\sigma) \rangle] = 0.$$

For the best upper bound ρ_u on ρ^* , we find

$$(39) \quad \rho_u = \langle \rho \rangle + \frac{(d-1)^2}{d(dG + d - 2)} \frac{\langle \rho' / \tilde{\rho} \rangle}{\langle 1 / \tilde{\rho} \rangle},$$

where $\tilde{\rho} = (d-1)\langle \rho \rangle + (dG + d - 2)\rho'$. Finally, for the best lower bound $\sigma_\ell = 1/\rho_u$ on σ^* , we obtain the formula

$$(40) \quad \sigma_\ell = \sigma_H \left\{ 1 + (1 - \alpha_\ell(G)) \frac{B_\ell}{1 - (L_\ell(G) - \alpha_\ell(G)) B_\ell} \right\},$$

where

$$(41) \quad B_\ell = \left\langle \frac{\sigma(\mathbf{x}) - \sigma_H}{\sigma_H + L_\ell(G) (\sigma(\mathbf{x}) - \sigma_H)} \right\rangle, \quad \alpha_\ell(G) = \frac{d^2 G - 1}{d(dG + d - 2)}, \quad L_\ell(G) = \frac{1 - dG}{d - 1},$$

and $\sigma_H = 1/\langle \rho \rangle = \langle \sigma^{-1} \rangle^{-1}$ is the harmonic mean of the conductivity σ .

4 Concluding remarks

The parameters B_u and B_ℓ involved in formulas (30) and (40) for the bounds σ_u and σ_ℓ , respectively, are easy to calculate for a N -phase medium and some simple probability densities $P(\sigma)$ (e.g., for a uniform or triangular distribution of σ). As expected, for a three-phase cell material, the new formulas (30) and (40) are equivalent to the explicit formulas given in [3]. In the case of spherical cell material [5–8], $G = 1/d^2$, whence we find $\alpha_u = \alpha_\ell = 0$ and $L_u = L_\ell = 1/d$ – the depolarization factor of a sphere. Then the quantities B_u and B_ℓ represent the average polarizability of the spheres of the material with respect to the medium with conductivity the arithmetic mean $\sigma_A = \langle \sigma \rangle$ and the geometric mean σ_H , respectively. For cells with a non-spherical shape, polarizability is a tensor and therefore cannot be so clearly reflected in our formulas for macroscopic isotropic materials. Consideration of statistical anisotropic media will lead to a clearer presence of cell polarizability in the corresponding formulas for effective conductivity. The relevant study will be done elsewhere.

REFERENCES:

- [1] Brown, W. F., Solid mixture permittivities, *Journal of Chemical Physics* **23** (1955), 1514 – 1517.
- [2] Beran, M.J., Use of the variational approach to determine bounds for the effective permittivity in random media. *Nuovo Cimento* **38** (1965), 771–782.
- [3] Phan-Thien, N., Milton, G.W., New bounds on the effective thermal conductivity of N -phase materials. *Proc. R. Soc. Lond. A* **380** (1982), 333–348.
- [4] Pham, D.C., Bounds on the effective conductivity of statistically isotropic multicomponent materials and cell polycrystals. *J. Mech. Phys.Solids* **59** (2011), 497–510.
- [5] Miller, M. N., Bounds for effective electrical, thermal, and magnetic properties of heterogeneous materials. *J. Math. Phys.* **10** (1969), 1988 – 2004.
- [6] Hori, M., Statistical theory of effective electrical, thermal, and magnetic properties of random heterogeneous materials. I. Perturbation expansions for the effective permittivity of cell materials. *J. Math. Phys.* **14** (1973), 514–523.
- [7] Milton, G. W., *The theory of composites*, Cambridge University Press, Cambridge, England (2001).
- [8] Torquato, S., *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer-Verlag (2002).

ON THE ORBITS OF ONE SUBGROUP OF THE MÖBIUS GROUP IN \mathbb{R}^3 *

RADOSTINA P. ENCHEVA

ABSTRACT: In this paper we characterize spatial curves that are orbits of a subgroup of the Möbius group in the three-dimensional Euclidean space. The resulting curves are illustrated by a special case.

KEYWORDS: Orbits of a group, Möbius group, Frenet curves

ЗА ОРБИТИТЕ НА ЕДНА ПОДГРУПА НА МЪОБИУСОВАТА ГРУПА В \mathbb{R}^3

РАДОСТИНА П. ЕНЧЕВА

АБСТРАКТ: В тази работа са характеризирани пространствени криви, които са орбити на една подгрупа на Мьобиусова група в тримерното Евклидово пространство. Получените криви са илюстрирани с един частен случай.

1 Въведение

Нека \mathbb{S}^3 е единичната 3-сфера в четиримерното Евклидово пространство \mathbb{R}^4 , снабдено с естествената си метрика, а точката O е центърът на \mathbb{S}^3 . Еднаквостите върху \mathbb{S}^3 , запазващи ориентацията, наречени движения, са ротациите от групата $SO(4)$ в \mathbb{R}^4 с център точката O . Чрез една стереографска проекция Π с център точка в $P \in \mathbb{S}^3$ на $\mathbb{S}^3 \setminus \{P\}$ в \mathbb{R}^3 , групата на движенията върху \mathbb{S}^3 индуцира в \mathbb{R}^3 една подгрупа M_0 на Мьобиусовата група $\text{Möb}(3)$ в \mathbb{R}^3 . Тази група има хубаво представяне чрез алгебрата на кватернионите \mathbb{H} , като $\mathbb{H}_0 \subset \mathbb{H}$ е множеството на така наречените чисто векторни кватерниони (с нулева реална част). Ако $w \in \mathbb{H}$ е кватернион, то нормата на w се означава с $\|w\|$, а кватернионът $\bar{w} \in \mathbb{H}$ е спрегнатият на w кватернион и $\|w\|^2 = w \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot w$. Преобразованията от групата M_0 могат да се представят чрез

$$F(q) = (A \cdot q + B) \cdot (B \cdot q + A)^{-1},$$

където $A, B \in \mathbb{H}$, $q \in \mathbb{H}_0$, $\|A\|^2 + \|B\|^2 = 1$ и $A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{A} = 0$, отъждествявайки \mathbb{H}_0 с \mathbb{R}^3 (Теорема 3 в [3]).

Орбита на една група от преобразования G в \mathbb{R}^3 ([1]) е множеството

$$\text{orb}(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^3; y = g(x_0), g \in G\}, x_0 \in \mathbb{R}^3.$$

Орбити на групата на движенията в \mathbb{R}^3 са правите, окръжностите и винтовите линии. Разширявайки тази група с подобностите, които запазват ориентацията, получаваме групата

*This paper is (partially) supported by the National Scientific Program "Information and Communication Technologies for a Single Digital Market in Science, Education and Security (ICTinSES) financed by the Ministry of Education and Science.

$Sim^+(3)$ на подобностите в \mathbb{R}^3 , които запазват ориентацията. Тогава към изброените орбити се добавят логаритмичните спирали и коничните спирали. Ако c е гладка крива в \mathbb{R}^3 , то нейните определящи я с точност до движение диференциално-геометрични инварианти са кривината и торзията на кривата като функции на естествения параметър s на кривата ([6]). Определящите диференциално-геометрични инварианти относно групата $Sim^+(3)$ на една крива са така наречените шейп кривина и шейп торзия, като функции на естествения параметър на тангенциалната индикатриса на кривата ([2]). Орбити на групата на движенията, както и на групата $Sim^+(3)$ в \mathbb{R}^3 , са криви с постоянни кривина и торзия или шейп кривина и шейп торзия, съответно.

Можем да считаме, че орбити на една група от преобразования са криви с постоянни диференциално-геометрични инварианти, които определят кривата с точност до преобразование от разглежданата група.

Нека $K = O \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 \vec{e}_4$ е дясна Декартова координатна система в \mathbb{R}^4 . Тогава

$$\mathbb{S}^3 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 | (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\}.$$

Нека $\mathbf{l} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, $x^1 \neq 1$ е радиус-векторът на произволна точка от \mathbb{S}^3 , различна от точката $P(1, 0, 0, 0) \in \mathbb{S}^3$. Означавайки с (u^1, u^2, u^3) координатите на радиус-вектора \mathbf{u} на произволна точка в \mathbb{R}^3 относно Декартовата координатна система $K' = O \vec{e}_1' \vec{e}_2' \vec{e}_3'$ в \mathbb{R}^3 , където $\vec{e}_1' = \vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_4$, стереографската проекция $\Pi : \mathbb{S}^3 \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ се определя с равенствата $u^i = \frac{x^{i+1}}{1 - x^1}$, $i = 1, 2, 3$. За обратното изображение Π^{-1} имаме, че

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 - 1}{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + 1}, \\ x^i &= \frac{2u^{i-1}}{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + 1}, \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Чрез $\|\mathbf{u}\|$ ще означаваме дължината на вектора \mathbf{u} .

Нека γ е гладка крива върху сферата \mathbb{S}^3 с векторно-параметрично уравнение $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\sigma)$, $\sigma \in J$, където σ е естествен параметър. Диференцирането спрямо естествен параметър ще означаваме с $'$ и $\mathbf{l}'(\sigma) = \frac{d\mathbf{l}}{d\sigma}$. Подвижният репер $ltnb$ в произволна точка от γ върху \mathbb{S}^3 се определя

по следния начин: $\mathbf{t} = \mathbf{l}'$, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{l} + \mathbf{l}''}{\|\mathbf{l} + \mathbf{l}''\|}$ и \mathbf{b} е единственият вектор определен така, че $ltnb$ да бъде дясна ортонормирана координатна система. Функцията $\tilde{\kappa} = \|\mathbf{l} + \mathbf{l}''\| = \sqrt{\mathbf{l}''^2 - 1} > 0$ се нарича сферична кривина на γ . За $ltnb$ имаме следните формули за производните

$$(1) \quad \mathbf{l}' = \mathbf{t}, \quad \mathbf{t}' = -\mathbf{l} + \tilde{\kappa}\mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = -\tilde{\kappa}\mathbf{t} + \tilde{\tau}\mathbf{b}, \quad \mathbf{b}' = -\tilde{\tau}\mathbf{n},$$

където $\tilde{\tau}$ се нарича сферична торзия на γ ([7]). Функциите $\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}(\sigma)$ и $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\sigma)$ определят γ с точност до движение върху сферата \mathbb{S}^3 . Линиите върху \mathbb{S}^3 , за които $\tilde{\kappa} = 0$, са големите окръжности на сферата \mathbb{S}^3 , т.е. нейните геодезични линии. Линиите, за които $\tilde{\kappa} > 0$ и $\tilde{\tau} = 0$, се наричат Риманови окръжности и лежат на 2-сферите $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$. Линиите, за които $\tilde{\kappa} > 0$ и $\tilde{\tau} \neq 0$, ще наричаме правилни линии върху \mathbb{S}^3 .

2 Основни резултати

Теорема 2.1. Нека γ е правилна линия върху сферата $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, параметризирана спрямо естествен параметър σ , $\sigma \in J$, за която $\tilde{\chi} = a > 0$ и $\tilde{\tau} = b \neq 0$ са константи за всяко $\sigma \in J$. Тогава векторната функция $l = l(\sigma)$, $\sigma \in J$, определяща γ , има вида

$$(2) \quad l(\sigma) = (\cos \varphi \cos(\alpha\sigma), \cos \varphi \sin(\alpha\sigma), \sin \varphi \cos(\beta\sigma), \sin \varphi \sin(\beta\sigma)), \sigma \in J,$$

където

$$(3) \quad \begin{aligned} \alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi &= 1, \\ \alpha^2 &= \frac{1 + a^2 + b^2 - \sqrt{(1 + a^2 + b^2)^2 - 4b^2}}{2}, \quad \beta^2 = \frac{1 + a^2 + b^2 + \sqrt{(1 + a^2 + b^2)^2 - 4b^2}}{2}, \\ \beta > 1 > \alpha, \quad \cos^2 \varphi &= \frac{1 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2}. \end{aligned}$$

Доказателство. Заместваме $\tilde{\chi}$ и $\tilde{\tau}$ от (1) с константите $a > 0$ и $b \neq 0$, съответно, и ре-

шаваме матричното диференциално уравнение $X' = AX$, където $X = \begin{pmatrix} l \\ t \\ n \\ b \end{pmatrix}$ и $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix} \text{ с дадено начално условие } X(\sigma_0) = X_0, \sigma_0 \in J, \text{ където } X_0 = \begin{pmatrix} l_0 \\ t_0 \\ n_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

и $l_0 t_0 n_0 b_0$ е дясна ортонормирана координатна система в точка $l_0 = l(\sigma_0)$ от γ . Съгласно ([5], Sec. 8.16) имаме, че нормалната форма на матрицата A е

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ където } -\lambda_1^2, -\lambda_2^2 \text{ са неотрицателните двукратни собствени}$$

стойности на матрицата $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 - a^2 & 0 & ab \\ a & 0 & -a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & ab & 0 & -b^2 \end{pmatrix}$. Решавайки характерис-

тичното уравнение $\det(A^2 - \lambda E) = 0$ на матрицата A^2 , където E е единичната матрица,

намираме че $-\lambda_1^2 = -\frac{1 + a^2 + b^2 - \sqrt{(1 + a^2 + b^2)^2 - 4b^2}}{2}$ и

$-\lambda_2^2 = -\frac{1 + a^2 + b^2 + \sqrt{(1 + a^2 + b^2)^2 - 4b^2}}{2}$. Отгук, полагайки $\alpha^2 = \lambda_1^2$ и $\beta^2 = \lambda_2^2$ и изпол-

звайки, че $l^2 = l'^2 = 1$, получаваме (2) и (3). \square

Тъй като групата M_0 е подгрупа на Мьобиусовата група $\text{Möb}(3)$ в \mathbb{R}^3 , то орбити на M_0 са правите и окръжностите в \mathbb{R}^3 . Освен тях обаче има и други линии в \mathbb{R}^3 , орбити на тази група. Те се характеризират чрез следващата теорема.

Теорема 2.2. Нека s е правилна линия в \mathbb{R}^3 , различна от окръжност, параметризирана спрямо естествения параметър σ на сферичния ѝ първообраз γ при стереографската проекция

$\Pi : \mathbb{S}^3 \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, с векторно-параметрично уравнение $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\sigma)$, $\sigma \in J$, Евклидова кривина \varkappa и Евклидова торзия τ . Тогава, ако α и β са константи, удовлетворяващи условията $\beta > 1 > \alpha$ и $\alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi = 1$, то c е орбита на групата M_0 тогава и само тогава когато

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\mu} \varkappa^2(\sigma) - 1 + 2S_s(\sigma) &= (\alpha^2 - 1)(1 - \beta^2) \\ \varkappa\tau \cos \theta - \sqrt{\mu} \frac{d\varkappa}{d\sigma} \sin \theta &= \alpha\beta\mu\sqrt{(\alpha^2 - 1)(1 - \beta^2)}, \end{aligned}$$

където $\cos \theta = \frac{1}{\varkappa\sqrt{\mu(\alpha^2 - 1)(1 - \beta^2)}} \left(\varkappa^2 + \mu S_s(\sigma) + \frac{1}{8\mu} \left(\frac{d\mu}{d\sigma} \right)^2 - \sqrt{\mu} \right)$, $s = s(\sigma)$ е функцията на дължината на дъгата, $\mu = \frac{4}{(1 + \|\mathbf{u}\|^2)^2}$, а $S_s(\sigma)$ е производната на Schwarzian на функцията $s = s(\sigma)$.

Доказателство. Съгласно Теорема 4.2 и Теорема 4.3 ([4]), определящите инварианти на c относно групата M_0 , т.е. инвариантите определящи c с точност до преобразование от разглежданата група, са

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathfrak{K}(\sigma) &= \frac{1}{\mu} \varkappa^2 - 1 + 2S_s(\sigma) \\ \mathfrak{T}(\sigma) &= \frac{1}{\mu\sqrt{\mathfrak{K}}} \left(\varkappa\tau \cos \theta - \sqrt{\mu} \frac{d\varkappa}{d\sigma} \sin \theta \right), \end{aligned}$$

където $\cos \theta = \frac{1}{\varkappa\sqrt{\mu\mathfrak{K}}} \left(\varkappa^2 + \mu S_s(\sigma) + \frac{1}{8\mu} \left(\frac{d\mu}{d\sigma} \right)^2 - \sqrt{\mu} \right)$. Имайки предвид Теорема 3.1 от [4], функциите (5) са съответно квадратът на сферичната кривина $\tilde{\varkappa}$ и сферичната торзия $\tilde{\tau}$ на линията γ . Полагаме $\mathfrak{K}(\sigma) = a^2$ и $\mathfrak{T}(\sigma) = b$, където $a > 0$ и $b \neq 0$ са константи. Тогава $\tilde{\varkappa} = a$, $\tilde{\tau} = b$ и от Теорема 2.1 намираме, че векторната функция $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\sigma)$, определяща γ , има вида (2). От (3) намираме, че $a^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2\beta^2 - 1 = (\alpha^2 - 1)(1 - \beta^2)$ и $b^2 = \alpha^2\beta^2$, с което теоремата е доказана. \square

Прилагайки стереографската проекция Π върху линията $\gamma \in \mathbb{S}$ с уравнение (2) при дадена стойност на $\varphi \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, намираме еднопараметричното семейство от линии $c_{\alpha,\beta}$, орбити на групата M_0 , с уравнения

$$\mathbf{u}(\sigma) = \left\{ \frac{\cos \varphi \sin(\alpha\sigma)}{1 - \cos \varphi \cos(\alpha\sigma)}, \frac{\sin \varphi \cos(\beta\sigma)}{1 - \cos \varphi \cos(\alpha\sigma)}, \frac{\sin \varphi \sin(\beta\sigma)}{1 - \cos \varphi \cos(\alpha\sigma)} \right\}, \quad 1 - \cos \varphi \cos(\alpha\sigma) \neq 0,$$

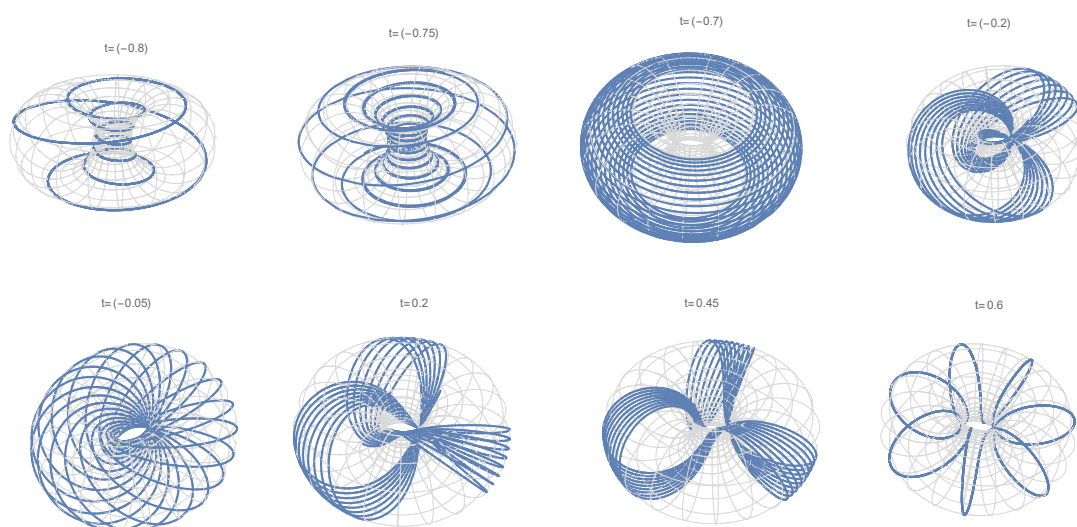
$\sigma \in J$, където $\alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi = 1$. Тези линии лежат на повърхнина, наречена тор, с уравнение в неявен вид

$$\left(\frac{1}{\sin \varphi} - \sqrt{y^2 + z^2} \right)^2 + x^2 = \cot^2 \varphi.$$

Пример 1. Нека $\mathfrak{K}(\sigma) = a^2 = \text{const}$, $a > 0$, $\mathfrak{T}(\sigma) = b = \text{const} \neq 0$ и $a^2 + b^2 = 1$. Тогава $\alpha^2 + \beta^2 = 1 + a^2 + b^2 = 2$. Полагаме $\alpha = t - \sqrt{1-t^2}$ и $\beta = t + \sqrt{1-t^2}$, $-1 < t < 1$, и получаваме еднопараметричното семейство от линии с уравнения

$$\mathbf{u}_t(\sigma) = \left\{ \frac{\sin(\sigma(t - \sqrt{1-t^2}))}{\sqrt{2} - \cos(\sigma(t - \sqrt{1-t^2}))}, \frac{\cos(\sigma(t + \sqrt{1-t^2}))}{\sqrt{2} - \cos(\sigma(t - \sqrt{1-t^2}))}, \frac{\sin(\sigma(t + \sqrt{1-t^2}))}{\sqrt{2} - \cos(\sigma(t - \sqrt{1-t^2}))} \right\},$$

изобразени на Фигура 1.



Фигура 1: Еднопараметрично семейство от криви, лежащи на тор, орбити на групата M_0

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Berger M., Geometry I, Universitext, ISBN 978-3-540-93815-6, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.
- [2] Encheva R. and Georgiev G., Similar Frenet Curves, *Result. Math.*, **55** no. 3-4 (2009) 359-372.
- [3] Encheva, R.P., Möbius transformations induced by rotations on the three-sphere, MATTEX 2016, *Conference proceedings*, vol. 1 (2016) 43-50.
- [4] Encheva, R.P., Recovering space curves by Möbius invariants, *Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen*, vol. XX C (2019) 21-35.
- [5] Greub W., Linear Algebra, Third Edition, ISBN 978-1-4684-9446-4, Springer-Verlag New York, 1975.
- [6] Künel W., Differential geometry: Curves-Surfaces-Manifolds, Second Edition, ISBN: 0-8218-3988-8, AMS, 2006.
- [7] Tazawa Y., Curves and surfaces in the three dimensional sphere placed in the space of quaternions, *Innovation in mathematics, Transactions on Engineering Sciences*, vol. 15 (1997) 459-466.

RELATIONS BETWEEN THREE TRANSFORMATIONS IN THE PLANE OF AN ARBITRARY QUADRILATERAL

VESELIN N. NENKOV, YORDAN N. IVANOV, STANISLAV T. STEFANOV,
НАИМ М. НАИМОВ

ABSTRACT: *In the paper there are considered important connections between three newly discovered mappings (transformations) in the plane of an arbitrary quadrilateral. The mappings will be used in further papers (based on our already done explorations) for studying important qualities of both the pentagon and hexagon, related to the emplacement of the pedal circles of an arbitrary point in their plane, with respect to the triangles, formed by their sides and diagonals.*

KEYWORDS: *Quadrilateral, Transformations, Pedal circle, Relations between transformations.*

ВРЪЗКИ МЕЖДУ ТРИ ИЗОБРАЖЕНИЯ В РАВНИНАТА НА ПРОИЗВОЛЕН ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

ВЕСЕЛИН Н. НЕНКОВ, ЙОРДАН Н. ИВАНОВ, СТАНИСЛАВ Т. СТЕФАНОВ,
ХАИМ М. ХАИМОВ

АБСТРАКТ: *В статията се разглеждат интересните връзки между три универсални изображения в равнината на произволен четириъгълник. С помощта на изображенията, в предстоящи статии (на базата на проведени вече наши изследвания) ще бъдат изложени важни свойства и на петоъгълника, и шестоъгълника, свързани с разположението на педалните окръжности на произволна точка в равнината им, спрямо триъгълниците, определени от техните страни и диагонали.*

КЛЮЧОВИ ДУМИ: *четириъгълник, изображения, педална окръжност, връзки между изображения.*

1 Въведение

Неотдавна бяха открити три универсални преобразования в равнината на произволен четириъгълник. Първото, наречено педалност спрямо четириъгълник, бе разгледано в [3]. Второто, наречено инверсна изогоналност, бе разгледано в [1]. На третото, наречено изогонална спрегнатост (или перфектна изогоналност), бяха посветени статиите: [4], [2]. Тези три изображения съставляват важна част от геометрията на четириъгълника. Основен фактор (аргумент) за това е, че при тях едни забележителни точки в (равнината на) четириъгълника се изобразяват в други. Благодарение на това, от свойства на едни забележителни точки се извеждат свойства на други. С помощта на изображенията се доказва лесно колинеарността на редица тройки забележителни точки в четириъгълника и принадлежността на ред четворки от тях на една окръжност. Тук ще разгледаме някои важни връзки между въпросните три изображения.

2 Дефиниции и някои свойства на разглежданите изображения

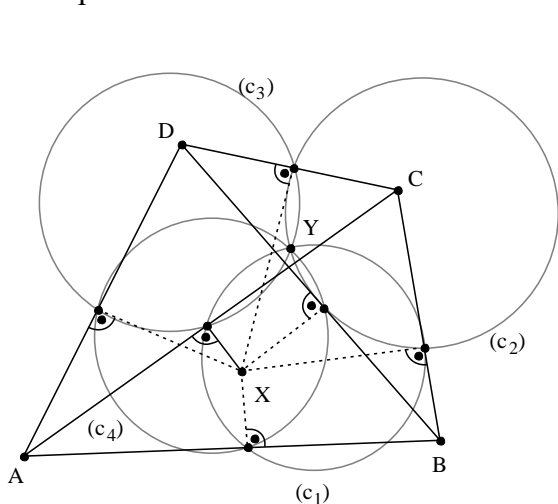
Предварително, нека припомним дефинициите и тези свойства на изображенията, които ще ни послужат в изложението по-нататък:

1. Да припомним, че педална окръжност на произволна точка в равнината на произволен триъгълник, спрямо последния, наричаме окръжността, определена от ортогоналните проекции на точката върху правите, съдържащи страните му. Първото изображение - педалност в четириъгълника се дефинира въз основа на следното твърдение, доказано в [3]:

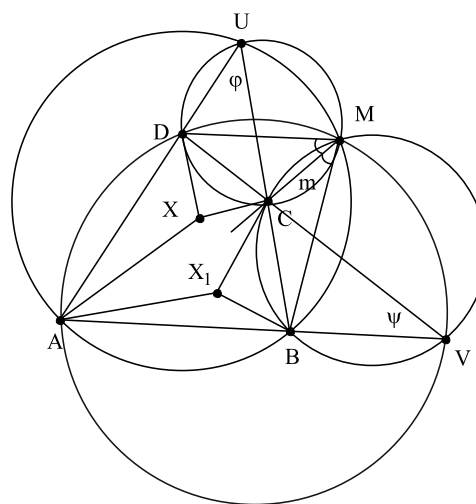
Теорема 1. Педалните окръжности на произволна точка X в равнината на произволен четириъгълник $ABCD$, нележаща на една окръжност с някои три от върховете му, спрямо триъгълниците ABC , BCD , CDA и DAB , определени от страните и диагоналите на четириъгълника, минават през една точка Y (фиг.1).

Точката Y се нарича педален образ на точката X спрямо четириъгълника $ABCD$.

Изображението, което на точката X съпоставя педалния ѝ образ, наричаме педалност в четириъгълника.



Фиг. 1

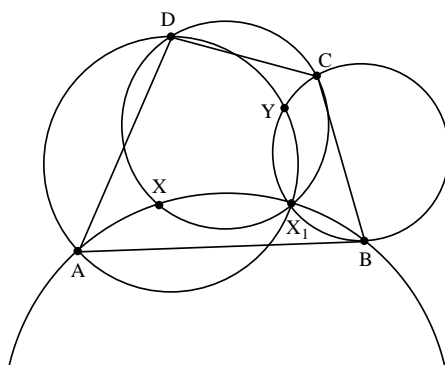


Фиг. 2

2. Второто изображение - инверсна изогоналност - е свързано с точката на Микел на четириъгълника. Ако в четириъгълника $ABCD$ правите AD и BC се пресичат в точка U (фиг. 2), а правите AB и DC - в точка V , доказва се, че описаните окръжности около триъгълниците ABU , BCV , CDU и DAV се пресичат в една точка M . Тя се нарича точка на Микел на четириъгълника. Композицията от симетрия спрямо ъглополовящата на ъгъл BMD и инверсия с полюс M и степен $r^2 = BM \cdot DM$ се нарича инверсна изогоналност спрямо четириъгълника $ABCD$. Съществува достатъчно условие, две точки в равнината на четириъгълника да са съответни при това изображение. Преди да го формулираме ще припомним следното помощно:

Определение 1. Две точки в равнината наричаме изогонални спрямо дадена отсечка, ако те лежат на една окръжност с краищата ѝ.

Теорема 2. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник и X и Y са две точки в него, за които съществува точка X_1 , изогонална на X едновременно спрямо страните AB и CD и в същото време - изогонална на Y едновременно спрямо страните AD и BC . Тогава точките X и Y са инверсно изогонални спрямо четириъгълника $ABCD$ (фиг. 3).



Фиг. 3

Едно важно свойство на инверсно изогоналните точки, което ще използваме тук, е следното:

Теорема 3. Ако X и X_1 са две инверсно изогонални точки в изпъкналия четириъгълник $ABCD$ и $\angle AUB = \varphi$, а $\angle AVD = \psi$, то са изпълнени равенствата (фиг.2):

$$\angle AX_1B = \angle DXC + \varphi, \angle AXD = \angle BX_1C + \psi.$$

3. Третото изображение - изогонална спрегнатост спрямо четириъгълник е аналог на известното изображение изогонална спрегнатост спрямо триъгълник. Да припомним, че две прави се наричат изогонални спрямо даден ъгъл, ако сключват равни ъгли с ъглополовящата му. Две точки в (равнината на) четириъгълника се наричат изогонално спрегнати спрямо него, ако лежат на изогонални прави спрямо всеки от ъглите му. Едно необходимо и достатъчно условие, една точка в изпъкнал четириъгълник да има изогонално спрегната спрямо него точка, се съдържа в следната теорема, доказана в [4].

Теорема 4. Една точка X в произволен изпъкнал четириъгълник има изогонално спрегната спрямо него точка Y , тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството: $\angle AXB + \angle CXD = 180^\circ$ (фиг. 4).

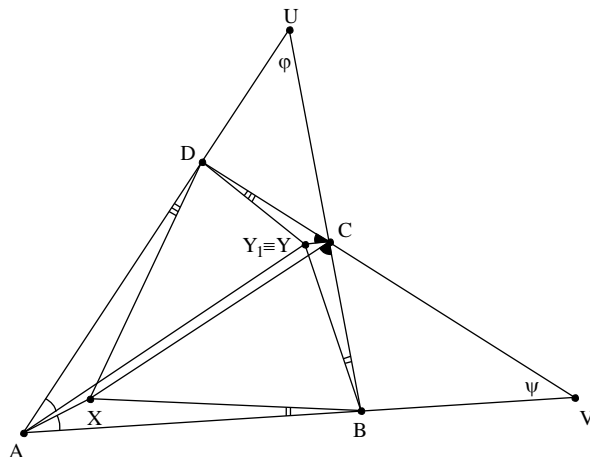
Вече можем да пристъпим към разглеждането на връзките между въпросните изображения.

3 Връзка между изображенията инверсна изогоналност и изогонална спрегнатост

Ще разгледаме първо една важна връзка между изображенията инверсна изогоналност и изогонална спрегнатост спрямо четириъгълник. Както следва от току-що формулираната теорема 4, изображението изогонална спрегнатост е дефинирано само за тези точки X в четириъгълника $ABCD$, за които е изпълнено равенството $\angle AXB + \angle CXD = 180^\circ$. Ако точката X лежи извън четириъгълника, това условие се заменя с условията: $\angle AXD = \angle BXC$ и $\angle AXB = \angle DXC$. Нека Ω е множеството от точките X , за които са изпълнени съответните условия, т.е. това е дефиниционното множество на изогоналната спрегнатост. Както ще видим, изображението инверсна изогоналност, което е дефинирано в цялата равнина, съвпада с изображението изогонална спрегнатост в дефиниционното му множество Ω . (Казано по друг начин, инверсната изогоналност е разпространение на изогоналната спрегнатост от дефиниционното ѝ множество - в цялата равнина.)

Теорема 5. Ако точката X има изогонално спрегната спрямо четириъгълника $ABCD$ точка Y , т.е. точките X и Y са от дефиниционното множество на изогоналната спрегнатост, то точката Y е и инверсно изогонална на X спрямо същия четириъгълник, т.е. образът Y на X при изогоналната спрегнатост съвпада с образа ѝ при инверсната изогоналност.

Доказателство: Въвеждаме означенията: $AD \cap BC = U$, $AB \cap DC = V$, $\sphericalangle AUB = \varphi$, $\sphericalangle AVD = \psi$ (фиг. 4).



Фиг. 4

За определеност ще предполагаме, че изогонално спрегнатите точки X и Y са вътрешни за четириъгълника $ABCD$. Първо ще покажем, че за тях са изпълнени равенствата:

$$(1) \quad \sphericalangle AYB = \sphericalangle DXC + \varphi, \quad \sphericalangle AXD = \sphericalangle BYC + \psi.$$

Щом точките X и Y са изогонално спрегнати спрямо четириъгълника $ABCD$, то те лежат на изогонални прави спрямо всеки от ъглите му - DAB и ABC . Оттук имаме: $\sphericalangle YAB = \sphericalangle XAD$ и $\sphericalangle YBA = \sphericalangle XBC$. С помощта на тези равенства получаваме последователно:

$$\begin{aligned} \sphericalangle AYB &= 180^\circ - \sphericalangle YAB - \sphericalangle YBA = 180^\circ - \sphericalangle XAD - \sphericalangle XBC = \\ &= 180^\circ - (\sphericalangle BAD - \sphericalangle XAB) - (\sphericalangle ABC - \sphericalangle XBA) = \\ &= [180^\circ - (\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC)] + (\sphericalangle XAB + \sphericalangle XBA) = \sphericalangle AUB + (180^\circ - \sphericalangle AXB), \end{aligned}$$

т.е.:

$$(2) \quad \sphericalangle AYB = \varphi + (180^\circ - \sphericalangle AXB)$$

Понеже точката X има изогонално спрегната спрямо четириъгълника $ABCD$ точка (точката Y - по условие) и е вътрешна за него, то съгласно теорема 4 за нея е изпълнено равенството: $\sphericalangle AXB + \sphericalangle DXC = 180^\circ$. Тогава от равенство (2) получаваме: $\sphericalangle AYB = \varphi + (180^\circ - \sphericalangle AXB) = \varphi + \sphericalangle DXC$, което е първото от равенства (1). Аналогично се доказва и второто равенство.

Да означим сега с Y_1 инверсно изогоналната точка на X спрямо четириъгълника $ABCD$.

Съгласно цитираната по-горе теорема 3 имаме:

$$(3) \quad \sphericalangle AY_1B = \sphericalangle DXC + \varphi, \quad \sphericalangle AXD = \sphericalangle BY_1C + \psi.$$

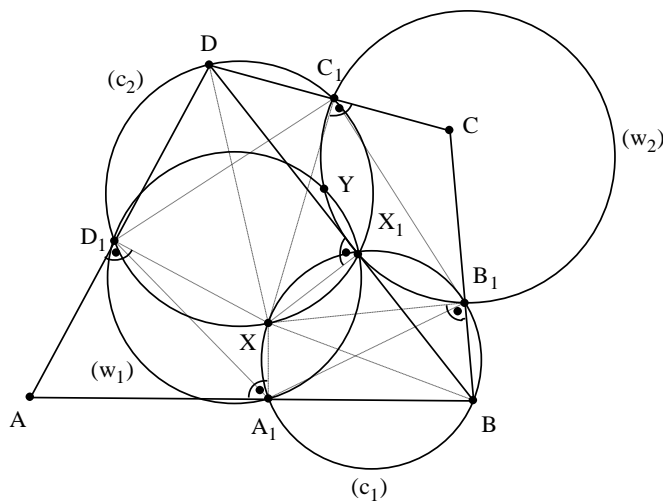
От равенства (1) и (3) следват равенствата: $\angle AYB = \angle AY_1B$ и $\angle BYC = \angle BY_1C$. Можем да заключим, че точките Y и Y_1 лежат на дъга от окръжност с краища точките A и B и на дъга от окръжност с краища B и C . Освен точката B , двете дъги могат да имат само още една обща точка, следователно точките Y и Y_1 съвпадат. Получихме, че инверсно изогоналната точка Y_1 , на точката X съвпада с изогонално спрегнатата ѝ точка Y спрямо разглеждания четириъгълник, т.е. че точката Y е и инверсно изогонална на X спрямо $ABCD$.

4 Връзка между изображенията педалност и инверсна изогоналност в четириъгълник

Съществува важна връзка и между изображенията педалност и инверсна изогоналност в четириъгълник:

Теорема 6. Нека X е произволна точка в равнината на изпъкнал четириъгълник $ABCD$, нележаща на една окръжност с някои три от върховете му и различна от точката му на Микел. Нека още A_1, B_1, C_1 и D_1 са ортогоналните проекции на точката X съответно върху правите AB, BC, CD и DA . Педалният образ Y на точката X спрямо четириъгълника $ABCD$ съвпада с инверсно изогоналната точка на X спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$.

Доказателство: Тъй като точката X е различна от точката на Микел на четириъгълника $ABCD$, то четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$ не се изражда в отсечка. Нека X_1 е ортогоналната проекция на точката X върху диагонала BD . (фиг. 5)



Фиг. 5

Окръжността (c_1) с диаметър BX съдържа точките A_1, X_1 и B_1 . Следователно точките X и X_1 лежат на окръжност, минаваща през точките A_1 и B_1 . Това означава, че те са изогонални спрямо страната A_1B_1 на четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$. Аналогично се доказва,

че точките X и X_1 лежат и на окръжност (c_2), минаваща през точките C_1 и D_1 , т.е. че те са изогонални и спрямо страната му C_1D_1 .

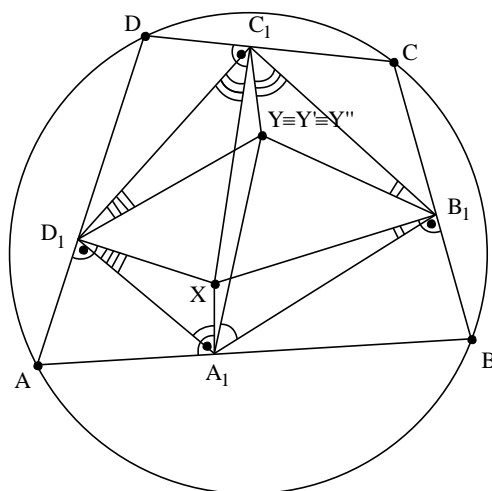
Педалният образ Y на точката X спрямо четириъгълника $ABCD$ лежи на педалната окръжност на X спрямо $\triangle ABD$, т.е. на окръжността (w_1), определена от точките D_1 , A_1 и X_1 (по определение - виж по-горе). Следователно точките Y и X_1 лежат на окръжност, минаваща през точките A_1 и D_1 . Това означава, че точките Y и X_1 са изогонални спрямо страната A_1D_1 на четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$. Аналогично се доказва, че те лежат и на окръжност (w_2), минаваща през точките B_1 и C_1 , т.е. че те са изогонални и спрямо страната му B_1C_1 . Получихме, че за точките X и Y , разглеждани спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$, съществува точка X_1 такава, че X и X_1 са изогонални едновременно спрямо страните му A_1B_1 и C_1D_1 , а Y и X_1 са изогонални едновременно спрямо страните му A_1D_1 и B_1C_1 . Можем да заключим, че точките X и Y са инверсно изогонални спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$ (съгласно цитираната теорема 2). Така доказахме, че педалният образ Y на точката X спрямо четириъгълника $ABCD$ съвпада с инверсно изогоналната точка на X спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$.

5 Връзка между изображенията педалност и изогонална спрегнатост във вписан четириъгълник

Ще разгледаме и една важна връзка между изображенията педалност и изогонална спрегнатост във вписан четириъгълник.

Теорема 7. Нека X е произволна точка във вписания четириъгълник $ABCD$, нележаща на описаната му окръжност и различна от точката му на Микел, а Y е педалният ѝ образ спрямо него. Ако A_1 , B_1 , C_1 и D_1 са ортогоналните проекции на точката X съответно върху правите AB , BC , CD и DA , то точките X и Y са не само инверсно изогонални, но и изогонално спрегнати спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$.

Доказателство: Педалният образ Y на точката X спрямо четириъгълника $ABCD$ съвпада с инверсно изогоналната ѝ точка Y' спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$ (съгласно току-що доказаната теорема 6), т.е. $Y \equiv Y'$ (фиг. 6). От друга страна, понеже четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, то $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180^\circ$. Тогава от четириъгълниците AA_1XD_1 и XB_1CC_1 , лесно получаваме, че е изпълнено равенството: $\sphericalangle A_1XD_1 + \sphericalangle B_1XC_1 = 180^\circ$. От цитираната по-горе теорема 4 следва, че точката X има изогонално спрегната спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$ точка Y'' . Но изогонално спрегнатата точка Y'' на точката X спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$ е и инверсно изогонална на X спрямо този четириъгълник, т.е. $Y'' \equiv Y'$ (съгласно теорема 5). Получихме, че $Y \equiv Y'$ и $Y' \equiv Y''$, следователно $Y \equiv Y''$.



Фиг. 6

Така доказахме, че педалният образ Y на точката X спрямо четириъгълника $ABCD$ съвпада с изогонално спрегнатата ѝ точка Y' спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$, т.е. че точките X и Y са и изогонално спрегнати (освен, че са инверсно изогонални - както следва от теорема б) спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$.

Следствие. Нека X е произволна точка във вписания четириъгълник $ABCD$, нележаща на описаната му окръжност и различна от точката му на Микел, а Y е педалният ѝ образ спрямо него. Ако A_1, B_1, C_1 и D_1 са ортогоналните проекции на точката X съответно върху страните AB, BC, CD и DA , то са изпълнени равенствата (фиг.6):

$$\begin{aligned} \angle XA_1D_1 = \angle YA_1B_1, \quad \angle XB_1A_1 = \angle YB_1C_1, \quad \angle XC_1D_1 = \angle YC_1B_1 \quad \text{и} \\ \angle A_1D_1X = \angle YD_1C_1. \end{aligned}$$

Доказателство: Съгласно доказаната теорема точките X и Y са изогонално спрегнати спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$. Тогава доказваните равенства са изпълнени според определенията на изображението изогонална спрегнатост спрямо четириъгълника и изогоналност на прави спрямо ъгъл (виж по-горе).

6 Заключение

Разгледаните връзки между трите изображения: педалност, инверсна изогоналност и изогонална спрегнатост спрямо четириъгълник представляват интерес сами по себе си, но по-същественото е, че те служат за получаването на интересни свойства на петоъгълника и шестоъгълника, свързани с разположението на педалните окръжности на произволна в равнината на същите точка, спрямо триъгълниците, определени от техните страни и диагонали. Необходимите изследвания са проведени, но на тези свойства (резултати) ще се спрем в следващи статии.

Работата на Станислав Стефанов е подкрепена от Министерството на образованието и науката по Националната програма за научни изследвания „Млади

учени и постдокторанти“, одобрена с РМС № 577 от 17.08.2018 г. / *The work of Stanislav Stefanov is supported by the Bulgarian Ministry of Education and Science under the National Program for Research „Young Scientists and Postdoctoral Students“*, approved with RMS № 577/ 17.08.2018.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Ненков, В., Стефанов Ст., Хаимов Х. Геометрия на четириъгълника, точка на Микел, инверсна изогоналност [Geometry of the quadrilateral, Miquel point, inversion], Математика и информатика, 1, 2017, 81-93.
- [2] Ненков, В., Стефанов Ст., Хаимов Х. Перфектна изогоналност в четириъгълник [Perfect isogonality in quadrilateral], Математика и информатика, София, 2, 2018, 175-189.
- [3] Хаимов, Х. Едно твърдение за конкурентност на педални окръжности на точка в равнината на четириъгълник [A statement for concurrence of pedal circles of a point in the plane of a quadrilateral], Математика и информатика, 1, 2019, 77-91.
- [4] Alexandrov, Pl., H. Haimov. Geometry of the quadrangle. Isogonal conjugated points. International Congress Massee 2003, Borovets, Bulgaria. Proceedings, Borovets, 2003, 141-146.

THE THERMODYNAMIC MODELS FOR SOLUTION BEHAVIOR AND SOLID-LIQUID EQUILIBRIUM IN RUBIDIUM BINARY SYSTEMS FROM LOW TO VERY HIGH CONCENTRATION AT 25°C

STANISLAV A. DONCHEV¹, TSVETAN V. TSENOV¹, CHRISTOMIR I. CHRISTOV¹

ABSTRACT: In this study we developed new thermodynamic models for solution behavior and solid-liquid equilibrium in eight (8) rubidium binary systems ($RbF-H_2O$, $RbCl-H_2O$, $RbBr-H_2O$, $RbI-H_2O$, $RbNO_3-H_2O$, $Rb_2SO_4-H_2O$, $Rb_2SeO_4-H_2O$ and $Rb(CH_3COO)-H_2O$) from low to very high concentration at 25°C. Models are developed on the basis of Pitzer ion interactions approach. To parameterize models for binary systems we used all available experimental osmotic coefficients (φ) data for whole concentration range of solutions, and up to saturation point. To construct the models we used different versions of standard molality-based Pitzer approach. It was established that for $RbF-H_2O$, $RbNO_3-H_2O$ and $Rb(CH_3COO)-H_2O$ systems application of extended approach with 4 parameters (β^0 , β^1 , β^2 and C^φ) and variation of α_1 and α_2 terms in fundamental Pitzer equations leads to the lowest values of standard model-experiment deviation. The predictions of new developed here models are in excellent agreement with experimental osmotic coefficients data, and with recommendations on the mean activity coefficients (γ_{\pm}) from low to very high concentration. The values of thermodynamic solubility product (as $\ln K_{sp}^0$) of seven solid phases precipitating from saturated binary solutions ($RbF(cr)$, $RbCl(cr)$, $RbBr(cr)$, $RbI(cr)$, $RbNO_3(cr)$, $Rb_2SO_4(cr)$, and $Rb_2SeO_4(cr)$) have been determined on the basis of evaluated binary parameters and using experimental $m(sat)$ solubility data.

KEYWORDS: Thermodynamic model; Rubidium binary systems; Chemical and geochemical computer modeling; Pitzer approach; Activity in electrolyte solutions; Solid-liquid equilibrium

ТЕРМОДИНАМИЧНИ МОДЕЛИ ЗА ПОВЕДЕНИЕТО НА РАЗТВОРИТЕ И ТВЪРДО-ТЕЧНОТО ФАЗОВО РАВНОВЕСИЕ В РУБИДИЕВИ БИНАРНИ СИСТЕМИ ОТ НИСКИ ДО МНОГО ВИСОКИ КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИ 25°C

СТАНИСЛАВ А. ДОНЧЕВ, ЦВЕТАН В. ЦЕНОВ, ХРИСТОМИР Й. ХРИСТОВ

АБСТРАКТ: В това изследване са разработени и валидирани термодинамични модели за поведението на разтворите и твърдо-течното фазово равновесие в осем (8) рубидиеви бинарни системи ($RbF-H_2O$, $RbCl-H_2O$, $RbBr-H_2O$, $RbI-H_2O$, $RbNO_3-H_2O$, $Rb_2SO_4-H_2O$, $Rb_2SeO_4-H_2O$, и $Rb(CH_3COO)-H_2O$) от ниски до много високи концентрации при 25°C. Моделите са разработени на базата на подхода на Питцер за междуионно взаимодействие. При параметризиране на моделите за бинарните системи са използвани всички налични експериментални данни за осмотичните коефициенти (φ) за целия концентрационен интервал на съществуване на разтворите. При изграждане на моделите ние използвахме различни версии на стандартния подход Питцер. Установено е, че за изследваните $RbF-H_2O$, $RbNO_3-H_2O$ и $Rb(CH_3COO)-H_2O$ системи прилагането на подход със 4 параметъра (β^0 , β^1 , β^2 и C^φ) и варирайки в стойностите на α_1 и α_2 във фундаменталните уравнения на Питцер, води до най-ниски стойности на стандартното отклонение модел-експеримент. Предвижданията на ново-разработените в това изследване модели са в отлично съответствие с експерименталните данни за осмотичните коефициенти, и препоръчаните стойности за коефициентите на активност (γ_{\pm}), както при ниски, така и при много високи концентрации. На базата на определените моделни параметри и експериментални данни за концентрацията

¹ Dept. Chemistry, Faculty of Natural Sciences, Shumen University "Konstantin Preslavsky"

на наситените бинерни разтвори са определени стойностите на термодинамичното произведение на разтворимост (като $\ln K_{sp}^o$) на кристализиращите в изследваните системи рубидиеви твърди фази, а именно: $RbF(cr)$, $RbCl(cr)$, $RbBr(cr)$, $RbI(cr)$, $RbNO_3(cr)$, $Rb_2SO_4(cr)$, и $Rb_2SeO_4(cr)$.

КЛЮЧОВИ ДУМИ: Термодинамични модели; Рубидиеви бинерни системи; Химично и геохимично компютърно моделиране; Подход на Питцер; Активност на електролитни разтвори; Твърдо-течно фазово равновесие.

1 Въведение

Компютърни термодинамични модели, които предвиждат поведението на разтворите и твърдо-течно-газ равновесието с точност, близка до експерименталната имат широко приложение. Те могат да симулират комплексните изменения протичащи в природата, и могат точно да дублират условията на протичане на тези процеси. Провеждането на подобно лабораторно изследване е много труден и скъп процес. Ето защо, подобни модели биха могли да бъдат мощно предвиждащо и интерпретиращо средство при изучаването на геохимията на природните води и минералните депозити, при решаването на екологични проблеми, и при оптимизирането на индустриални процеси. Разработването на точни и надеждни модели за природни системи, отчитайки тяхната комплексност и динамика, е труден и предизвикателен процес, изискващ сериозни познания в много области на природознанието (химията, химичното равновесие, физиката и физикохимията, и термодинамиката) и компютърните науки, опит, и много време. Природните системи са отворени системи намиращи се постоянно в динамично състояние, и техните най - важни характеристики са комплексност, чувствителност и подвижност. Поради това, параметризацията на всеобхватен модел за природна система изисква използването в единен комплекс на всички достъпни експериментални лабораторни и полеви данни от всякакъв тип. Този тип модели трябва да отчитат всички възможни течни и твърди компоненти и равновесни реакции, и тяхната динамика, т.е. вариране с температурата, налягането, рН, състав на разтворите, и стехиометрия на твърдите фази.

Подходът на специфично взаимодействие за описване свойствата на електролитни разтвори, въведен от Кенет Питцер (Pitzer 1973, 1991) е едно изключително научно откритие във физикохимията, което значително ускори конструирането на точни термодинамични модели. Малкият брой моделни параметри, отчитащи йонните взаимодействия дори и във високо-концентрирани многокомпонентни разтвори и сравнително не-сложните фундаментални уравнения, позволяващи сравнително лесно компютризиране, допринасят за това подхода на Питцер да стане най-широко използвания във термодинамичните изследвания, и в научната литература. Поради това, че в модела описването на течната фаза се базира на свободната енергия на разтвора, всички фундаментални уравнения за активностните свойства са съвместими. Това позволява различен тип данни (активност на водата, осмотични коефициенти, Е.Д.С., данни по разтворимостта и др.) да бъдат използвани при определянето на моделните параметри и изчислението на други термодинамични функции. Параметризирането на моделите интегрира всички достъпни експериментални данни в единична функционална форма, която може да бъде екстраполирана за симулирането поведението на широк спектър от природни и индустриални комплексни системи при необходимите за изследването условия. Валидирането на модела включва сравнение между моделните предвиждания и данни, които не са използвани при подбора на моделните параметри (Christov, 1994, 2004, 2005; 2007; 2009ab; Christov and Moller 2004ab).

2 Актуалност и значимост на научната проблематика. Програми за геохимично съхранение на ядрени отпадъци

Разработването на програмите за изграждане на геохимични хранилища за ядрени отпадъци изисква предварително окомплектоване на база от термодинамични данни (TDDb/ТДБД), позволяваща коректно да бъдат описани свойствата на разтворите и характеристиките на кристализиращите твърди фази в многокомпонентните флуиди, както и възможните изменения в твърдо-течното фазово равновесие за период от хиляди (> 40 К) години. Най-мощните ТДБД за геохимично складиране на ядрени отпадъци, разработени до сега са: US Yucca Mountain TDDb (виж Sandia National Laboratories (2005, 2007) в литературата), THEREDA (Thermodynamic Reference DAtabase -Germany-EU – виж Altmaier et al., 2011a,b в литературата), AIFT-NWMO (Canada) (Christov et al., 2012), ANDRA (Fr) (Lach et al., 2018; Guignot et al., 2019; Lassin et al., 2020). Всички те са изцяло изградени на базата на подхода на К.С. Питцер, като почти всички моделни параметри са взети от литературата, след предварително оценка на тяхната коректност. Тези ТДБД включват модели за поведението на разтворите (т.е. параметри на Питцер) и термодинамични характеристики на кристализиращите от тях твърди фази 1) в разширената морска система, 2) за системи на преходните метали, 3) за циментови твърди фази, 4) силиция и алуминия, и 5) цезиеви рубидиеви, селенатни и нитратни системи. За съжаление, голяма част от докладваните в литературата модели за бинарните системи са концентрационно ограничени, и не могат да опишат коректно характеристиките на разтворите до модалностите на насищане и пресищане, и на кристализиращите твърди фази за целия концентрационен интервал.

Познаването на термодинамичните характеристики на тежките алкални и алкалоземни метални йони в концентрирани разтвори на морската сол е от съществено значение за моделиране на транспортирането на радиоактивни продукти в дълготрайни хранилища за безопасно складиране на радиоактивни отпадъци в твърди солеви форми. Цезиевите и рубидиеви системи играят много важна роля при разработването на правителствените програми за изграждане на подземно хранилище за ядрени отпадъци. Сред по-разпространените продукти на отработено ядрено гориво са радионуклидите ^{87}Rb , ^{137}Cs с период на полуразпад съответно $4,9 \times 10^{10}$ и 30.17 години. Те са критични при проектирането на хранилището поради интензивното гама излъчване и топлината, генерирана от процеса на разпад, както и високата разтворимост на техните халогенидни твърди фази. Корозията на резервоарите за отработено гориво на базата на стомана може да бъде причинена от техния контакт с вода и формирането на течни аерозоли на стоманената повърхност. Това би довело до образуването на корозивни продукти, които ускоряват процеса на корозия и образуването на пукнатини, които могат да доведат до изтичане на радиоактивни продукти. Международните концепции за хранилища на ядрени отпадъци се основават главно на геоложки бариери, съставени от морска сол (THEREDA), глинеста скала (ANDRA) или кристална скала (Yucca Mountain TDDb). Морската каменна сол има ниска пропускливост за газове и течности при естествени условия на изхвърляне и висока топлопроводимост. От друга страна, високо-пластичните свойства на солената скала позволяват уплътняването на кухините, останали след окончателното затваряне на хранилището. В предишна наша работа са обобщени резултатите от нашите моделни изследвания за 8 бинерни цезиеви системи (Donchev et al., 2020). В тази работа са валидирани екстремално добре някои от разработените от проф. Христов модели за рубидиеви бинерни системи, и са предложени нови модели за редица рубидиеви бинерни системи.

Проведените в тази работа изследвания са част от мащабен проект върху създаването на всеобхватни рН-концентрация-температура - вариращи, добре валидирани и термодинамично обосновани модели за стабилно и мета-стабилно фазово равновесие в бинерни и многокомпонентни системи със голяма значимост за разработването на стратегиите и програмите за геохимично съхранение на ядрени отпадъци. Трябва да се отбележи, че по-вече от 200 модела, разработени от един от авторите на тази работа (С. Christov), докладвани в по-вече от 30 научни труда (Christov, 1994,1998, 2000, 2001ab, 2002ab, 2009a,b; Christov et al., 2006, 2007) са директно внедрени (без изменения) в Yucca Mountain TDDDB (Sandia National Laboratories (2005, 2007)), THEREDA (Altmaier et al., 2011ab), NWMO (CA) (Christov et al., 2012), и ANDRA (Fr) (виж Lach et al., 2018; Guignot et al., 2019, Lassin et al., 2020). Обект на изследване в тази работа са всички бинерни рубидиеви разтвори за които са достъпни експериментални данни за активностите, а именно RbF-H₂O, RbCl-H₂O, RbBr- H₂O, RbI-H₂O, RbNO₃-H₂O, Rb₂SO₄- H₂O, Rb₂SeO₄-H₂O, и Rb(CH₃COO)-H₂O при 25°C. Моделите са разработени на базата на подхода на Питцер за междуионно взаимодействие, като са използвани всички налични експериментални данни за целия концентрационен интервал на съществуване на разтворите. Моделите са конструирани и с прилагането на различни подходи за параметризиране с цел достигането на максимална точност и отлично съответствие със достъпните експериментални данни. Разработените и валидираните модели разглеждат кристализацията на твърди фази от наситените бинерни и тройни разтвори, т.е. твърдото равновесие, и по този начин значително разширяват максималната концентрация на приложимост на моделите спрямо тези докладвани в литературата (до 22.4 mol.kg⁻¹ за RbF-H₂O). На базата на определените моделни параметри и експериментални данни за концентрацията на наситените бинерни разтвори са определени стойностите на термодинамично произведение на разтворимост (ln K^o_{sp}) на кристализиращите в изследваните системи рубидиеви твърди фази: (RbF(cr), RbCl(cr), RbBr(cr), RbI(cr), RbNO₃(cr), Rb₂SO₄(cr), и Rb₂SeO₄(cr)).

3 Научна методология

Моделите, разработени в тази работа са базирани изцяло на подхода за междуионно взаимодействие, развит от К.С. Питцер (Pitzer 1973, 1991). Базисните уравнения на Питцер са описани и широко дискутирани в литературата (Harvie et al., 1984; Christov, 2005, 2012ab; Christov and Moller, 2004a, 2004b).

Тук ние даваме само уравнението за коефициента на активност $\gamma_{(M^+)}$ на даден катион (M) и неговите взаимодействия с другите разтворени:

$$(1) \quad \ln \gamma_M = z_M^2 F + \sum_a m_a (2B_{Ma}(I) + ZC_{Ma}) + \sum_c m_c (2\Phi_{Mc} + \sum_a m_a \psi_{Mca}) + \sum_a \sum_{a' < a} m_a m_{a'} \psi_{Maa'} + |z_M| \sum_c \sum_a m_c m_a C_{ca} + \sum_n m_n (2\lambda_{nM}) + \sum_n \sum_a m_n m_a \zeta_{naM}$$

където:

$$(2) \quad B_{MX} = \beta^{(0)}_{MX} + \beta^{(1)}_{MX} g(\alpha_1 \sqrt{I}) + \beta^{(2)}_{MX} g(\alpha_2 \sqrt{I}),$$

$$\text{където:} \quad g(x) = 2[1 - (1 + x)e^{-x}] / x^2, \quad Z = \sum m_i |z_i|,$$

$$\Phi_{ij} = \theta_{ij} + {}^E\theta_{ij}(I),$$

Уравнение (1) е симетрично по отношение на анионите. Символите “с” и “а” в уравнение (3) се отнасят за катионите и анионите, а “м” е тяхната молалност; В и Φ са измеряеми комбинации на вторичните вирални коефициенти; С и ψ са измеряеми комбинации на

третичните вирални коефициенти. В и С се определят от данните за бинерните разтвори, а Φ и ψ - от данните за смесените разтвори.

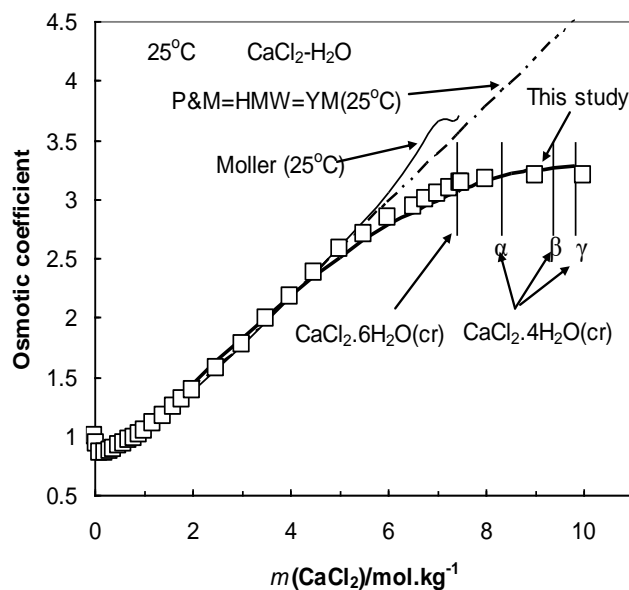
Най-общо, разработването на модел за смесена система от типа MX-NX-H₂O при постоянна температура и налягане изисква определянето на следните параметри на йонно взаимодействие в разтворите: 1) бинерните параметри β^0 , β^1 , β^2 , и C^φ за всяка анион-катион двойка за системата MX-H₂O; 2) бинерните параметри β^0 , β^1 , β^2 , и C^φ за системата NX-H₂O; 3) параметъра на смесване $\theta(MN)$ за катион-катион двойката; и 4) параметъра на смесване $\psi(MNX)$ за всяко тройно йонно взаимодействие при което не всички йони имат един и същ заряд. Конструирването на модел за твърдо-течно равновесие изисква също и определянето на 5) химическите потенциали на твърдите фази кристализиращи в бинерните системи MX-H₂O и NX-H₂O, и 6) в смесената система MX-NX-H₂O. Химическите потенциали (5 и 6) се определят на базата на определените параметри за разтворите и експериментални данни за разтворимостите. Параметрите λ и ξ са въведени от UCSD (University of California, San Diego) групата по химично моделиране за по точно предвиждане на разтворимостите на слаби електролити (напр. газове, (CO₂(gas)) в електролитни разтвори (Harvie et al., 1984; Moller, Christov and Weare, 2006, 2007).

Подходи за подбор и определяне на моделните параметри

Съгласно базисната теория на Питцер, за коректно описване на свойствата на една бинерна система е необходимо определянето на на 3 (β^0 , β^1 , и C^φ ; коефициенти: $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = 0.0$) (Pitzer and Mayorga, 1973) (стандартен подход А), или 4 (β^0 , β^1 , β^2 , и C^φ ; коефициенти: $\alpha_1 = 1.4$ и $\alpha_2 = 12$) (Pitzer and Mayorga, 1974) (стандартен подход Б) бинерни параметъра. Параметъра β^2 в уравнение (1) е въведен от Питцер (Pitzer and Mayorga, 1974) за да бъдат отчетени реакциите на асоциация при ниски концентрации в електролитите от типа 2-2 (напр. MgSO₄). Използването на 4ти бинерен параметър (β^2) позволява коректно описание на термодинамичните характеристики на 2-2 разтворите в широк концентрационен интервал и включването в модела на твърдо-течното равновесие (Christov, 1999, 2000).

Трябва да се отбележи, че в своите модели Питцер и съавтори не разглеждат кристализацията на твърди фази, т.е. твърдо-течното равновесие, и че максималната концентрация на приложимост на тези модели е 6 mol.kg⁻¹. В своите модели за всеки друг от 2-2 тип електролитни бинерни системи Kim and Frederick (1988) също използват подхода с 3 моделни параметъра (стандартен подход А) и не разглеждат кристализацията на твърди фази. Като резултат моделите на Kim and Frederick за много висококонцентрирани бинерни разтвори са в несъответствие с експерименталните данни за активностите при ниски концентрации (виж Lassin et al., 2015). UCSD групата по геохимично моделиране е 1та изследователска група, която прилага т.нар. подход за разтворимостите (solubility approach) базиран изцяло на стандартния формализъм на Питцер, и прилага този подход за построяване на фазовите диаграми на стабилно равновесие в разширената морска система {25°C; Harvie et al., 1984; 0-250°C: Moller, 1988, Greenberg and Moller, 1989; Moller et al., 2006, 2007; Christov and Moller, 2004a, 2004b; Christov, 2007, 2009ab, 2012ab}. И в тези модели обаче, пак е наложено ограничението за максимална концентрация на приложимост на моделите до 6 mol.kg⁻¹. Причината за това ограничение е поведението на бинерните разтвори с висока степен на асоциация при много високи концентрации, като напр. CaCl₂-H₂O (виж фиг. 1; Christov and Moller, 2004b, Christov, 2009a), HCl-H₂O, H₂SO₄-H₂O (Christov and Moller, 2004a, Christov, 2009b), NaOH-H₂O, KOH-H₂O (Christov and Moller, 2004a), LiCl-H₂O (Lassin et al., 2015) разтвори.

Съгласно обобщенията направени в предишни изследвания (Christov, 1994, 2000, 2004, 2005, 2012b) параметъра β^0 е отговорен и отчита йонните взаимодействия при ниски концентрации, докато C^φ параметъра - при високи концентрации. Параметърът β^1 отчита йонните взаимодействия в междинния концентрационен интервал. Като резултат, поведението на CaCl_2 - H_2O разтворите в интервала от 1 до 10 mol.kg^{-1} (Фиг. 1) би следвало да се опише само от определените стойности на 2 параметъра (β^1 , и C^φ). Това е възможно единствено за разтвори с линейна (φ , γ_{\pm} , a_w) зависимост при средно-високи и високи концентрации. От чисто математическа гледна точка, в случая на електролитни системи със т.нар. „плавен максимум“ на зависимостта (φ , γ_{\pm} , a_w) срещу концентрацията определянето на работещ комплекс от бинерни (β^0 , β^1 , и C^φ) параметри се оказва невъзможна за решаване задача.



Фиг. 1. Стабилно ($\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$) и метастабилно (α - $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, β - $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, и γ - $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$) равновесие в бинерната система CaCl_2 - H_2O при 25°C . Експерименталните (φ) данни са от Mikulin (1968). Вертикалните линии показват молалността на насищане за разтворите в равновесие със стабилните и метастабилните при $T = 25^\circ\text{C}$ твърди фази (Mikulin, 1968). Плътната непрекъсната линия показва изчислените осмотични коефициенти съгласно разработения краен модел за системата CaCl_2 - H_2O (Christov, unpub.). Обозначения във фигурата: YM = Yucca Mauntain Thermodynamic Database; P&M= Pitzer and Mayorga (1973); Moller= Moller (1988); HMW = Harvie et al., (1984).

Това е и главната причина за същественото отклонение между експерименталните φ данни (виж символите на Фиг. 1), и предвижданията на предложените в литературата модели при високи концентрации на CaCl_2 - H_2O . Тези модели не могат да отчетат метастабилната кристализация на α - $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, β - $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, и γ - $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ (Фиг. 1) минералите. Тук възниква и големия проблем за възможността да се разработи модел, който коректно да предвиди поведението на системите от типа на CaCl_2 - H_2O (или тези показващи „плавен максимум“) при екстремално високи концентрации. Този въпрос е дискутиран в продължение на много години и от много колеги, като за пример най-често е използван именно модела за системата CaCl_2 - H_2O . Някои просто стигат до абсурдния извод, че подхода на Питцер е неприложим за коректно описание на поведението на високо-

концентрирани разтвори ($>6 \text{ mol.kg}^{-1}$). Други предлагат т.нар. молна-фракция (mole fraction версия) на подхода на Питцер (Pitzer and Simonson, 1986; Petrenko and Pitzer, 1997). Трети разработват модели, като включват в своите разглеждания допълнителни, и много често несъществуващи комплекси в разтворите (Christov, 2012a). Четвърти разработват т.нар. „много-параметри” (multi parameters) модели (Gruszkiewicz и Simonson, 2005), определяйки по-вече от 40 концентрационно зависими бинерни параметри на йонно взаимодействие (виж дискусиата в Christov, 2012a).

За да отчете асоциационните ефекти при високи концентрации Христов (Christov, 1994-2019; Christov and co-authors, 2015-2020) прилага една нова разширена версия на модела на Питцер, а именно използвайки подход включващ 4 моделни параметъра (β^0 , β^1 , β^2 , и C^φ) (уравнение (2) и варирайки в стойностите на емпиричните коефициенти α_1 и α_2 във фундаменталните уравнения на Питцер (уравнение (2))). Този разширен подход (подход 1) позволява на автора да разработи модели, които изключително коректно описват поведението, както на ниско-, така и на високо-концентрирани разтвори от типа на $\text{CaCl}_2\text{-H}_2\text{O}$, и имащи различна стехиометрия: 1-1 ($\text{HNO}_3\text{-H}_2\text{O}$; Christov, 2005), 1-2 ($\text{Na}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$, $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$; Christov, 1998, 2001a), 2-1 (CuCl_2 , NiCl_2 ; Christov, 1994; 1995, 2005; $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2\text{-H}_2\text{O}$; Lach et al. 2018), 3-1 ($\text{FeCl}_3\text{-H}_2\text{O}$; Christov, 2004; 2005, Andre, Christov et al., 2013, 2019); $\text{Ln}(\text{NO}_3)_3\text{-H}_2\text{O}$, Guignot et al., 2019), 3-2 ($\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$, $\text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3$; Christov, 2001b, 2002ab, 2003; 2005).

В случаите, когато използвания изчислителен код за определяне на бинерните параметри не позволява вариране в стойностите на α_1 и α_2 (уравнение (2) и респективно прилагането на разширен подход (1) Christov предлага въвеждането в моделите на реакции на комплексообразуване в разтворите (подход 2). Така например за да разширим концентрационния ($> 40 \text{ m}$) и температурния (до 523.15K) интервал на приложение на модела за $\text{LiCl-H}_2\text{O}$ системата ние включихме нов воден комплекс ($\text{LiCl}(\text{aq})^\circ$). Така системата се разглеждаше като смесена: $\text{Li-Cl- LiCl}(\text{aq})^\circ\text{-H}_2\text{O}$ (Lassin, Christov et al., 2015). Както е показано на фиг. 1 крайните напълно параметризираните модели са в отлично съответствие със експерименталните данни за целия концентрационен интервал на разтворите, включително и за преситените разтвори. Това сравнение още веднъж показва, че при много акуратно прилагане на разширените версии на подхода на Питцер, няма концентрационни и температурни ограничения за неговото използване.

4 Резултати и обсъждане Модели за рубидиеви бинерни системи

При параметризиране на моделите за бинерните системи $\text{RbF-H}_2\text{O}$, $\text{RbCl-H}_2\text{O}$, $\text{RbBr-H}_2\text{O}$, $\text{RbI-H}_2\text{O}$, $\text{RbNO}_3\text{-H}_2\text{O}$, $\text{Rb}_2\text{SO}_4\text{-H}_2\text{O}$, $\text{Rb}_2\text{SeO}_4\text{-H}_2\text{O}$, и $\text{Rb}(\text{CH}_3\text{COO})\text{-H}_2\text{O}$ са използвани всички налични експериментални данни за осмотичните коефициенти (φ) за целия концентрационен интервал на съществуване на разтворите. Достъпните в литературата препоръчани стойности на средните коефициенти на активност (γ_{\pm}) за изследваните бинерни системи (Hamer and Wu (1972), Mikulin G. (1968) и Robinson and Stokes (1959)) са пряко зависими от използвания модел за изчисление. Ето защо, тези γ_{\pm} стойности не са използвани при параметризирането на моделите. Все пак, тези препоръчани γ_{\pm} стойности са ползвани при тестване на съвместимостта на модела. При изграждане на моделите ние използвахме различни версии на стандартния подход Питцер. Установено е, че за изследваните $\text{RbF-H}_2\text{O}$, $\text{RbNO}_3\text{-H}_2\text{O}$ и $\text{Rb}(\text{CH}_3\text{COO})\text{-H}_2\text{O}$ системи прилагането на подход със 4 параметъра (β^0 , β^1 , β^2 и C^φ) и варирайки в стойностите на α_1 и α_2 във фундаменталните уравнения на Питцер, води до най-ниски стойности на стандартното отклонение модел-експеримент. Предвижданията на ново-разработените в това изследване модели са в отлично съответствие с експерименталните данни за осмотичните

коэффициенты, и препоръчаните стойности за коефициентите на активност (γ_{\pm}), както при ниски, така и при много високи концентрации (до $22.6 \text{ mol. kg}^{-1}$ за $\text{RbF-H}_2\text{O}$).

На Фиг. 2. е направено сравнение между моделно-изчислените (линии) осмотични коефициенти (ϕ) в бинерните разтвори $\text{RbF-H}_2\text{O}$, $\text{RbCl-H}_2\text{O}$, $\text{RbBr-H}_2\text{O}$, $\text{RbI-H}_2\text{O}$, $\text{RbNO}_3\text{-H}_2\text{O}$, $\text{Rb}_2\text{SO}_4\text{-H}_2\text{O}$, $\text{Rb}_2\text{SeO}_4\text{-H}_2\text{O}$, и $\text{Rb}(\text{CH}_3\text{COO})\text{-H}_2\text{O}$ като функция от молалността на разтворите при $T = 298.15 \text{ K}$, и тези дадени в литературата (символи: Mikulin, 1968; Robinson and Stokes, 1959; Palmer et al., 2001; Barkov et al., 2001; Hammer and Wu, 1972; Partanen, 2010)). С напречни линии са дадени молалностите на наситените разтвори (Mikulin, 1968). Предвижданията на разработените в тази работа модели (за $\text{RbF-H}_2\text{O}$, $\text{RbI-H}_2\text{O}$, $\text{RbNO}_3\text{-H}_2\text{O}$, и $\text{Rb}(\text{CH}_3\text{COO})\text{-H}_2\text{O}$), и на тези разработени в предишни изследвания и валидирани тук на Christov (за $\text{RbCl-H}_2\text{O}$, $\text{RbBr-H}_2\text{O}$, $\text{Rb}_2\text{SeO}_4\text{-H}_2\text{O}$) и Palmer et al., 2001 за $\text{Rb}_2\text{SO}_4\text{-H}_2\text{O}$) са дадени с тъмна непрекъсната линия. На фигурите предвижданията на моделите на Pitzer and Mayorga (1973) са дадени с прекъсната линия

Валидиране на моделите за $\text{RbCl-H}_2\text{O}$ и $\text{RbBr-H}_2\text{O}$ системите

В предишни изследвания на Christov (Christov et al. (1994ab), Christov (1994a,b; 1996a,b; 2005), Balarew et al. (1993)) е разработен модел (25°C) за бинерните системи $\text{RbCl-H}_2\text{O}$ и $\text{RbBr-H}_2\text{O}$ (1-1 електролит). Моделите са разработени на базата на стандартен за 1-1 електролити подход, варирайки в стойностите на 3 моделни параметъра (β^0 , β^1 , и C^ϕ). Този стандартен подход е използван и от Pitzer and Mayorga (1973). Модела на Pitzer and Mayorga за $\text{RbCl-H}_2\text{O}$ е приет и от авторите на YMTDB (Sandia National Laboratories (2005)). На следващата фигура 1 са сравнени моделно-изчислените (линии) осмотични коефициенти (ϕ) за RbCl и RbBr в техните бинерни разтвори $\text{RbCl-H}_2\text{O}$ и $\text{RbBr-H}_2\text{O}$ като функция от молалността на разтворите при $T = 298.15 \text{ K}$, и тези дадени в литературата (символи: Mikulin, 1968; Hammer and Wu, 1972). За разлика от предложението в литературата модел на Pitzer and Mayorga (1973) (прекъсната линия, фиг. 1) моделите, разработени от Christov (1994, 1996a,b,c; 2005) (тъмна непрекъсната линия, фиг. 1) е в отлично съответствие с данните за осмотичните коефициенти и коефициентите на активност за целия концентрационен интервал от експериментални данни до молалността на насищане (Mikulin, 1968). Според представените на фиг. 1 данни, допълнителното усложняване на $\text{RbCl-H}_2\text{O}$ и $\text{RbBr-H}_2\text{O}$ модела чрез въвеждането на 4ти (β^2) параметър и варирайки в стойностите на α_1 и α_2 не води до по добро съответствие модел-експеримент. Включването на допълнителни параметри за $\text{RbCl-H}_2\text{O}$ и $\text{RbBr-H}_2\text{O}$ системите в моделите не е необходимо. Ето защо, моделите за $\text{RbCl-H}_2\text{O}$ и $\text{RbBr-H}_2\text{O}$ системите е използван без всякаква промяна при конструирането на модел за смесените системи $\text{RbCl- RbBr- H}_2\text{O}$ (Christov et al. (1994a), Christov (1996c; 2005), $\text{RbCl- MgCl}_2\text{- H}_2\text{O}$ (Balarew et al. (1993), $\text{RbBr- MgBr}_2\text{- H}_2\text{O}$ (Balarew et al. (1993)), $\text{RbCl- NiCl}_2\text{- H}_2\text{O}$ (Christov (1994; 1996a,b; 2005)), и 4ната система $\text{CsCl- KCl- RbCl- H}_2\text{O}$ (Christov et al. (1994b).

Валидиране на моделите за $\text{Rb}_2\text{SO}_4\text{-H}_2\text{O}$, и $\text{Rb}_2\text{SeO}_4\text{-H}_2\text{O}$ бинерните системи

На следващата фигура 1 са представени резултатите от нашите моделни изследвания за $\text{Rb}_2\text{SO}_4\text{-H}_2\text{O}$, и $\text{Rb}_2\text{SeO}_4\text{-H}_2\text{O}$ бинерните системи при 25°C . На фигурите са дадени 1) изчислените от крайните и приети без изменения при конструирането на моделите за смесените системи модели (от Palmer et al. (2002) за $\text{Rb}_2\text{SO}_4\text{-H}_2\text{O}$; и Barkov et al. (2003) за $\text{Rb}_2\text{SeO}_4\text{-H}_2\text{O}$) (непрекъснати тъмни линии); 2) сурови и препоръчани в литературата данни (символи: Mikulin (1968) и Barkov et al. (2001); и 3) определените на базата на модели докладвани в литературата (прекъснати линии : Pitzer and Mayorga (1973)) осмотични коефициенти като функция от молалността на разтворите. Както се вижда от представените на Фиг. 1 резултати моделите на Palmer et al. (2002) за $\text{Rb}_2\text{SO}_4\text{-H}_2\text{O}$ и на

Barkov et al. (2003) за $\text{Rb}_2\text{SeO}_4\text{-H}_2\text{O}$ се съгласуват много добре с експерименталните данни (Mikulin, 1968; Barkov et al. (2003)).

Новоразработен модел за $\text{RbF-H}_2\text{O}$ бинерната система

Pitzer and Mayorga (1973) разработват модел за $\text{RbF-H}_2\text{O}$ бинерната система използвайки данни от Robinson and Stokes (1959) до 3.5 mol. kg^{-1} (виж прекъснатата линия на фиг. 1). В това изследване ние разработихме нов модел, като използвахме всички достъпни в литературата данни. Новоразработеният модел за $\text{RbF-H}_2\text{O}$ системата значително разширява максималната концентрация на приложимост на модела спрямо тези докладвани в литературата (Pitzer and Mayorga (1973)) до 22.4 mol.kg^{-1} (виж непрекъснатата линия на фиг. 1). Трябва да се отбележи, че значителното разширяване на максималната концентрация на приложимост на новоразработените тук модели не води до модел-експеримент несъответствие при ниски концентрации. (виж непрекъснатите линии на Фиг. 1).

Новоразработен модел за $\text{RbI-H}_2\text{O}$

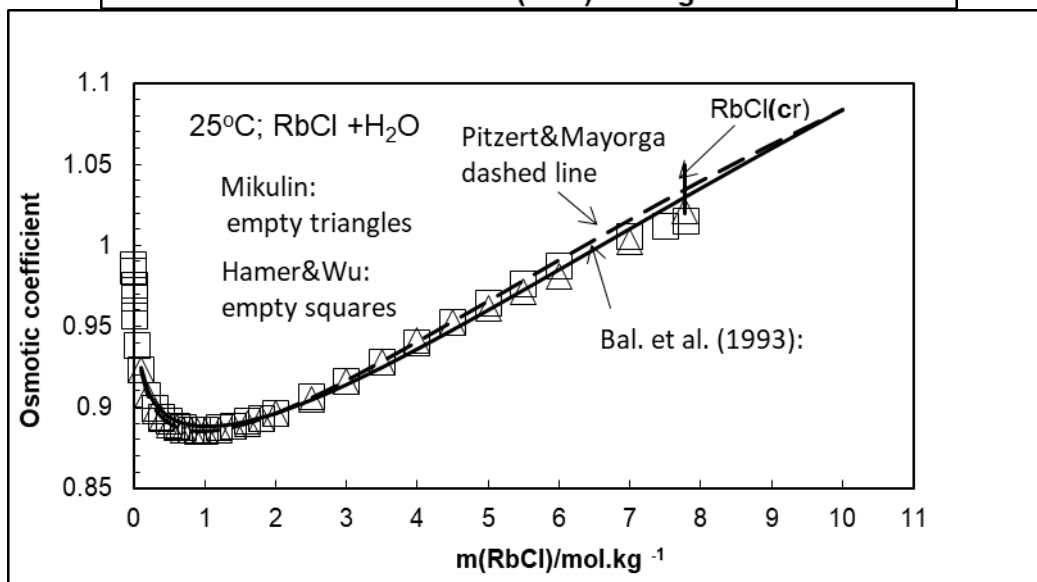
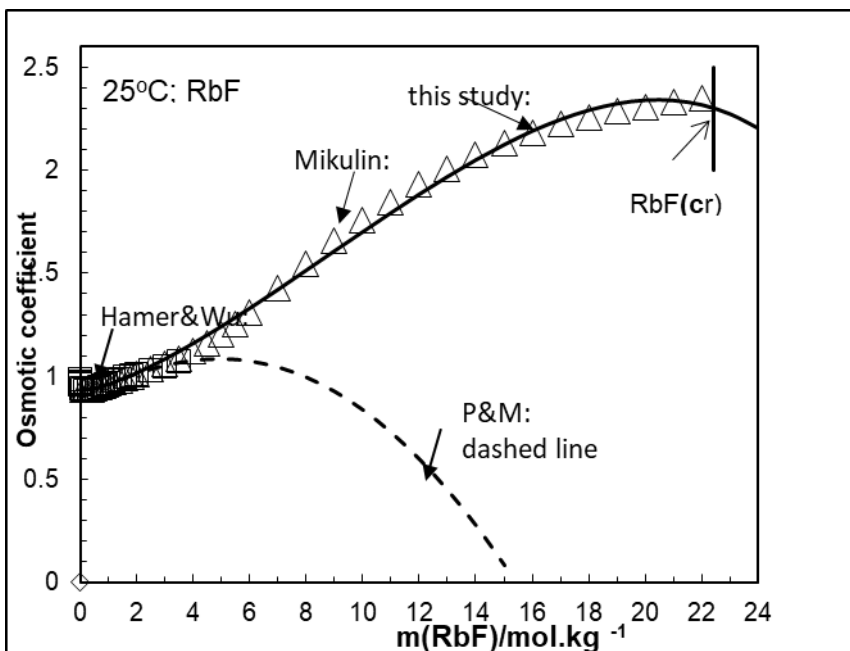
Тук ние валидирахме модела, разработен от Pitzer and Mayorga (1973) (прекъснати линии на фиг. 1) за $\text{RbI-H}_2\text{O}$ бинерните разтвори. Модела на Pitzer and Mayorga (1973) използва стандартния за 1-1 електролити подход с 3 моделни параметъра. Според дадените на фигура 8 резултати този модел предвижда по-високи стойности на осмотични коефициенти (ϕ) при високи концентрации на $\text{RbI-H}_2\text{O}$ бинерните разтвори. Модела на Pitzer and Mayorga използва експериментални данни до 5 mol/kg^{-1} . В това изследване ние разработихме нов модел използвайки данни за целия концентрационен интервал на съществуване на разтворите, до точката на насищане ($= 7.72 \text{ mol/kg}^{-1}$) (Mikulin, 1968). Модела е разработен на базата на стандартен за 1-1 електролити подход; варирайки в стойностите на 3 моделни параметъра (β^0 , β^1 , и C^ϕ). Както се вижда от представените на Фиг. 1 резултати моделът е в много добро съответствие с експерименталните данни (Mikulin, 1968; Partanen, 2010; Hammer and Wu, 1972).

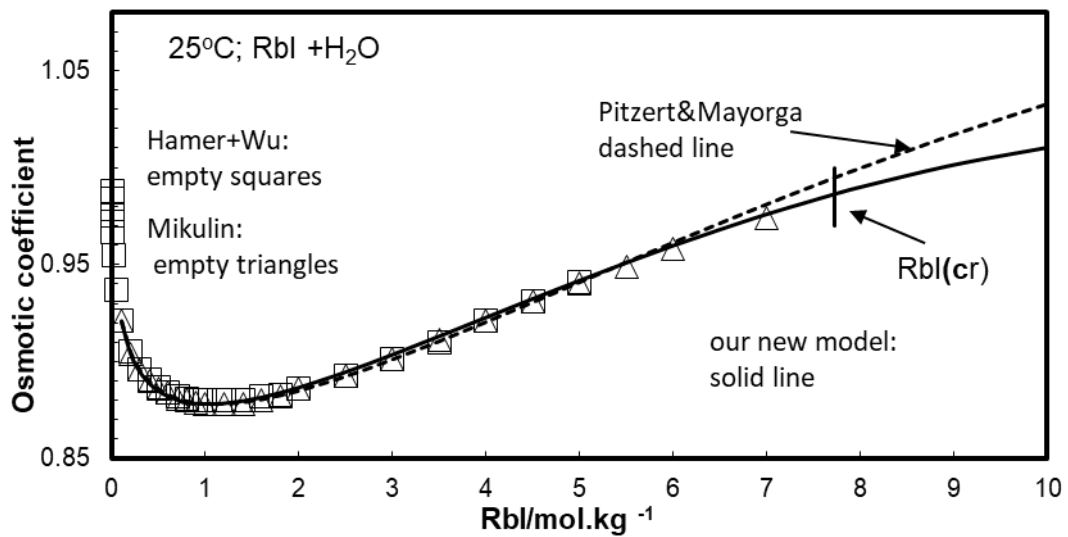
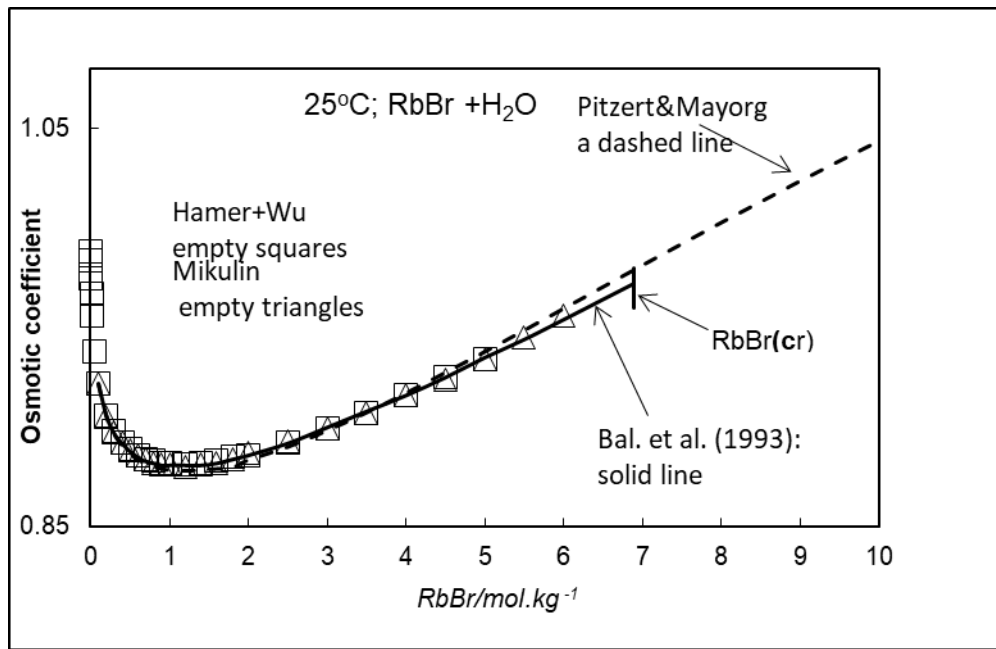
Новоразработен модел за $\text{Rb}(\text{CH}_3\text{COO})\text{-H}_2\text{O}$ бинерната система

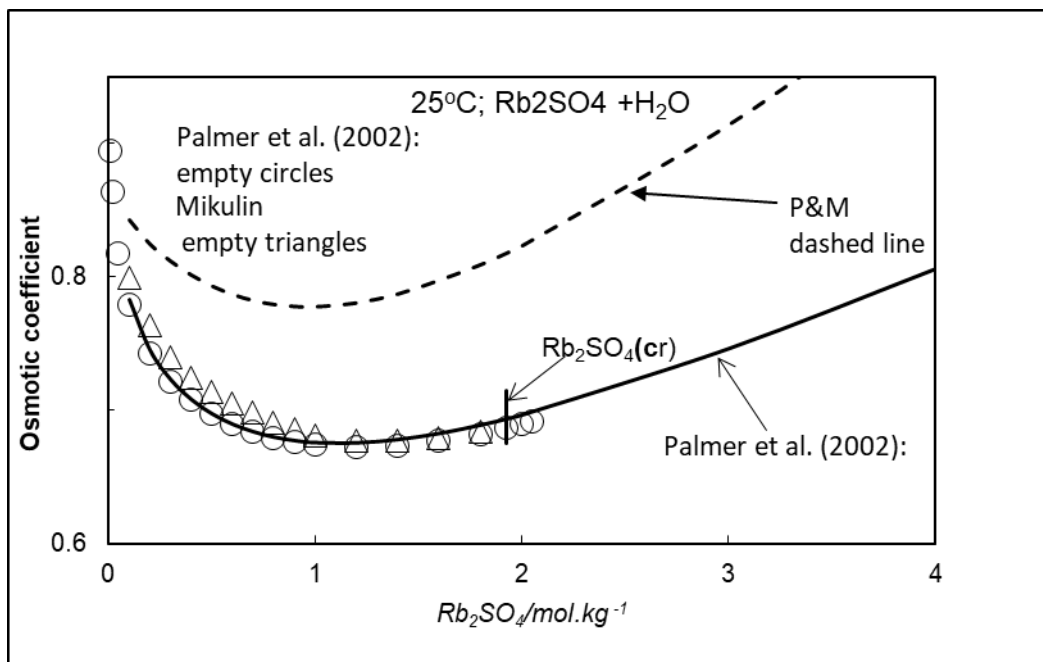
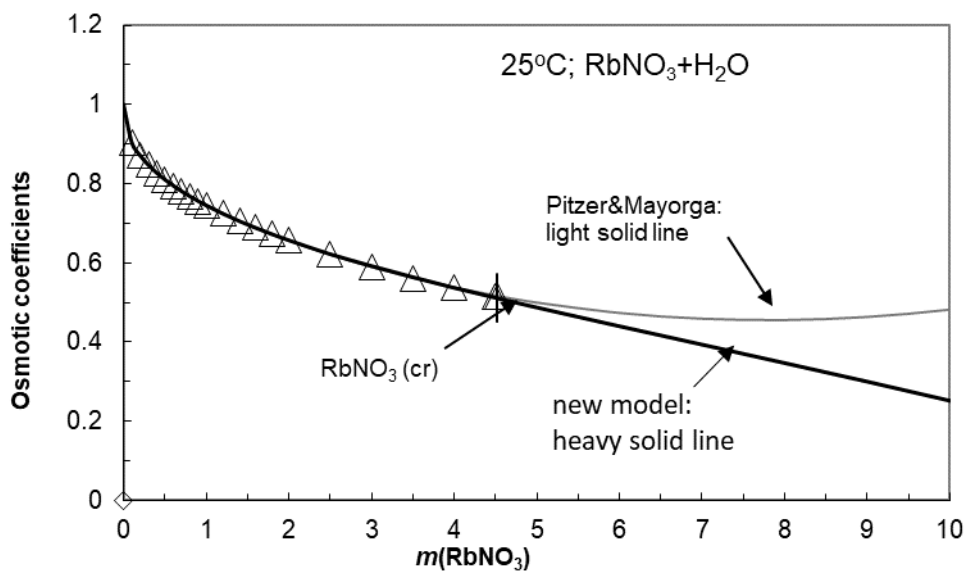
В това изследване ние разработихме нов модел за $\text{Rb}(\text{CH}_3\text{COO})\text{-H}_2\text{O}$ бинерната система, използвайки данни за осмотичните коефициенти от Mikulin (1968) от 0.1 mol/kg^{-1} до 30 mol/kg^{-1} . Модела е разработен на базата на разширен подход 1: варирайки в стойностите на 4 моделни параметъра (β^0 , β^1 , β^2 и C^ϕ) и α_2 и приемайки $\alpha_1 = 2$. По този способ е достигнато добро съответствие с експеримента до припл. 20 mol/kg^{-1} . Работата по този модел ще продължи с цел достигане на максимално добро модел-експеримент съответствие за целия концентрационен интервал на $\text{Rb}(\text{CH}_3\text{COO})\text{-H}_2\text{O}$ разтворите.

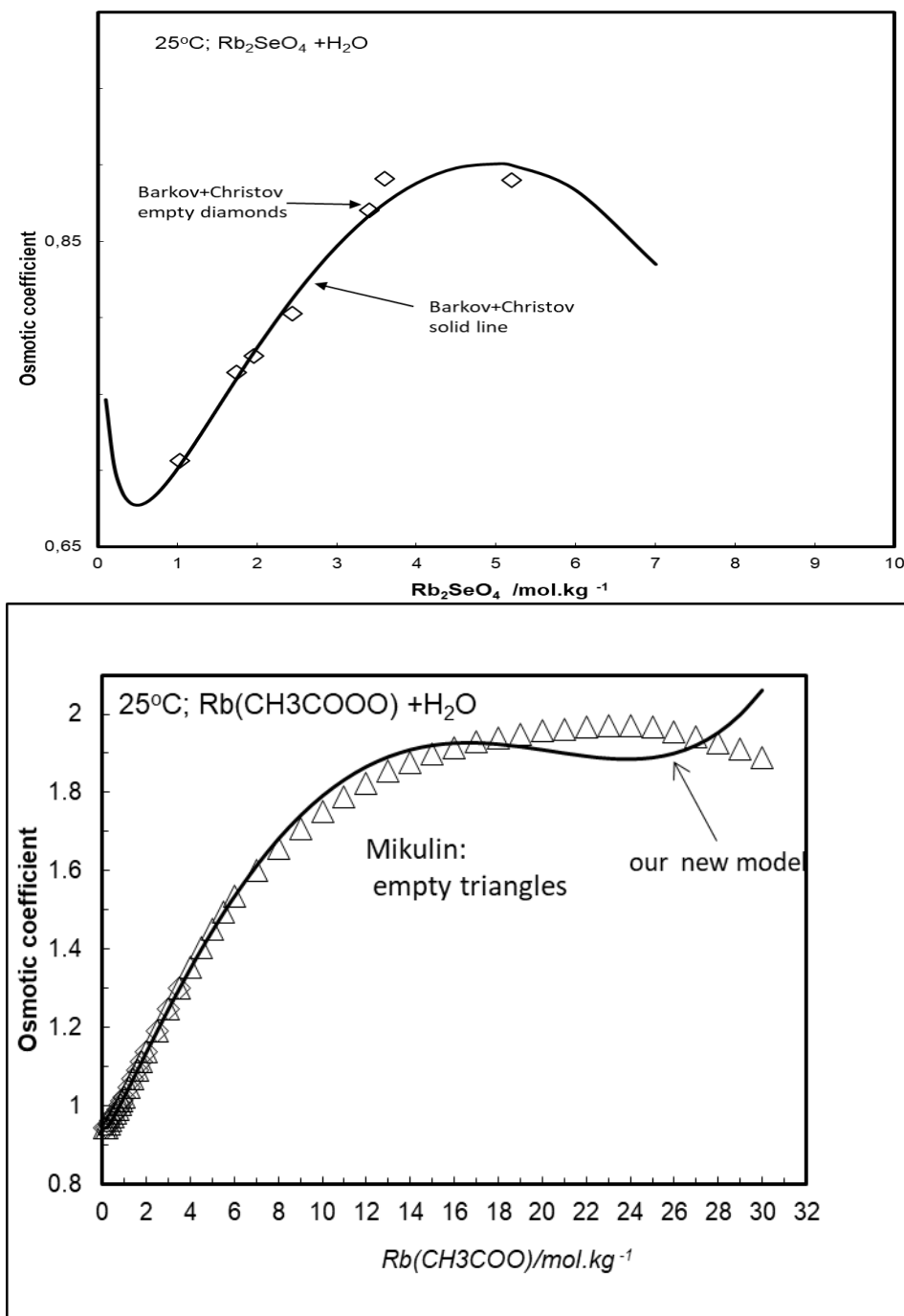
Моделите за $\text{RbF-H}_2\text{O}$, $\text{RbCl-H}_2\text{O}$, $\text{RbBr-H}_2\text{O}$, $\text{RbI-H}_2\text{O}$, $\text{RbNO}_3\text{-H}_2\text{O}$, $\text{Rb}_2\text{SO}_4\text{-H}_2\text{O}$, и $\text{Rb}_2\text{SeO}_4\text{-H}_2\text{O}$ включват експериментално идентифицираните твърди фази, кристализиращи от наситените, и преситените бинерни разтвори. Химическия потенциал, и респективно термодинамичното произведение на разтворимост ($\ln K_{\text{sp}}^0$) на кристализиращите от наситените бинерни разтвори твърди фази са изчислени на базата на определените Питцер параметри и експерименталните данни (Микулин, 1968) за тяхната разтворимост (Solubility Approach: Harvie et al., 1984; Christov and Moller, 2004ab; Christov, 2005, 2009a, 2012). Изчислени са стойностите на термодинамичното произведение на разтворимост ($\ln K_{\text{sp}}^0$) за 7 твърди фази [$\text{RbF}(\text{cr})$, $\text{RbCl}(\text{cr})$, $\text{RbBr}(\text{cr})$, $\text{RbI}(\text{cr})$, $\text{RbNO}_3(\text{cr})$, $\text{Rb}_2\text{SO}_4(\text{cr})$, и $\text{Rb}_2\text{SeO}_4(\text{cr})$] по уравнение (3):

$$(3) \quad K_{\text{sp}}^0(\text{RbI}) = \gamma_{(\pm)}(\text{sat})^2 \cdot m(\text{sat})^2$$









Фиг. 2. Сравнение между моделно-изчислените (линии) осмотични коефициенти (ϕ) в бинерните разтвори $\text{RbF-H}_2\text{O}$, $\text{RbCl-H}_2\text{O}$, $\text{RbBr-H}_2\text{O}$, $\text{RbI-H}_2\text{O}$, $\text{RbNO}_3\text{-H}_2\text{O}$, $\text{Rb}_2\text{SO}_4\text{-H}_2\text{O}$, $\text{Rb}_2\text{SeO}_4\text{-H}_2\text{O}$, и $\text{Rb}(\text{CH}_3\text{COO})\text{-H}_2\text{O}$ като функция от молалността на разтворите при $T = 298.15 \text{ K}$, и тези дадени в литературата (символи: Mikulin, 1968; Robinson and Stokes, 1959; Palmer et al., 2002; Barkov et al., 2001; Hammer and Wu, 1972; Partanen, 2010)). С напречни линии са дадени молалностите на наситените разтвори (Mikulin, 1968). Предвижданията на разработените в тази работа модели (за $\text{RbF-H}_2\text{O}$, $\text{RbI-H}_2\text{O}$, $\text{RbNO}_3\text{-H}_2\text{O}$, и $\text{Rb}(\text{CH}_3\text{COO})\text{-H}_2\text{O}$), и на тези разработени в предишни изследвания и валидирани тук на Christov (за $\text{RbCl-H}_2\text{O}$, $\text{RbBr-H}_2\text{O}$, $\text{Rb}_2\text{SeO}_4\text{-H}_2\text{O}$) и Palmer et al., 2002 (за $\text{Rb}_2\text{SO}_4\text{-H}_2\text{O}$) са дадени с тъмна непрекъсната линия. На фигурите предвижданията на моделите на Pitzer and Mayorga (1973) са дадени с прекъсната линия

Благодарност: Работата е подкрепена от Европейския фонд за регионално развитие в рамките на ОПЕРАТИВНА ПРОГРАМА “НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ ЗА ИНТЕЛИГЕНТЕН РАСТЕЖ 2014-2020” (ОП НОИР), проект ЦВП ”Университети за Наука, Информатика и Технологии в е-обществото (УНИТе)” BG05M2OP001-1.001-0004, от Национална Научна Програма "Информационни и комуникационни технологии за единен цифров пазар в науката, образованието и сигурността (ИКТвНОС)", както и от Университетски (ШУ) проект РД 08-124/03.02.2020).

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Altmairer, M., Brendler, V., Bube, C., Marquardt, C., Moog, H. C., Richter, A., Scharge, T., Voigt, W., Wilhelm, S. (2011a) THEREDA: Thermodynamic Reference Database. Final Report (short version), 63p. (as THEREDA)
- [2] Altmairer, M.; Brendler, V.; Bube, C.; Neck, V.; Marquardt, C.; Moog, H. C.; Richter, A.; Scharge, T.; Voigt, W.; Wilhelm, S.; Wilms, T.; Wollmann, G. (2011b) THEREDA-Thermodynamische Referenzdatenbasis. Report GRS 265 (German) (2011); ISBN 978-3-939355-41-0 (as THEREDA)
- [3] André L., Christov C., Lassin A., Azaroual M., (2013) **Water Rock Interaction [WRI14]**, Thermodynamic behavior of FeCl₃-H₂O and HCl-FeCl₃-H₂O systems - A Pitzer Model at 25°C, *Procedia Earth and Planetary Science*, 7 (2013) **14-18**.
- [4] André L., Christov C., Lassin A., Azaroual M., (2018) Thermodynamic model for solution behavior and solid-liquid equilibrium in Na-Al(III)-Fe(III)-Cr(III)-Cl-H₂O system at 25°C, *Acta Scientifica Naturalis Vol 5, No 1, Pages 6-16*.
- [5] Balarew C., Christov C., Petrenko S., Valyashko V. (1993) Thermodynamics of formation of carnallite type double salts, *J. Solution Chem.* 22 173-181.
- [6] Barkov D., Christov C., Ojkova T. (2003) Thermodynamic study of aqueous rubidium and cobalt selenate system at the temperature 298.15 K, *J. Chem. Thermodynamics*, 35, 689-697.
- [7] Christov C. (1994) Thermodynamic study of (b₁RbCl + b₂MeCl₂)(aq), where b denotes molality and Me denotes Mn, Co, Ni or Cu, at the temperature 298.15 K, on the basis of Pitzer's model, *J. Chem. Thermodynamics*, 26, 1071-1080.
- [8] Christov C. (1996), Pitzer model based study of CsX - NiX₂ - H₂O (X = Cl, Br) systems at 298.15 K, *Coll. Czech. Chem. Commun.*, 61, 501-506.
- [9] Christov C. (1996), Thermodynamic study of the CuCl₂ - MCl₂ -H₂O systems (M = Mg, Co) at 298.15 K, *Coll. Czech. Chem. Commun.*, 61 507-511.
- [10] Christov C. (1996a) A simplified model for calculation of the Gibbs energy of mixing in crystals: thermodynamic theory, restrictions and applicability, *Coll. Czech. Chem. Commun.*, 61 1585-1599.
- [11] Christov C. (1996b) Thermodynamic study of the co-crystallization of 2RbCl.NiCl₂.2H₂O and 2RbCl.MnCl₂.2H₂O at the temperature 298.15 K, *J. Chem. Thermodynamics*, 28 743-752.
- [12] Christov C. (1998) Thermodynamic study of the KCl -K₂SO₄ - K₂Cr₂O₇-H₂O system at the temperature 298.15 K, *CALPHAD* 22, 449-457.
- [13] Christov C. (1999), Study of (m₁KCl + m₂MeCl₂)(aq), and (m₁K₂SO₄ + m₂MeSO₄)(aq) where m denotes molality and Me denotes Cu or Ni, at the temperature 298.15 K, *J. Chem. Thermodynamics*, 31 71-83.
- [14] Christov C. (2000), Thermodynamic study of the Na-Cu-Cl-SO₄ -H₂O system at the temperature 298.15 K, *J. Chem. Thermodynamics*, 32 285-295.
- [15] Christov C. (2001a) Thermodynamic study of the NaCl - Na₂SO₄ - Na₂Cr₂O₇-H₂O system at the temperature 298.15 K, *CALPHAD*, 25, 11-17.
- [16] Christov C. (2001b) Thermodynamic study of the K-Mg-Al-Cl-SO₄ -H₂O system at the temperature 298.15 K, *CALPHAD*, 25, 445-454.

- [17] Christov C. (2002a) Thermodynamics of formation of ammonium, sodium, and potassium alums and chromium alums, *CALPHAD*, 26, 85-94.
- [18] Christov C. (2002b) Thermodynamic study of quaternary systems with participation of ammonium and sodium alums and chromium alums, *CALPHAD*, 26, 341-352.
- [19] Christov C. (2003) Thermodynamic study of the co-crystallization of ammonium, sodium and potassium alums and chromium alums, *CALPHAD*, 27, 153-160.
- [20] Christov C. (2004) Pitzer ion-interaction parameters for Fe(II) and Fe(III) in the quinary {Na+K+Mg+Cl+SO₄+H₂O} system at T=298.15 K, *J. Chem. Thermodynamics* 36, 223-235.
- [21] Christov C. (2005) Thermodynamics of formation of double salts and solid solutions from aqueous solutions, *J. Chem. Thermodynamics* 37, 1036-1060.
- [22] Christov C. (2007) An isopiestic study of aqueous NaBr and KBr at 50°C. Chemical Equilibrium model of solution behavior and solubility in the NaBr-H₂O, KBr-H₂O and Na-K-Br-H₂O systems to high concentration and temperature, *Geochim.Cosmochim. Acta*, 71, 3357-3369.
- [23] Christov C. (2009a) Isopiestic Determination of the osmotic coefficients of aqueous MgCl₂-CaCl₂ Mixed solution at 25°C and 50°C. Chemical equilibrium model of solution behavior and solubility in the MgCl₂-H₂O, and MgCl₂-CaCl₂-H₂O systems to high concentration at 25°C and 50°C, *J. Chem. Eng. Data*, 54, 627-635.
- [24] Christov C. (2009b) Chemical equilibrium model of solution behavior and solubility in the MgCl₂-H₂O, and HCl-MgCl₂-H₂O systems to high concentration from 0°C to 100°C, *J. Chem. Eng. Data*, 54, 627-635.
- [25] Christov C. (2012a), Temperature variable chemical model of solution bromide-sulfate interaction parameters and solid-liquid equilibria in the Na-K-Ca-Br-SO₄-H₂O system, *Calphad*, 36 71-81.
- [26] Christov C. (2012b), Development of advanced and comprehensive chemical thermodynamic models as a powerful tool for predicting properties of natural systems (in Bulgarian), *National Science Fund Magazine* 4, 1-16.
- [27] Christov C., and Moller N. (2004a) A chemical equilibrium model of solution behavior and solubility in the H-Na-K-Cl-OH-HSO₄-SO₄-H₂O system to high concentration and temperature, *Geochim.Cosmochim. Acta*, 68, 1309-1331.
- [28] Christov C., and Moller N. (2004b) A chemical equilibrium model of solution behavior and solubility in the H-Na-K-Ca-Cl-OH-HSO₄-SO₄-H₂O system to high concentration and temperature, *Geochim.Cosmochim. Acta* 68, 3717-3739.
- [29] Christov C., Petrenko S., Balarew C., Valyashko V. (1994) Calculation of the Gibbs energy of mixing in crystals using Pitzer's model, *J. Solution Chem.*, 23 795-812.
- [30] Christov C., Petrenko S., Balarew C., Valyashko V. (1994) Thermodynamic simulation of four-component carnallite type systems, *Monatsh. Chemie*, 125, 1371-1382.
- [31] Christov C., Zhang M., Talman S., Reardon E., Tammy Y. (2012) Review of issues associated with evaluation of Pitzer interaction parameters, *Mineralogical Magazine* 76, No. 6, 1578.
- [32] Donchev S., Tsenov T., Christov C. (2020) Thermodynamic models for solution behavior and solid-liquid equilibrium in cesium binary systems (CsF-H₂O, CsCl-H₂O, CsBr-H₂O, CsI-H₂O, CsOH-H₂O, CsNO₃-H₂O, Cs₂SO₄-H₂O, and Cs₂SeO₄-H₂O) from low to very high concentration at 25°C, *SocioBrains*, issue 66, pp. 32-49.
- [33] Greenberg J. and Moller N. (1989) The prediction of mineral solubilities in natural waters: A chemical equilibrium model for the Na-K-Ca-Cl-SO₄-H₂O system to high concentration from 0 to 250°C. *Geochim. Cosmochim. Acta* 53, 2503-2518.
- [34] Gruskiewicz, M.; Simonson J. (2005) Vapor pressures and isopiestic molalities of concentrated CaCl₂(aq), and CaBr₂(aq), and NaCl(aq) to T=523.15 K. *J. Chem. Thermodynamics* 37, 906-930.
- [35] Guignot S., Lassin L., Christov C., Lach A., André L., Henocq P. (2019), Modelling the osmotic and activity coefficients of lanthanide nitrate aqueous solutions at 298.15 K from low molalities to (super) saturation, *Journal of Chemical & Engineering Data* [64, 1, 345-359](#).

- [36] Hamer, W.J. and Wu Y.-C. (1972) Osmotic coefficients and mean activity coefficients of uni-univalent electrolytes in water at 25°C. *J. Phys. Chem. Ref. Data* 1, 1047-1099.
- [37] Harvie C., Moller N., and Weare J. (1984) The prediction of mineral solubilities in natural waters: The Na-K-Mg-Ca-H-Cl-SO₄-OH-HCO₃-CO₃-CO₂-H₂O system from zero to high concentration at 25°C. *Geochim. Cosmochim. Acta* 48, 723-751 (1984).
- [38] Kim H.-T. and Frederick W. (1988) Evaluation of Pitzer ion interaction parameters of Aqueous electrolytes at 25°C. 1. Single salt parameters. *J. Chem. Eng. Data* 33, 177-184.
- [39] Lach A., André L., Guignot S., Christov C., Henocq P., Lassin A (2018) A Pitzer parameterization to predict solution properties and salt solubility in the H-Na-K-Ca-Mg-NO₃-H₂O system at 298.15 K" , *Journal of Chemical & Engineering Data* 63, 787–800.
- [40] Lassin A., Christov C., André L., Azraoual M. (2015) A thermodynamic model of aqueous electrolyte solution behavior and solid liquid equilibrium in the Li-H-Na-K-Cl-OH-H₂O system to a very high concentrations (40 molal) from 0° to 250°C, *American Journal of Science* 315, 204-256.
- [41] Lassin, A., Guignot, S., Lach, A., Christov, C., André, L., Madé, B. (2020) Modeling the
- [42] solution properties and mineral-solution equilibria in radionuclide-bearing aqueous nitrate systems. Application to binary and ternary systems containing U, Th or lanthanides, at 25°C, *J. Chem. Eng. Data* 65, 3613–3626.
- [43] Mikulin G. (1968) *Voprosy Fizicheskoi Khimii Electrolytov*, Izd. Khimiya, St.Petersburg, 417 p.
- [44] Moller N. (1988) The prediction of mineral solubilities in natural waters: A chemical equilibrium model for the Na-Ca-Cl-SO₄-H₂O system to high temperature and concentration. *Geochim. Cosmochim. Acta* 52, 821-837.
- [45] Moller N., Christov C., Weare J. (2006) Thermodynamic models of aluminum silicate mineral solubility for application to enhanced geothermal systems. *Proceedings 31th Workshop on Geothermal Reservoir Engineering*, Stanford University, Stanford, California, January 30 –February 1 (8 pages).
- [46] Moller N., Christov C. and Weare J. (2007) Thermodynamic model for predicting interactions of geothermal brines with hydrothermal aluminum silicate minerals. *Proceedings 32th Workshop on Geothermal Reservoir Engineering*, Stanford University, Stanford, California, January 22-24 (8 pages).
- [47] Palmer D., Rard J., Clegg S. (2002) *J. Chem. Thermodynamics*, 34, 63-102.
- [48] Petrenko S. and Pitzer K. (1997) Thermodynamics of aqueous NaOH over the complete composition range and to 523 K and 400 Mpa. *J. Phys. Chem.*, B.101, 3589-3595.
- [49] Pitzer K. (1973) Thermodynamics of electrolytes. I. Theoretical basis and general equations. *J. Phys. Chem.* 77, 268-277.
- [50] Pitzer K. (1991) In *Activity Coefficients in Electrolyte Solutions*, 2nd ed. (ed. K. Pitzer), p.p. 75-153. CRC Press, Boca Ration.
- [51] Pitzer, K.S., and Mayorga G. (1973) Thermodynamics of electrolytes. II. Activity and osmotic coefficients for strong electrolytes with one or both ions univalent. *J. Phys. Chem.* 77, 2300-2308.
- [52] Pitzer, K.S. and Mayorga G. (1974) Thermodynamics of electrolytes. III. Activity and osmotic coefficients for 2-2 electrolytes. *J. Soln. Chem.* 3, 539-546.
- [53] Pitzer K. and Simonson J. (1986) Thermodynamics of multicomponent, miscible, ionic system: Theory and equations. *J. Phys. Chem.* 90, 3005-3009.
- [54] Sandia National Laboratories (2005): Pitzer database expansion to include actinides and transition metal
- [55] species (data0.ypf.R1) U.S. Department of Energy, ANL-WIS-GS-000001 REV 00(as YMTDB).
- [56] Sandia National Laboratories (2007). Qualification of thermodynamic data for geochemical modeling of mineral-water interactions in dilute systems (data0.ypf.R2) U.S. Department of Energy, ANL-WIS-GS-000003 REV 01 (as YMTDB)

SOFTWARE APPLICATION FOR DIAGNOSTICS AND REPORTING OF TECHNICAL CONDITION OF MACHINES FROM HEAVY INDUSTRY

KRASIMIR M. KORDOV, ZEFER SERAT

ABSTRACT: *This article presents a software product for diagnostics and reporting of the technical condition of the machines used in production workshops of Alcomet AD. The developed software is created according to the technical requirements of the company, considering the specific activity of the technicians, performing daily monitoring for the serviceability of the components of the machines.*

KEYWORDS: *Software application, Software for diagnostics, Software*

СОФТУЕРНО ПРИЛОЖЕНИЕ ЗА ДИАГНОСТИКА И ОТЧИТАНЕ НА ТЕХНИЧЕСКОТО СЪСТОЯНИЕ НА МАШИНИ ОТ ТЕЖКАТА ПРОМИШЛЕНОСТ *

КРАСИМИР М. КОРДОВ, ЗЕФЕР СЕРАТ

АБСТРАКТ: *В настоящата статия е представен софтуерен продукт за диагностика и отчитане на техническото състояние на машините, използвани в производствени цехове на фирма Алкомет АД. Разработеният софтуер е създаден според технически изисквания на фирмата, като е съобразен със специфичната дейност на техническите лица, извършващи ежедневен мониторинг за изправността на компонентите на машините.*

1 Въведение

В днешни дни, компютърните технологии са внедрени в дейността на всяка сфера на човека, обществото, държавата и бизнеса.

Всеки бизнес разчита на технологиите, за да подобри и автоматизира своята дейност или производство, да води своята отчетност, да подпомага логистиката, да следи за наличности на продукцията и материали, да поддържа актуална информация за служители, клиенти, дистрибутори и др.

Специфичната дейност на големите фирми, налага използване на конкретни технологии и разработване на специфичен софтуер, подходящ за конкретните нужди на предприятието. Пример за такава фирма е Алкомет АД [1], която е най-големият български производител на алуминиеви валцови и пресови продукти. Производството на фирмата се реализира, чрез поточни линии, състоящи се от различни машини за пресоване и валиране, които подлежат на постоянен мониторинг, с цел безопасност на операторите и целия персонал, работещ в цеховете на фирмата. Мониторинга на техническото състояние на машините се извършва от технически специалисти, които извършват ежедневна диагностика и изготвят отчети за състоянието на проверената апаратура. Този процес е

* Настоящата статия е частично финансирана от фонд „Научни изследвания“ на Шуменски Университет „Епископ К. Преславски“ по проект № РД-08-71/22.01.2020.

времеотнемаш, но задължителен, за успешното и безпроблемното протичане на производствения процес на фирма Алкомет АД.

За оптимизиране на процесите за осъществяване на ежедневен мониторинг и диагностика на машините в производствените цехове на фирма Алкомет и оптимизиране на процеса по изготвяне на дневните отчети на техническите лица, фирмата има нужда от разработване на специализиран софтуер. Конкретните изисквания към софтуера са предварително уточнени с представител на фирма Алкомет АД.

2 Модел на софтуерното приложение

Основното изискване към разработвания софтуер е с него да работят само технически специалисти от фирмата. В представеният софтуер [2] са заложили потребителски разпределени права за достъп [3]. При самото идентифициране, система разпознава дали използваното потребителското име е на администратор или техническо лице, като по този начин се забранява достъпа на външни лица[4,5].

Предварително заложените специфични изисквания към софтуера предполагат наличието на следните функционалности:

- Контрол на достъпа;
- Разпознаване на машините за диагностика;
- Отчитане на техническото състояние на компонентите на всяка машина;
- Създаване на отчет за извършената проверка на техническото състояние на всички машини, като отчета се съхранява в база от данни;
- Разпечатване на новосъздаденият отчет на хартиен носител, за да бъде подписан от техническото лице, извършило диагностиката.
- Съхраняване на информацията на сървър.

Тези функционалности са реализирани основно чрез следните модули:

2.1. Модул за идентификация

Този модул извършва контрол на достъпа, чрез въвеждане потребителско име и парола. Идентификацията [7] се налага поради изискването със софтуера да работят само конкретни служители на фирмата. При въведени коректни данни системата разпознава дали в системата се е идентифицирал администратор или техническо лице. Според разпознатият тип потребител, софтуерът дава достъп до модулите, съответстващи на работата на вида потребител.

2.2. Модул за разпознаване на машина, чрез сканиране на QR код

Този модул улеснява техническите лица, при изборът на машина, чиито компоненти се диагностицират. Всяка машина се разпознава чрез сканиране на уникален QR код, след което софтуерът автоматично зарежда списък с компонентите на съответната машина. В случай на технически проблем със сканирането на QR кода (замърсяване, нарушаване на целостта на изображението с QR код и др.) се дава възможност за ръчно избиране на машината за диагностика, от списък с всички пресови машини на фирмата.

2.3. Модул за отчитане на техническото състояние на компонентите

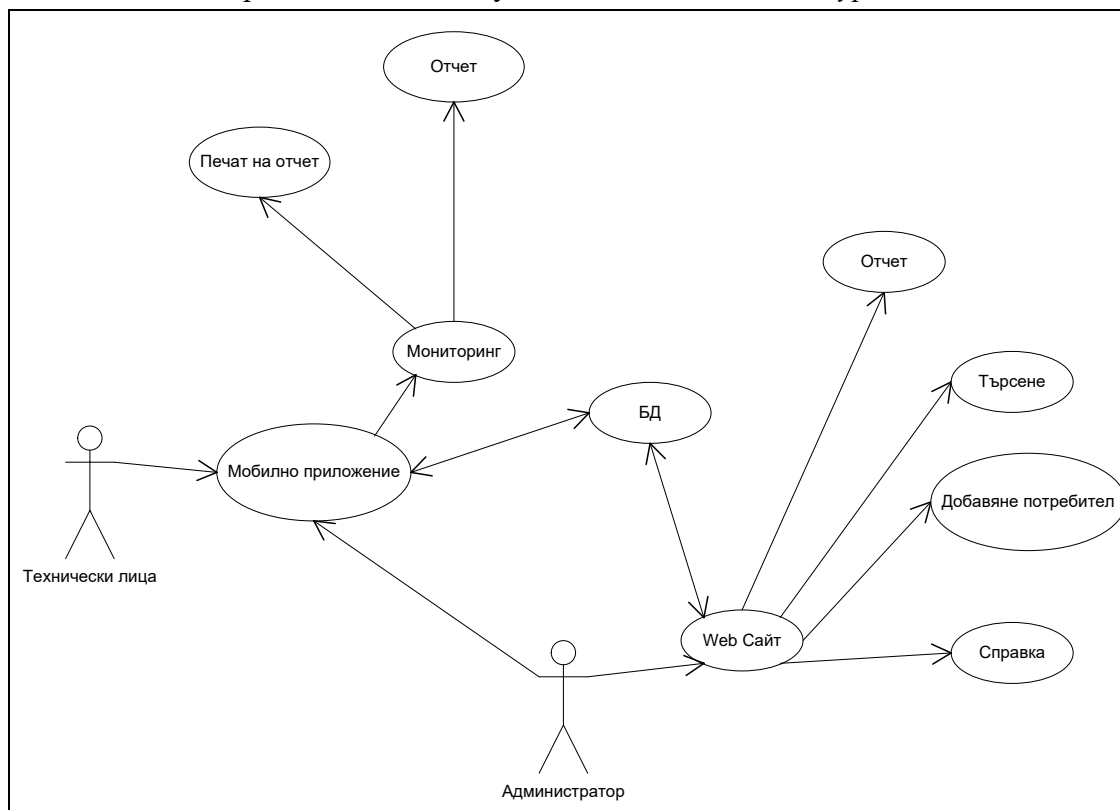
Модулът за отчитане на техническото състояние на машините предоставя достъп до компонентите на всяка машина за диагностика. Техническите лица имат задължение да удостоверяват изправността на всеки един от компонентите на машините. Проверката на

компонентите се извършва от техника, след което той посочва една от предварително зададените опции от софтуера – „В изправност“ или „Не е в изправност“ за съответният компонент. Когато се наложи да бъде избрана опцията „Не е в изправност“, софтуерът автоматично показва допълнителен прозорец, в който техническото лице описва възникналият проблем. Този метод спестява време при евентуална нужда своевременно да се извърши отремонтиране или да се поръчат необходимите компоненти за смяна.

2.4. Модул за създаване на отчет за извършената проверка на техническото състояние

След извършване на техническата проверка, състоянието на машините трябва да бъде описано в официален документ – отчет за извършен мониторинг. Този модул генерира информацията от предишният модул в обобщен вариант по формата на цялостен отчет. Информацията се записва в база от данни и може да се разпечата на хартиен носител, и да бъде подписан поради изискванията за съхранение на отчетите за определени периоди от време.

Схематичното представяне на модулите са показани на *Фигура 1*.

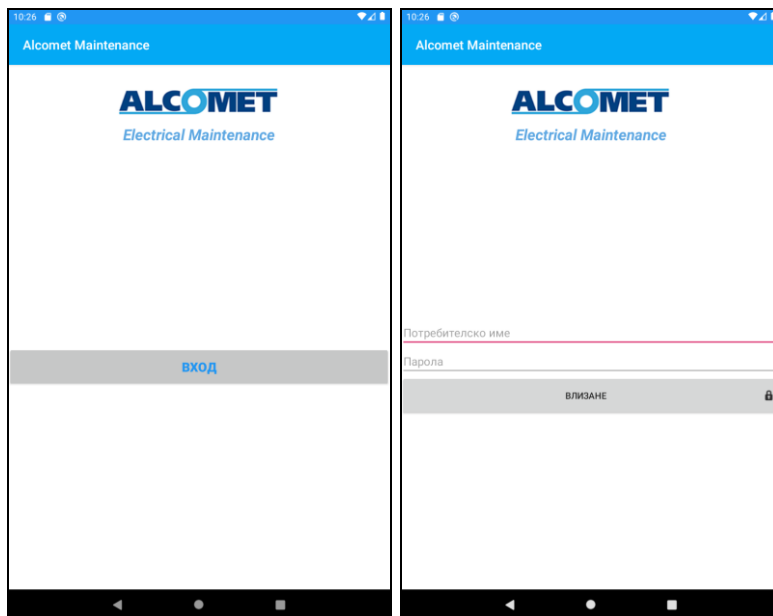


Фигура 1 - Диаграма на софтуерно приложение за извършване на диагностика на машини от тежката промишленост

3 Реализация на мобилното приложение за диагностика и отчитане на техническото състояние на машини от тежката промишленост.

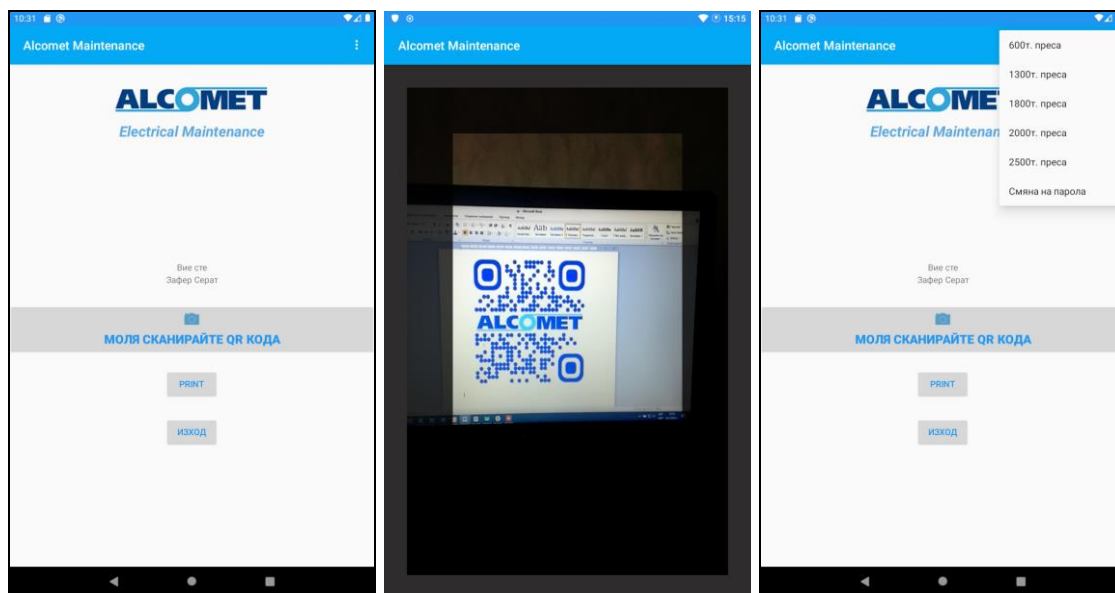
Реалната диагностика на машините се осъществява от техническите лица, като е необходимо те физически да проверят компонентите за неизправности. Поради тази

причина разработено мобилно приложение[6], работещо на лесно преносими устройства като таблети и смартфони. На *Фигура 2* са показани началният екран на приложението и екранът за идентификация.



Фигура 2 – Начален екран и идентификация

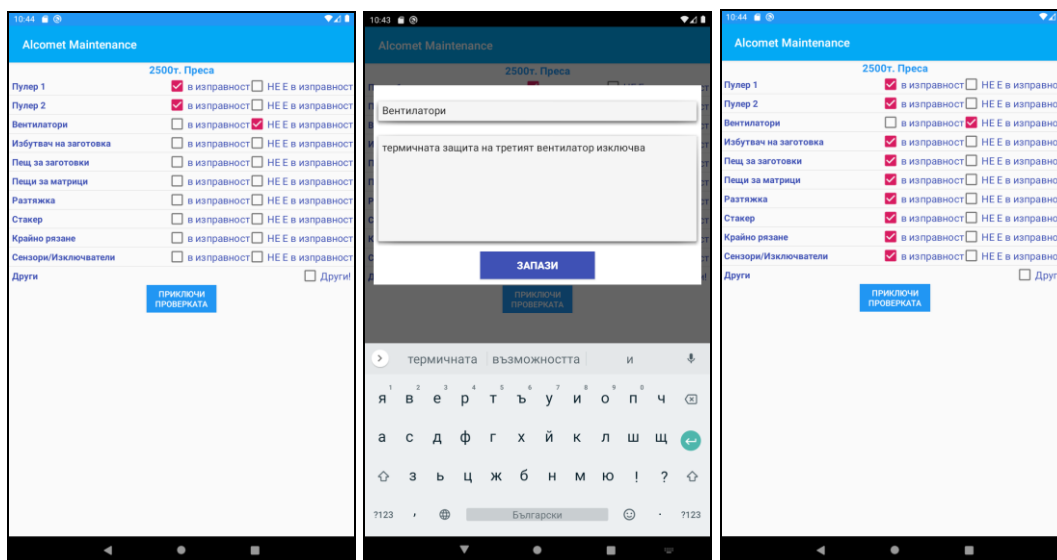
На *Фигура 3* са показани вариантите за избор на машина при извършване на диагностика – сканиране на QR код или ръчно избиране от списък.



Фигура 3 - Разпознаване или избор на машина за диагностика

При първият метод, се използва камерата на мобилното устройство, която се насочва към QR код, който е в близост до машината. Приложението разпознава данните в

сканираният QR код и автоматично визуализира компонентите за диагностика на съответната машина. Вторият метод дава възможност да се избере машината за диагностика от списъчно меню, като този метод е резервен вариант, в случай на неизправност на камерата, нарушаване на целостта на QR кода и др.



Фигура 4 – Отчитане на техническото състояние

След визуализиране на компонентите, чиято изправност трябва да се провери от техническото лице, е необходимо да се избере опция за всеки един инспектиран компонент. На *Фигура 4* са показани опциите за една от пресовите машини на фирмата, при отчитане на нейната техническа изправност. При установяване на технически проблем на някой от компонентите се маркира опцията „Не е в изправност“, като това води до визуализиране на допълнителен диалогов прозорец за подробно описание на възникналата неизправност.

При приключване на диагностиката на съответната машина, данните се записват чрез бутона „Приключи проверката“ и техническото лице може да започне диагностика на следващата машина, като повтори стъпките от *Фигура 2*.

Приключването на ежедневният мониторинг на всички машини завършва с подписан отчет представен от техническото лице на хартиен носител, който се съхранява в архива на фирмата. За целта приложението дава възможност ежедневните отчети да се съхраняват в PDF формат и да се принтира тяхното съдържание.

4 Web базирана система за управленски функции

Софтуерното приложение е допълнено от Web базирана система [8,9] за управленски функции, предназначена за използване от ръководителите на техническите лица. Това дава възможност, чрез отдалечен достъп да се проверяват и анализират данни за техническото състояние на машините. Достъпът отново се разрешава след идентификация, като се изисква въвеждане на потребителско име и парола на администраторите. След успешна идентификация са достъпни управленските модули.

Първият модул дава възможност да се администрират акаунтите на техническите лица. При назначаване на нови служители е необходимо да се създаде акаунт (*Фигура 5*), а при освобождаване или напускане на техници има възможност техните данни да се

премахната. Информацията се записва на сървър и мобилното приложение се синхронизира при стартиране, за да работи с актуалната информация.


Фигура 5 - Създаване на акаунт на новоназначено техническо лице

Вторият модул предоставя възможност за преглед на актуалната информация за състоянието на машините, техните компоненти и техническото лице, извършило последният мониторинг. Част от данните са показани на *Фигура 6*.

ID	Дата	Час	Машина/Обект	Възел/Елемент	Статус	Проверил
1	2020-05-21	16:28:00	600t press	Пулер	в изправност	Бейтулла Мехмед
2	2020-05-21	16:28:00	600t press	Контейнер нагреватели	в изправност	Бейтулла Мехмед
3	2020-05-21	16:28:00	600t press	Горещо Рязане	в изправност	Бейтулла Мехмед
4	2020-05-21	16:28:00	600t press	Помпи	в изправност	Бейтулла Мехмед
5	2020-05-21	16:28:00	600t press	Пещ за заготовки	в изправност	Бейтулла Мехмед
6	2020-05-21	16:28:00	600t press	Пещ за матрица - север	в изправност	Бейтулла Мехмед
7	2020-05-21	16:28:00	600t press	Пещ за матрица - юг	в изправност	Бейтулла Мехмед
8	2020-05-21	16:28:00	600t press	Крайно рязане	в изправност	Бейтулла Мехмед
9	2020-05-21	16:29:00	600t press	Сензори/Изключватели	в изправност	Бейтулла Мехмед

Фигура 6 - Техническо състояние на машините според последните въведени данни

Следващите модули дават възможности да се извършват справки за техническото състояние по конкретно зададена дата или по зададен времеви период. Тези справки могат да се използват за проследяване на аварии и за анализ на честотата на повреди на съответни компоненти на машините. Могат да се проследяват констатираните нередности от техника, извършил диагностиката. На *Фигура 7* е показана част от информацията при примерна справка за предварително зададен времеви период.



Начало Пълна информация Търсене по дата търсене между две дати Търсене по име Вход

Начална Дата: Крайна Дата:

ID	Дата	Час	Машина/Обект	Възел/Елемент	Статус	Проверил
1	2020-05-21	16:28:00	600t press	Пулер	в изправност	Бейтулла Мехмед
2	2020-05-21	16:28:00	600t press	Контейнер нагреватели	в изправност	Бейтулла Мехмед
3	2020-05-21	16:28:00	600t press	Горещо Рязане	в изправност	Бейтулла Мехмед
4	2020-05-21	16:28:00	600t press	Помпи	в изправност	Бейтулла Мехмед
5	2020-05-21	16:28:00	600t press	Пещ за заготовки	в изправност	Бейтулла Мехмед
6	2020-05-21	16:28:00	600t press	Пещ за матрица - север	в изправност	Бейтулла Мехмед
7	2020-05-21	16:28:00	600t press	Пещ за матрица - юг	в изправност	Бейтулла Мехмед
8	2020-05-21	16:28:00	600t press	Крайно рязане	в изправност	Бейтулла Мехмед

Фигура 7 - Справка за състоянието на машините според зададен времеви период

Насоки за бъдещо развитие на софтуера

Динамичното развитие на фирма Алкомет АД налага закупуване на нови машини за производствения процес. Изискването към настоящия софтуер е възможност за работа с предварително зададен брой машини и компоненти. С цел да се улесни внедряването на нови машини, може да се създаде нов модул в Web базираната система за добавяне на машини и компоненти, след което информацията да се синхронизира с мобилното приложение. Друг важен елемент на всеки софтуер е сигурността, която може да бъде повишена, чрез използване на криптиран трансфер на информацията[10,11,12].

Заклучение

Специфичната дейност на фирма Алкомет АД не позволява използването на стандартен софтуер и изисква разработването на софтуерни продукти, които отговарят на конкретните нужди на предприятието.

Една от най-отговорните дейности на фирмата е постоянният мониторинг на машините за производство, като за целта се извършва ежедневна диагностика и се изготвят отчети от технически лица, които проверяват компонентите на машините за неизправности. Този процес е важен, за да се спазват мерките за безопасност на труда и предотвратяване на аварии.

Предложеният софтуер улеснява значително работата на техническия персонал, който може бързо и лесно с помощта на мобилно устройство да осъществи мониторинг на машините и след това да изготви своя отчет за извършената дейност. Web базираната система за управленски функции предоставя възможност за контрол на профилите за достъп до софтуера и изготвяне на информационни справки за състоянието на машините на фирмата.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] URL: <https://www.alcomet.bg/> - официален сайт на фирма Алкомет АД (посетен на 05.06.2020г.)
- [2] Илиева, С., Лилов, В., Манова, И. (2010). Подходи и методи за реализация на софтуерни системи, УИ „Св. Климент Охридски“, София 2010, 432 страници, ISBN 9789540729992
- [3] Стоянов, Б. (2008). Информационни системи, ШУ „Еп. Константин Преславски“, Факултет „Математика и информатика“, 195 стр., Шумен, 2008, ISBN 9789545774973
- [4] Todorova, M., Kutsarov, A., Kordov, K. (2019). Patient information software designed for medical specialists. *Mathematical and Software Engineering*, 5(2), 34-38.
- [5] Kordov, K., Eminov, D. (2018). Applied Software for Managing a Small Business. *Mathematical and Software Engineering*, 4(1), 12-17.
- [6] Кордов, К., Ислям, Б. (2018). Мобилен софтуер за управление на поръчки. МАТТЕХ 2018 СБОРНИК НАУЧНИ ТРУДОВЕ, ТОМ 1, стр. 175-182, Университетско издателство „Епископ Константин Преславски“, ISSN: 1314-3921.
- [7] Станев, С., Железов, С. (2002). Компютърна и мрежова сигурност. Университетско издателство „Епископ Константин Преславски“, ЦДО Шумен.
- [8] Stanev, S., Zhelezov S. (2005). Web-based informational system for information security in small firms – informational and monitorial module, International Conference „Cognitive Modeling in Linguistics“ CML, Varna, 80-85.
- [9] Малчев, Д., Кордов, К. (2014). WEB-Базирана обучаваща система за дистанционно обучение. МАТТЕХ 2014 СБОРНИК НАУЧНИ ТРУДОВЕ, ТОМ 1, стр. 149-154, Университетско издателство „Епископ Константин Преславски“, ISSN: 1314-3921
- [10] Kordov, K. (2015). Modified pseudo-random bit generation scheme based on two circle maps and XOR function. *Applied Mathematical Sciences*, 9(3), 129-135.
- [11] Kordov, K. M. (2014). Modified Chebyshev Map Based Pseudo-random Bit Generator. In *AIP Conference Proceedings*, Vol. 1629, 432-436.
- [12] Kordov, K. (2015). Signature attractor based pseudorandom generation algorithm. *Advanced Studies in Theoretical Physics*, 9(6), 287-293.

PATIENTS INFORMATION SOFTWARE DESIGNED FOR MEDICAL SPECIALISTS – MODULE TWO

MIHAELA D. TODOROVA-KUTSAROVA, ALEKSANDAR S. KUTSAROV AND
KRASIMIR M. KORDOV

ABSTRACT: The paper presents a new module for already developed software designed for medical specialists for managing their patients information. The new module includes all options for patients diagnostics, patients treatments description and receipts management.

KEYWORDS: Software, Medical specialists software, Information system

СОФТУЕР ЗА УПРАВЛЕНИЕ НА МЕДИЦИНСКИ ДАННИ ОТ ЛЕКАР-СПЕЦИАЛИСТ – МОДУЛ ДВЕ*

МИХАЕЛА Д. ТОДОРОВА-КУЦАРОВА, АЛЕКСАНДЪР С. КУЦАРОВ И
КРАСИМИР М. КОРДОВ

АБСТРАКТ: Тази статия представя нов модул за създаден софтуер за управление на пациентска информация, от лекари-специалисти. Новоразработеният модул включва възможности за поставяне на диагнози, назначаване на лечение и издаване на рецепти.

1 Въведение

Бързият прогрес на информационните технологии и развитието на средства за придобиване, обработка и съхраняване на информация, води до необходимостта от разработването и експлоатацията на специализирани софтуерни продукти в различни сфери на работа. Един от най-важните сектори от обществения живот е здравеопазването, където с навлизането на комуникационните и информационни технологии, нуждата от автоматизация за обработка на големи информационни потоци е актуален проблем.

С цел контролиране и управление на работния процес, през последните години в различни медицински институции се внедряват информационни системи, които лесно администрират техните ресурси. По този начин всички процедури – например обработка на пациентска информация, изпращане на заявки за изследвания, получаване на резултатите и тяхното валидиране от лабораторния лекар, връщане на резултатите към кабинета на лекувания лекар се реализират посредством специализиран медицински софтуер, който е изцяло съобразен с нуждите на вида на лечебно заведение.

Медицинска информационна система е комплекс от технологии и методи за планирано събиране, обработка, анализ, архивиране и разпространение на медицински данни и информация. Целите и задачите на информационните системи в медицината и здравеопазването са автоматизиране на информационния процес за постигане на минимален риск от грешки, ускоряване избора на решения, облекчаване на персонала в рутинните дейности, стандартизирани методи за извличане на информация, управление на персонала и финансите, контрол над информацията, и други.

* Настоящата статия е частично финансирана от фонд „Научни изследвания“ на Шуменски Университет „Епископ К. Преславски“ по проект № РД-08-71/22.01.2020.

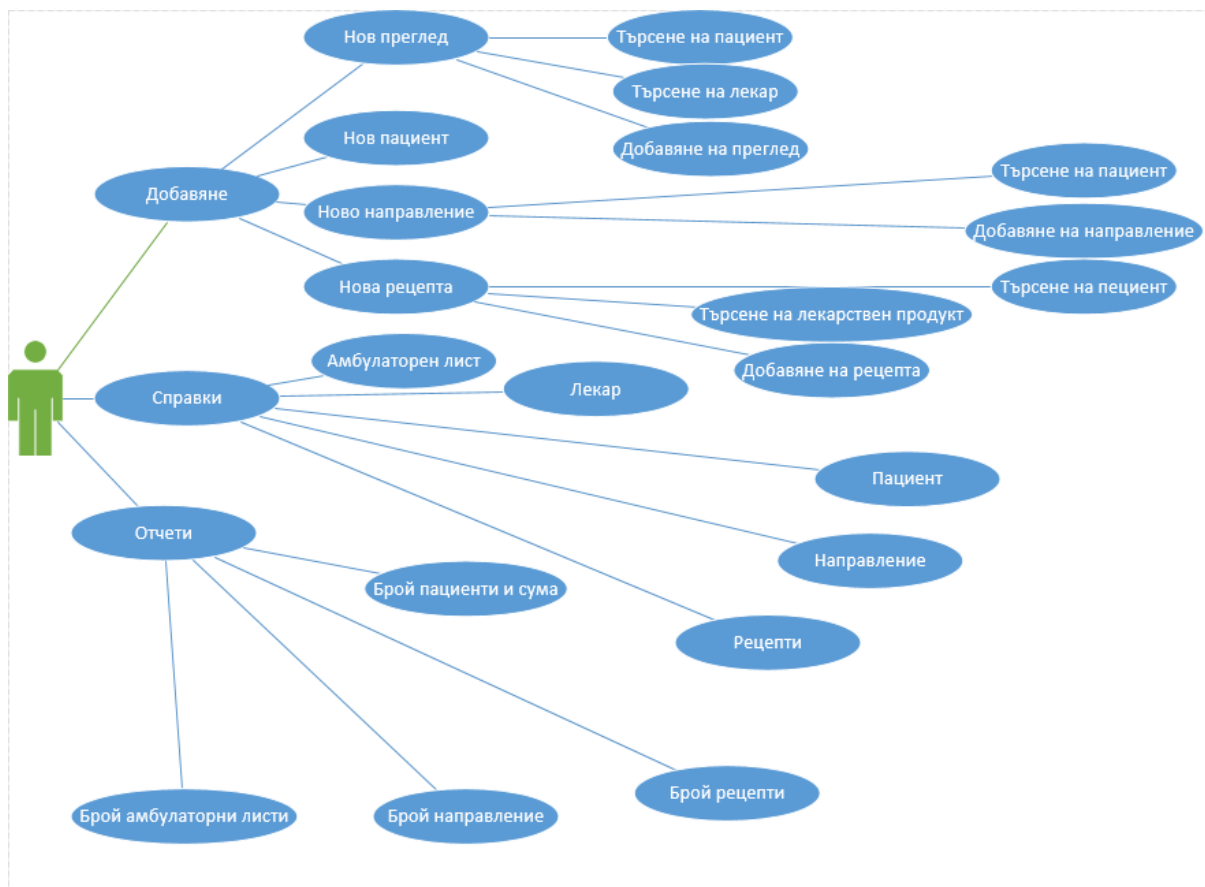
2 Софтуер за управление на медицински данни от лекар специалист AMedical

След анализ на съществуващи медицински софтуерни системи като BetaGP [1], NISSET [2], Хипократ GP [3], Global Medics [4] и др. и предходни разработки на софтуерни системи [5,6,7] е създадена нова софтуерна платформа **AMedical**, предназначена за използване от лекари-специалисти, представена в [8].

AMedical, след първоначалната разработка съдържа основните модули, даващи възможност на лекарите-специалисти да извършват своята дейност:

- Модул за поддържане на пациентска информация;
- Модул за справки;
- Модул номенклатури;
- Сервизен модул;

Административната работа на лекарите-специалисти изисква изпълнението на допълнителни дейности като назначаване на лечения, издаване на направления и рецепти, извършване на справки за издадените направления и обмен на информация със здравноосигурителната каса. Тези дейности са реализирани, чрез изграждане на допълнителни функционалности към вече разработеният медицински софтуер AMedical. На *Фигура 1* са демонстрирани възможностите на потребителя (лекар-специалист).



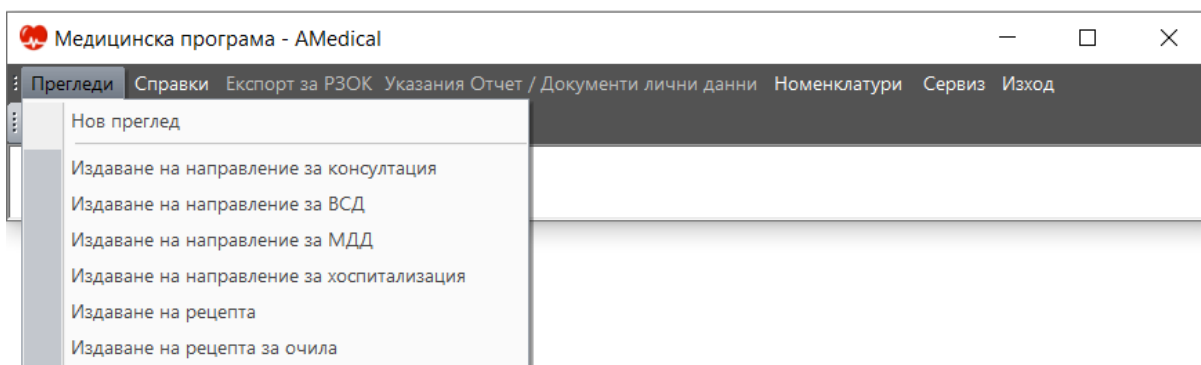
Фигура 1 – Схема на модулите на AMedical

3 Нови модули на AMedical

Новите функционалности (модули) на медицинския софтуер са реализирани чрез допълнение условно наречено – МОДУЛ ДВЕ и включват:

3.1. Назначаване на лечения, издаване на направления и рецепти

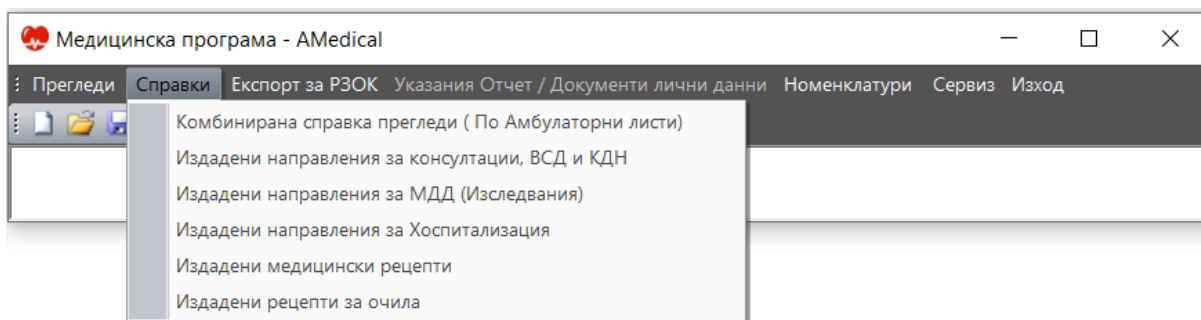
Този модул предоставя възможност за обслужване на пациентите при нов амбулаторен преглед и съхраняване на цялостната информация свързана с тяхното заболяване: създаване на нов амбулаторен лист при преглед, издаване на направление за медико-диагностична дейност (МДД) или така нареченото направление за изследвания, издаване на медицинско направление за друг лекар-специалист, издаване на медицинско направление за високоспециализирана дейност (ВСД), искане за цитологично изследване, направление за хоспитализация, протокол за териториална експертна лекарска комисия (ТЕЛК), етапна епикриза, издаване на медицински рецепти. На *Фигура 2* са показани опциите за издаване на направления и рецепти от лекаря-специалист.



Фигура 2 – Меню за издаване на направления и рецепти

3.2. Справки за издадени направления и рецепти

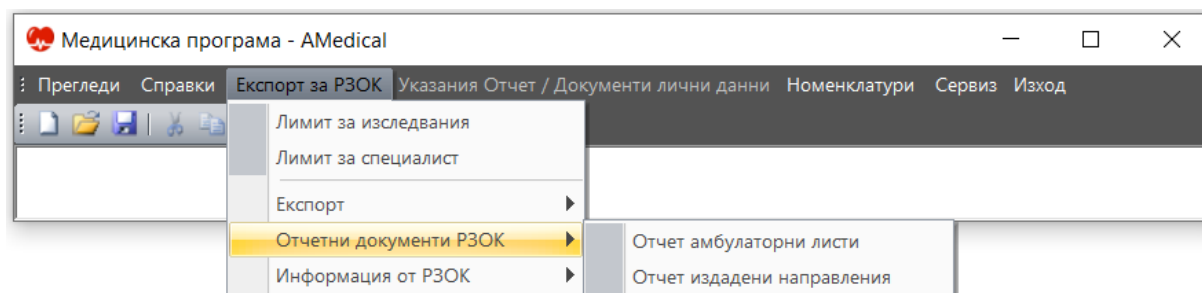
Софтуерът предоставя възможност за комбинирана справка за всички извършени прегледи, справка за издадените направление за консултация, ВСД, МДД и хоспитализация и справка за издадени направления за лекарствени продукти и направления. Възможните справки са показани на *Фигура 3*.



Фигура 3 – Меню справки

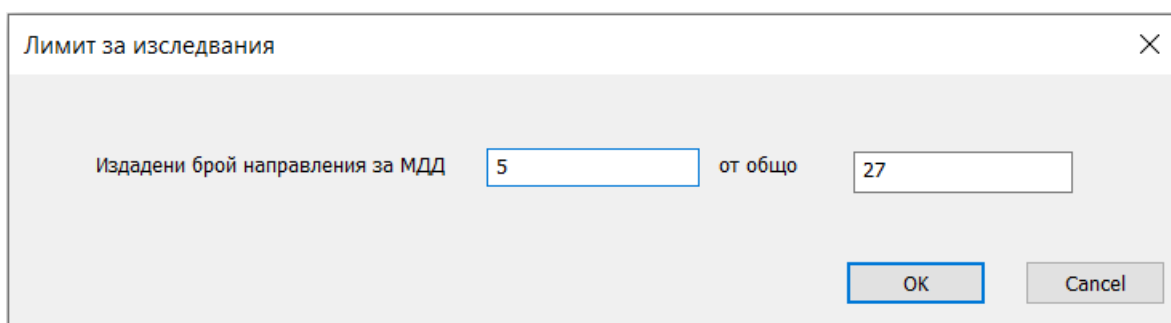
3.3. Експорт на документи към регионалната здравноосигурителна каса и справка за лимити на издадени направления

Чрез този модул лекарят може да прави проверка на лимитите за направления, подадени от здравноосигурителната каса, да изпраща документи и отчети към регионалната здравноосигурителна каса за извършените амбулаторни прегледи и издадените направления за изминалия месец, както и да прави проверка за подадените нормативни документи от здравната каса.



Фигура 4 – Меню за информационен обмен с РЗОК

Пример за проверка на издадени направления за тримесечието спрямо разрешения лимит от РЗОК е показан на *Фигура 5*.



Фигура 5 – Проверка на лимит за направления за МДД.

Насоки за бъдещо развитие на софтуера

Връзката на медицинският софтуер със здравноосигурителната каса се осъществява с цел трансферът на лични данни на пациенти и лекари. Важността на тази информация може да изисква повишаване на сигурността, чрез използване на криптиран трансфер на информацията [9-13].

Заклучение

С навлизането на ИТ технологиите в медицината, пред лекарите специалисти вече не стои въпросът дали да използват медицински софтуер, а кой продукт ще бъде най-полезен за работа им. Качествения софтуер за управление на медицински данни на първо място трябва да съхранява подробна пациентска информация. Да дава възможност на лекаря

лесно и бързо да записва информацията при преглед, поставената диагноза, лечението, което е определил. Поради тази причина след проучване на спецификата и изискванията, които една медицинска система за обработка на пациентска информация трябва да притежава и на базата на разгледаните най-използвани медицински софтуери, в настоящата статия е представен софтуер за управление на медицински данни от лекар специалист, допълнен с нов модул, съдържащ възможности за лесно поставяне на диагнози, определяне на лечение и предписване на рецепти.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] URL: <https://www.bgbit.com/> - BetaGP medical software official page (посетен на 05.06.2020г.)
- [2] URL: <http://nisetbg.com/> - medical software official page (посетен на 05.06.2020г.)
- [3] URL: <http://hippocrates.kontrax.bg/hippocrates-gp> - GP medical software official page (посетен на 05.06.2020г.)
- [4] URL: <https://www.globalmedics.com/> - Global Medics medical software official page (посетен на 05.06.2020г.)
- [5] Kordov, K., Eminov, D. (2018). Applied Software for Managing a Small Business. *Mathematical and Software Engineering*, 4(1), 12-17.
- [6] Кордов, К., Ислям, Б. (2018). Мобилен софтуер за управление на поръчки. МАТТЕХ 2018 СБОРНИК НАУЧНИ ТРУДОВЕ, ТОМ 1, стр. 175-182, Университетско издателство „Епископ Константин Преславски“, ISSN: 1314-3921.
- [7] Малчев, Д., Кордов, К. (2014). WEB-Базирана обучаваща система за дистанционно обучение. МАТТЕХ 2014 СБОРНИК НАУЧНИ ТРУДОВЕ, ТОМ 1, стр. 149-154, Университетско издателство „Епископ Константин Преславски“, ISSN: 1314-3921.
- [8] Todorova, M., Kutsarov, A., Kordov, K. (2019). Patient information software designed for medical specialists. *Mathematical and Software Engineering*, 5(2), 34-38.
- [9] Todorova, M., Stoyanov, B., Szczypiorski, K., Graniszewski, W., Kordov, K. (2019). BentSign: keyed hash algorithm based on bent Boolean function and chaotic attractor. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, 67(3).
- [10] Todorova, M., Stoyanov, B., Szczypiorski, K., Kordov, K. (2018). SHAH: Hash Function based on Irregularly Decimated Chaotic Map. *International Journal of Electronics and Telecommunications*, 64(4), 457-465.
- [11] Kordov, K. (2015). Modified pseudo-random bit generation scheme based on two circle maps and XOR function. *Applied Mathematical Sciences*, 9(3), 129-135.
- [12] Kordov, K. M. (2014). Modified Chebyshev Map Based Pseudo-random Bit Generator. In *AIP Conference Proceedings*, Vol. 1629, 432-436.
- [13] Kordov, K. (2015). Signature attractor based pseudorandom generation algorithm. *Advanced Studies in Theoretical Physics*, 9(6), 287-293.

BUILDING A VIRTUAL MODEL OF PROTECTED INFRASTRUCTURE

MARGARITA C. NIKOLOVA, TEODORA T. STOYANOVA, STANIMIR K. ZHELEZOV,
VIKTORIYA R. YANAKIEVA

ABSTRACT: *Building virtual models of buildings and objects makes it easier to do research in the field of critical infrastructure protection. This reduces the cost of this type of research, and also facilitates the remodeling of the infrastructure and the correct positioning of the objects in it, in order to increase security. Another major advantage of virtual models is their application in education. They contribute to saving huge costs associated with the construction of expensive complexes for practical training. The purpose of the work is based on the analysis of various software tools for creating scenes and objects in a virtual environment, to build a virtual model of secure infrastructure.*

KEYWORDS: *Virtual reality, 3D – modeling, virtual scenes.*

ИЗГРАЖДАНЕ НА ВИРТУАЛЕН МОДЕЛ НА ЗАЩИТЕНА ИНФРАСТРУКТУРА*

МАРГАРИТА Ч. НИКОЛОВА, ТЕОДОРА Т. СТОЯНОВА, СТАНИМИР К. ЖЕЛЕЗОВ,
ВИКТОРИЯ Р. ЯНАКИЕВА

АБСТРАКТ: *Изграждането на виртуални модели на сгради и обекти позволява по-лесно да се правят изследвания в областта на защитата на критични инфраструктури. Това от своя страна води до намаляване на разходите за подобен тип изследвания, а също така облекчава премоделирането на инфраструктурата и правилното позициониране на обектите в нея, с цел повишаване на сигурността. Друго основно предимство на виртуалните модели е тяхното приложение в обучението. Те допринасят за спестяването на огромни разходи свързани с изграждането на скъпо струващи комплекси за практическо обучение. Целта на разработката е на базата на анализирането на различните програмни средства за създаване на сцени и обекти във виртуална среда, да се реализира виртуален модел на защитена инфраструктура.*

1 Въведение

Виртуалната среда (Virtual Environment) е атрактивен и лесно достъпен начин на представянето на интересни обекти пред световната общественост. Виртуалната реалност е компютърно произведена симулация на триизмерна среда, в която потребителят има възможност да разглежда и да взаимодейства със съдържанието на средата. Тя намира все по-широко приложение във всички области на човешкия живот.

Сигурността е функционалното състояние на дадена система, което осигурява неутрализирането и противодействието ѝ на външни и вътрешни фактори, оказващи влияние или можещи да въздействат деструктивно на системата. За постигане на сигурността на дадена система се използват технически средства и системи за охрана и осигуряване. Масовото внедряване на постиженията на научно-техническия прогрес

* Част от представените в тази статия изследванията и резултати са получени при изпълнение на научни задачи по проект BG05M2OP001-1.001-0004 УНИТе („Университети за Наука, Информатика и Технологии в е-обществото“) по Оперативна програма „Наука и образование за интелигентен растеж“.

(информационните и комуникационните технологии, електрониката, производството на специализирани интегрални схеми с висока степен на интеграция), довежда до бурно развитие и приложение на алармените системи. За кратък период от време се регистрират много фирми, осъществяващи комплекс от дейности в това направление - производство, доставка, продажби и монтаж на алармени системи, мониторинг и физическа охрана, проектиране, инженеринг, след гаранционен контрол и поддръжка и др.[1]

Целта на разработката е на базата на анализирането на различните програмни средства за създаване на сцени и обекти във виртуална среда, да се реализира виртуален модел на защитена инфраструктура.

За постигане на тази цел са разгледани нормативните и технически изисквания при изграждане на защитена инфраструктура. Анализирани са основните видове технически средства, характеристики и особености, предназначение, параметри и принцип на работа. Разгледани са инструменталните средства за разработка на виртуалната сцена. Разгледани са различни софтуери, чрез които става създаването на проекти във виртуална среда и са анализирани техните плюсове и минуси. На базата на този сравнителен анализ на различните софтуери е избран най-подходящия за целите на текущата разработка.

2 Системи за видеонаблюдение.

Системите за сигурност се проектират с цел ограничаване на достъпа до обекти с ценни предмети и информация, следене и контрол на човекото потока през площите на даден обект, сигнализиране при нарушаване на установените ограничения, лесна идентификация на нарушителя, както и документиране на нарушението. Всяка от гореописаните цели се реализира от отделна подсистема, като всички подсистеми в общият случай образуват цялостна система за сигурност на обекта, като взаимодействат помежду си и обменят информация.

Предимства на системата:

- ✓ Предотвратяване на загуби от кражби и изтичане на информация;
- ✓ Повишаване на вътрешния контрол;
- ✓ Улесняване при откриването на нарушители.

Видовете охранителни системи са:

- Сигнално-охранителни системи – С използването на подобен род системи се цели предотвратяване на злонамерен достъп до площи от обекта или целия обект, посредством устройства за детекция на движение в охраняемите обекти, детекция на проникване откъм периферията на обекта, чрез охрана на стъклените площи, врати, леки стени и др. След обработка, регистрираните сигнали се препращат към организация за централизиран мониторинг за вземане на мерки.
- Системи за видеонаблюдение – Състоят се от взаимодействащи помежду си устройства за заснемане на видеопоток, устройства за събиране и визуализация на изображенията и устройства за запис на получените сигнали. Подобен род системи са незаменими при изграждане на охрана на обекти от голям и среден мащаб с наличие на локална физическа охрана. Тази система следи през цялото денонощие за това, което се случва в критично важните точки от наблюдавания обект.
- Системи за контрол на достъп и работно време – От една до хиляди врати могат да бъдат контролирани от системите за контрол на достъп. Всеки, който трябва да има достъп ще получи карта, чрез която по безконтактна технология ще може да получава достъп до желани помещения, през желани

дни и в желани часове. Контролирането на работното време на персонала също е лесна задача за системите, които се предлагат, като това е особено подходящо при заплащане по часови ставки. В разглеждания проект, поради спецификата на обекта – сграда със сървърно помещение, комплексната система ще се състои от комбинирани средства без такива за контрол на достъп и работно време.[2]

Популярността на системите за видеонаблюдение нараства, поради все по-голямата необходимост от сигурност, а също така и заради все по-ниските цени и по-високото качество в сравнение с некомпютърните охранителни решения.

Приложението им е много широко – могат да се използват, както за охрана на частен дом или на отделна стая, така и на обширен обект, а все по-често се прилагат и за наблюдение и контрол на влизащите във фирмения офис.

Видеонаблюдателните системи са предназначени за визуално наблюдение на обекти с помощта на видеокамери. Представяват комплекс от няколко основни компоненти – една или повече видеокамери, устройство за обработка, предаване и запис на данните, сървър за видеонаблюдение или мрежов видеосървър, както и монитор за изобразяване на видео данните. В тези системи се включват и различни аксесоари. Така изградени, системите позволяват да се следи един или едновременно няколко обекта. В зависимост от сложността им, позволяват не само наблюдение на обекти, но и запис на получената информация, нейната последваща обработка и съхраняване.

Целите на видеонаблюдението могат да бъдат различни – сигурност и охрана, развлечение, видеоконферентни комуникации. Конкретните приложения са: контрол, информираност, координиране на дейности, следене на трафик и много други. Обект на наблюдение обикновено е пространството около и в сгради.[2, 3]

3 Среди за изграждане на виртуални обекти и сцени.

Проектирането на сгради, къщи, апартаменти, индивидуални стаи е доста широка и сложна дейност. Не е изненадващо, че пазарът на специален софтуер за решаване на архитектурни и дизайнерски проблеми е много богат. Пълнотата на проекта зависи изцяло от задачите на отделния проект. В някои случаи е достатъчно да се разработи решение за скица, други не могат да се справят без пълен набор от работни документи, за създаването на които работят няколко специалисти. За всяка от задачите можете да изберете конкретен софтуер, базиран на неговата цена, функционалност и лекота на използване.

Това, което всички разработчици на програми се съгласяват е, че създаването на проекта трябва да отнеме възможно най-малко време и софтуерът трябва да бъде възможно най-ясен и удобен за потребителя.

Разгледани са някои от най-популярните софтуерни инструменти, предназначени да помогнат при проектирането на сгради.[4, 5]

ArchiCAD

Към днешна дата ArchiCAD е една от най-мощните и пълни дизайнерски програми. Тя има мощна функционалност, от създаването на 2D примитиви до създаването на високо реалистични визуализации и анимации. Скоростта на създаването на проекта се осигурява от факта, че потребителят може да изгради триизмерен модел на сградата, след което да получи от него всички чертежи, оценки и друга информация. Разликата от подобни програми е гъвкавост, интуиция и наличието на голям брой автоматизирани операции за създаване на сложни проекти.[6]

ArchiCAD осигурява пълен цикъл на проектиране и е предназначен за специалисти в тази област. Струва си да се отбележи, че за цялата си сложност ArchiCAD има приятелски и модерен интерфейс, така че изучаването му не отнема много време и нерви.

Сред недостатъците на ArchiCAD може да се нарече нуждата от компютър с умерена и висока производителност, така че за леки и по-малко сложни задачи, трябва да изберете друг софтуер.[6]

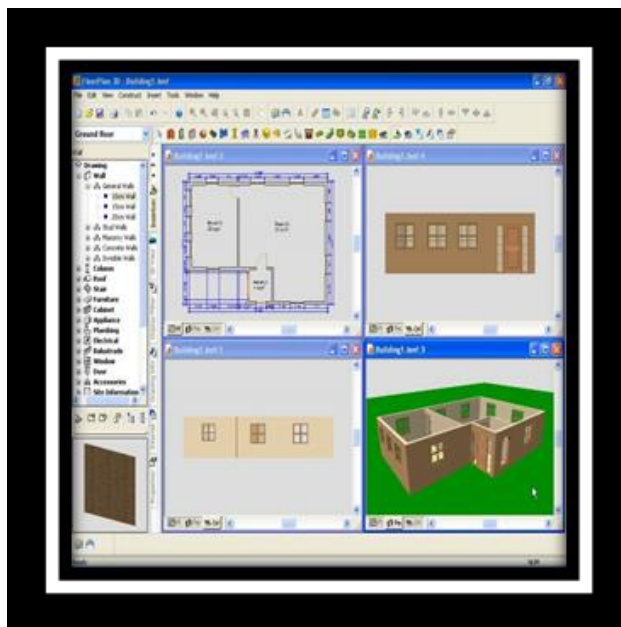
Предимства:

- Възможност за провеждане на пълен цикъл на проектиране от проекторешения до освобождаване на чертежите за строителство;
- Висока скорост на създаване и редактиране на проектна документация;
- Способност за работа в екип по проекта;
- Функцията за обработка на данни на фона ви позволява да правите бързи изчисления на компютри със средна производителност;
- Приятелска и удобна работна среда с много настройки;
- Възможност за получаване на висококачествена 3D визуализация и анимация;
- Възможност за енергийна оценка на сградния проект;

Недостатъци:

- Ограничено време за безплатно ползване на програмата;
- Сложността на моделирането на нестандартни елементи;
- Недостатъчна гъвкавост при взаимодействие с други програми. Файлове с неподходящи формати могат да се показват неправилно или да причинят неудобства при използването им;

FloorPlan3D



Фиг. 1 Изглед на FloorPlan3D

Програмата FloorPlan3D ви позволява да създадете триизмерен модел на сграда, да изчислите площта на помещенията и броя на строителните материали. В резултат на работата, потребителят трябва да получи скица, достатъчна, за да се определи обема на строителството на къщата.

FloorPlan3D няма такава гъвкавост в работата си като ArchiCAD, има морално остарял интерфейс и на някои места нелогичен алгоритъм на работа. Инсталира се бързо, позволява бързо да се изготвят прости планове и автоматично да се създават дизайни за прости обекти.[7]

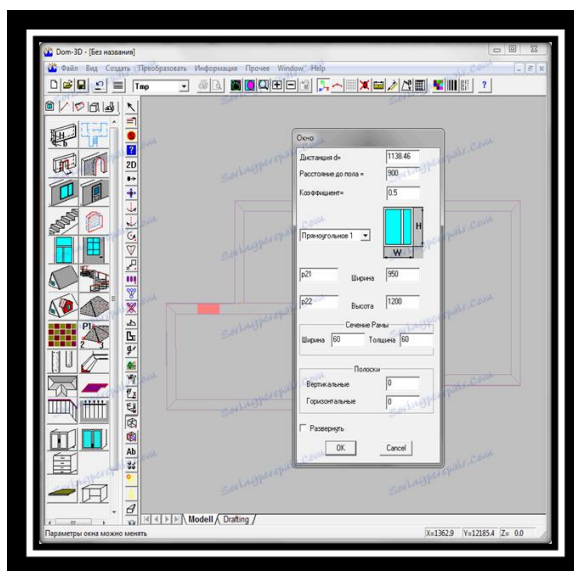
Предимства:

- Компактност на твърдия диск и възможност за работа с компютри с ниска производителност;
- Удобен алгоритъм за изчертаване на план на сградата;
- Автоматично изчисляване на помещенията и материалите;
- Наличие на инструменти за ландшафтно проектиране;

Недостатъци:

- Отменен интерфейс;
- Неудобно внедрена навигация в триизмерен прозорец;
- Примитивен механизъм за визуализация;
- Безплатните версии на разпространение нямат рушифицирано меню;

Номе 3D



Фиг. 2 Изглед на Номе 3D

Безплатното приложение Номе 3D е предназначено за онези потребители, които искат бързо да овладеят процеса на групово моделиране у дома. С помощта на програмата можете да изготвите план дори на слаб компютър, но с 3D модел ще Ви е трудно - понякога работният поток е труден и нелогичен. Компенсирайки този недостатък, Номе 3D може да се похвали с много сериозна функционалност за ортогонално рисуване.

Програмата няма параметрични функции за изчисляване на оценки и материали, но очевидно тя не е толкова важна за нейните задачи.[8]

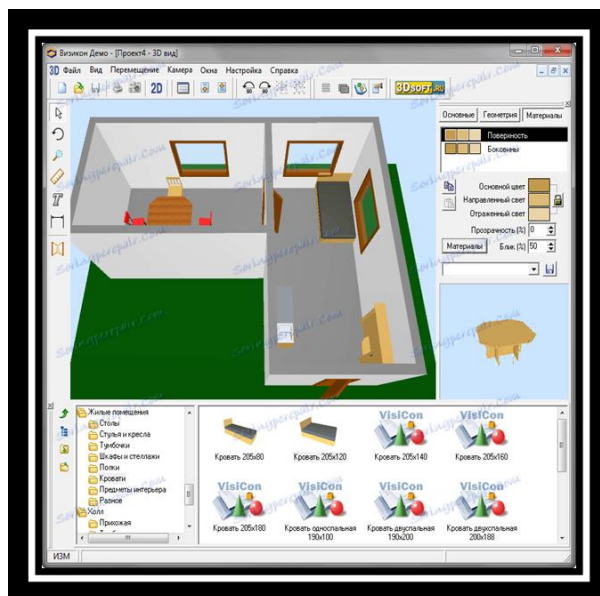
Предимства:

- Програмата е напълно безплатна с интерфейса на руски език;
- Удобно редактиране на стените в плана;
- Широки възможности за двуизмерно рисуване;
- Възможност за редактиране на елементи в триизмерен прозорец;

Недостатъци:

- Морално остарял интерфейс;
- Твърде малки икони с нечетливи пиктограми;
- Нелогичен алгоритъм за изтриване на обекти и анулиране на операции;
- Неудобна характеристика на избора на обект;

Visicon



Фиг. 3 Изглед на Visicon

Приложението Visicon е прост софтуер за интуитивно създаване на виртуални интериори. С помощта на ергономична и разбираема работна среда, може да създадете пълен триизмерен интериор. Програмата има доста голяма библиотека от интериорни елементи, но повечето от тях са недостъпни в демо версията.[9]

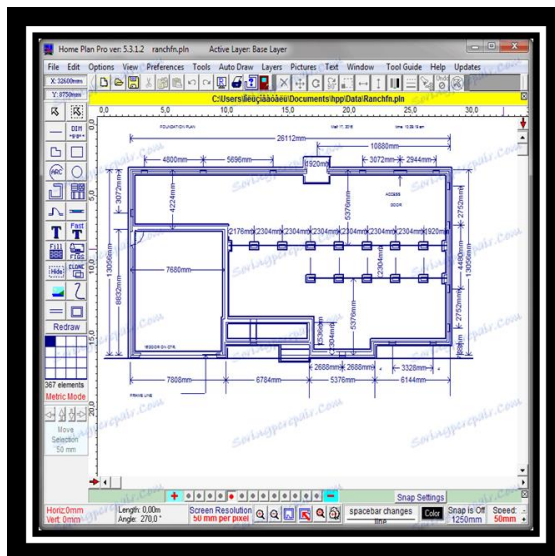
Предимства:

- Рускоезичен интерфейс
- Наличие на създадени по-рано шаблони;
- Ясна и удобна работна среда;
- Удобен процес на преместване на камерата в триизмерен прозорец;
- Наличие на мини прозорец за предварителен преглед на елемента;

Недостатъци:

- Безплатно е само демо версия с ограничена функционалност;
- Няма възможност за редактиране на елементи в прозореца на 3D изображение;

Home Plan Pro



Фиг. 4 Изглед на Home Plan Pro

Тази програма е истински "ветеран" сред CAD приложенията. Разбира се, морално остарелият и не много функционален Home Plan Pro е трудно да надмине своите съвременни конкуренти. И все пак, това просто софтуерно решение за проектиране на къщи може да бъде полезно в някои ситуации. Например, той има добра функционалност за ортогонално рисуване, голяма библиотека от предварително начертани двуизмерни примитиви. Това ще помогне за бързо изготвяне на визуален чертеж на плана с поставянето на конструкции, мебели, инженерни мрежи и други неща.[10]

Предимства:

- Лесен алгоритъм на работа, който не изисква дълго проучване;
- Наличие на голям брой предварително конфигурирани елементи;
- Функция за автоматично чертане;
- Компактност на интерфейса;
- Възможност за запазване на чертежи в растрни и векторни формати;

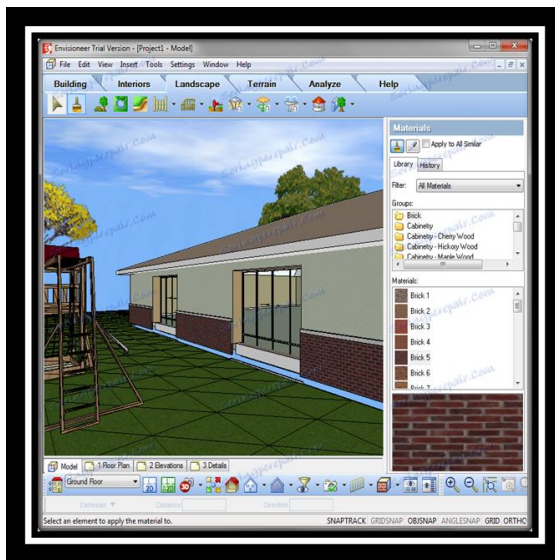
Недостатъци:

- За днес програмата изглежда морално остаряла;
- Ограничена функционалност в сравнение със съвременните програми за проектиране на сгради;
- Свободният период на използване на програмата е ограничен до 30-дневен период;

Envisioneer Express

Забележително е приложението Envisioneer Express. Подобно на ArchiCAD, тази програма ви позволява да поддържате пълен цикъл на проектиране и да получавате рисунки и оценки от модела на виртуална сграда.

В сравнение с Archicad работното пространство на Envisioneer Express не изглежда толкова гъвкаво и интуитивно, но има няколко предимства на тази програма, която архитектите могат да завидят. Първо, Envisioneer Express има удобен и функционален инструмент за създаване и редактиране на пейзажи. На второ място, има огромна библиотека от растения и елементи на уличния дизайн.[11]



Фиг. 5 Изглед на Envisioneer Express

Предимства:

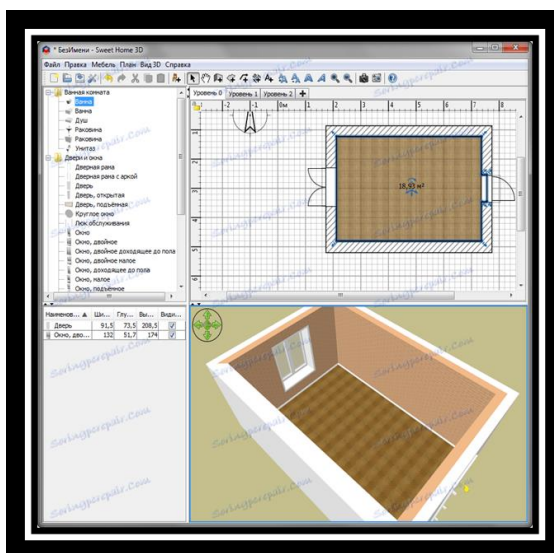
- Възможност за провеждане на пълен цикъл на проектиране от проекторешения до освобождаване на чертежите за строителство;
- Висока скорост на създаване и редактиране на проектна документация;
- Функцията за обработка на данни на фона ви позволява да правите бързи изчисления на компютри със средна производителност;
- Приятелска и удобна работна среда с много настройки;
- Възможност за получаване на висококачествена 3D визуализация и анимация;
- Огромна библиотека от растения и елементи на уличния дизайн;
- Удобен и функционален инструмент за създаване и редактиране на пейзажи;

Недостатъци:

- Ограничено време за безплатно ползване на програмата;
- Недостатъчна гъвкавост при взаимодействие с други програми. Файлове с неподходящи формати могат да се показват неправилно или да причинят неудобства при използването им;
- Работното пространство не изглежда толкова гъвкаво и интуитивно;

Sweet Home 3D

За разлика от Visicon, това приложение се разпространява безплатно и разполага с голяма библиотека за попълване на стаи. Sweet Home 3D е проста програма за проектиране на апартаменти. С негова помощ не само можете да вземете и подредите мебели, но и да изберете покритието на стените, тавана и пода. Сред хубавите бонуси на това приложение е създаването на фотореалистични визуализации и видео анимации. По този начин Sweet Home 3D може да бъде полезен не само за обикновените потребители, но и за професионалните дизайнери да демонстрират своята работа на клиентите.[12]



Фиг. 6 Изглед на Sweet Home 3D

Предимства:

- Пълна безплатна версия
- Възможност за използване на компютри с ниска мощност
- Удобна организация на работното пространство
- Ясен интерфейс и алгоритъм за работа с библиотечни елементи
- Удобна навигация в триизмерен прозорец
- Възможност за създаване на видео анимация
- Функция за показване

Недостатъци:

- Не е много удобен механизъм за редактиране на стените в етаж
- Малък брой библиотечни текстури

Възможностите на Sweet Home 3D могат да бъдат разширявани благодарение на допълнителни модули, които може да се разработят самостоятелно на Java. Тези модули представляват SH3P файлове, записани в plug-ins директорията на Sweet Home 3D.[10]

От разгледаните в този раздел софтуерни решения може да се направи извод, че Sweet Home 3D напълно отговаря на изискванията за реализиране на целите на настоящата разработка. Тази програма е удобна и с дружелюбен интерфейс, и разполага с необходимите за целите на проекта функционалности.

4 Изграждане на виртуалния модел.

На базата на направения анализ на софтуерните системи за решаване на архитектурни и дизайнерски проблеми и предназначени да помогнат при проектирането на сгради избираме програмата Sweet Home 3D.

Несъмнено, сред потребителите на програми, този софтуер изглежда като лидер. Единственият недостатък е малкото текстури, но нищо не им пречи да запълнят присъствието си с такива от Интернет.[12]

Обектът, цел на настоящата виртуализация, е уязвим, понеже в него се намира голямо сървърно помещение, техника и офис, в който се намират контролния панел на охранителната система. Затова се налага изграждането на гарантирана охрана за намаляване на риска от нежелан достъп от външни лица до имуществото на дадения обект. Изборът на план е ключов момент при изграждането на защитена инфраструктура и затова е избран именно Г-образен вариант на сградата, за да се подобри нейната защита и тя да се облекчи, поради спестяването на охранителни елементи.

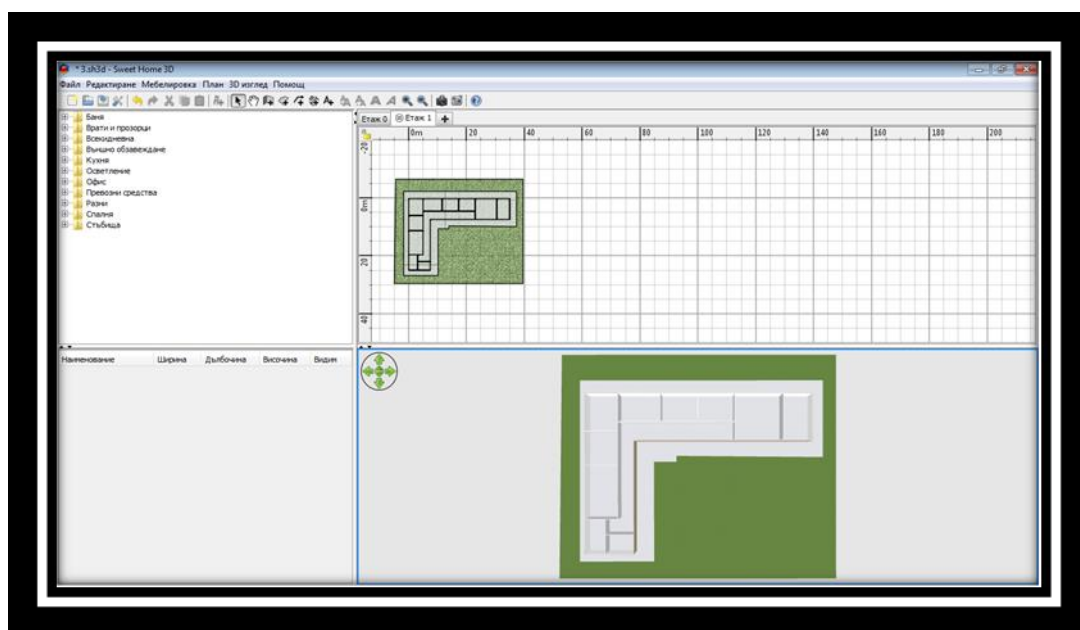
След като планът е вече създаден, може да се начертаят стени, добавят врати, прозорци и мебелировка в него, да се дефинират стаите му, да се добавят допълнителни етажи, да се зададат географските координати, да се начертаят някои оразмерявания и да се добавят текстове. Тъй като 3D изгледът постоянно се синхронизира с промените, които се правят в плана, винаги може да се "разходим" в сградата от плана, за да се види от различни гледни точки.

Всяка сграда се създава на едно основно ниво, но Sweet Home 3D може да работи също и с няколко нива, с възможност за задаване на положително или отрицателно повдигане на нивата спрямо основното ниво.

Виртуалния модел на сградата има три нива. Всяко от тези нива първоначално се създава като слой в програмата, след което в този слой се изграждат съответните елементи.

Първото ниво е основата на сградата с площта около нея. Вторият етаж е самата сграда. Следващото ниво представлява покрива на сградата.

Следващата стъпка е създаване на помещения в сградата. Създават се стени, които да разграничат всички отделни стаи. В сградата ще има 4 лаборатории, конферентна зала, сървърно помещение, тоалетна, тоалетна за инвалиди, кабинет и помещение за физическа охрана (фиг. 7).

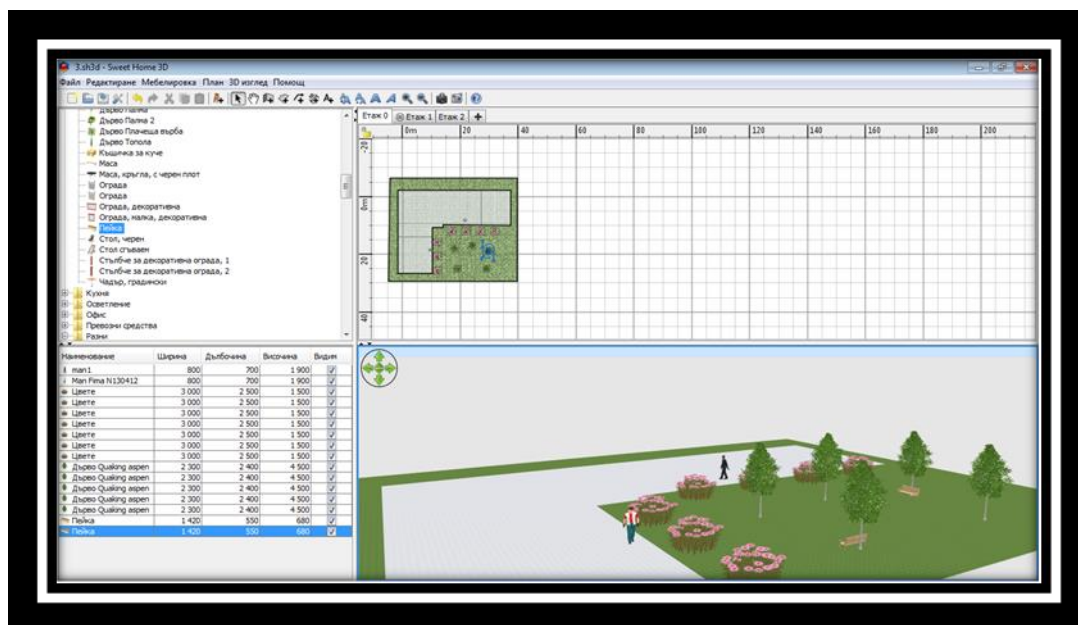


Фиг. 7. Изграждане на всички стени в сградата

След като са моделирани трите нива: тревна площ, сграда и покрив, следва поставянето на интериорни и екстериорни обекти в тях.

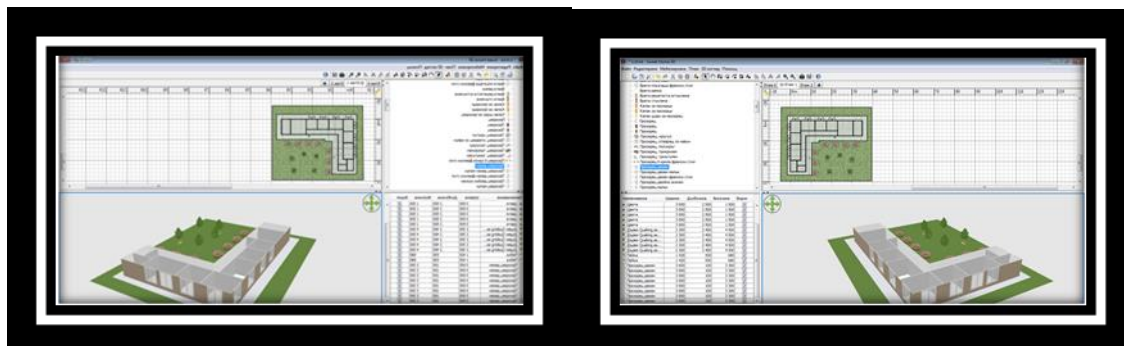
Започва се с първият етаж, а именно поставянето на дървета, цветя, пейки и хора (Фиг. 8).

Поставянето на мебелировка в плана става чрез използване на обекти от каталога или в плана, или в списъка с мебелировка.



Фиг. 8. Добавяне на обекти в плана

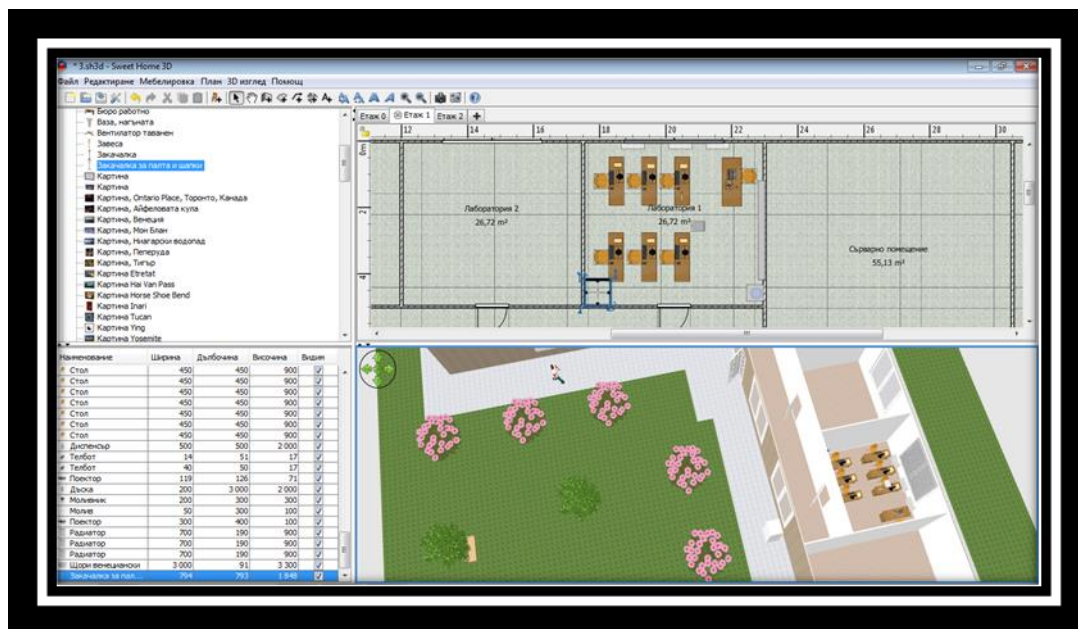
Стартира се с поставянето на прозорците на сградата. На всички четири лаборатории се поставя по един прозорец, а на конферентната зала и на кабинета- по два. Тоалетните, сървърното помещение и това за физическата охрана са без прозорци (фиг. 9).



Фиг. 9. Поставяне на прозорци на сградата

Параметрите на всички прозорците се променят. Променят се височината, ширината, дълбочината и повдигането. Всеки един прозорец е поставен точно в средата на стената на съответната стая.

На Фиг. 10 е показано обзавеждането на една от лабораториите. Поставят се бюра, столове, компютри, монитори, клавиатури, мишки, лаптоп, канцеларски материали, интерактивна дъска, проектор, диспенсър за вода, радиатори, щори, закачалка за дрехи, ключ за осветление и самото осветление.

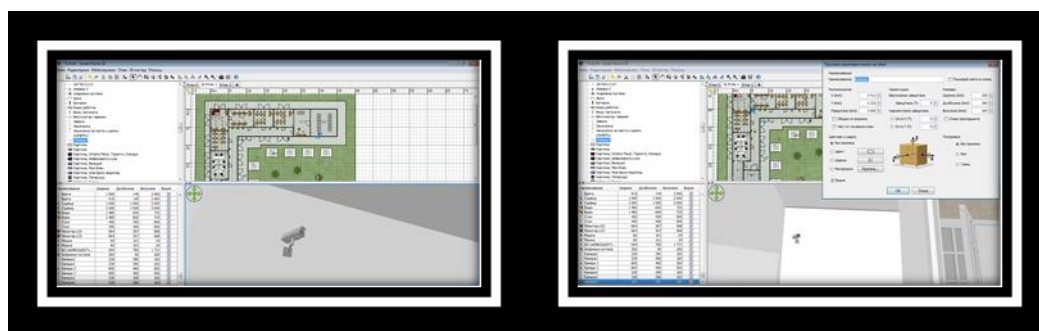


Фиг. 10. Обзавеждане на Лаборатория 1

По аналогичен начин се обзавеждат всички останали лаборатории, конферентната зала, кабинетът, тоалетните, помещението за физическа охрана и сървърното помещение (фиг.11).

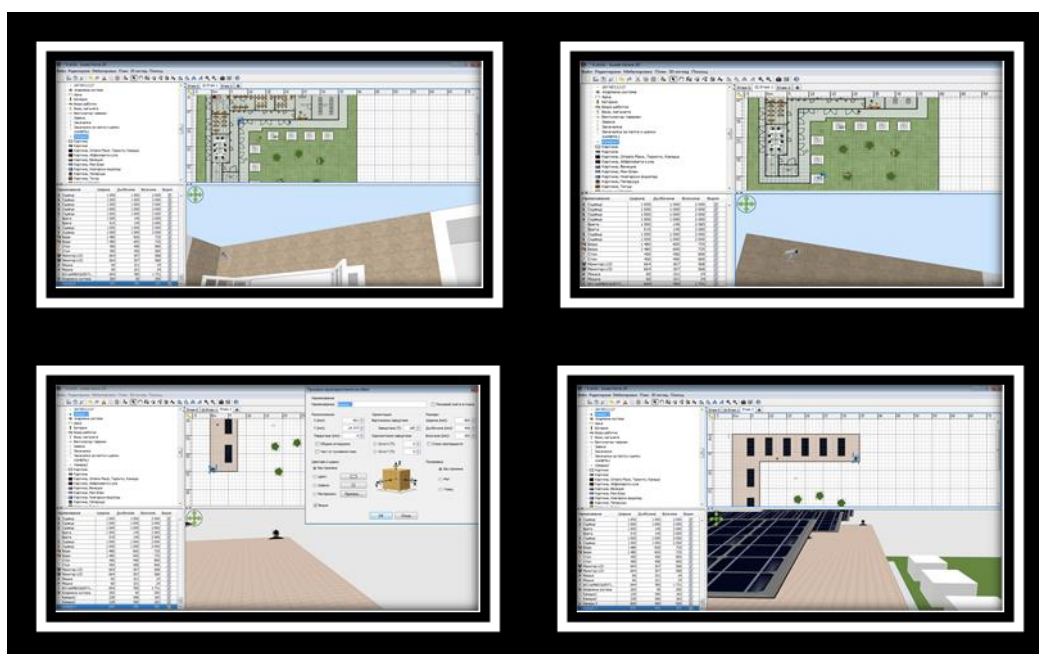
от нараняване и разрушаване. За покрива кабелите са поставени в алуминиеви декоративни канали, който да предпазят кабелите и същевременно да не нарушават естетическия вид на самия обект.

За видеонаблюдение на закритата част на сградата са предвидени три камери (вътрешни куполни). Една ще бъде поставена до вратата на помещението за охрана, насочена към коридора, в посоката от където може да се стигне до него, в случая и входната врата на сградата. Друга камера ще бъде поставена в сървърното помещение, третата камера се поставя в средата на етаж, с цел наблюдение на останалата част от коридора (фиг.15).



Фиг. 15. Поставяне на камери в закритата част на сградата

За видеонаблюдение на откритите части на сградата са предвидени четири камери (външни куполни) - първата е фокусирана към централния вход на сградата, а втората е фокусирана към тревната площ около сградата. Останалите две камери са позиционирани на покрива на сградата и са програмирани да оповестяват алармено събитие при детекция на движение между 00:00 и 07:00 часа (диапазонът от време, в който сградата е затворена и съответно системата е активирана). Тези камери, които се монтират навън са предвидени да бъдат вандалоустойчиви (фиг.16).



Фиг. 16. Поставяне на камери на откритите части на сградата

За всички камери важи правилото, че трябва да се монтират по-далеч от осветителни тела, за да няма влошаване на картината.

В помещението за физическа охрана ще бъде включен и записващото устройство DVR, освен контролния панел на системата. То има 16 канала, което позволява да се монтират 16 камери на устройството. Те се записват на хард диск 1ТВ, който се монтира допълнително. Към устройството може да се включи монитор. Управлението на системата през монитора става с мишка и дистанционно.

Камерите могат да се настроят да записват само при движение. Това спестява излишните записи, които заемат място на диска. Записващото устройство се свързва с Интернет и по всяко едно време независимо от къде се избира IP адреса на DVR, се наблюдават камерите в реално време. Може да се преглеждат записи и да се свалят на различни носители, в зависимост къде и на кой ще потрѣбват. При такъв достъп няма значение колко потребителя в едно и също време преглеждат записи или гледат камерите. Достъпът е независим един от друг, стига да се знае паролата, която е поставена на устройството.

До входната врата на сградата е поставена клавиатура за активиране и деактивиране на цялостната система за сигурност на обекта (фиг.17).



Фиг. 17. Поставяне на клавиатура за активиране и деактивиране на цялостната система за сигурност на обекта

С това приключва изграждането на виртуалния модел на защитената инфраструктура. Важно е да се отбележи, че избраният софтуерен продукт позволява изграждането на този модел да се направи по много лесен и интерактивен начин. Също така веднъж изготвения модел може да се оглежда и изследва, а също така да се прави виртуална обиколка в него.

5 Заключение.

Изграждането на подобен тип виртуални модели на сгради и обекти позволява по-лесно да се правят изследвания в областта на защитата на критични инфраструктури. Това от своя страна води до намаляване на разходите за подобен тип изследвания, а също така облекчава пре моделирането на инфраструктурата и правилното позициониране на обектите в нея, с цел повишаване на сигурността.

Друго основно предимство на виртуалните модели е тяхното приложение в обучението. Те допринасят за спестяването на огромни разходи свързани с изграждането на скъпо струващи комплекси за практическо обучение.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Dimanova, D., Kuzmanov, Z., International security standards, Conference proceedings MATTEX 2018. Information, Technical and Economical Problems of Security Systems, October 2018, Shumen, ISSN: 1314-3921, vol. 2, part. 1, pp. 131-138.
- [2] Кузманов, З., Видове контрол – характеристики. Юридически сборник т. XXIII, БСУ, Център по юридически науки, Б., 2016, с., ISSN: 1311-3771.
- [3] Христов, Х., Организацията и управлението на противодействието срещу фирмената сигурност, Сборник научни трудове от „Научна сесия 2013”, Факултет „Артилерия, ПВО и КИС” на НВУ, Шумен, 2013, ISSN: 1313-7433, 2014, ч. I, с. 352-358
- [4] Stoyanov, S., & Zhelezov, S. (2019). New Functionalities of a Virtual Computer Model Design and Construction. Mathematical and Software Engineering, 5(2), 23-33.
- [5] Мирев, К., Железов, С., 3D МОДЕЛИРАНЕ И ВИРТУАЛИЗАЦИЯ НА КОМПЮТЪРЕН МУЗЕЙ, Сборник студентски научни публикации, Факултет по математика и информатика, 2019, стр. 47 - 60.
- [6] ARCHICAD 24 Reference Guide, Help Center, Graphisoft (2020) online: <https://helpcenter.graphisoft.com/user-guide-chapter/85451/>
- [7] Floorplanner Drawing Manual, IMSI Design, online: <http://www.hart.k12.ky.us/userfiles/1195/Classes/20764/FloorplannerManualEN.pdf>.
- [8] Home 3D Help for Windows, online: <https://www.livehome3d.com/support/lh3d-win-help/en/>.
- [9] Visicon The smarter model review and validation solution, User Guide, Visicon Inc., online: <https://visicon.com/downloads/Visicon1.3.1UserGuide.pdf?189db0&189db0>.
- [10] Home Plan Pro, CAD software, online: <http://homeplanpro.com/>.
- [11] Envisioneer Express, User Manual, online: https://www.cadsoft.com/wp-content/uploads/envisioneer14_userguide.pdf.
- [12] Sweet Home 3D, User's guides, online: <http://sweethome3d.com/documentation.jsp>.

AN APPROACH FOR BUILDING SYMMETRIC CRYPTOGRAPHIC ALGORITHMS FOR VIDEO ENCRYPTION IN MATLAB SOFTWARE

GEORGI G. DIMITROV

ABSTRACT: *In this article, an approach for processing video files in the MATLAB software environment is shown. This approach gives the opportunity to build symmetric cryptographic algorithms to protect this type of files in order to ensure their secure storage in computer systems and safe transfer over computer networks.*

KEYWORDS: *symmetric cryptographic algorithms, video encryption, video processing in MATLAB.*

ПОДХОД ЗА ИЗГРАЖДАНЕТО НА СИМЕТРИЧНИ КРИПТОГРАФСКИ АЛГОРИТМИ ЗА КРИПТИРАНЕ НА ВИДЕО ФАЙЛОВЕ В ПРОГРАМНАТА СРЕДА НА MATLAB

ГЕОРГИ Г. ДИМИТРОВ

АБСТРАКТ: *В настоящата статия е показан подход за обработка на видеофайлове в програмната среда на MATLAB. Този подход дава възможност за изграждане на симетрични криптографски алгоритми за защита на този вид файлове, с цел да осигури тяхното сигурно съхраняване в компютърни системи и безопасен трансфер в компютърни мрежи.*

КЛЮЧОВИ ДУМИ: *симетрични криптографски алгоритми, видео криптиране, видео обработка в MATLAB*

1 Въведение

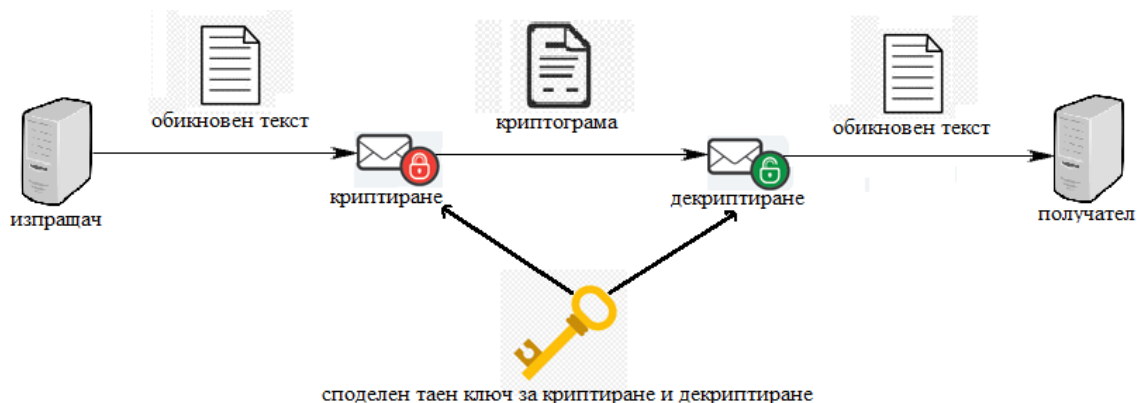
В днешно време развитите технологии позволяват много бърза комуникация. Те позволяват обмен на информация във вид на текст, снимки или видео буквално за секунди. Криптографията дава възможност на важните съобщения да останат тайни за всички, за които не са предназначени, дори и да попадне в техни ръце. Криптографските алгоритми[1,2] могат да бъдат класифицирани в три основни групи: алгоритми със секретен ключ (симетрични), алгоритми с публичен ключ (асиметрични), алгоритми без ключ. В този доклад ще бъде разгледана същността на симетричните криптографски алгоритми и начинът им за прилагане върху видео файлове в програмната среда на MATLAB.

MATLAB е софтуерен пакет, създаден от Math Works Inc.[3] Неговите възможности за аналитични преобразувания и числени пресмятания с помощта на вградените математически функции го правят добър инструмент при разработването на криптографски алгоритми, които се базират именно на математически операции.

2 Симетрични криптографски алгоритми

Симетричните криптографски алгоритми[4,5] използват един и същ ключ за криптиране (шифриране) и декриптиране (дешифриране) на информацията. Ключът трябва да е известен и на криптиращата и на декриптиращата страна, затова той трябва да се съхранява на надеждно място, да се разпространява внимателно и периодично да се обновява с цел подобряване на сигурността. Фигура 1 представя графично пътят на едно

съобщение, осъществено със симетрична криптографска система – структура, имаща за цел да защити информацията от неправомерен достъп и включваща набор от симетрични криптографски алгоритми за криптиране, декриптиране и генериране на ключове.



Фигура 1. Комуникация, осъществена чрез симетрична криптографска система

3 Видео криптиране в програмната среда на MATLAB

MATLAB предоставя много възможности за работа с различни типове файлове[6]. Една от тях е обработката на видео файлове[7], към която може да се приложат различни методи за криптиране.

Изображенията са основната структурна единица на всеки видео файл. Всеки кадър е съставен от пиксели с различен цвят, а всеки пиксел представлява комбинация от цветовете червено, зелено и синьо. Ако се разгледа пиксела като 24-битова стойност, както е при цветните изображения, то той ще има три последователни стойности с големина 8 бита в диапазона от 0 до 255, характеризиращи съответно червеното, зеленото и синьото (RGB).

При шифрирането на видео файла самото създаване на тайния ключ може да се осъществи в самия криптографски алгоритъм с помощта на псевдослучайни генератори [8-11], които генерират последователности от битове, като така се избягва нуждата от съхранението на ключа. При използването на симетричен криптографски алгоритъм се използва един и същ ключ за криптиране и декриптиране, затова е достатъчно да се изпълни същия алгоритъм върху криптограмата, за да получим отново видео файла в първоначалния му вид.

MATLAB разполага с обектите VideoReader и VideoWriter, с чиято помощ може да се осъществи криптирането на видео файл.

Първата стъпка е „прочитането“ на входящ видеофайл и създаването на нов празен видеофайл по следния начин:

```
reader = VideoReader ('input.avi');
writer = VideoWriter ('output.avi', 'Uncompressed AVI');
```

По този начин са избрани имената на входния и изходния файл - съответно *input.avi* и *output.avi*, а за вид компресия на новосъздадения видео файл е избран – *Uncompressed AVI*.

Важно е да се отбележи, че ако не се посочи вид компресия за запис на видео файла, по подразбиране MATLAB ще избере *Motion JPEG AVI*.

Следващата стъпка е да изравним кадрите в секунда на видео файловете – входния файл и резултатния криптиран/декриптиран файл. Тази стъпка е необходима за да се запази същата структурата при крайния видеофайл. Приравняването на кадрите в секунда се извършва, чрез:

```
writer.FrameRate = reader.FrameRate;
```

За обработка на всеки кадър е необходимо да се извлече общия брой на кадрите от началното видео, което се извършва чрез:

```
frames = get (reader, 'NumberOfFrames');
```

Обработката на новосъздадения видео файл за запис (в който се извършва криптиране/декриптиране) се осъществява чрез:

```
open (writer);
```

Прихващането на кадър от видеофайл се извършва чрез:

```
frame = read (reader, 1);
```

Вторият параметър във функцията *read*, показва номерът на кадърът, който се обработва.

Прихванатият кадър се третира като статично растерно изображение, което се обработва при процеса на криптиране или декриптиране. Растерните изображения са структурирани по специфичен начин, като изграждащите структурни единици се наричат пиксели, които се идентифицират с местоположение в изображението (номер на ред и номер на колона) и цветова стойност (състояща се от стойност за червен, зелен и син цвят). С два оператора за цикъла *for* се обхождат всички пиксели на съответния кадър, като за всеки пиксел извличаме стойностите на червено, зелено и синьо в битове (RGB) и се променя тяхната цветова стойност с помощта на криптографски алгоритъм по избор, като по този начин криптираме съдържанието на кадъра:

```
for j = 1:rows
    for i = 1:columns
        R = frame (j, i, 1); %червено
        G = frame (j, i, 2); %зелено
        B = frame (j, i, 3); %синьо
```

```
    frame(j, i, 1) = getNewValue(R);  
    frame(j, i, 2) = getNewValue(G);  
    frame(j, i, 3) = getNewValue(B);  
end  
end
```

След промяна на цветовите стойности на всички пиксели, новополученият кадър се записва в изходния видеофайл чрез:

```
writeVideo(writer, frame);
```

Тези операции се прилагат за всички кадри на видеофайлът. Прихващането на всички кадри може да се извърши отново чрез оператор за цикъл *for*, като за начало се използва стойност 1, а за крайна стойност - *frames*. След като обработката на всички кадри, затварянето и записването на крайният видеофайл се извършва чрез:

```
close(writer)
```

По този начин се извършва криптиране / декриптиране на видео файл с помощта на симетричен криптографски алгоритъм в програмната среда на MATLAB. Използвайки симетричен криптографски алгоритъм, трябва да имаме в предвид следното:

- 1) При криптиране: входният файл е оригиналният видео файл, а изходният файл – криптираният видео файл (криптограмата).
- 2) При декриптиране: входният файл е криптираният видео файл (криптограмата), а изходният файл – оригиналният видео файл

4 Заключение

Реализацията на криптографски алгоритми е свързана с използването на програмни среди за обработка на информацията. В настоящата статия е демонстриран подход за изграждане на симетрични криптографски алгоритми за защита на видеофайлове, чрез използване на програмната среда MATLAB. Демонстрирани са методите за видео обработка със средствата на математическия софтуер, като са описани стъпките за прихващане на кадрите на видеофайловете и обработката на пикселите на всеки кадър. При модификацията на пикселите могат да се приложат криптографски методи за промяна на местоположението на пикселите и промяна на тяхната цветова стойност.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Нонинска, И., Криптография (Алгоритми и протоколи за защита на информацията в компютърните системи). Технически университет - София (2005).
- [2] Тужаров Хр., Архитектура на сигурността. Асеновци (2010).
- [3] URL: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html> - официален сайт на MATLAB (посетен на 20.09.2020)
- [4] Delfs H., Knebl H., Symmetric-Key Cryptography. In: Introduction to Cryptography. Information Security and Cryptography. Springer, Berlin, Heidelberg (2015), 11-48.

- [5] Bokhari, M.U., Shallal, Q.M., A Review on Symmetric Key Encryption Techniques in Cryptography. In: International Journal of Computer Applications (0975-8887), Vol. 147 – No.10, August (2016).
- [6] Gilat, A., MATLAB: An Introduction with Applications. Wiley, 5th Edition (2014).
- [7] Marques, O., Practical Image and Video Processing Using MATLAB. Wiley-IEEE Press (2011).
- [8] Kordov, K. Modified pseudo-random bit generation scheme based on two circle maps and XOR function. Applied Mathematical Sciences, 9(3), 129-135 (2015).
- [9] Kordov, K. M. Modified Chebyshev Map Based Pseudo-random Bit Generator. In AIP Conference Proceedings, Vol. 1629, 432-436 (2014).
- [10] Kordov, K. Signature attractor based pseudorandom generation algorithm. Advanced Studies in Theoretical Physics, 9(6), 287-293 (2015).
- [11] Kordov, K. A novel audio encryption algorithm with permutation-substitution architecture. Electronics, 8(5), 530 (2019).

ABOUT THE PROJECT WORK: "EDUCATION FOR TOMORROW"

SVETLA D. MILEVA, HRISTO I. PARASKEVOV

ABSTRACT: *In search of new methods and means for training and organization of the learning process in general, new solutions are constantly sought. This article presents the stages of the work and the results of project-based learning of students. It is the basis of the ability to work independently, to take responsibility in performing learning tasks, to gain self-confidence and self-confidence to cope with challenges. The leading place in the arsenal of teaching methods in world and national educational practices is occupied by the methods related to project work.*

KEYWORDS: *Education for tomorrow, Project work, Digitalization in education*

ЗА РАБОТАТА ПО ПРОЕКТ: „ОБРАЗОВАНИЕ ЗА УТРЕШНИЯ ДЕН”*

СВЕТЛА Д. МИЛЕВА, ХРИСТО И. ПАРАСКЕВОВ

АБСТРАКТ: *В търсене на нови методи и средства за обучение и организация на учебния процес като цяло се търсят непрекъснато нови решения. В тази статия се представят етапите от работата и резултатите от проектно базирано обучение на ученици. То е в основата на уменията за самостоятелна работа, на поемането на отговорност при изпълнение на учебните задачи, на придобиването на самоувереност и самочувствие за справяне с предизвикателствата. Водещото място в арсенала от методи на преподаване в световните и националните образователни практики се заема от методите, свързани с работа по проекти.*

1 Въведение

Основната цел на проекта е въвеждането и поддържането в национален мащаб и популяризирането на референтен модел за насърчаване на придобиването на по-голяма цифрова компетентност и въвеждането на системен и комплексен институционален подход на МОН за интегриране на образователните технологии, както и за насърчаване и мотивация за тяхното използване. С проекта се цели отварянето на образованието и образователните институции към дигиталните технологии чрез внедряването на нови решения за по-добро персонализирано обучение, което да позволи на учителите да предприемат мерки с по-точни и ефективни подходи към всеки отделен учещ и повишаване на мотивацията чрез насърчаване на самостоятелното обучение и самооценка, включително извън класната стая.

Дигитализацията в образованието е приоритет на Европейската комисия. Прилагането на облачни технологии в образованието ще осигури достъпност, актуалност и управление на образователните ресурси - основа за качествено образование. Проектът ще допринесе за решаване на основен проблем в образованието - липсата в национален мащаб на универсални електронни профили на ученици, учители и експерти в сферата. За целите на проекта ще бъдат проучени, селектирани и адаптирани стойностни онлайн дигитални образователни ресурси с отворен достъп. Чрез проекта ще се създадат

* Настоящата статия е частично финансирана по проект № РД-08-134/04.02.2020 „Надеждност и защита на информация в web среда, графични и 3D обекти, 3D моделиране на терени”.

предпоставки за ускоряване на процесите на интеграция на деца, застрашени от отпадане и/или изоставане от дигитални знания и умения, както и на деца със специални образователни потребности, т.е. ще очаква се проекта да има и социализиращ ефект. Нуждата от модернизация на образованието чрез дигитализация ще бъде подкрепена чрез провеждане на информационни кампании за важноста и общите или конкретни ползи за обществото.

2 Основни дейности на проекта

Интеграцията най-често се определя като процес на формиране на целостта чрез обединение, свързване на елементи на основата на нещо общо между тях.

Интегративността е предпоставка за изграждането на продуктивен познавателен процес на основата на многостранна умствена дейност на учениците[1,2]. Обучението чрез проекти е организационна форма на обучение, в основата на която стои работата по един проект. Проектите се разработват чрез действено обучение. Проектът се възприема като една тема за проучване, която позволява да се осъществи връзката между теорията и практиката[3,4]. Търси се реален проблем заимстван от живота. Проектите имат интердисциплинарен характер. Използването на ИКТ е ключов фактор за реализирането на дейностите[5,6].

Основни дейности по проекта:

1. Дейност 1 Изграждане на облачна среда и внедряване на платформа за образователни услуги и съдържание с надежден комуникационен достъп на потребители – експерти, педагогически кадри, ученици и родители.

2. Дейност 2 Изграждане на модерна защитена образователна среда в училищата и детските градини, базирана на съвременни съоръжения /оборудване за онагледяване/ представяне на учебния материал чрез ИКТ (като интерактивни дъски, интерактивни маси за детските градини, таблети, мултимедийни проектори и дисплеи за визуализация на интерактивно съдържание, специализирана съвременна техника и за ученици със сензорни увреждания, аутисти, ДЦП и др.).

3. Дейност 3 Обучения на педагогически специалисти (учители, директори, зам.-директори и др. с преподавателска заетост) по и със средствата на ИКТ, но не само.

3.1. Обучение в дигитални умения за създаване на дигитално съдържание за учебния процес;

3.2. Обучение на учители за преподаване на знания и умения по дигитална грамотност – ключови дигитални умения – базови и за напреднали, нови технологии, продукти и програми, медийна грамотност, онлайн съдържание и поведение, и др. за повишаване дигиталната компетентност на учащите се;

3.3. Обучения на учители за програмиране/кодиране, кибер сигурност, защита на интелектуална собственост и др.;

3.4. Обучение на учители за работа с дигитални ресурси и внедрената платформа за образователни услуги и съдържание с цел въвеждане на иновативни методи на преподаване чрез съвременни ИКТ.

4. Дейност 4 Разработване на дигитално образователно съдържание като електронни учебници и е-помагала по учебни предмети, интерактивни и мултимедийни уроци, образователни приложения и игри, тестове и др. Контрол на съответствието на дигиталното съдържание с утвърдените програми и добрите педагогически практики.

5. Дейност 5 Идентифициране и утвърждаване на стойностни дигитални образователни ресурси – международни и национални, с отворен достъп и внедряването

им в платформата за образователни услуги и съдържание (вкл. и за ученици със сензорни увреждания, аутисти, ДЦП и др.).

6. Дейност 6 Повишаване на дигиталната компетентност и умения на учениците под формата на извънкласни дейности (клубове по интереси и допълнителни занимания по ключови дигитални умения – базови и за напреднали, включително и компютърно моделиране/кодиране).

7. Дейност 7 Информационни кампании за ползите от дигиталната компетентност, кибер - безопасност, медийната грамотност, защита на интелектуалната собственост.

3 Сформиране, организация и работа с клуб ”Дигитален свят”

Възможност за формиране на знания по информационни технологии в начален етап е сформиране на клуб за извънкласна дейност, напр. по Проект „Образование за утрешния ден“, Клуб по интереси и др. Тази форма обикновено се използва за повишаване на мотивацията за познавателна и учебна дейност на учениците.

Проектът се реализира по Оперативна програма „Наука и образование за интелигентен растеж“ (ОП НОИР) 2014-2020г., съфинансирана от Европейския съюз чрез Европейските структурни и инвестиционни фондове, с конкретен бенефициент – Министерството на образованието и науката (МОН). Продължителността на проекта е 36 месеца – от 15.10.2019 г. до 15.10.2022 г.

В Обединено училище „Добри Войников” се сформира клуб "Дигитален свят" от 1. до 3. клас участващи в Дейност 6: „Повишаване на дигиталната компетентност и умения на учениците под формата на извънкласни дейности (клубове по интереси и допълнителни занимания по ключови дигитални умения – базови и за напреднали, включително и компютърно моделиране/ кодиране)“ на проекта BG05M20P001-2.012-0001 „Образование за утрешния ден“ за учебната 2019 / 2020 г.

На 7.01.2020г. стартира дейността на клуб “Дигитален свят“ състояща се от 17 ученици, за придобиване на Основни дигитални ИТ компетенции за учениците 1. до 3. клас - момичета и момчета, предимно от ромски произход с различен материален статус.

Чрез клуба насърчаваме любознателността на децата с интересни игри, атрактивни герои, занимателни практически задачи, занимателни и полезни видеа, тестове и симпатични проекти, които са съобразени с възрастта им. Даваме възможност да изграждат и развиват своите ИТ умения, докато се занимават с интерактивни упражнения, даващи информация за основите на графичния дизайн. Насочено е към овладяване на основни знания, умения и отношения. Обучението се осъществява на основата на съвременни компютърни системи и подходящо за възрастта на учениците програмно осигуряване, които създават условия за положителна емоционална нагласа и цялостно развитие на детската личност.

В процеса на обучение се обогатяват представите на учениците за компютъра като техническо устройство и основните части на компютърната система, разширяват се уменията за използване на програми за обработка на графика, звук и текст при изпълнение на достъпни учебни задачи.

3.1. Цели

Формиране и развитие на ключови дигитални компетентности. Развиване на основна компютърна грамотност: използване на офис приложения за текстообработка, създаване на презентация, търсене на информация в Интернет, използване на приложения за създаване на интерактивни игри.

3.2. Очаквани резултати:

1. Ученикът придобива основни понятия за работа с Windows.
2. Ученикът придобива начални знания за работа с Word.
3. Ученикът умее да създава картини в Paint.
4. Ученикът умее да създава интерактивни игри и мултимедийни приложения с готови шаблони в LearningApps.org.
5. Да се формират умения за работа със софтуер за интерактивна дъска – интерфейс, инструменти, галерии, управление на страници, интерактивни приложения, външни препратки и др.
6. Ученикът спазва правила за комуникация в социалните мрежи и използва търсачки за намиране на информация.

3.3. Ограничения и възможни затруднения

Понякога е трудно да се реши именно кои деца да участват в определена инициатива и кои в друга, защото желанието им е голямо. Би било добре да има възможност повече ученици да участват, защото те остават променени завинаги!

3.4. Устойчивост/целесъобразност на практиката

➤ Така въведената практика в училището е устойчива и непрекъснато се прилага. Тя се развива заради:

- Връзката им с по-малките ученици;
- Увеличаване както на броя обхванати ученици, така и на учители;
- Постоянните участия на учениците в състезания и олимпиади;
- Социализацията им и начина им на мислене след подобни участия;
- Желание на все повече ученици да участват в тази практика;
- Досег до ученици от всякакъв тип училища.

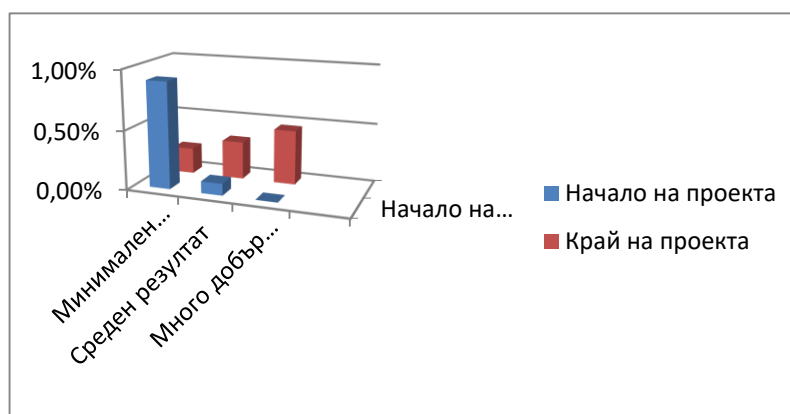
3.5. Постигнати резултати

Дидактическите инструменти за оценка на знания и умения при провеждането на експеримента са предварителен тест, практическа задача по време на обучението и тест след обучението. Този метод е избран като най-подходящ за измерване на ефективността на технологичния модел, тъй като позволява да се извършат статистически сравнения между знанията и уменията на участниците преди и след обучението в Облака и по традиционните методи при стриктен контрол над експерименталните условия.

По време на проекта се провежда входно и изходно ниво – за групата под формата на стандартен тест. С него се цели да се установят началните знания на учениците преди обучението. Тестът се състои от 20 задачи с избираем отговор от четири възможни за всяка задача.

При сравняване на резултатите от входящия тест (фиг. 1) се вижда, че 46% от учениците в края на проекта са постигнали много добър резултат (20–26 точки), което е почти половината от извадката. А среден резултат са постигнали 32% от тях.

Проекта завършиха успешно 17 деца, на които бяха връчени сертификати за самостоятелно ниво на дигитални компетенции, което могат да надграждат в по-горен курс.



Фиг. 1 Крайни резултати

4 Заключение

Базисните компетентности са важна и задължителна част от техническата и информационна грамотност на съвременния млад човек и създават условия за пълноценното му реализиране в живота.

Обучението по ИТ от една страна ги затвърждава, надгражда и развива, а от друга позволява ориентирането на учениците в света на съвременните информационни и комуникационни технологии с цел избора на бъдеща професионална реализация. Това обучение предлага една нова, нетрадиционна интерактивна среда, провокираща знанието, уменията и въображението, благоприятства за развитието на умения за планиране на дейности, търсене на информация, вземане на решения и решаване на проблеми. Резултатите от анализа на оценяването ни ориентират не само за степента на овладяването на ключовите компетентности, необходими за усвояване на учебното съдържание, изучавано в начален етап на основната образователна степен, но и дават представа как протича обучението в различните училища и предоставя сравнимост на постиженията на учениците. Смятам, че компютърната грамотност е не по-малко важна от езиковата грамотност на ученика или математическите му знания и умения и че предметът ИТ заслужава особено внимание за пълноценното развитие на ученика и реализацията му в съвременното технологично, динамично и информационно общество. Ето защо препоръката за участие в проект „Образование за утрешния ден” по ИТ да се включат повече ученици.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Андреев М. Дидактика Народна просвета С. 1987.
- [2] Бижков Г., Краевски В. Методология и методи на педагогическите изследвания УИ “Св. Кл. Охридски” С. 2002.
- [3] Брънекова Д. Структуриране на образователна среда в специализиращата подготовка на учители по информатика и информационни технологии Тракийски университет ДИПКУ С.З. 2005..
- [4] Илиева В., Иванов И. Типова учебна програма. Работа с компютри и информационни технологии за I - IV клас в рамките на СИП и за дейностите по интереси при целодневна организация на обучението С. 2007..
- [5] Пейчева Р. Мотивация на учебната дейност чрез ИКТ Лекционен курс 2004.

- [6] Старчева В. Работа с текстова информация. Помагало за начални учители Тракийски университет ДИПКУ С.З. 2006.

TRANSPOSITION ISSUES IN DIGITAL LEARNING PROCESS

VALENTIN T. ATANASOV

ABSTRACT: *This publication reviews problematic aspects of the digital transposition of a real learning process. Analyzing existing studies, in the context of a pandemic environment, factors are identified that have a negative impact on the application of a partially digitized learning process. The set of the main characteristics of the learning process is determined, forming basic terms for conceptualization and formalization of a model of an entirely digital based learning process.*

KEYWORDS: *Digital based learning, E-learning, Highly-interactive generation, Digital learning model, Learning conceptualization digital learning problems.*

ПРОБЛЕМИ ПРИ ТРАНСПОНИРАНЕТО НА ЦИФРОВИЯ МОДЕЛ НА ОБУЧЕНИЕ

ВАЛЕНТИН Т. АТАНАСОВ

АБСТРАКТ: *Настоящата публикация разглежда проблемни аспекти на цифровото транспониране на реален учебен процес. Анализирайки съществуващи проучвания, в контекста на пандемична среда се извеждат фактори, оказващи негативно въздействие върху приложението на частично цифровизиран процес на обучение. Детерминирани са основни характеристики на учебен процес. формиращи базови постановки за концептуализация и формализация на модел на изцяло цифров базиран процес на обучение.*

1 Въведение

Приети термини и постановки

С цел постигане на коректност в семантично-технологичен аспект в тази публикация ще бъде използван терминът цифрово(цифров) вместо използвания в други публикации и автори електронно(електронен).

Учебно съдържание е всяко логически структурирано съдържание, което може да се използва за учене или обучение, което за целите на цифровия учебен процес е цифрово представено чрез основни типове данни[1].

Учебен ресурс е обект, посредством който се предоставя достъп до учебно съдържание и който може да бъде идентифициран чрез унифициран идентификатор на ресурси(URI) и локализиран съгласно унифициран локатор на ресурси(URL).

В настоящото изследване се приема, че на логическо ниво цифровото транспониране на учебен процес може да се определи като приложение на една форма на учебен процес вместо друга, като този процес се развива с идентични участници, обща цел и една и съща абстрактна характеристика на образователен контекст.

В изследването се разглежда проблематиката на транспонирането на цифровия модел на обучение в контекста на регулиран от държавата образователен процес.

Навлизайки в смисловото поле на съвременната дидактическа теория и практика[6] следва да се проблематизира въздействието на информационно-комуникационните технологии (ИКТ) върху технологичния аспект на обучението с цел изследване проблемите при транспонирането на установени дидактични норми в техния цифров образ или с други думи транспониране на физическия модел на обучение в неговия цифров еквивалент.

Настоящото изследване разглежда проблемната област на повсеместна цифровизация на образователен процес като интегрална съставка на един цифрово базиран модел на обучение. Възникналите екстраординарни пандемични обстоятелства доведоха до интензивност на редица решения в областите на човешката дейност в т.ч. и образователната дейност.

Може да се потърси началото на първите технологично-базирани системи за обучение през 80-те години на XX-ти век с реализирането на проекта на Масачузетския технологичен институт „Атина“. В последствие биват реализирани и програмни проекти като обучаващото приложение FirstClass(1990) на компанията SoftArc. Този процес на програмно интерпретиране на учебен процес е последван от редица системни разработки като вътрешно-организираните мрежи със слоеста логическа организация, образователни продукти като услуги(SaaS), облачни образователни услуги. Паралелно с еволюционния програмен ход на системите за обучение се развиват и технологии от класа платформа като услуга(PaaS) и инфраструктура като услуга(IaaS) в образователната сфера.

Извън патоса за всемогъщото и многообразно цифрово обучение, стартирало институционално с приетата програма на ЮНЕСКО за широко внедряване на ИКТ през 2002-ра година и последвано от технологични реализации през редица платформи и системи за обучение, през втората половина на 2020-та година широка гама изследвания изведоха сериозни проблеми [4,5] след опитите за въвеждане на изцяло цифрово базиран процес на обучение. В този смисъл, настоящото изследване се фокусира върху постигането на ефикасни и генериращи положителен резултат отношения и устойчивост в дигиталната свързаност *преподавател-обучаван* при транспонирането на обучението в изцяло цифров учебен процес.

2 Проблемни страни на съществуващите цифрови реализации на учебен процес.

Формата на преход в цифров контекст е разглеждана и като дигитална трансформация, явление, придобило своите първи проявления в бизнес средите[2] и продиктувано от технологичните иновации в индустриалните отношения и готовността им за тяхната интеграция. Впоследствие тази тенденция навлиза и в обществените институции в т.ч. и в образователната сфера. Обобщението за същността на цифровата трансформация е намерило израз в целенасоченото подобрене на даден обект чрез задействане на значителни промени в неговите свойства[3].

Установяването на норми, правила и отношения в обществените институции, в т.ч. и образователни, обуславя възприемането и използването на технологиите в техните структури, но е ограничено от институционалните договорености, а като резултат имплементираните технологии влияят на процесите в тези организации[3]. Обособеното високоинтерактивно поколение[1] обучавани, като ключов субект, възприемат критично и проактивно внедряването на цифровите технологии, предпоставяйки казуса „*какво е в момента - как би могло и как трябва да бъде*“[3]. Успоредно с етапа на частично цифрово транспониране на учебния процес, тези обучавани, макар и формирали широк набор от цифрови умения, опит и цифрова интуиция, не са в състояние без фигурата на ментора, наставника, експерта да използват тези свои иновативни характеристики за проектиране, изработване и създаване на цифрово съдържание в съответствие с педагогическите цели на преподавателя.

От теорията на моделирането е известно, че винаги, при съставяне модела на дадена система, се допускат отклонения от оригинала. От съществено значение е да се отбележи,

че е слабо проучен въпросът с допусканията при моделиране на цифров учебен процес. В широк аспект процесът на обучение е разглеждан като цифрово допълван, а не като цифрово транспониран. Не са представени теоретични постановки или модели на изцяло завършен цифрово базиран учебен процес, принципно обхващаш всички подпроцеси, фази и компоненти по смисъла и нормите на образователната система. Т.е не е налице емпирична база от критични изследвания, които биха дали ясна картина на този феномен.

От изследвания в практиката при транспониране на частично цифрово базирани учебни процеси може да се направи изводът, че по-скоро проучваните подходи имат стохастична характеристика, отколкото ясни насоки за приложение на определени приети модели на цифрово транспониране на учебния процес. Потвърждение на горното се дава в [3], намерило израз в постановки като „*опити за подобие, промяна на структурата, промени в практиките*“ в т.н on-line учебен процес, който всъщност не почива на някакъв проверен модел. В настоящото изследване т.н. on-line форма на учебен процес се разглежда като клас на частично цифрово базиран учебен процес.

Основавайки се на тезата, че всяка цифрово базирана обучаваща система следва да интегрира дидактически модел и модел на обучавания, би следвало да бъдат формулирани изисквания, детерминирани от основните принципи на учебен процес. Този набор принципи следва да намери своята функционална реализация в разработваната система за обучение. В [6] са детерминирани 19 подхода за технологично конструиране на процеса на обучението, синтезирайки тезата, че технологията на обучение се базира на:

- действащи лица;
- параметри;
- фактори в различно съотношение.

Отново [6] изгражда теза, че представянето в технологичен аспект на цялостен образователен процес е нецелесъобразно, а разглежда подхода за предметно-тематично конкретизиране на обекта, за който ще бъде технологично описан даден процес на обучение.

В актуализираната версия (16.12.2018 год.) на един от съществуващите модели ADDIE (Analyze, Design, Develop, Implement, and Evaluate)[7] на движението за проектиране на обучението (Instructional Design Movement) се разглеждат въпроси, дефиниращи постановки на селективно детерминиране на учебен процес с приложение на даден цифрово базиран негов компонент. Силогизмът, произтичащ от обстоятелството, че във фазите на анализ и проектиране на този модел не се предлага, разглежда или концептуализира изцяло транспониране на реален учебен процес в цифрово базиран такъв, а се обособяват формални постановки като „*благоприятна учебна среда*“, „*за или против реален срещу цифров учебен процес*“, „*ограничаващи фактори, определени от технологии и ресурси (човешки, времеви, финансови, технологични)*“, „*тип на потребителския интерфейс*“ води до липса на фокус върху тази проблемна сфера. В [7] се откроява липсата на проблемно разглеждане, свързано с цифровия модел на учебния процес в контекста на нормите на образователната система в дадена държава. След по-малко от година образователната сфера се сблъска с реалното проявление на този проблемно-процесен въпрос Сериозен проблемен въпрос се визира и в [4], поставящ в цифрова среда преподавател с открито дистехния (Dystechnia), обстоятелство, водещо единствено до натрупване на негативни ефекти, както от страна на обучаваните, така и за самия преподавател, участник в този процес. Наличието на дистехния в общността на преподавателския състав е един от ключовите негативни фактори, влияещи върху ефективното транспониране на учебния процес.

3 Концептуализация на реален учебен процес. Модел.

За осъществяване процеса на транспонирането на реален учебен процес се дефинират следните цели:

- **Хармонизация** на предмета на обучение, целите на обучение, агента на обучението и компонентите на обкръжаваща среда.
- **Възпроизвеждане/генериране/създаване** на цифров образ на реални отношения на човека в реален учебен процес.

Разглеждайки реален учебен процес и изграждайки подход за цифровото му транспониране, следва да бъдат детерминирани неговите основни характеристики (Табл.1):

Таблица 1. Основни характеристики на учебен процес

Педагогически обусловен	Цел/цели	
	Дидактически инструментариум	Преподаване
		Проблематизиране
		Оценяване
		Самооценяване(в контекста на дидактическия подход)
	Насоки, напътствия, менторство	
Приложно-психологическа	Приложно-психологични индивидуални подходи	
	Приложно-психологични общостни подходи	
Среда на учебния процес	Психологически балансирана(благоприятстваща)	
	Физически организирана в пространството (класни стаи, кабинети, зали, канцеларии,сервизни помещения, инфраструктура и др.)	
Ресурсна	Външни(за обучавания) учебни ресурси(учебници, лекции,книги, пособия(схеми, диаграми, макети, експериментални постановки, артефакти)	
	Вътрешни(за обучавания) учебни ресурси (медийни носители, технологични устройства, допълнителни пособия)	
Диалогов режим	Устойчив/непрекъсваем в определена рамка	
	Етично-базиран	
	Експлицитно ориентиран	
Пълнообхватност	Всеки един от участниците във физическия учебен процес следва да бъде експлицитно (<i>безусловно и недвусмислено</i>) представен(налице) в реално времевия прозорец на този процес.	
Обратна връзка	Педагогическа	
	Процесуална	Административна
		Неформална, но етично-базирана
Гарантирана		
Резултатност	Оценка(експертна(от преподавател), лична(от обучаван))	
	Съхранение на опита(оценяването на знания, придобити умения, демонстрирани отношения в нормативно определени носители на информацията)	

	Публичен достъп, детерминиран от делегираността и атрибутивността		
Сигурност	Физическа/персонална		
	Обектно-средова		
Времева обусловеност	Цикличност		
	Времетраене		
	Планируемост		
	Прогнозируемост		
Атрибутивност	Обучаван		
	Обучаващ		
	Заинтересовани лица		
Делегираност	Правомощия		
	Отговорности		
Институционалност	Държавна репрезентативност		
Домейни на учебния процес	Домейн на средата/обкръжението		
	Домейн на участниците	Педагогически поддомейн	Множество „Обучавани“
			Множество „Обучаващи“
		Непедагогически поддомейн	Множество „Поддръжка“
			Множество „Администрация“
	Поддомейн „Външни“	Множество „Гости“	
Множество „Външен контрол“			

Съществува нехомогенност в схващанията какво представлява процесът на транспониране на установен, регламентиран, традиционен и общоприет модел на учебен процес към цифрово базиран учебен процес. Добра отправна точка би бил подходът на формализация на учебен процес, разглеждан в [6], представящ функционален модел (1).

$$(1) \quad R = \{U, R, O\},$$

в който параметрите дефинират три множества – на ресурсите U , на операциите R върху елементите на U и отношенията O на елементите от U и R .

За целите на концептуализацията на реален учебен процес се приемат следните обобщаващи принципи:

1. Цифрово базираният учебен процес следва да притежава природа, имплицитно сходна на реален учебен процес.
2. Нормативно установените постановки (закони, правилници, наредби, разпоредби, заповеди) следва да бъдат идентично приложими и към цифрово базирания учебен процес.

3. Не следва да има диференциация по критерий „постигнати резултати“ на двата процеса на обучение.

4. Всеки субект от реален процес на обучение следва да има свой цифров образ.

За целите на изследването се предлага се формализация на модел на образованието, изложен в (2):

$$(2) \quad P \rightarrow G \rightarrow N \rightarrow O \rightarrow U(D, H, R, E, N') \rightarrow L((\forall \bar{a} \in H), (\forall \bar{d} \in D), (\forall \bar{r} \in R), (\forall \bar{e} \in E), \Psi', t))$$

Като

$$(3) \quad H \supseteq (\forall \bar{a} \in H) \cup (\forall \bar{m} \in H) \cup (\forall \bar{s} \in H)$$

Където:

P – върховна власт

G – стратегическа цел на образованието

N – нормативна макро-рамка на образованието

O – образователна система

U – структурна единица в образователната система

D – множество на дидактическия инструментариум

H – множество на човешкия компонент

R – множество на ресурсите

E – среда

N' - нормативна микро-рамка

L – реален учебен процес

Ψ' - подмножество на подходи от приложната (образователната) психология

\bar{a} – комплексна векторна променлива, определяща връзката обучаващ – обучавани в U

\bar{d} – векторна променлива, определяща подмножеството на дидактическия инструментариум

\bar{r} – комплексна векторна променлива, определяща подмножеството на необходимите ресурси

\bar{e} – комплексна векторна променлива, определяща нареден набор от характеристики на средата

\bar{m} – комплексна векторна променлива, определяща параметри на ръководството на U

\bar{s} – комплексна векторна променлива, определяща параметри на непедagogическия персонал в U

t – времеви параметър на процес

В концептуален аспект на учебния процес и за целите на формализацията следва да бъде приета следната постановка:

$$(4) \quad L \rightarrow P(\varepsilon) = L' \rightarrow P(\varepsilon')$$

Където:

L' – цифрово базиран учебен процес

$P(\varepsilon)$ – вероятност за получаване на измерим резултат(компетенции) от реален учебен процес.

$P(\varepsilon')$ – вероятност за получаване на измерим резултат(компетенции) от цифрово базиран учебен процес.

t – времеви параметър на процес

Горното постановява идентичност на резултатите, т.е. формиран измерим показател за изградени компетенции у обучаваните и при двата типа учебен процес (реален и цифров).

Развивайки концептуализация, се дефинират следните ограничения:

$$(5) \quad L \rightarrow T(Q(\{s_i, s_j, \dots, s_n\} \in H), N, N') \rightarrow P(\eta)$$

$$(6) \quad L' \rightarrow T(Q'(\{s_k, s_l, \dots, s_m\} \in H), N, N') \rightarrow P'(\eta)$$

$$(7) \quad P(\eta) \neq P'(\eta)$$

Където:

$P(\eta)$ – вероятност за достъп на субекта s_i до набор η от физиологични, психологични, социални и лични характеристични данни в реален учебен процес.

$P'(\eta)$ – вероятност за достъп на субекта s_k до набор η от физиологични, психологични, социални и лични характеристични данни в цифров учебен процес.

T – Нареден набор от задачи на субекти на непедagogическия персонал.

Горното ограничение произтича от разлики при установени изисквания за изпълнение на идентични функционални задачи, нормативно възложени (N, N') , но на набор от различни субекти $\in H$ в двата типа учебни процеси.

4 Заключение

Работата и проучванията в областта на концептуализиране и синтезиране на модел на изцяло цифрово базиран учебен процес е в своята иницираща фаза. Налице е потребност от акумулиране на емпирични данни, свързани с практики, прилагащи частично или с опити за изцяло цифровизиране на процеса на обучение. Необходима е кохерентност при дефинирането на абстрактни модели на обучение и тяхното системно моделиране, интегрираща общата научна мисъл на изследователи в инженерната и педагогическата области. Предложените в настоящото проучване концептуализация и формализация на модел на изцяло цифрово базиран учебен процес биха могли да предоставят изходяща база за общ математически апарат при бъдещ синтез на системен модел на цифрово обучение.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Atanasov, V.T., Ivanova, A.S., A Framework for Measurement of Interactivity of Digital Learning Resources, 42nd International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics (MIPRO), Opatija, Croatia, 2019, pp. 649-654, ISSN: 2623-8764, DOI: 10.23919/MIPRO.2019.8757052
- [2] Mergela, I., Edelmann, N., Hauga, N., Defining digital transformation: Results from expert interviews, Government Information Quarterly, Volume 36, Issue 4, Elsevier, ISSN: 0740-624X 2019, <https://doi.org/10.1016/j.giq.2019.06.002>
- [3] Netta Iivari, N., Sharma, S., Ventä-Olkkonen, L., Digital transformation of everyday life – How COVID-19 pandemic transformed the basic education of the young generation and why information management research should care?, International Journal of Information Management, Elsevier, 2020, ISSN 0268-4012, <https://doi.org/10.1016/j.ijinfomgt.2020.102183>

- [4] Hasan, N., Bao, Y., Impact of “e-Learning crack-up” perception on psychological distress among college students during COVID-19 pandemic: A mediating role of “fear of academic year loss”, *Children and Youth Services Review*, Elsevier, Vol. 118, 2020, ISSN: 0190-7409, <https://doi.org/10.1016/j.chilyouth.2020.10535>
- [5] Choksi, A., Rosenhaus, C., The Global Learner Survey, <https://www.pearson.com/news-and-research/the-future-of-education/global-learner-survey.html> (посетен на 08.08.2020)
- [6] Ганчев, Н, Иванов, П, Иванов, „Технологични основи на обучението“, (посетен 01.06.2020) http://www.ivanpivanov.com/uploads/sources/135_Tehnologichni-osnovi-na-obuchenieto.pdf.
- [7] ADDIE Model: Instructional Design, <https://educationaltechnology.net/the-addie-model-instructional-design/>, (посетен 1.05.2020)

A VIEW OF THE MATHEMATICAL LITERACY OF THE BULGARIAN STUDENTS ACCORDING TO THE INTERNATIONAL ASSESSMENT

ANTOANETA K. KOVACHEVA

ABSTRACT: *This article analyzes the mathematical literacy of 15-year-old students in our country according to the international PISA assessment. Specific measures are defined in order to overcome the difficulties which students encounter. Outlined are some guidelines to improve learning outcomes in mathematics at lower secondary education.*

KEYWORDS: *Mathematical literacy, PISA results, Mathematics training*

ПОГЛЕД ВЪРХУ МАТЕМАТИЧЕСКАТА ГРАМОТНОСТ НА БЪЛГАРСКИТЕ УЧЕНИЦИ СПОРЕД МЕЖДУНАРОДНО ОЦЕНЯВАНЕ*

АНТОАНЕТА К. КОВАЧЕВА

АБСТРАКТ: *В тази статия се анализира математическата грамотност на 15-годишните ученици у нас според международното оценяване PISA. Посочени са конкретни мерки за преодоляване на трудностите, които срещат учащите се. Очертани са някои насоки за повишаване на резултатите от обучението по математика в прогимназиалния етап на образование.*

КЛЮЧОВИ ДУМИ: *Математическа грамотност, Резултати от PISA, Обучение по математика*

1 Увод

Динамиката на образователните процеси, повишаването на изискванията към всяка личност, експоненциалното нарастване на обема от знания и много други поставят високи изисквания пред училищното образование.

През последните 20 години се приеха нови учебни програми, чиято цел е да отговори на тези изисквания. Възприетият компетентностен подход акцентира върху практическата приложимост на усвоените знания и на ученето през целия живот. Той се фокусира върху резултата, но не като сума от усвоена информация, а като комплекс от умения за действие в различни нестандартни ситуации.

Все по-често, когато се говори за качество на образованието, се търси надежден измерител, който да може да покаже доколко образователната система успява да срещне нагласите с нуждите, очакванията с резултатите, традиционните ценности с бъдещето. И все по-често като такъв измерител се използват различни международни изследвания – PIRLS, TIMSS, PISA, ICCS и др. Независимо, че те се провеждат през различни интервали от време, от различни организации, насочени са към различни научни области, изследват различни възрастови групи, използват различен инструментариум, но ги обединява

* Настоящата статия е частично финансирана по проект № РД-08-89/28.01.2020г. при ШУ „Епископ Константин Преславски“

понятието грамотност – базова, функционална, комплексна. Всички те са насочени към измерването на придобити компетентности чрез решаването на конкретни казуси, включващи прилагането на конкретни знания, но изискващи широко прилагане на изследователски подходи, както и намиране, извличане, обработка и трансфер на информация от различни източници за различни цели.

2 Изложение

За да си отговорим на въпроса до колко училищното образование отговаря на реалните потребности на обществото ще анализираме резултатите от оценяването на българските ученици от едно от международните изследвания, а именно **Програма за международно оценяване на учениците (Programme for International Student Assessment-PISA)**, която е дългосрочен проект на **Организацията за икономическо сътрудничество и развитие (ОИСР)** за изработване на индикатори за качеството на образованието в отделните държави. Резултатите от това изследване, както и направените изводи, влияят на експертите при вземане на решения за образователните политики, както на национално, така и на международно ниво.

Целта на проекта PISA е да се оценят постиженията на учениците в три основни познавателни области – четивна, математическа и природонаучна грамотност.

Използваният термин „грамотност” в PISA се свързва с уменията на учениците да осмислят и адекватно да преобразуват дадена информация. Да решават проблеми, заимствани от реалния живот. Във всеки етап на измерването има акцент върху една от грамотностите.

Първият етап на изследването на PISA стартира през 2000 г. От 2000г. до сега оценяването се е провело седем пъти, като България е участвала в него само шест пъти (2000, 2006, 2009, 2012, 2015 и 2018). Изследването през 2012г. е с акцент върху математическата грамотност. Следващият планиран етап на PISA е през 2021 година, като основен акцент ще е оценяването на математическата грамотност.

В изследването на PISA задачите по математика са формулирани в четири различни **контекста**, чрез четири **тематични** области (фиг.1), в които даден проблем може да възникне:

- личен (свързан с ежедневието на отделната личност);
- обществен (свързан с живота на дадена общност – местна, национална, регионална, глобална);
- професионален (свързан с професионалната активност на човека);
- научен (отнася се до използването на математиката в науката и технологиите).

Според експертите на PISA тези четири тематични области, взети заедно, обобщават математическото познание, което е основополагащо при подготовката на 15-годишните ученици. Във всяка математическа задача в теста се изисква ученика да умее да извлича информация, зададена чрез: диаграма, таблица, графика или схема.

Една от основните цели на PISA е измерването на математическата грамотност т.е. способността на учениците да формулират, използват и тълкуват математическо познание в разнообразни ситуации, да развиват математическо мислене и да използват математически понятия, факти, средства и методи за описване, обясняване и прогнозиране на различни явления и процеси, представени в реален контекст, за обосновани преценки и за вземане на решения [9].



Фиг.1. Модел на оценяване на PISA

Според експертите на PISA учениците притежават математическа грамотност, ако са придобили следните умения и способности:

- да разпознават проблемите от реалността, които могат да бъдат решени със средствата на математиката;
- да формулират тези проблеми с езика на математиката;
- да ги решат, като използват математически знания и методи;
- да тълкуват получените резултати от гледна точка на поставения проблем;
- да представят резултатите си.

Математическата грамотност следва да се разбира като функционална грамотност, която от своя страна, включва способността на човек да използва придобитите знания при справяне с проблемни ситуации в различни сфери на човешката дейност. С помощта на математиката разнообразни явления и процеси могат да бъдат описани, обяснени и прогнозирани. Тяхното задълбочено разбиране позволява на личността да прави обосновани преценки и да взима информирани решения.

В тестовете на PISA са включени математически задачи, близки до реални проблемни ситуации, свързани с разнообразни аспекти на обкръжаващата среда [4]. Тестовете, които използва PISA като инструментариум за измерване на математическата грамотност на учениците, съдържат въпроси с избираем отговор, както и въпроси със свободен отговор (числов, символен или словесен). Оценяването на отговорите на учениците на въпросите със свободен отговор се реализира от добре обучени експерти и съгласно подробно описани критерии за оценяване. Точки се присъждат и при частично верни отговори. В тези задачи се описва конкретен контекст и произтичащият от него проблем, като от учениците се изисква да решат проблема посредством познатите им средства на математиката. Наред с математически знания, от учениците се изисква да използват и знания от други предметни области.

За целите на оценяването математическата грамотност се анализира в зависимост от:

- ❖ контекста, в който е формулирана конкретната задача и в който очакваме ученикът да прояви своите умения и знания;
- ❖ математическото съдържание, което ученикът използва, за да реши поставения проблем;
- ❖ математическите операции, които описват по какъв начин ученикът решава поставения проблем, както и какви умения притежава [5].

В **Таблица 1.** са представени средните резултати според [6], [7] на българските ученици спрямо средните резултати на всички ученици взели участие в изследването по математика на PISA.

Таблица 1. Обобщени средни резултати в точки по математика на българските ученици спрямо всички ученици от изследването.

година на изследване	PISA 2006	PISA 2009	PISA 2012	PISA 2015	PISA 2018
български ученици	413	428	439	441	436
ученици ОИСР	500	497	494	490	489

Резултатите от таблицата показват, че средните резултати на българските ученици спрямо средните резултати на всички ученици взели участие в изследването са винаги по-ниски. Но положителното е, че с годините средните точки на българските ученици нарастват и се намалява разликата между средния брой точки на нашите ученици спрямо всички ученици, взели участие в изследването. По-ценни за нас са средните резултати през 2012г., защото акцента на това измерване е математическата грамотност.

Въз основа на качествения анализ на резултатите на българските ученици през 2012г. можем да обобщим, че учениците се затрудняват:

- да бъдат конкретни в отговорите си;
- да аргументират отговорите си;
- да търсят и откриват причинно-следствени връзки;
- да използват знания от една област и да ги пренасят и прилагат в друга, за да решат даден проблем.

Липса на добре формирани умения се наблюдават при:

- работа със задачи за формулиране на проблемни ситуации с математически средства;
- определяне кои знания, формирани в процеса на обучението им в училище, са приложими към представената проблемна ситуация в задачата;
- тълкуване, прилагане и оценяване на математическите резултати;
- тълкуване, оценяване и осмисляне на статистически данни и информация;
- прилагане на подходящи изчислителни техники за решаването на проблеми от областта на вероятностите.

Известно е, че повече от 70% от учителите по математика са с повече от 20 годишен професионален опит, което често води до инертност, консерватизъм и липса на гъвкавост и адаптивност у учителите. За това се налага усъвършенстване на педагогическите умения и запознаване със съвременните тенденции в методиката на обучението по математика. Налице са редица възможности за професионално развитие и продължаващо обучение,

които неминуемо ще доведат до подобрене на преподаването и ученето и по-ефективно прилагане на заложените политики в образователната система [3].

Актуалната образователна парадигма поставя учителя и ученика в активна позиция в образователния процес. За това педагогът трябва да се стреми да обогати учебното съдържание в областта на практико-приложната дейност. Да конструира и да поднесе учебния материал в урока и извън него под формата на „пробуждащо” обучение. А това е възможно да се реализира, ако:

- учебната информация се поднесе интригуващо, за да мотивира ученика да я изучава [8];
- се използват повече практически задачи, които са със съдържание от битието на ученика (фиг.2 и фиг.3);
- използва се активно мултисензорния подход при овладяване на новите знания;
- подбират се подходящи подходи, методи и дидактически средства, които да осигурят активна мисловна дейност у учениците [2];
- развива се способността на учениците самостоятелно да търсят информация от различни източници по зададена тема и да я използват за съставяне на практически задачи за решаване;
- използват се текстови задачи, от които учениците да извличат информация и да я представят в графичен вид или диаграма;
- осигурява се възможност за работа в екип [1];
- използва се портфолио като форма на активно учене и оценяване;
- е налице обективна самооценка и оценка на резултатите от двата субекта в учебно-възпитателния процес, основан на система от приети и осмислени критерии.

Задача: Велосипедистката Елена

Елена току-що е получила нов велосипед. Той има скоростомер, прикачен към дръжката. Скоростомерът показва на Елена изминатото разстояние и средната скорост по време на движение.

Въпрос 1: Велосипедистката Елена

При едно пътуване Елена изминала 4 км през първите 10 минути и после още 2 км през следващите 5 минути. Кое от следните твърдения е вярно?

- А) Средната скорост на Елена е била по-голяма през първите 10 минути, отколкото през следващите 5 минути.
- Б) Средната скорост на Елена е била една и съща през първите 10 минути и през следващите 5 минути.
- В) Средната скорост на Елена е била по-малка през първите 10 минути, отколкото през следващите 5 минути.
- Г) Не е възможно да кажем каквото и да било за средната скорост на Елена от дадената информация.

Въпрос 2: Велосипедистката Елена

Елена изминава 6 км до къщата на леля си. Скоростомерът ѝ показва, че средната скорост по време на цялото пътуване е била 18 км/ч. Кое от следните твърдения е вярно?

- А) Елена е стигнала до къщата на леля си за 20 минути.
- Б) Елена е стигнала до къщата на леля си за 30 минути.
- В) Елена е стигнала до къщата на леля си за 3 часа.
- Г) Не е възможно да се каже за колко време Елена е стигнала до къщата на леля си.

Въпрос 3: Велосипедистката Елена

Елена отива с велосипеда от своя дом до реката, която е на 4 км. Това ѝ отнема 9 минути. Тя се връща в дома си по по-кратък маршрут от 3 км. Това ѝ отнема само 6 минути. Колко е средната скорост на Елена (в км/ч) по време на пътуването до реката и обратно?

Средна скорост през пътуването:..... км/ч

Фиг.2. Задача от PISA 2012г.

Контекстът, в който са формулирани и трите въпроса в задачата, е определен според рамката на PISA като личен. Връзката между изминато разстояние, време и скорост на движение, която се описва във въпросите, ги отнася към съдържателната категория *промяна и съотношения*. Измерваният познавателен процес е *използване* на математически понятия, процедури, факти и др. с цел решаване на математически проблем. И при трите въпроса се акцентира върху логическото мислене на учениците, а не толкова върху използването на конкретни математически формули.

Задача: Коя кола да си купи Кристина?

Кристина току-що е получила шофьорска книжка и иска да си купи първата си кола. В таблицата са представени данни за четири марки коли, които Кристина открива при местен продавач на коли.

Марка:	Алфа	Болти	Кастел	Дикси
Година	2003	2000	2001	1999
Цена	4800	4450	4250	3990
Изминато разстояние (километри)	105 000	115 000	128 000	109 000
Капацитет на двигателя (литри)	1,79	1,796	1,83	1,783

Въпрос 1: Коя кола?

Кристина иска кола, която отговаря на **всички** тези условия:

- Изминатото разстояние **не** е по-голямо от 120 000 км.
- Произведена е през 2000г. или по-късно.
- Цената не е по-висока от 4500.

Коя кола отговаря на условията на Кристина?

А) Алфа, Б) Болти, В) Кастел, Г) Дикси.

Въпрос 2: Коя кола?

Капацитетът на двигателя на коя кола е най-малък?

А) Алфа, Б) Болти, В) Кастел, Г) Дикси.

Въпрос 3: Коя кола?

Кристина ще трябва да плати допълнително 2,5% върху цената на колата като данък. Колко е допълнителната сума за данъка на кола **Алфа**?

Допълнителен данък.....

Фиг.3. Задача от PISA 2012г.

За да отговорят на въпросите от задачата „Коя кола?“, учениците трябва да анализират данни в таблица. Купуването на кола е ситуация, в която много хора попадат, поради което контекстът и на трите въпроса е определен като личен. Първият въпрос изисква от учениците да сравнят данните в таблицата (цели числа) и да преценят дали са изпълнени конкретни ясно дефинирани условия. Задачата е изключително лесна и не би трябвало да затруднява 15 – 16-годишни ученици. Вторият въпрос е с по-висока трудност. Трябва да се сравнят десетични дроби, което затруднява част от учениците. Третият въпрос е най-труден в сравнение с останалите въпроси от задачата „Коя кола?“. Учениците трябва да изчислят процент от число, което предварително следва да намерят в таблицата. Относителната трудност на задачата произтича от това, че процентът е представен като десетична дроб. Десетичните дроби и процент от число се изучават още в 5. клас.

3 Заключение

За да могат придобитите компетентности на българските ученици да бъдат съизмерими с компетентностите на връстниците им от другите държави е необходимо учителите да променят стила си на работа. В обучението по математика да се включват повече и по-често задачи с приложен характер, но със сюжет, който да заинтригува ученика, т.е. от неговото лично битие. Необходимо е обучението да е базирано на многовариантно представяне, да се прилагат иновативни методи и подходи. Чрез често решаване на задачи, свързани с реалния живот в обучението по математика, учениците осъзнават необходимостта от изучаването на този учебен предмет и в резултат се повишава мотивацията за учене. Когато учениците виждат практическата значимост на всяка придобита компетентност, това създава у тях увереност за справяне, регулира емоциите им, провокира ги да търсят рационални решения – и в крайна сметка улеснява процесите в класната стая и способства за формиране на мотивираща учебна среда.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Каракашева, Л.,Димитрова, К., Екипната работа и обучението по математика, SocioBrains, Issue 43, Marth 2018, p.248-251
- [2] Каракашева, Л., Ковачева, А., Енигматични средства за развитие на математическото мислене у учениците в прогимназиален етап на образование, МАТТХ 2018г., Сборник научни трудове, Том 1, Университетско издателство „Епископ Костантин Преславски”, Шумен, 2018, с. 257-263.
- [3] Каракашева,Л., О квалификации и карьерном расте болгарских педагогических специалистов, Межд.ународно списание Science and Education a new Dimension, Redagojy and Psychology, VII (85), Issue:208, 2019. Nov.,p.22-24
- [4] Петрова, С.,Василева, Н., Резултати от участието на България в програмата за международно оценяване на учениците- PISA 2006, ЦКОКО, София, 2007.
- [5] Петрова, С.,Василева, Н., Резултати от участието на България в Програмата за международно оценяване на учениците PISA- 2009, ЦКОКО, София, 2010.
- [6] Петрова, С.,Василева, Н., Резултати от участието на България в Програмата за международно оценяване на учениците PISA- 2012, ЦКОКО,София, 2013.
- [7] Петрова, С.,Василева, Н., Резултати от участието на България в Програмата за международно оценяване на учениците PISA- 2015, ЦКОКО,София, 2016.
- [8] Karakasheva, L., Some Ideas for Applying the Sijnergetis Approach ing Training Futur Tehchers of Mathematics, Science and education a new Dimension, Humanities and Social Sciences, VI (30), Issue 184, 2018 Des., p.51-53

- [9] OECD (2013), PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy, OECD Publishing, pp. 98–119. Публикацията е достъпна на 23.07.2020г. (<http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en>)

SPECIFICS OF INDIVIDUAL INDEPENDENT STUDENT WORK, CONSIDERED AS A FORM OF TRAINING IN HIGHER EDUCATION

LILYANA M. KARAKASHEVA

ABSTRACT: *This article discusses the didactic concepts of “learning” in higher education. The student’s independent work is presented as an important component of the scientific learning process in higher education. Requirements for the efficiency of the student’s independent work are introduced. An example of a student independent work is presented in the subject Mathematical Analysis and some important functions of independent student work in higher education are pointed.*

KEYWORDS: *Learning in higher education, Student’s independent work*

ОСОБЕНОСТИ НА САМОСТОЯТЕЛНАТА РАБОТА НА СТУДЕНТИТЕ, РАЗГЛЕЖДАНА КАТО ФОРМА НА ОБУЧЕНИЕ ВЪВ ВИСШЕТО УЧИЛИЩЕ*

Лиляна М. Каракашева

АБСТРАКТ: *В тази статия се разглежда дидактическото понятие „учене“ в обучението във висшето училище. Самостоятелната работа на студента се представя като важна съставка от учебно-научния процес във висшето училище. Формулирани са изисквания за ефективност на самостоятелната работа на студента. Представен е вариант на самостоятелна работа със задачи по Математически анализ. Посочени са някои по-важни функции на самостоятелната работа във висшето училище.*

КЛЮЧОВИ ДУМИ: *Учене във висшето училище, Самостоятелна работа на студента*

1 Въведение

Сложните социално-политически и икономически промени, които се извършват в света под знака на глобализацията, слагат своя отпечатък и върху образователната ни система. През последните двадесет години обучението във висшето училище претърпя редица трансформации. Наложил се извода, че организацията на процеса на обучение е основният фактор за активизиране на познавателната активност и самостоятелност на обучаващите се. Самостоятелната работа на студента се утвърди като форма на учене.

2 Ученето във висшето училище като дидактическа категория

„Ученето в условията на обучението е целенасочен и рационално организиран процес за усвояване на социалния опит в неговата систематизирана форма, запазвайки основното си свойство да води към прогресивни и относително трайни изменения в личността. Ученето в условията на обучението стабилизира и затвърждава регулативната си функция, съкращава времето за формиране на особеностите и способностите, за придобиване на знания, умения и навици. Бъдещите функции на човека в обществото изискват още по-ефективна организация на ученето в условията на обучението, още по-съвършени методи и технологии“ [1, с. 75].

* Настоящата статия е частично финансирана по проект № РД-08-89/28.01.2020г. при ШУ „Епископ Константин Преславски“

Историческият поглед върху дидактическото понятие “учене“ показва, че докато в миналото то предимно се е свързвало с развитието на мисленето и паметта, то в по-ново време то се допълва с когнитивни и афективни компоненти. С развитието на обществото са се развивали и схващанията за това какво трябва да формира ученето. Така например в древните цивилизации се е почитало знанието на фактите и способностите за тяхното възпроизвеждане, но в нашето време освен знания и умения особено се цени способността за продуктивна самостоятелна познавателна дейност. Новата мисия на ученето във висшето училище вече изисква усвояване на знания, формиране на умения, отношения и компетенции. В съвременните условия една от целите на образователния процес е формиране у учащите се на похвати за самостоятелно ориентиране в разнообразната информация и формиране на стратегии за самостоятелно овладяване на знания и придобиване на опит.

Ученето в обучението във висшето училище в най-общ план може да се разглежда като регулирана промяна на поведението на индивида в резултат от преподаването и образователната среда. Преподаването е условие и съществен фактор за ученето в обучението.

В когнитивната психология съществуват различни дефиниции на понятието “учене“ в зависимост от принадлежността на изследователя към една или друга школа. За целите на настоящото изследване ние възприемаме дефиницията на Й. Линхарт. Авторът в своя труд [4, с. 625] разглежда „ученето като специфичен вид „дейност“, при която субектът в дадена ситуация изменя под влияние на външните условия и **в зависимост от резултатите на собствената си дейност** (подчертаването е наше) своето поведение и своите психически процеси, така че с помощта на новите информации да намали степента на своята неувереност и да намери правилния отговор или адекватно правило за поведение“.

От психологическа гледна точка готовността за учене обхваща интелектуалната сфера на личността на студента, която е пряко свързана със самосъзнанието, развитието на мотивационната и емоционално –волевата сфера на индивида .

Известно е, че качеството на усвоените знания и придобитите умения е в пряка зависимост от интелектуалната и практическата дейност, която студентите извършват в процеса на обучение. Затова въпросът за организацията и управлението на самостоятелната работа на студентите в процеса на обучение във висшето училище е значим от дидактическа гледна точка.

3 Самостоятелната работа на студента

Ние приемаме самостоятелната работа на студента не само като форма на обучение, а като неделима съставка на останалите основни организационни форми на обучение във висшето училище-лекцията, семинарното и лабораторното упражнение. И в този смисъл организацията на самостоятелната работа на студента има многостранен характер и успешната ѝ реализация зависи от съвместната дейност на преподаватели и студенти. В този аспект самостоятелната работа на студента се разглежда като взаимосвързана и взаимозависима дейност на преподаватели и студенти, независимо дали е пряко или косвено ръководена. Самостоятелната работа на студента като важна съставка на учебно-научния процес във висшето училище не само че не намалява ръководната роля на преподавателя, а може да се каже, че се повишават изискванията към него.

Самостоятелната работа от една страна е учебно задание, което преподавателят подготвя (на хартиен носител или в електронен вариант) съобразно учебните цели на разглежданата тема и предлага на студентите за изпълнение. Това изпълнение може да

бъде под ръководството на преподавателя по време на лекции или на семинарните упражнения, а може да бъде реализирано и без пряко ръководство в извън-аудиторно време. От друга страна самостоятелната работа се явява форма на проявление на съответните умствени действия при извършване на редица математически дейности от страна на студента. При това трябва да се подчертае, че една характерна особеност на самостоятелната работа е тази, че студентите съзнателно, а не механично извършват редица познавателни действия, за да успеят да решат поставените им задачи. Степента на самостоятелност съществено зависи от характера на заданието, но зависи и от равнището на развитие на студентите, от техните индивидуални интелектуални възможности. Затова заданията за самостоятелна работа трябва да са добре обмислени, дозирани, някои задачи могат да бъдат снабдени с упътвания, за да подпомогнат и да стимулират студентите да работят активно с необходимите интелектуални усилия. Така всъщност достигаме до връзката на дидактическото понятие „самостоятелност“ с понятието „активност“. Именно един от съществените признаци на модернизацията на българското висше образование е поставянето на акцент върху познавателната активност на студента. И това е така, защото умения и компетенции могат да се формират само при активно участие на студентите в разнообразни познавателни дейности, които най-пълноценно се реализират в рамките на самостоятелната работа. Затова превръщането на учащия в субект на познавателния процес е основна характеристика на активното обучение. Всъщност обучението във висшето училище ние разглеждаме именно като активно обучение, в центъра на което е поставен студента с неговите интереси, познавателен опит, потребности, бъдеща професионална реализация и пр. Пълноценното овладяване на знанията е възможно само тогава, когато се постигне оптимално съотношение и съчетание между обучаващата дейност на университетския преподавател и самостоятелната дейност на студентите. Самостоятелна работа на студента винаги е съществувала, но не винаги е била разглеждана като отделна форма на обучение в учебната програма. Сега ние търсим някои съвременни ориентири така, че тя да бъде организирана и управлявана по-успешно предвид масовизирането на висшето образование у нас.

Ползвайки достиженията на дидактиката можем да посочим някои по-важни условия за активизиране на студентите за по-успешно изпълнение на самостоятелната работа. Според нас тези условия могат да бъдат групирани по следния начин:

- Създаване на положителни мотиви за учене и поддържане интереса към разглежданото учебно съдържание. Умело съчетаване на учебните дейности, които се извършват в аудиторно и извън-аудиторно време. Включване на студентите в научни семинари към катедрите, в изследователски проекти, стимулиране и подпомагане участието им в студентски научни сесии, участие в национални и международни състезания;

- Формиране на учебна среда, в която студенти и преподаватели са партньори в процеса на обучение, разкриване на идеите, които са заложили в разглежданото учебно съдържание, на връзките между изучаваните математически знания и бъдещата професионална реализация на студентите;

- Създаване на условия за изживяване на удовлетвореност от изпълнените самостоятелни задания;

- Използване възможностите на интерактивните методи[2];

- Разнообразяване на упражненията и ползване на проблемни въпроси при обсъждане плана за решаване на конкретен тип задачи, там, където е възможно, използване възможностите на проблемното обучение в семинарните упражнения;

- Приложение на индивидуализацията и диференциацията в обучението, особено за студентите от първи курс;
- Използване възможностите на информационните и комуникационните технологии за комуникация със студентите.

Върху основа на проучването на общодидактическа, психологическа и методическа литература можем да опишем нашето определение на понятието в съвременния образователен контекст. **Самостоятелната работа на студента** представлява целенасочена и съзнателна дейност на студента, в резултат на която той изпълнява редица индивидуални умствени действия, които могат да бъдат съчетани и с практически действия и има за очакван резултат достигане до по-високо (за студента) познавателно равнище.

Ще посочим някои функции на самостоятелната работа във висшето училище:

- Информационна - откриване и систематизиране на различна информация по даден проблем;
- Изследователска - проучване на различни изследвания по даден проблем;
- Творческа - възможност за изразяване на лично становище по дискутиран проблем;
- Развиваща – развиване на мисленето и гледните точки;
- Организационна – формиране на организационна култура;
- Ориентировъчна - ориентация в професионалната област за кариерно развитие.

За да изпълни обаче пълноценно своите функции самостоятелната работа на студента като форма на обучение с двете си разновидности трябва да бъде планирана, организирана и управлявана от преподавателя.

4 Някои изисквания за ефективност на самостоятелната работа на студентите

За да изпълни дидактическите си функции самостоятелната работа във висшето училище трябва да отговаря на определени условия:

- ✓ Наличие на съответствие на съдържанието на самостоятелната работа с изучаваното учебно съдържание;
- ✓ Задачите да са разнообразни по цели и съдържание и да са съобразени с равнището на подготовка;
- ✓ Организиране на самостоятелната работа в система;
- ✓ Да бъде дозирана по обем;
- ✓ Тя трябва да се предхожда от указания за изпълнението ѝ, да се съпътства с достъпна литература за ползване;
- ✓ Да има вариативност във формите за възлагането ѝ;
- ✓ В определени етапи самостоятелната работа може да се съобрази и с индивидуалните трудности на някои студенти;
- ✓ Диференциране на самостоятелната работа чрез увеличаване на обема и / или чрез усложняване на съдържанието на задачите;
- ✓ Всеки студент може да изпълнява самостоятелната си работа със собствен темп, но в определения срок;
- ✓ Периодична проверка на някои задания за самостоятелна работа или на етапи от нейното изпълнение;
- ✓ Обективен анализ на получените резултати;
- ✓ Наличие на срокове за изпълнение и ясни критерии за оценка;

✓ Стимулиране на самоконтрола и самооценката.

5 Примерен вариант на задачи за самостоятелна работа по учебната дисциплина „Математически анализ“

ЗАДАЧА 1. Нека за всяко $n \in \mathbb{N}$ $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

а) Покажете, че $I_n = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{n\pi + x}} dx$;

б) Покажете, че $|I_n| \leq \sqrt{\frac{\pi}{n}}$. Намерете $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$;

в) Покажете, че за всяко $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ е изпълнено неравенството

$$\frac{\sin x}{\sqrt{n\pi + x}} > \frac{1}{2\sqrt{(n+1)\pi}} \text{ и покажете, че } |I_n| > \frac{\sqrt{\pi}}{3} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

РЕШЕНИЕ:

а) Полагаме $x = n\pi + t$. За $x \in [n\pi, (n+1)\pi]$ получаваме, че

$$I_n = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin t}{\sqrt{n\pi + t}} dt.$$

б) $|I_n| \leq \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{n\pi + t}} dt =$

$$= 2\sqrt{(n\pi + t)} \Big|_0^\pi = 2(\sqrt{n\pi + \pi} - \sqrt{n\pi}) = \frac{2\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} \leq \frac{2\pi}{2\sqrt{n\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}};$$

И така: $0 \leq |I_n| \leq \sqrt{\frac{\pi}{n}}$. Следователно $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

в) Нека $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Тогава $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \leq \pi \Rightarrow \sin x \geq \frac{1}{2}$ и

$$\sqrt{n\pi + x} < \sqrt{n\pi + \pi} = \sqrt{(n+1)\pi}.$$

Откъдето $\frac{\sin x}{\sqrt{n\pi + x}} > \frac{1}{2\sqrt{(n+1)\pi}}$. Следователно

$$|I_n| \geq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{dx}{2\sqrt{(n+1)\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2(n+1)\pi}} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

ЗАДАЧА 2. Нека f е непрекъсната и положителна функция върху \mathbb{R}^+ . Покажете, че

$$g(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} \text{ е растяща за } x > 0.$$

РЕШЕНИЕ: Намираме

$$g'(x) = \frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt \cdot f(x)}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2} = \frac{f(x)}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2} \left[x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt \right].$$

Нека $g_1(x) = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$. Намираме

$$g_1'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)dt \geq 0$$

и следователно функцията g_1 е растяща за $x \geq 0$.

Тогава $g_1(x) \geq g_1(0) = 0$. Откъдето имаме, че $g_1(x) \geq 0$ за $x > 0$.

Тогава $g'(x) > 0$ и следователно g е растяща за $x > 0$.

ЗАДАЧА 3. Нека функцията f е дефинирана, непрекъсната и ограничена в R .

Нека $g(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt$.

а) Пресметнете g , ако $f(t) = \frac{e^t}{e^t + 1} - \frac{1}{2}$;

б) Покажете, че g е диференцируема върху R и пресметнете нейната производна;

в) Покажете, че $\forall x \in R, \exists y \in [x, x + 2]$, такова, че $g(x) = 2f(y)$;

г) Покажете, че g е ограничена;

д) Покажете, че ако f е строго монотонна върху R , то g е също строго монотонна;

е) Покажете, че ако f е периодична с период 2, то g е константа. Дайте пример за периодична функция с период 2 и намерете g .

РЕШЕНИЕ:

а)

$$g(x) = \int_x^{x+2} \left(\frac{e^t}{e^t + 1} - \frac{1}{2} \right) dt = \int_x^{x+2} \frac{de^t}{e^t + 1} - \frac{1}{2} \int_x^{x+2} dt =$$

$$= \ln(e^t + 1) \Big|_x^{x+2} - \frac{1}{2} t \Big|_x^{x+2} = \ln \frac{(e^{x+2} + 1)}{e^x + 1} - 1 = \ln \frac{e^{x+2} + 1}{e^x + e}$$

б) Понеже f е непрекъсната върху R , то g е диференцируема и

$$g'(x) = f(x+2) - f(x) ;$$

в) Понеже f е непрекъсната върху R , то $\forall x \in R, \exists y \in [x, x+2]$, такова, че $g(x) = (x+2-x)f(y) = 2f(y)$. Следователно $g(x) = 2f(y)$.

г) По условие f е ограничена функция. Следователно $\exists A > 0$, такова, че $|f(x)| \leq A, \forall x \in R$. Тогава $|g(x)| = 2|f(x)| \leq 2A$ и следователно функцията g е ограничена.

д) Нека f е строго растяща върху R . Тогава за $x < x+2$ имаме $f(x) < f(x+2)$. И така $g'(x) > 0$ и следователно g е също строго растяща в R . Аналогично се доказва случая, когато f е строго намаляваща.

е) Нека f е периодична с период 2. Тогава $f(x+2) = f(x)$ за всяко x и следователно $g'(x) = 0$, откъдето $g(x) = const$.

Нека $f(x) = \sin \pi x$. Имаме, че $f(x+2) = \sin(\pi x + 2\pi) = \sin \pi x = f(x), \forall x$.

$$g(x) = \int_x^{x+2} \sin \pi t dt = \frac{1}{\pi} \int_x^{x+2} \sin \pi t d(\pi t) = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi t) \Big|_x^{x+2} = -\frac{1}{\pi} [\cos(\pi x + 2\pi) - \cos(\pi x)] = 0$$

Следователно $g(x) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Андреев, М. Процесът на обучението, Дидактика, Университетско издателство „Свети Климент Охридски“, София, 2001
- [2] Каракашева, Л. Стимулиране активността на студентите в процеса на обучение чрез използване на интерактивни методи, списание „Математика и информатика“, бр. 1, 2015, с.58–68,
- [3] Каракашева, Л. Самостоятелната работа на студентите – теоретични и приложни аспекти, Университетско издателство „Епископ Константин Преславски“, Шумен, 2015
- [4] Линхарт, Й. Процес и структура човешкото учение, Издателство “Наука“, Москва, 1970
- [5] Радев, Пл. Обща училищна дидактика или събития, ситуации, обекти, субекти, конструктори и референти в училищното обучение и образование, Университетско издателство „Паисий Хилендарски“, Пловдив, 2005
- [6] Якимова, М., Михова, А. Използване на самостоятелната работа при студентите за привличането им към научно-изследователска работа, Научни трудове на Русенски университет „Ангел Кънчев“, Том 47, серия 5.1 Математика, информатика и физика, Русе, 2008, стр.70-73
- [7] Calvo B., Doyen, J. Exercices d'analyse, Paris, 1977

CONSTRUCTIVE APPROACHES IN MATHEMATICS EDUCATION

KRASIMIR V. HARIZANOV, SEVINCH A. HASHIMOVA

ABSTRACT: *This article discusses the application of constructivism in mathematics education through the use of modern methods and approaches. Are considered of technologies, platforms and applications that are applicable in training are given. Examples of didactic technologies that can participate in the conduct and organization of training are considered. Presented of different didactic technologies, their specific characteristics and features in teaching students with them are offered. Various applications suitable for teaching mathematics are considered.*

KEYWORDS: *Constructivism, E-education, Interactive methods, Learning, Mathematica.*

КОНСТРУКТИВИСТКИ ПОДХОДИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА*

КРАСИМИР В. ХАРИЗАНОВ, СЕВИНЧ А. ХАШИМОВА

АБСТРАКТ: *В настоящата статия се разглежда реализацията на конструктивизма в обучението по математика чрез използването на съвременни методи и подходи. Дадени са примери на технологии, платформи и приложения, намиращи приложимост в обучението. Посочени са примерни дидактическа технология, които могат да участват в провеждането и организацията на обучение. Представени са примери на различни дидактически технологии, техни специфични характеристики и особености при обучението на ученици с тях. Разгледани са различни приложения, подходящи за обучението по математика.*

1 Въведение

В началото на 21 век информационните и компютърните технологии бележат голям прогрес навлизайки все повече в ежедневието на човека. Това развитие се отрази и в българското образование, като се създадоха компютърни кабинети, монтираха се бели дъски, поставиха лаптопи и проектори в класните стаи.

През последните години се забелязва нова вълна на интегриране на технологиите, като доказателство за това са широкото използване на модерните интерактивни технологии, мултимедийни приложения и мултипоинт системи в начален, прогимназиален и гимназиален етап.

2 Изложение

Промяната в учебната среда чрез информационните комуникационни технологии (ИКТ), създава обучение, в което влизат „три основни взаимодействия: учител – ученик, ученик – ученик, ученик – високотехнологични информационни и комуникативни продукти“ [3].

Съвременните технологии в часовете по математика дават нови възможности за онагледяване на преподавания материал, особено в часовете по геометрия. Всички те могат да бъдат представени чрез специализирани математически приложения [[5], [7]] или

* Настоящата статия е частично финансирана по проект № РД - 08-89/28.01.2020

интерактивни дъски. Тези методи, които са базирани на ИКТ, допринасят за повишаване мотивацията на учениците, стимулиране на интереса учениците към дисциплината.

Въвеждането на извънредно положение по света и в България през учебната 2019/2020 г., заради епидемията от COVID-19, принуди милиони хора по целия свят да работят, общуват и обучават от домовете си. Това доведе и до необходимостта от приложения, които да обезпечат поддръжката на онлайн видеоконферентни разговори. COVID-19 всъщност възвръща необходимостта да открием възможностите на онлайн преподаването и обучението [[1], [2]]. За тази цел се проучиха по-подробно възможностите и функциите на някои приложения, които могат да бъдат полезни и чрез тях да се осъществи онлайн обучение.

3 Специализирани приложения за онлайн обучение

Google Hangouts

Google Hangouts е софтуер за незабавни съобщения и видеоконференции, разработен от Google. Hangouts позволява на двама или повече участници да общуват свободно в текстов, гласов или видео режим, както и да споделят местоположението си и да качат изображение. Услугата е достъпна от уеб браузъра Google Chrome на адрес hangouts.google.com, а на Фиг. 14 е представен логото на Google Hangouts. Има и мобилни приложения за всяка операционна система, както и приложение за компютри с операционна система Windows или Mac. Предимствата, които предоставя Hangouts са:

- голям избор на емотикони;
- бърз трансфер на данни;
- комуникация с голям кръг приятели;
- видео разговори;
- безплатно инсталиране.

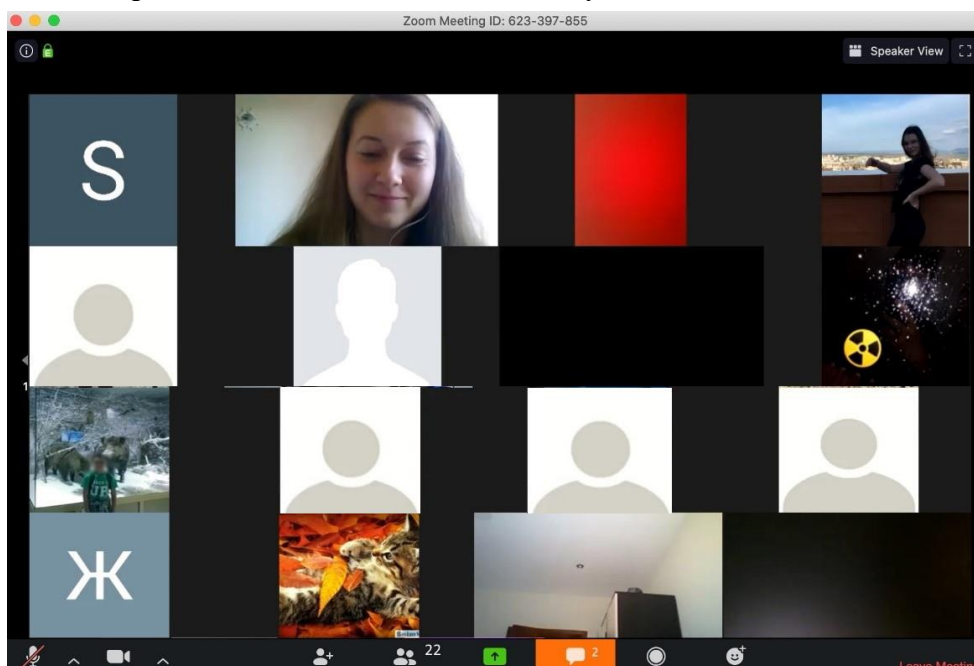
Недостатък е, след инсталиране на Hangouts, трябва да имате администраторски права, за да премахнете напълно програмата.

Zoom.us

Zoom е едно от най-популярните приложения за осъществяване на онлайн видеоконферентни разговори (Фиг. 1) при работа от разстояние. То позволява да се осъществяват онлайн срещи или лекции, като поддържа HD видео и аудио. Основните функции на Zoom са:

- Записване на срещите или лекциите, като записите се пазят в собствен сървър и могат да се изтеглят и на устройството;
- Споделяне на екрана;
- Създаване на чат, както групов, така и личен;
- „Вдигане на ръка“ – емотиконка, с която участникът дава сигнал на организатора на срещата, че има въпрос или иска да се изкаже по поставен въпрос, но без да го прекъсва;
- Споделяне на анкети за по-голяма интерактивност и мотивиране на участие в дискусия;
- Изключване на звука – организаторът има възможност за изключване на микрофона на всеки участник, ако това се налага.

Приложението има и много други функции и услуги, но достъпът до тях зависи от избрания абонаментен план. Безплатната версия има ограничения. Тя позволява сесия с до 100 участника и продължава не повече от 40 минути. Платените абонаменти предлагат



Фиг. 1 Среца в Zoom

повече функции, неограничено време на сесиите, повече участници в тях и др. Плаща се от организатора на срещите, докато участниците могат да се включат безплатно.

Skype

Skype позволява обмяна на медийни файлове, извършване на видео и аудио повиквания, както и да извършвате обмен на текстови съобщения.

Тук потребителят има възможност да създава групи до 50 човека и да провежда видеоконференции. Услугата е безплатна и е достъпна на адрес skype.com. Приложението се използва на всякакви устройства, като започнем от смартфон и стигнем до смарт телевизор.

Програмата е много удобна още за ученици и студенти, които са на дистанционно обучение и провеждат своите изпити онлайн. Чрез използването на Skype те могат да се свържат със своя учител или професор, който се намира на стотици, хиляди километри от тях. Винаги по време на събрание или представяне, може да си види, кои участници са онлайн. Също така има и възможност за споделяне на екрана.

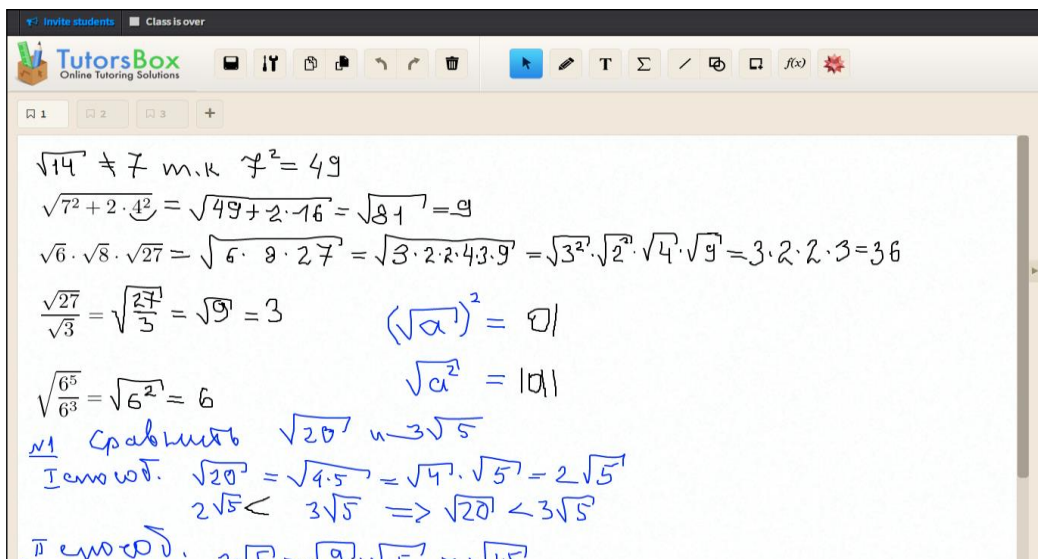
Видовете разговори, които могат да се провеждат в Skype са 3 на брой: видео, гласов и текстов чат.

4 Онлайн бели дъски

Онлайн белите дъски са много полезни и удобен начин за комуникиране между създатели на проекти, учители и ученици, за съвещания от разстояние, маркетинг специалисти и др [[4], [6]]. С тях много лесно могат да се нарисуват и обяснят схеми, чертежи, обяснения, структури, текст, ментални картини и др.

TutorsBox

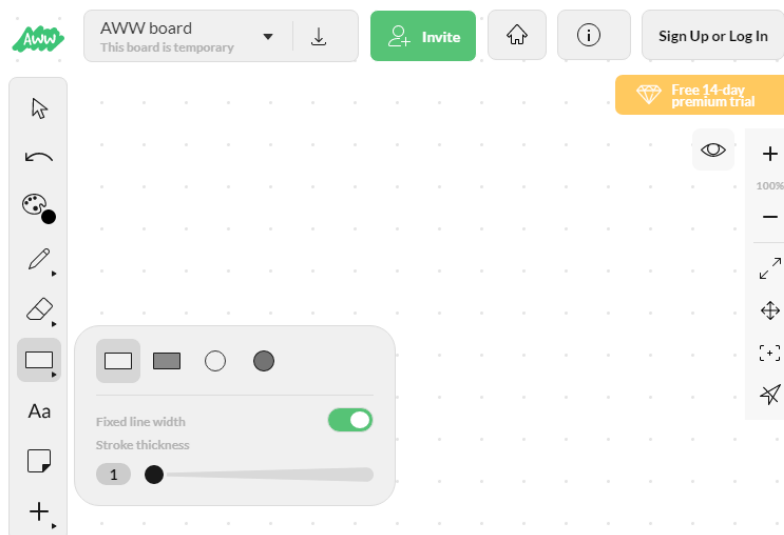
TutorsBox е онлайн дъска за преподаване, за онлайн обучения и упражнения. Вградените инструменти позволяват лесна работа. Всяка сесия позволява включването до 10 потребителя. Други функции, които TutorsBox предлага са: аудио, видео на живо, споделяне на файлове, планиране, съхранение и запазване на проекта за по-късна употреба.



Фиг. 2 Интерфейс на онлайн бялата дъска TutorsBox

AWW App

AWWApp няма твърде много опции. Той предлага три различни размера на четката, седем различни цвята и възможност да поканите някого, да споделите изображението си или да го споделите с приятели (Фиг. 3).



Фиг. 3 Интерфейс на онлайн бялата дъска AWW App

5 Приложения на конструктивизма в обучението по математика

Реализация на урок от ядрото за НЗ (урок за 6 клас)

Урок по математика

Клас: 6

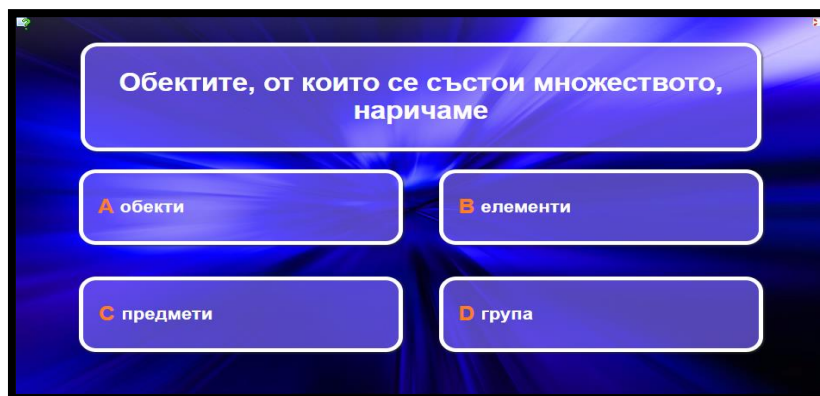
Тема: Случайни събития

Цели:

- Учениците знаят понятието случайно събитие на най-просто ниво;
- Въвеждане на понятията случайно събитие, невъзможно събитие и сигурно събитие, чрез множество примери.

Софтуер: PowerPoint Presentations

- 1) **Структура:** Дискусия с целия клас.
- 2) **Предназначение:** Връзка с предишния урок.
- 3) **Описание:** В слайд от презентация е поставен QR код, който трябва да бъде сканиран от учениците. Сканирания код води към игра в Learning Apps, като целта е да се актуализират основни знания от предишния урок: <https://learningapps.org/view10700944> (Фиг. 4).



Фиг. 4 Игра в Learning Apps

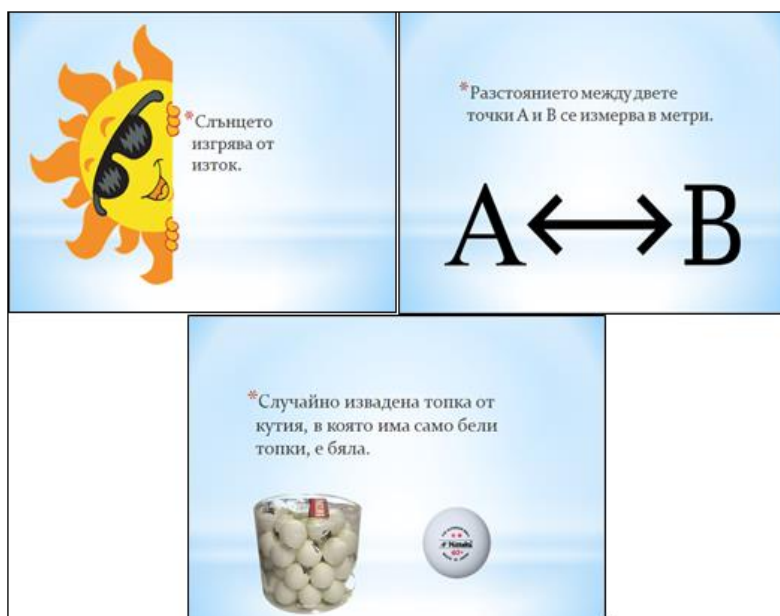
- 1) **Структура:** Дейност на целия клас.
- 2) **Предназначение:** Връзка с ежедневието.
- 3) **Описание:** В слайдове на презентация се представят различни примери, които се срещат в ежедневието. След разглеждането, учениците трябва да открият, че това са примери за случайни събития (Фиг. 5).



Фиг. 5 Примери за случайни събития

- 1) **Структура:** Дейност на целия клас.
- 2) **Предназначение:** Запознаване с понятието случайно събитие и затвърждаване на знанията за него.
- 3) **Описание:** Записване на заглавието на новата тема „Случайно събитие“ и първа точка от урока „Случайни събития“. За да се затвърдят знанията за новото понятие, учениците дават примери за случайни събития от ежедневието.

- 1) **Структура:** Дейност на целия клас.
- 2) **Предназначение:** Връзка с ежедневието.
- 3) **Описание:** В слайдове на презентация се представят различни примери, които се срещат в ежедневието. След разглеждането, учениците трябва да открият, че това са примери за сигурни събития (Фиг. 6).



Фиг. 6 Примери за сигурни събития

- 1) **Структура:** Дейност на целия клас.
- 2) **Предназначение:** Запознаване с понятието сигурно събитие и затвърждаване на знанията за него.
- 3) **Описание:** Записване на 2 точка от урока „Сигурни събития“. За да се затвърдят знанията за новото понятие, учениците дават примери за сигурни събития от ежедневието.

- 1) **Структура:** Дейност на целия клас.
- 2) **Предназначение:** Затвърждаване на знанията.
- 3) **Описание:** В слайд от презентация е поставен QR код, който трябва да бъде сканиран от учениците. Сканирания код води към игра в Learning Apps, като целта на играта е да се затвърдят знанията за двете понятия: <https://learningapps.org/watch?v=p8a4s3xra20>. Учениците трябва да определят за всеки даден пример, към коя група се отнася.

- 1) **Структура:** Дейност на целия клас.
- 2) **Предназначение:** Връзка с ежедневието.

- 3) **Описание:** В слайдове на презентация се представят различни примери, които се срещат в ежедневието. След разглеждането, учениците трябва да открият, че това са примери за невъзможни събития (Фиг. 6).



Фиг. 7 Примери за невъзможни събития

- 1) **Структура:** Дейност на целия клас.
 - 2) **Предназначение:** Запознаване с понятието невъзможно събитие и затвърждаване на знанията за него.
 - 3) **Описание:** Записване на 3 точка от урока „Невъзможни събития“. За да се затвърдят знанията за новото понятие, учениците дават примери за невъзможни събития от ежедневието.
- 1) **Структура:** Дейност на целия клас.
 - 2) **Предназначение:** Връзка с ежедневието.
 - 3) **Описание:** В слайд от презентация е поставен QR код, който трябва да бъде сканиран от учениците. Сканирания код води към игра в Learning Apps, като целта на играта е да се затвърдят новите знания: <https://learningapps.org/watch?v=ptoe648qc20>
Учениците трябва да определят за всеки даден пример, към коя група се отнася.
- 1) **Структура:** Дискусия с целия клас.
 - 2) **Предназначение:** Обобщаване на новите знания и умения.
 - 3) **Описание:** Обобщава се наученото от часа, като се припомнят, кога едно събитие се нарича случайно, кога сигурно, и кога невъзможно.

6 Заключение

Информационните технологии са неделима част от ежедневието, както на учителите, така и на самите ученици. Те заемат голяма част от времето, в което се учим, общуваме или се забавляваме. Това налага въвеждането на нови, модерни и интересни за обучаемите методи на преподаване.

Възможността за конструктивистко учене, базирано на възможностите на информационните технологии се оцени особено високо в пандемичната ситуация, в която изпадна целия свят.

В интернет пространството има различни уеб платформи, подходящи за организиране и провеждане на обучение. Много учители все по-често ги използват в своята професия, като ги интегрират в учебния процес. Избора на най-подходящата платформа зависи изцяло от нуждите, възможностите и целите на учителя. Създаването на електронно учебно съдържание, улеснява учителите, като им спестява време и им дава възможността да осигурят достъп до учебните ресурси.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Кръстанова В., Конструктивистката парадигма в обучението по български език, Електронно списание LiterNet, 19.05.2007, № 5 <http://litenet.bg/publish3/vkrystanova/konstruktivistkata.htm>, достъпно на 01.05.2020
- [2] Кръстева А., Иновационни стратегии в образованието в България, <https://ankrasteva.files.wordpress.com/2011/09/inovacionni-strategii.pdf>, достъпно на 05.05.2020
- [3] Милков Л., Приложение на екипната дейност в университетското обучение, Научни трудове на УНСС, том 1, 2006
- [4] Милков Л., Конструктивизмът като образователна идея, Педагогика, бр. 1, 2006.
- [5] Тончева, Н., Софтуерни технологии за създаване на дидактически материали в обучението по математика, Университетско издателство „Епископ КонстантинПреславски”, ISBN: 978-954-577-577-2, Шумен, 2011
- [6] Харизанов, Кр., Конструктивистки подходи в организацията и провеждането на електронно обучение, дисертационен труд за придобиване на ОНС „доктор“, Шумен 2016.
- [7] Харизанов, Кр., Павлова, Н., Харизанова, Д., Web - базираните методически платформи - новите перспективи пред съвременния преподавател, Четиридесет и шеста пролетна конференция, Боровец, 2017
- [8] URL: <https://awwapp.com>, достъпно на 20.04.2020г.
- [9] URL: Tutorsbox.com, достъпно на 20.04.2020г.
- [10] URL: learningapps.org, достъпно на 20.04.2020г.

CLOUDY TECHNOLOGIES IN MATHEMATICS AND INFORMATION EDUCATION

KRASIMIR V. HARIZANOV, PAVEL V. PETROV

ABSTRACT: *The article presents the use of cloud technologies through which interactive training in mathematics and information technology can be prepared and developed. The main functions and characteristics of various applications involved in the organization and presentation of online lessons are presented. An example of the adaptation of learning through cloud technologies to help the teacher is described.*

KEYWORDS: *E-learning, Interactive education, Education mathematic and IT*

ОБЛАЧНИТЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ*

КРАСИМИР В. ХАРИЗАНОВ, ПАВЕЛ В. ПЕТРОВ

АБСТРАКТ: *Статията представя използването на облачните технологии, чрез които може да се подготви и разработи интерактивно обучение по математика и информационни технологии. Представени са основните функции и характеристики на различни приложения, участващи в организацията и представянето на онлайн уроците. Предложени са възможности за представяне на дидактични материали чрез облачни технологии.*

1 Въведение

Бързото развитие на информационните и комуникационните технологии е един от факторите, определящи вектора на развитие на световната общност на XXI век. Цивилизацията непрекъснато се движи към изграждането на информационно общество, където информацията и научното познание играят решаваща роля.

Виждаме, че през последните години се наблюдава коренна промяна в ролята и мястото на компютрите и информационните технологии в обществото. Без тях вече е невъзможно да си представим модерен човек. Информационните технологии също се използват все по-често в образователния процес, следователно информационната и комуникационна компетентност на учителя, способността му да решава професионални педагогически проблеми с използването на ИКТ се превръща във важен компонент на неговия професионализъм.

2 Изложение

Традиционната образователна практика е основана на предпоставката, че знанието е нещо, което може да бъде преподадено непосредствено от учителя на учениците. Пасивната, ориентираната към четенето и писането педагогика с традиционно съдържание и организация се приема като норма. На теория се поощрява „участващото” и диалогово (интерактивно), съсредоточено върху ученика и резултата обучение [1, 2], но тези практики не се срещат често в действителността.

* Настоящата статия е частично финансирана по проект № РД - 08-89/28.01.2020г.

Теорията на електронното обучение описва когнитивните научни принципи за ефективно мултимедийно обучение с помощта на електронни образователни технологии [8]. Образователната технология е процесът на интегриране на технологията в образованието по положителен начин, който насърчава по-разнообразна учебна среда и начин учениците да се научат как да използват технологиите, както и техните общи задачи.

Електронно обучение (E-learning)

Терминът *електронно обучение* придобил широка популярност чрез английския си вариант E-learning (Electronic Learning), се отнася до интерактивно обучение [3], което използва информационни и електронни технологии за комуникация като средство за преподаване.

Електронното обучение е образователен процес, който включва електронни учебници, образователни услуги и технологии. В допълнение към решаването на основната си задача, електронното обучение е също отлично допълнение към редовното обучение и може да бъде добра помощ за подобряване на качеството и ефективността на традиционното образование.

Според мнозина автори електронното обучение условно може да се раздели на **синхронно, асинхронно и събитийно-ориентирано**.

Синхронното обучение (synchronous) наподобява до голяма степен на традиционното обучение, което означава, че с използването на онлайн мулти-потребителски среди, обучаващите обменят опит с други обучаващи или осъществяват връзка с преподаватели намиращи се на различни географски точки. „Преподавателите своевременно могат да предложат насоки и препоръки на обучаващите по отношение на учебния материал, за постигане на по-добри резултати. „Прилагането на този вид обучение може да задължи всеки обучаващ да се включи в учебния процес под формата на дискусия, беседа или диалог, без да остане изолиран от него“ [7].

Асинхронното обучение (Asynchronous) е курс със самостоятелен темп на учене от обучаващия, който няма директна връзката с преподавателя, а процеса на обучение се разминава във времето. Обучаемият има достъп до предварително подготвени материали от преподавателя (учебното съдържание, примери, задачи и тестове) публикувани във уеб обучителна система. Комуникацията между преподавател и обучаващи най-често се постига чрез изпращане на e-mail, чат или съобщения във форуми. Главното предимство на асинхронното обучение е, че обучаващите сами определят обема на учебното съдържание, което трябва да усвоят по време подходящо и удобно за тях. “Но като недостатък може да се отбележи, че така се губи връзката между преподавател и обучаващ, както и увеличаване на времето за получаване въпроси и отговори” [7].

Събитийно-ориентирано обучение (Blended learning) обединява горепосочените два вида. Според това обучение „означава спектъра от възможности, представени чрез комбиниране на интернет и цифрови медии с установени форми в класната стая, които изискват физическото присъствие на учител и студенти“. В зависимост от конкретните нужди, преподавателя може да включи асинхронни и синхронни елементи, т.е. той определя коя част от учебния материал да бъде за самостоятелна работа и индивидуално оценяване (асинхронни), и в коя част да се включи в реално време където да се обсъдят идеи, въпроси, казуси или мнения (синхронни). “Изборът на такъв подход изгражда у обучаващите навики за отговорност, самостоятелно и градивност в своето обучение” [7].

Математиката и информационните технологии са инструмент за придобиване на подходящи умения за справяне с предизвикателствата на реалния живот. Това определя наличието на съвременните учебни програми, нови методи на преподаване, адекватни на поставените в тях цели, както и актуални комуникационни средства за постигането им.

Облачните технологии се приемат добре заради потенциала си за постигане на огромни икономически ползи, предоставянето на забележителна гъвкавост, бързина и удобство. Не са необходими големи инвестиции за включване в Облака, не се създава собствена инфраструктура, но са налични големи възможности за обучение.

Приложение на облачните технологии в обучението по математика и информационни технологии

Професията на учителя включва много разнородни дейности, които са свързани предимно със съхраняване, обработване и разпространение на информация. Регламентирани в нормативни документи или не – тези дейности са ежедневие и автоматизирането им с помощта на компютър допринася за облекчаване на рутината [4]. Всичко, което прави учителят, е свързано със системата на обучение, която се състои от учебно съдържание, цел, учебен процес и контрол и оценка.

В тази част са представени активни методи на обучение, базирани на най-съвременните информационни и комуникационни технологии. Разгледано е приложение на облачните технологии като средство за преподаване и обучение по математика и информационни технологии и организиране на оценяване на знанията и уменията на учениците.

Google Apps for education разполага с богат набор от инструменти за преподаване и учене. Целият пакет е на разположение безплатно за всички училища, като използват собствения домейн на училището или закупят такъв от Google. Google Apps разполага с всички инструменти необходими за обучението в училищата и са построени за Интернет, така че учениците да работят заедно през всяко устройство, по всяко време [5,6]. Тези дигитални инструменти помагат ученето да е по-достъпно, по-интерактивно и в по-голямо сътрудничество. Google Apps предлага до 30GB за съхранение на потребител. Важно да научим учениците си как да мислят критично, да оценяват онлайн ресурсите и да използват различни технологии за достъп до информацията, от която се нуждаят.

Приложения, предлагащи удачни възможности за прилагане в образованието, са



Фиг. 1 G Suite for Education обучение

Google Hangouts Meet, Zoom и Microsoft Teams.

Google Hangouts Meet е приложение, което е насочено към бизнес средите. С него може да се създаде разговор с до 250 потребители, но потребителите задължително трябва да притежават GMAIL. Във връзка с кризата с COVID-19, от 13-ти март до 30 септември

2020 година всички потребители, които използват **Google Hangouts Meet** с образователни цели също ще могат да провеждат разговори с до 250 потребители, ще могат да записват и да излъчват видео срещи.

Zoom е най-използваното приложение за онлайн видеоконферентни срещи. С него се работи лесно, при много добро качество на видео и аудио информацията. Проблем е сигурността при работа с приложението, поради нарастващото потребление през последните седмици.

Microsoft Teams е част от **Microsoft Office 365**. Има платена и безплатна версия. Безплатните, както и платените планове позволяват да се провежда среща с до 250 потребители. Поради установени договорни отношения между МОН и **Microsoft**, в бъдеще това ще бъде най-използваната официална облачна платформа в българското образование.

При избор на облачни услуги влияние оказват:

- **Времетраенето на разговорите**

В **Zoom** има съществува лимит за потребителите, използващи безплатно услугите. Потребителите могат да организират неограничен брой обаждания и срещи, но тяхното времетраене е най-много до 40 минути.

Google Hangouts Meet и **Microsoft Teams** нямат времеви лимит или лимит на обажданията.

- **Възможността за записване на видео разговорите**

В **Google Hangouts Meet** проведените срещи могат да се записват. Могат да се записват аудио, видео, чат и споделяния на екрана. След като видеото приключи, записът се съхранява автоматично в Google Drive на съответния потребител.

Zoom също предлага запис на срещите. Съхраняването се извършва в/на компютъра на потребителя.

И **Microsoft Teams** позволява запис на срещите и груповите повиквания. Записват се в Microsoft Stream. След като бъде запазена, срещата може да бъде споделяна с потребители, които не са успели да присъстват на нея.

- **Възможността за споделяне на екран**

В **Google Hangouts Meet** само един потребител може да споделя екрана си по време на видеосрещата. Но благодарение на Google Drive, лесно може да се споделят документи, файлове, изображения през чата, който е направен в стаята.

В **Zoom** може няколко човека по едно и също време да споделят екраните си.

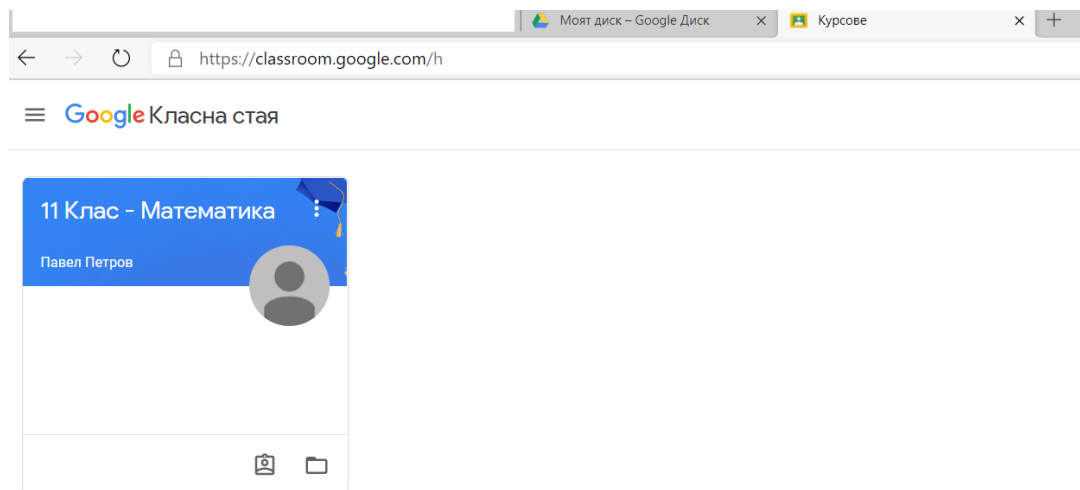
Microsoft Teams също разрешава споделянето на екран, приложения и файлове. Администраторът може да управлява и разрешава споделянето на екрани, приложения и файлове.

В условие на дистанционно обучение настъпи трескава надпревара и платформите бързо разшириха и подобриха предлаганите услуги.

Реализация на урок по Математика (нови знания)

Урокът за нови знания по математика е на тема „**Статистически числови характеристики**“, ядро „Вероятности и статистика“ от учебната програма за 11 клас по математика, в сила до 2019/2020 учебна година.

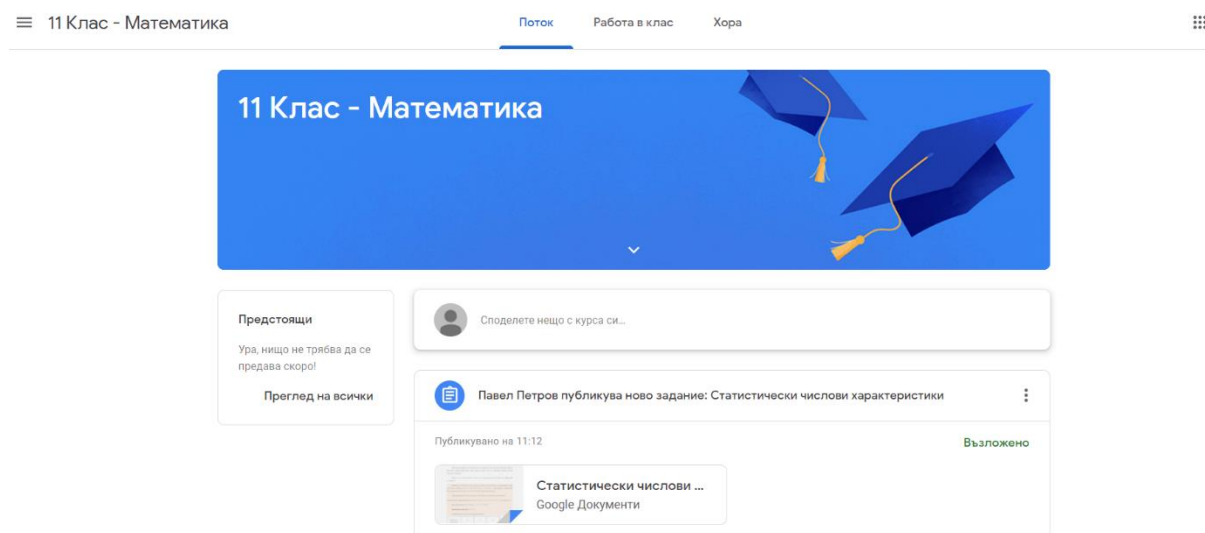
В условията на дистанционно обучение, чрез използване на облачна платформа, е създадена виртуална класна стая „11 клас - математика“ (*Фиг. 2*).



Фиг.2 Облачна класна стая по Математика

Урокът е представен под формата на презентация в облака, видима за всички присъединили се към групата. Презентацията съдържа основните моменти от хода на урока. Учителят води урока, обяснява новите понятия, примерите в урока, насочва учениците, какво трябва да запишат в тетрадките.

Урокът е публикуван в платформата след края на учебния час (*Фиг. 3*) под формата на текстов или PDF формат документ. Файла съдържа подробния текст на урока, заедно с обясненията на учителя, така, че всеки, който изпитва затруднения при самоподготовката, да може да си припомни говореното в час.



Фиг. 3 Работни файлове към урок

Реализация на урок по ИТ (упражнение)

Урокът за упражнение по информационни технологии е свързан с изучаването на електронни таблици в училище и придобиване на знания и умения за практическо приложение на компютрите за изчисления и работа с данни.

Учебното съдържание по информационни технологии е изградено така, че съобразно с възрастовите особености на учениците, всяка учебна година да се затвърждават и надграждат знанията по съответните модули. С електронни таблици учениците се запознават още в пети клас (проектиране и подреждане на данните в таблица, форматиране на клетките на таблиците, създаване на диаграми) и в шести те придобиват умения за работа с формули и бързо извършване на изчисления на данните в таблиците.

Предложеното упражнение е свързано със затвърждаване на знанията и уменията на учениците при работа с формули в Excel.

На работните места в компютърния кабинет учениците са разположени (подредени) по номера им в клас. Учителят предоставя две задачи за упражнение:

Първа задача

Трябва да се направи таблица, съдържаща предполагаемите дневни температура за дадено населено място за следващите десет дни.

Таблицата трябва да съдържа следните полета: **Ден, Дата, Минимална температура (за деня) Максимална температура (за деня), Среднодневна температура (за деня).**

В таблицата, в отделни клетки, трябва да се намери средната температура за десетдневката, най-ниската и най-високата температура за този период.

Внимание: Задължително е използването на формули в таблиците!

Втора задача

Фирма закупила електронна техника - компютър Apple (10 броя, единична цена 1200 лева, дата на закупуване 02.12.2019 г.), компютър DELL (5 броя, единична цена 1037 лева, дата на закупуване 03.12.2019 г.), монитор M134 (3 броя, единична цена 204 лева, дата на закупуване 07.11.2019 г.), монитор M654 (6 броя, единична цена 305,56 лева, дата на закупуване 11.02.2019 г.), принтер P05 (2 броя, единична цена 115 лева, дата на закупуване 03.06.2019 г.).

Счетоводителят на фирмата трябва да представи на Управителния съвет отчет, под формата на таблица, за направените разходи. Справката трябва да съдържа общата изразходвана сума за цялата техника, поотделно сумите за всяка отделена марка стока, както и средната цена за всеки един артикул.

Внимание: Задължително е използването на формули в таблиците!

Учениците с нечетни номера ще работят по първа задача, а тези с четени номера – по втора.

Преди учениците да започнат самостоятелно работа, учителят дава необходимите указания, прави разяснения по условията на задачите и проектирането на таблиците. При необходимост обяснява непознатите думи (ако има такива). Резултатите от работата си учениците ще изпращат на преподавателя чрез облачната платформа.

3 Заключение

Използването на ИКТ в обучението предлага широка гама от възможности и за учителя, и за ученика. Те подпомагат работата на учителя при неговото представяне на знания, факти, понятия, закономерности, теории и идеи. Предлагат различна форма на визуализация и нагледност, насочваща ученика към логически връзки и зависимости в изучаваното учебно съдържание.

Облачните технологии и съответните им приложения допринасят за създаването на нови модели на преподаване и учене в интерактивна и ангажираща учебна среда. Притежаващи модерен и лесен за навигация интерфейс, те предоставят възможности за чат, блогове, аудио и видео конферентни връзки, форуми, речници, календар за проследяване на крайни срокове, организиране на групови срещи и връзки.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Вълчев, Р., (2004), Интерактивни методи и групова работа в гражданското образование, София.
- [2] Гъров, К, Ангелов, А., Йовков, Л. (2015), Проектно базирани подходи за формиране и развиване на изчислителни умения, реализирани чрез осъществяване на междупредметни връзки и използване на електронни среди, сп. Математика и информатика, кн. 3.
- [3] Иванов, И., Интерактивни методи на обучение
- [4] Иванова, Н., (2014), Интерактивност в обучението. Интерактивни методи и техники, София: СУ „Св. Кл. Охридски“.
- [5] Колева, Ел., Георгиева, С., Облак технологиите в професионалната дейност на учителя
- [6] Колева, Ел., Георгиева, С., Основни технологични модели за прилагане на облак технологии в професионалната дейност на учителя
- [7] Харизанов, Кр., Електронното обучение в педагогическите практики, конференция с международно участие "Съвременни предизвикателства пред педагогическата наука", 6-8 юни 2014, София.
- [8] Тончева, Н., Софтуерни технологии за създаване на дидактически материали в обучението по математика, Университетско издателство „Епископ КонстантинПреславски”, ISBN: 978-954-577-577-2, Шумен, 2011.

CONTINUING PROFESSIONAL EDUCATION - STRATEGIES, OPPORTUNITIES AND REGULATORY

GALINA R. PETROVA

ABSTRACT: *In past years, continuing education as part of the vocational training system has become increasingly important. Professional knowledge and skills of human resources are a major factor in achieving the goals of organizations and improving their competitiveness. Providing opportunities to motivate both organizations and individuals to invest in professional training and development of competencies in accordance with the needs of the labor market will contribute to the continuous maintenance of the quality of the workforce and its suitability for employment.*

KEYWORDS: *Continuing education, Strategies, Opportunities, Regulatory requirements*

ПРОДЪЛЖАВАЩО ПРОФЕСИОНАЛНО ОБУЧЕНИЕ - СТРАТЕГИИ, ВЪЗМОЖНОСТИ И НОРМАТИВНИ ИЗИСКВАНИЯ

ГАЛИНА Р. ПЕТРОВА

АБСТРАКТ: *През последните години продължаващото обучение като част от системата за професионално обучение придобива все по-голямо значение. Професионалните знания и умения на човешките ресурси са главен фактор за постигане на целите на организациите и подобряването на тяхната конкурентоспособност. Осигуряването на възможности за мотивиране както на организациите, така и на индивидите да инвестират в професионално обучение и развитие на компетенциите в съответствие с потребностите на пазара на труда ще допринесе за непрекъснато поддържане на качеството на работната сила и нейната пригодност за заетост.*

КЛЮЧОВИ ДУМИ: *Продължаващо обучение, Стратегии, Възможности, Нормативни изисквания*

1 Въведение

През последните десетилетия в световен мащаб се отделя изключително внимание на управлението на човешките ресурси. Постепенното изчерпване на възможностите на класическото управление води до нарастване на ролята на човешкия фактор и неговите професионални знания и умения за постигане на целите на организацията [1; 6].

Човешкият ресурс, като основен фактор на конкурентоспособността на съвременните организации повишава изискванията за висок професионализъм, непрекъснато усъвършенстване, използване и обогатяване на най-добрите практики [4; 7].

Успехът на организациите, зависи от производителността на труда и мотивацията за работа, а те на свой ред – от нивото на професионалните умения, компетентност и квалификация на служителите и техния принос за просперитета на организацията [2].

Продължаващото обучение е основен фактор за придобиването на квалификация, умения и компетенции, за насърчаване на иновационната дейност, конкурентоспособността и гъвкавостта на организациите, включително тези във фармацевтичния сектор [3; 4; 5].

Цел: Целта на настоящия доклад е да се проучат и представят стратегиите, възможностите и нормативните изисквания за продължаващо професионално обучение в България

Материал и методи: В доклада е използван документален метод и ретроспективен анализ на научни публикации и нормативни документи в периода 1990-2018 г., свързани с продължаващото професионално обучение.

2 Дискусия

Продължаващото обучение (ПО) и ученето през целия живот са съвременни индикатори за развитие на човешкия потенциал и изграждането на конкурентоспособна икономика. Освен, че осигурява на организациите конкурентни предимства, то спомага за повишаване на професионалната компетентност на служителите [15].

Непрекъснатото повишаване на техническите умения, теоретичните знания и нагласата за сътрудничество сред работниците и служителите е от съществено значение за насърчаване на процесите на иновация и трансфера на знания и умения [12; 15].

Динамичното развитие на индустриалните процеси обуславя необходимостта от перманентно придобиване на нови знания. Поради бързото развитие на науката не е възможно вече еднократно да се усвоят каквито и да е знания, умения и компетенции, които могат да се прилагат през целия живот. Изисква се нов начин на мислене както по отношение на старите проблеми, така и за развитие и реализиране на нови перспективи, идеи и решения [8; 14].

През последните години интересът към продължаващото обучение нараства. В специализираната литература се срещат различни определения за него, а редица от тях ползват понятието „перманентно“ или „непрекъснато образование“.

Продължаващото обучение е част от системата на професионалното обучение. Тъй като понятията „продължаващо“ и „непрекъснато обучение“ у нас се възприемат като взаимозаменяеми и се използват с едно и също значение, е необходимо да бъде изяснено какво представляват „непрекъснато професионално обучение“, продължаващо обучение и „обучение за повишаване на квалификацията“.

Според една от дефинициите, продължаващото учене е „непрекъснат, доброволен и вътрешно мотивиран стремеж към придобиване на личностни и професионални знания, и умения“ [18].

Понятието продължаващо обучение или учене през целия живот (lifelong learning) като терминология и дефиниция се развива във времето, в посока от системата (на перманентното образование) към обучаващите се [8; 9].

Перманентният характер на ученето се разглежда от автори като Герон, Гюрова, Дечева и други, според които „... ученето през целия живот се характеризира със съединяването на всички форми на организирано ръководено образование“. То има всеобщ характер и е фактор на обществения прогрес [8; 9].

Същите автори поставят акцент главно върху професионалното усъвършенстване и преквалифициране на възрастните лица чрез различните институционализирани звена или форми [8; 9]. Други автори като White, Hockley, Laughner, van der Horst Jansen смятат, че продължаващото обучение е комплекс от взаимосвързани и обуславящи се процеси на образование, обучение и възпитание, които съпровождат човек през целия му живот и осигуряват неговото постоянно развитие в съответствие с обществените потребности и личните му интереси [19].

Чрез ученето през целия живот се постига общо и професионално развитие на личността, подобрява се жизненото ниво, свежда се до минимум броят на безработните и се формира ефективна структура на заетите лица [8;14;15].

Основните нормативни актове, които регулират правната рамка на продължаващото професионално обучение в България са: Кодекса на труда, Закона за професионалното образование и обучение, Закона за висшето образование, Закона за насърчаване на заетостта, Националната стратегия за продължаващо професионално обучение, и др.

Продължаващото обучение е дефинирано по различен начин и в различните законодателни актове.

Съгласно чл. 5, ал. 2 на Закона за професионалното образование и обучение (ЗПОО), професионалното обучение осигурява придобиване на квалификация по професия или по част от професия, както и нейното усъвършенстване [11]. В него непрекъснатото професионално обучение в системата за професионално образование и обучение е регламентирано като „усъвършенстване на придобитата квалификация по професия или част от професия, както и началното професионално обучение – придобиване на първоначална квалификация” [15].

Формите за непрекъснато професионално обучение, регламентирани в ЗПОО дават възможност на всички желаещи лица над 16-годишна възраст да: придобият професионална квалификация, актуализират професионалните си умения за подобряване на позицията и шансовете си за реализация на пазара на труда, повишат квалификацията си или се преквалифицират, като получат държавно признат документ [15].

В системата на висшето образование, продължаващото обучение се провежда в съответствие с разпоредбите на Закона за висшето образование (ЗВО). В чл. 43, ал. 1 на ЗВО продължаващото обучение е дефинирано като „обучение за повишаване на квалификацията”. Или продължаващото обучение в сферата на висшето образование се явява „следдипломно обучение” [10; 15].

Националната стратегия за продължаващо професионално обучение, дефинира понятието като обучение на лица над 16 години за придобиване, разширяване и усъвършенстване на професионалната квалификация с цел подобряване на пригодността за заетост и индивидуално развитие [13].

През последните години публични кампании и изяви, например „Европейска година на ученето през целия живот”, подкрепят и спомагат развитието на положителни нагласи към продължаващото професионално обучение. Някои автори са на мнение, че продължаващото професионално обучение зависи от личните потребности и трябва да се гледа на него, не само като икономически фактор, а така също и като на инструмент за образование [14; 16].

Тези тенденции водят до разрастване на пазара на доставчици на професионално обучение и благоприятстват конкуриращия се климат в процеса на осигуряването му от гледна точка на качеството на крайните резултати. Основна цел на обществените власти и политиките на отделните страни в Европейския съюз (ЕС) е да се повиши желанието на обучаемите да инвестират в своето професионално обучение по лични и икономически причини, а така също и организациите да инвестират в професионалното обучение на наетите си кадри [14;16].

Обучението заема все повече място в големите организации. Малките и средните предприятия срещат специфични проблеми и трудности, които ограничават развитието в тях на продължаващото професионално обучение. Данните от различни изследвания сочат, че независимо, че продължаващото обучение може да служи и да даде втори шанс,

и възможности за преждевременно напусналите училище, то по-скоро се явява като услуга за високо квалифицираната част от работната сила. По-ниско квалифицираните работници продължават да имат все по-слаб достъп до продължаващото обучение [13; 14].

Професионалното обучение в организациите се характеризира със сравнително кратка продължителност. Провежданото продължаващо професионално обучение от държавни органи, предприятия, камари или организации отговаря частично на търсенето на пазара на труда. Някои много добре организирани образователни и обучителни системи, могат да адаптират кратките си курсове като част и от по-дълга обучителна програма [17].

Механизмите, осигуряващи и гарантиращи качество, основаващи се на институционалния процес са важни показатели за имерване на прозрачността на обучението. Въпреки това не всички механизми за осигуряване на качество в обучението могат да проследят развитието и нововъведенията в системата на продължаващото професионално обучение. Това налага де се разглеждат и индефицират появилите се нови елементи за осигуряване на качество в обучението с фокус върху крайните резултати от това обучение [8; 9; 17].

Изследванията на някои автори показват нарстващи потребности от краткосрочно обучение и обучение в неформална среда. Съществен елемент от концепцията за ученето през целия живот е наличието на разнообразие от условия и признаването на уменията и компетенциите, получени в други форми извън училище. Много образователни и обучителни системи разглеждат методите за оценка на компетенциите като път за връщане на обучаемите към формалното образование и обучение, без да се налага да учат повторно, или като възможност да удостоверят уменията си, изискуеми от естеството на длъжността или в друга професионална област. На тази база в Обединеното Кралство и Оценъчните центрове във Франция за повишаване на уменията и знанията на активно заетата част от населението са изградени и представени Национални професионални квалификации. [17].

Интегралният подход намира все по-голямо приложение в разработването на учебните програми, в подбора на учебното съдържание и в самия учебен процес [9; 14].

В основата на концепцията за непрекъснато обучение е залегнало разбирането за: взаимодействие и координация между формите за формално и неформално образование, търсене и предлагане на нови подходи, по-голяма гъвкавост и нововъведения [9; 14].

Създаването на най-конкурентоспособната в света, динамична, основана на знания икономика с повече и по-добри работни места, и по-висока социална кохезия е основна стратегическа цел на Европейския съюз. Постигането на тази цел изисква осигуряване на подходящо образование и професионално обучение за подобряване на пригодността на кадрите и за реализация на работната сила. Република България като страна членка на ЕС, взема предвид и прилага европейските стратегии, политики и практики в областта на продължаващото професионално обучение – като Стратегия “Европа 2020”, концепцията за учене през целия живот, програмите по линия “Образование и обучение 2020”, Европейската стратегия по заетостта и др. [13].

Системите за образование и обучение в Европа предлагат на гражданите редица възможности за учене през целия живот. Въпреки това, данните сочат, че над 10 % от учениците напускат училище без достатъчно квалификации, по-малко от 40 % от младежите завършват висше образование, а 20 % от възрастните имат слаба езикова и математическа грамотност [20]. По данни на Евростат, през 2005 едва 1.3% от населението на възраст 24 - 65 години е участвало в програми за учене през целия живот [21].

Основният проблем, който се очертава е неравномерното разпределение на възможностите за осъществяване на професионално обучение.

В интензивния процес на реструктуриране на производството в периода на прехода към пазарна икономика се наблюдава определена тенденция на разминаване на качеството на работната сила с новите потребности. Това се проявява още по-силно при съпоставка с бъдещите изисквания към националната работна сила в процеса на развиващата се глобализация.

Обученията за квалификация и преквалификация са и един от основните приоритети в Националния план за действие по заетостта (НПДЗ) за 2015 г. В него са предвидени дейности по придобиване на нова квалификация, повишаване на квалификацията и уменията на заетите и безработните лица, както и такива за постигане на по-добро съответствие с потребностите на пазара на труда [22].

Това означава, че в страната се мисли в посока осигуряване на условия за професионална подготовка, които да дават възможност за непрекъснато поддържане качеството на работната сила и нейната пригодност за заетост в съответствие с изискванията на пазара на труда и икономиката на знанието [13].

В Националната стратегия за учене през целия живот 2014-2020 г. са определени четири основни приоритети, насочени към:

- прилагане на образователен подход, подпомагащ развитието на всички учещи и допринасящ за изграждането на мислещи, можещи и инициативни личности, способни да се справят с промените и несигурността;
- повишаване на качеството на образованието и обучението;
- осигуряване на образователна среда за равнопоставен достъп до учене през целия живот, за активно социално включване и активно гражданско участие;
- стимулиране на образование и обучение, съобразено с потребностите на икономиката и промените на пазара на труда [21].

3 Заключение

Продължаващото обучение като част от обучението през целия живот дава възможност за удовлетворяване реалните учебни потребности на всяко лице, произтичащи от необходимостта за допълване на професионалните знания и умения (квалификация) и/или придобиване на нова професия (преквалификация). В процеса на глобализация и функционирането на икономика, основана на знанието, потребността от учене през целия живот и продължаващо (професионално) обучение нараства значително. Засилващата се конкуренция, промените в работната среда, работните процеси, професиите и компетенциите налагат да се търсят и реализират възможности за непрекъснато обучение на кадрите. С оглед осигуряването на това обучение, от изключителна важност е определянето на правилния подход за проучване на потребностите от обучение и разработване и прилагане на стратегии за неговото стимулиране.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Аврамов, В., Управление на персонала на търговска фирма, Сиела, София, 2005
- [2] Армстронг, М. Управление на човешките ресурси, Бургас, "Делфин прес", 2013
- [3] Вачкова, Е. Нови насоки и тенденции в управлението на човешките ресурси-Изтокът се среща със Запада. Пленарен доклад: Сравнителен анализ на УЧР в посткомунистическите страни. Печ-Унгария, 2008

- [4] Владимирова, К. Управление на човешките ресурси – стратегии, стандарти, практики. УНСС, София, 2006
- [5] Владимирова, К., К. Габровски, Н. Стефанов. Стратегическо управление и стратегическо планиране. Унив. изд. Стопанство, С., 2007
- [6] Вунова, К. Стратегическо управление на човешките ресурси-теоретичен и приложен аспект. ВУМК, Добрич, 2008
- [7] Вунова, К. Иновативни стратегии в управлението на човешките ресурси – Нов фокус върху човешкия капитал, управление и устойчиво развитие 1/2007 (16)
- [8] Герон, Ж. Обучение през целия живот, С., 2003
- [9] Гюрова, В. Понятие за перманентното образование. Народна просвета, бр. 3/1990
- [10] Закон за висшето образование. ДВ. 112/1995. чл. 43, ал. 1.
- [11] Закон за професионалното образование и обучение. ДВ. бр. 68/1999. чл. 5, ал. 2.
- [12] Маринов, П. Интерактивни комуникации – стратегии и знание. Същност и нови концепции за управление на знанието. София. 2010. [http://ebox.nbu.bg/prob12/view_lesson.php?id=247]
- [13] Национална стратегия за продължаващото професионално обучение за периода 2005-2010 година
- [14] Осигуряване на качеството на продължаващото професионално обучение, доклад на Европейската фондация за обучение <http://www.etf.eu.int/quality>
- [15] Обретенова, Т., Методични проблеми на изследването на потребностите от продължаващо обучение в организациите от горския сектор, Управление и устойчиво развитие, 4/2014 (47), 41-47
- [16] Петров П., Атанасова М. Образованието и обучението на възрастните. Веда Словена, С., 2003
- [17] Aspin, N., Chapman, D., Lifelong Learning Concepts and Conceptions. Springer, 2007
- [18] Mackeracher, D. Making Sense of Adult Learning, Second Edition. Toronto: University of Toronto Press, 2004
- [19] White R., A. Hockley, M. Laughner, J. van der Horst Jansen. From Teacher to Manager: Managing Language Teaching Organizations, Cambridge University Press, 2008
- [20] https://ec.europa.eu/assets/eac/education/policy/strategic-framework/expert-groups/2014-2015/group-highlights_bg.pdf
- [21] https://eacea.ec.europa.eu/nationalpolicies/eurydice/content/lifelong-learning-strategy-12_bg
- [22] <https://ime.bg/bg/articles/zashto-ot-kogo-i-kak-se-osyshtestvyava-prodyljavashoto-profesionalno-obuenie/#ixzz6Pd0u5100>

ROLE OF COOPERATIVE STATISTICS FOR RAISING AWARENESS ABOUT THE COOPERATIVE BUSINESS MODEL

SLAVENA G. STOYANOVA

ABSTRACT: *The cooperatives have a long history and traditions. They are an example of stability and sustainable development regardless of socio-economic, political and ethnic conditions. Due to its unique business model, cooperatives are able to adapt and respond more effectively even during economic and financial crises, providing employment. Despite its importance, the cooperative business model has not yet received the "attention" it deserves. Insufficient interest in cooperatives limits the possibility of a detailed assessment of the size and impact of these enterprises. The available statistics on cooperatives are also unsatisfactory. These shortcomings reduce awareness of the cooperative business model.*

KEYWORDS: *Cooperatives, Cooperative business model, Harmonization, Cooperative statistics*

РОЛЯ НА КООПЕРАТИВНАТА СТАТИСТИКА ЗА ПОВИШАВАНЕ НА ИНФОРМИРАНОСТТА ОТНОСНО КООПЕРАТИВНИЯ БИЗНЕС МОДЕЛ *

СЛАВЕНА Г. СТОЯНОВА

АБСТРАКТ: *Кооперациите са специфичен тип предприятие. Създадени на база определени принципи и ценности, със своята демократична структура те допринасят за социално-икономическото развитие, осигуряват заетост, способстват за задоволяване на потребностите на своите членове и клиенти. Благодарение на своя уникален бизнес модел кооперациите успяват да се адаптират и реагират по-ефективно дори по време на икономически и финансови кризи. Въпреки посочените предимства, кооперативният бизнес модел все още не е получил „вниманието“, което заслужава. Недостатъчният интерес към кооперативите ограничава възможността за детайлна оценка относно размера и влиянието на тези предприятия. Наличната статистика за кооперативите е също неудовлетворителна. Посочените недостатъци намаляват информираността относно кооперативния бизнес модел.*

1 Въведение

Кооперациите, респективно кооперативният модел и кооперирането, имат дългогодишна история и традиции. Като обективно наложили се организации, чието възникване се свързва с възникването и развитието на капиталистическата форма на собственост, кооперациите създават социална специфика, при която сътрудничеството, солидарността, справедливостта и етичността премахват социалните конфликти.

Днес кооперациите са важен фактор за икономическото развитие и просперитет на много икономики. Кооперацията се явява възможен вариант за решаването на множество остри стопански и социални проблеми. Тя е социално икономически феномен, който демонстрира стремежа на човека към сътрудничество, взаимопомощ и равноправие в основни сфери на обществения живот. Като форма на организация кооперацията успява да

* Настоящата статия е частично финансирана по проект №РД-08-93/28.01.2020г. „Икономика 2020: национални приоритети и стратегии“

просъществува и показва необикновена устойчивост въпреки разнородните социално-икономически, общественно-политически и етнически условия. Идеите и практиките на кооперативното движение с успех се използват за смекчаване на социалните противоречия и като ефективно средство за мобилизация на силите, способно да оживи икономиката.

Съществуват тези, че кооперациите са по-устойчиви във времена на криза [8]. Някои автори посочват, че кооперациите се считат за важни за обществото, тъй като могат да допринесат за укрепване на демокрацията, насърчаване на гражданското общество да участва активно в икономическите, социалните и политическите въпроси [2]. Според Международната организация на труда подобни изявления засега се основават само на „ad hoc“ проучвания, които обхващат ограничен набор от индустрии за няколко държави [9]. За да бъде изведена ролята и значимостта на кооперацията, би следвало да се направи анализ на обективните процеси в пазарното стопанство на всяка отделна страна, като се отчете влиянието на националните традиции и особености. Обобщени данни от проведени изследвания сочат, че кооперациите са слабо представени в националните статистики. Липсват надеждни, съгласувани и сравними статистически данни за много страни [1].

2 Кооперативна статистика – състояние и тенденции

Като специфичен тип предприятие, кооперациите изграждат своя мрежа, обхващаща различни територии. Голяма част от кооперативите, в зависимост от тяхната икономическа дейност, членуват в различни асоциации и съюзи. Безспорно за кооперациите и за извършваната от тях дейност се събира информация. Тя обаче, и в повечето случаи, е за конкретен вид кооперативна структура. Установява се, че кооперациите са слабо представени в националните статистики. Много страни „произвеждат“ статистически данни за кооперациите, но те са склонни да обхващат само подгрупа кооперативи [9].

За подобряване на представянето на кооперациите в статистическите информационни системи на отделни страни апелират множество национални и международни организации. През 2002 г. Международната организация на труда (МОТ) заявява, че националните политики трябва „да се стремят да подобрят националната статистика за кооперациите с оглед формулирането и прилагането на политиките за развитие”[6]. Извършват се проучвания. В някои страни от Европейския съюз, включително и в България, по линия на проекти, финансиран от Европейската комисия, се изграждат статистически информационни системи. Интересните факти за нашата страна са следните:

Първо: Съществуват следните обединения на кооперативи: Централен кооперативен съюз (ЦКС), обединяващ основно потребителни кооперации, Национален съюз на земеделските кооперации, обединяващ земеделски кооперации, Национален съюз на трудово-производителните кооперации (НС на ТПК), Национален съюз на кооперациите на инвалидите. Функционират и териториални съюзи. Териториалните съюзи обединяват кооперации от един район – районни потребителни кооперации, окръжни кооперативни съюзи. На национално ниво кооперациите се обединяват на база видово разнообразие.

Второ: В периода 2008-2009 Централният кооперативен съюз е реализирал проект, свързан с изграждане на единна статистическа информационна система. Проектът е финансиран от ЦКС. Изградената система позволява събиране в централна база данни на информация за основните организационни и финансово-икономически показатели на всички, членуващи в системата, кооперативни организации – кооперации, кооперативни съюзи, кооперативни търговски дружества. Единната статистическа информационна система подпомага кооперативните ръководители в осъществяването на успешен

мениджмънт на управляваната от тях кооперативна организация – на локално, регионално и национално ниво [10]. Статистическата информационна система е активна и понастоящем, като осигурява информация относно: членствени отношения, дялов капитал, коефициент на кооперираност, заетост, участие на член-кооператорите в органите за управление и контрол на кооперативната организация, участие в органите за местно самоуправление и други. Достъпът до информация е ограничен. Получава се след съответна оторизация на потребителя.

Трето: През 2010 г. Централният кооперативен съюз взема участие в проект „Изграждане на информационна система на ЦКС като база за създаване на сателитни сметки на кооперациите в България”. Партньори по проекта са: Национален статистически институт (НСИ) и Национален съюз на трудово-производителните кооперации. Проектът е финансиран от Европейската комисия. Сателитните сметки са средство за предоставяне на информация в допълнение на класическата статистика. Официалната статистика се развива като интегрирана система от показатели, тясно свързващи икономиката, екологията и социалната сфера. Основен координиращ и интегриращ механизъм е системата на националните сметки, включително сателитните сметки. Естеството на националните сметки е да осигурява обобщена информация за икономическите процеси в страната. Сателитните сметки дават възможност за съществуването на една по-широка и гъвкава рамка от показатели, които да могат да бъдат използвани като база за анализ и взаимодействие между променливите в основната рамка на националните сметки. Съществуващата Европейска система от национални и регионални сметки дава възможност при изграждането на информационна система за събиране, обработка и анализ на информацията за кооперациите и техните членове да се постигнат определени съответствия. Чрез сателитните сметки кооперативните организации могат да бъдат оценени по отношение на техния принос в brutния вътрешен продукт, работните места, капиталовите инвестиции, данъчните приходи и ролята им в платежния баланс на страната. Те спомагат за разработването на политики и стратегии за развитието на кооперативната икономика, както в национален, така и в европейски мащаб. Заключителното становище на експертите от НСИ, участвали в проекта, е че той представлява един начален етап за изграждане на сателитни сметки на кооперациите не само в България, но и в целия Европейски съюз. Посоченото предполага продължаване на работата по изграждане на система от сметки за всички кооперативни организации в България, при отчитане и обмяна на информация за състоянието на подобни системи в други страни. Експертите обобщават, че информацията от разработената система може да послужи за основа за разработване на сателитните сметки за кооперациите в България [12].

През 2013 г., на провела се деветнадесета сесия на Международната конференция на статистиците на труда, кооперациите са включени в дневния ред на конференцията за първи път в нейната история. Признава се необходимостта от изготвяне на статистика за кооперациите във всички страни по света. С оглед извършването на по-нататъшни дейности и провеждане на пилотни проучвания, обхващащи тестване на различни подходи за измерване на събирането на данни за кооперациите в различни страни, е приета резолюция [7]. Резолюцията препоръчва Международната организация на труда, в сътрудничество със своите представители, както и на база национални и международни партньорства, да извърши допълнителни проучвания, и по-конкретно относно:

- брой и характеристика на кооперациите;
- членска маса;

- работници, заети в кооперативите;
- добавена стойност, създавана от кооперациите.

Масшабно проучване, наречено „глобално картографиране“ на наличните национални статистически данни за кооперациите [4], обхванало шестдесет и седем държави разкрива, наред с друга информация, че:

- Съществуват неравномерни процеси при събирането на данни – към момента данните за кооперациите по света се събират по различни начини, без позоваване на сравними класификации по вид на кооператива (информацията към момента се оповестява основно по сектори: селско стопанство, банкова дейност, застраховане, жилища, потребление, продажби на дребно, услуги, фармация, възобновяема енергия) и видове членство (служител, производител, потребител/клиент, доставчик, член на общността и други типологии), без съпоставима методология за измерване на приноса на заетите лица и общо на кооперацията като предприятие (измерване на добавената стойност сега се прилага при оценка на различни компании, но не и на кооперативи). Наличието на различни видове информация води до затруднения при агрегирането ѝ и до невъзможност и/или неточност от гледна точка на извършване на съпоставки и сравнения;
- Липсва използването на единно правно и оперативно определение за кооперативите (по сектори, размер, видове и т.н.). Част от кооперациите в определени страни не са регистрирани по закон за кооперациите или кооперативно законодателство. В различните страни се използват различни критерии при юридическата дефиниция на кооперацията. Следователно от гледна точка на критерия „юридическа дефиниция“ дефинирането на кооперацията към настоящия момент зависи от избора на законодателя – между един общ закон, който да се отнася за всички типове (видове, форми) кооперации, или няколко специфични закона – за отделните видове кооперации. При всички случаи обаче дефиницията следва да отчете ясно целта и двойствения характер на кооперацията, т.е. нейната двуединна същност – сдружение и предприятие.

В допълнение към посоченото, Международната организация на труда констатира, че в системата на националните сметки не са обхванати всички видове кооперации, и по-конкретно работническите кооперативи. Системата от национални сметки се състои от интегрирана, съвместима последователност на набор от сметки, баланси и таблици, изградена на база дефиниции и концепции, класификации и счетоводни правила, договорени на международно ниво. Системата включва цялостна счетоводна рамка по такъв начин, че получените данни дават „снимка“ на икономическите показатели на дадена нация, които от своя страна могат да бъдат използвани в икономическото планиране, разработване на политики, анализи и вземане на решения. Дефиниция за кооперативност е представена в Системата на националните сметки чрез различни статии. Наличието на информация по продукти, икономически дейности и институционални сектори е подходяща схема за изследване на връзките между типовете стопански субекти.

Друга констатация, от същата международна организация, е свързана с установена липса на стандартна типология на кооперативите, която да се прилага от националните статистически агенции или други национални органи, отговорни за представяне на статистически данни за кооперациите. Като се има предвид големия набор от видове кооперации, изтъкват от МОТ, наличието на стандартизация относно кооперативите ще

даде възможност статистическите данни да се групират в хомогенни групи в добре структурирана класификация, която следва да се съгласува със съществуващата рамка за изготвяне на статистика на труда. Отчитат се и пропуски и слабости при представяне на видове и брой членове на отделните кооперативи, икономическия принос и измерването на заетостта в кооперациите.

Представеното до тук, без да претендира за изчерпателност, дава основание да се присъединим към констатацията, изведена от Международната организация на труда и Комитета за насърчаване и развитие на кооперациите, а именно: липсата на стандартизирана и съгласувана методология за събиране на данните е основна пречка за оценка на въздействието на кооперациите в икономиката и обществото.

През 2018 г. на провелата се регулярна Международна конференция на статистиците на труда са приети Насоки относно статистиката на кооперациите [5]. Насоките целят да подпомогнат разработването на набор от статистически данни за кооперативите, които ще осигурят адекватна информационна база за широк спектър от описателни, аналитични и политически цели, като се вземат предвид специфичните национални нужди и обстоятелства. Статистиката за кооперациите трябва:

- да проследява приноса на кооперативите за развитието на пазара на труда и икономиката;
- да осигурява информационна подкрепа при разработването, прилагането и оценката на икономическите и социалните политики и програми;
- да улеснява анализа на групи работници или членове, като жени и мъже, младежи и други групи от особен интерес.

За постигането на посочените цели наборът от статистически данни следва, доколкото е възможно, да включва статистика за:

- ✓ броя и видовете кооперации;
- ✓ членове на кооперации;
- ✓ работни дейности, организирани в кооперации, включително заетост и други форми на трудово участие;
- ✓ икономическият принос на кооперациите.

Статистическите данни за кооперациите следва да се съставят в консултация с различни потребители на статистически данни, като се хармонизират с други социално-икономически статистически данни и се гарантира, че те съответстват на международните стандарти. Насоките има за цел още да улеснят изготвянето на статистика за кооперациите за различни цели в рамките на единна национална система, основана на общи концепции и определения. При подготовка на статистически данни за кооперациите, държавите трябва да се стремят да следват тези насоки, за да гарантират международна съпоставимост на данните и да оценяват тенденциите на пазара на труда и социално-икономическия анализ.

В насоките са представени някои определения и понятия, които следва да се вземат под внимание, а именно:

- кооперацията се определя като независима асоциация (обединение) на физически и/или юридически лица, които се обединяват на доброволна основа в отговор на техните общи икономически, социални и културни нужди и стремежи чрез съвместно контролирано предприятие, изградено на основа на демократични принципи;
- членовете създават или се присъединяват към кооператива, за да се възползват от възможностите, които той предоставя;
- членовете имат двоен статус - като собственици и потребители на предлаганите стоки и услуги;

- в съответствие с националното законодателство членовете на кооперациите могат да бъдат физически или юридически лица и членството трябва да е открито за всички лица и организации, така че да могат да използват услугите си и да бъдат готови да поемат отговорностите на членовете без дискриминация по пол или на друга основа - социална, расова, политическа или религиозна;

- според Системата на националните сметки кооперациите са институционални единици, т.е. такива, които са част от нефинансови, финансови или организации с нестопанска цел (НПО), като ако уставът на кооперацията забранява разпределяне на печалби или излишъци, тогава тя ще се третира като НПО, а ако кооперацията може да разпределя печалби или излишъци между своите членове, тя ще се класифицира към другите типове предприятие;

- кооперациите се различават от другите видове предприятия по това, че се управляват демократично в съответствие с принципа „един член - един глас“;

- кооперациите с нестопанска цел също се различават от другите организации с нестопанска цел поради факта, че членовете им са потребители на стоки и услуги, доставени от кооперации и всеки член участва в капитала на кооперацията.

Представени са следните четири основни типа кооперации, които съставят класификация на кооперациите, на база на основните интереси на членовете на кооператива: производствени кооперации, работнически кооперации, потребителни кооперации и кооперации от смесен тип (разностранни, още многостранни кооперации). Представената в насоките класификация може да се използва за обобщаване и представяне на кооперации, които се срещат в националните класификации на кооперациите. Тя е съвместима също и с класифициране на кооперативите по основна икономическа дейност спрямо националните класификации, съвместими с Международната стандартна индустриална класификация. Признава се, че както физически, така и юридически лица могат да бъдат членове на повече от един кооператив. Следователно кооперациите имат членство, което може да не е взаимно-изключващо се, но членството може да е важно за групи и видове кооперации.

Насоките предоставят и рамка за събиране на информация за работата на членове и не-членове на кооперациите. Откроена и важността на оценката на икономическия принос на кооперациите, като се вземат предвид характеристиките на различните видове кооперации. Необходимо е да се събира информация за заетостта, приходите, добавената стойност, активите, пасивите, използването на печалбата и излишъците, инвестициите. При разработване на своя статистика отделните държави трябва да се стремят да включат насоките с цел осигуряване на международна съпоставимост и възможност за оценка на тенденции и разлики за целите на анализ на пазара на труда, икономическия и социален анализ. Необходима е статистика на наблюдение на социално-икономическото въздействие на кооперациите върху членовете и върху икономиката като цяло.

Обобщавайки изложеното относно насоките, следва да отбележим, че те имат за цел да ръководят държавите в актуализирането и интегрирането на съществуващите статистически програми. Те съдържат статистическата концепция за кооперация за референтни цели и предоставят оперативни концепции, дефиниции и стратегии за събиране на данни, позволяващи създаване на адекватна статистика за кооперациите. За да бъде определен икономическият принос на кооперациите е важно да се отчетат отличителните характеристики на различните видове кооперации.

3 Заключение

Кооперациите са специфичен тип предприятия. Те се формират и работят така, че да отговарят на нуждите на своите членове. Дейността им се съсредоточава върху разнородни отрасли и услуги. Кооперативната форма на бизнес притежава редица предимства. При правилно управление кооперативите са изключително успешни. Обединението на различни лица (физически и юридически) в кооперации позволява на членовете на сдружението да разширяват икономическите си възможности. В национален, европейски и световен мащаб кооперативните организации играят съществена роля, комбинирайки рентабилност и солидарност, създавайки работни места, укрепвайки социалното, икономическото и регионалното сближаване и генерирайки социален капитал.

Кооперациите, макар и широко разпространени и разпознаваеми, са слабо представени в националните статистики. За да бъде откроята тяхната роля и значимост би следвало системата за статистика да предоставя възможности за оценка на размера и обхвата на дейността на кооперациите в икономиката, и по конкретно за: брой и видове кооперации, размер на членство, принос към работата и заетостта, оценка на икономическите им резултати. За да бъде осигурена съпоставимост на информацията, системата трябва да бъде разработена в консултация с различните потребители на статистическа информация и да бъде хармонизирана с други икономически и социални статистики. Тя следва да бъде проектирана така, че да осигурява от една страна текущи данни за краткосрочни нужди, а от друга – събирането на данни за по дълги интервали да осигурява възможност за извършване на структурен и задълбочен анализ. Безспорно трябва да се разрешат множество предизвикателства, да се направи избор за да се продължи напред. Специфичната роля на кооперациите откроява важността на тяхното представяне в официалната статистика. Единствено чрез хармонизирани, съгласувани и сравними данни за кооперациите ще може да се измери адекватно техния принос.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Bouchard, M. J., *The New Standards for Compiling Data on Cooperatives and How It Can Improve Evidence-based Policy Making in the Cooperative Sector*, Division for Inclusive Social Development (DISD) of the United Nations, United Nations Office in Nairobi, Nairobi Kenya (2019)
- [2] Brown, L., *Organizations for the 21st century? Co-operatives and 'new' forms of organization*", *Canadian Journal of Sociology*, 22 (1997), 65–93.
- [3] Carini, C., Borzaga, C. & Carpita, M. (2018), *Advancing statistics on cooperatives: Reflections on six country case studies*, Euricse Working Papers, 104|18.
- [4] Galhardi, R. *Methodology for country-case studies: statistics on cooperatives*, ILO, Geneva (2016).
- [5] *Guidelines concerning statistics of cooperatives. Annex to the Report of the 20th Conference of Labour Statisticians*, available at https://www.ilo.org/stat/Publications/WCMS_648558/lang--en/index.htm, International Labour Organization, Geneva (2018)
- [6] *Recommendation 193 - Promotion of Cooperatives Recommendation*, (No. 193), ILO, Geneva (2002)
- [7] *Resolution III concerning further work on statistics of cooperatives*, 19th International Conference of Labour Statisticians (ICLS), ILO, (2013)
- [8] Sanchez Bajo, C.; Roelants, B., *Capital and the debt trap: learning from cooperatives in the global crisis*, Houndmills, Palgrave Macmillan (2011)
- [9] *Statistics on cooperatives*, 19th International Conference of Labour Statisticians (ICLS), ILO, (2013)

[10] URL: <https://www.cks.bg>

[11] URL: <https://www.ilo.org>

[12] URL: <https://www.nsi.bg>

INBOUND MARKETING FOR CUSTOMER RELATIONSHIP*

RALITSA V. YANEVA

ABSTRACT: *Inbound marketing has become one of the most successful forms of modern business. This article presents the characteristics, comparison between inbound and outbound marketing strategies. The most important part in these strategies are the ability to measure each step of the customer's journey and create the conditions for long-term relationships.*

KEYWORDS: *Inbound marketing, Marketing strategies, Relationship*

ИНБАУНД МАРКЕТИНГ ЗА ВЗАИМОВРЪЗКА С КЛИЕНТИ

РАЛИЦА В. ЯНЕВА

АБСТРАКТ: *Входящият маркетинг се превърна в една от най-успешните форми на съвременния бизнес. Тази статия представя характеристиките, сравнението между входящите и изходящите маркетингови стратегии. Най-важната част в тези стратегии е способността да се измерва всяка стъпка от пътуването на клиента и да се създадат условия за дългосрочни взаимоотношения.*

КЛЮЧОВИ ДУМИ: *Инбаунд маркетинг, Маркетингови стратегии, Взаимовръзка*

1 Въведение

В динамиката на съвременното ни традиционният маркетинг вече не е толкова ефективен, колкото преди, тъй като фокусът в подхода днес попада върху изтласкването на съобщението.

В последните години маркетингът еволюира в най-новия Маркетинг 4.0. Той комбинира офлайн и онлайн взаимодействието между компаниите и клиентите. Маркетинг 4.0 се възползва от свързаността - машина с машина и изкуствен интелект, за да подобри маркетинговата производителност, докато използва връзката човек с човек, за да засили ангажирането на клиента.

Според инфографика, публикувана на 27 февруари 2020, 44% от компаниите се съсредоточават върху привличането на клиенти, а 18% насочват усилията си към задържането им. Според същата тази инфографика привличането на клиенти е 5 пъти по-скъпо от задържането им, а увеличаването на лоялните клиенти би могло да доведе до увеличаване на приходите с от 25% до 95%. [22] Компаниите в България се адаптират сравнително бавно към новата дигитална среда, спрямо компаниите в останалите страни, и отколкото голяма част от онлайн потребителите. По данни на Национален статистически институт (НСИ) [26] половината от предприятията (50,7% , около 209 хил.) притежават собствен уеб сайт, като едва 12.6% (приблизително 26,5 хил.) от тях посочват, че използват информация за поведението на посетителите на уебсайта (брой кликания, разглеждани елементи, продължителност на сесията и др.) с цел реклама или подобряване на клиентската удовлетвореност. През 2019 г. всяко пето предприятие (20.1%) има заети лица, чиято основна работа е да разработват, управляват или поддържат информационни и

* Докладът е частично финансиран по проект с вх.№ РД-08-93 от 28.01.2020 г. на тема "Икономика 2020: национални приоритети и стратегии", финансиран по НИХТД на ШУ „Епископ Константин Преславски“

комуникационни технологии, системи или софтуерни приложения. Проблемът е в пълноценното интегриране в дигиталната среда, пропускане на възможности, както и правилно разработване на маркетингов микс в интернет.

За интереса по темата и първоначалните направени проучвания на автора за основните характеристики на инбаунд маркетинга ролята и маркетинга на взаимовръзките особен принос имат изследванията на специалистите на HubSpot [24], на Сет Годин [15] Хълиган и Шах [7,8], Жюстин Томс [19,20], доц.д-р Труфка Димитрова [16], Гумерсон [6] проф. д-р Лина Анастасова [14], Филип Котлър [10,17,18] и публикациите на още много други изследователи.

В непрекъснато развиващата се конкурентна глобална онлайн среда, инбаунд маркетинга се превърна в една от най-успешните форми на маркетинг, практикувана от организации, развиващи разнородна стопанска дейност. Бързото му развитие го превърна в предпочитана форма в динамична и дълбоко персонализирана онлайн среда. Според Holliman и Rowley [9], мрежата може да се счита за дърпаща маркетингова среда, при която компаниите се опитват да привлекат интереса на потенциалните си клиенти, които вече търсят информация за различни решения.

Идеята е да общуват със заинтересованите и да повлияят на решението им за покупка, чрез различни канали и точки за допир. Основна цел е да не се прави опит толкова де се продаде, а по-скоро да се предостави стойност и информация, която да насочва човека към желаната посока.[25] Цел на настоящата статия е извеждане на обобщена характеристика на инбаунд маркетинга и приложението му за взаимовръзка с клиенти.

2 Характеристика на инбаунд маркетинга

За първи път терминът „Инбаунд маркетинг“ е въведен от Брайън Холиган и Дхармеш Шах през 2009 г.[16] Терминът в пълен превод от английски език означава „входящ маркетинг“ и е познат още като „привличащ маркетинг“, който се стреми към привличане на „правилните клиенти“ – б.а. потенциални клиенти, проявяващи интерес към продукта на организацията, които са предприели или ще предприемат някакво действие свързано с покупка или взаимодействие с организацията. Според създателите на теорията за входящия маркетинг, необходимостта от такъв цялостен подход се дължи на факта, че маркетинговите тактики, използвани успешно в миналото, вече не дават желаните резултати.[15]

Идеята за инбаунд маркетинг е да се използват маркетингови подходи, които да спечелят интереса на потенциалните клиенти и да ги доведат до физическия офис или уебсайта на компанията, вместо да се опитват да прокарат рекламното послание към тях и да провокират реакцията им. Вниманието на потенциалните клиенти се печели, предлагайки им висококачествено съдържание и споделянето на това съдържание чрез множество онлайн канали, търсачки и социални медии. Терминът „съдържание“ в интернет маркетинга се отнася до различни формати, които включват: новини, уебсайтове, статии, видеоклипове, електронни книги, инфографики, казуси, ръководства за справки, снимки, блогове, подкасти, информационни бюлетени, бележки, SEO, социален медиамаркетинг и други форми на маркетинг на съдържанието [9]

Според Магдалена Георгиева и компанията HubSpot [24], инбаунд маркетинг е стил на маркетинг, който се фокусира върху намирането на нови посетители, в превръщането на трафика в потенциални клиенти и в анализа на производителността. Това е концепция, основана на идеята на Сет Годин [2] за маркетинг на позволенията. Дейвид Меерман Скот препоръчва на маркетинговете „да си проправят път“, чрез публикуване на полезна информация за привличане на потенциални клиенти, за разлика от изходящия маркетинг,

при който трябва да „купуват, просят или да променят пътя си“, чрез платени реклами, студени призиви, директна хартиена поща, радио реклами, телевизионни реклами, рекламни листовки, спам, имейл маркетинг, телемаркетинг, традиционна реклама и т.н. [13]

Входящият маркетинг позволява открита и „интелигентна“ комуникация с клиентите, които насочват вниманието си към продукта на компанията и създават лични отношения с тях, като насърчават съдържанието, адаптирано към техните нужди. Вместо старите изходящи маркетингови методи за закупуване на реклами, закупуване на списъци с имейли и подкани за последване, входящият маркетинг се фокусира върху създаването на качествено съдържание, което привлича потенциални клиенти към компанията и продукта, и е такова, каквото те очакват да получат. Това е такова целенасочено съдържание, което отговаря на основните въпроси и нужди на настоящите и потенциалните клиенти, което те споделят в последствие. [21]

От изведените до тук характеристики може да се извлекат основни изводи:

1. Инбаунд маркетинга представлява процес на достигане и превръщане на заинтересовани потенциални потребители, в потребители, притежаващи най-голям потенциал за реална сделка, а също така и проявяващи задълбочен интерес към предлаганите от фирмата продукти, услуги и решения, склонни към ангажираност и подкрепа на позициите на бранда, чрез създаване и преследване на органични тактики в онлайн конфигурациите.
2. Най-известните елементи на интернет инбаунд маркетинг са интерактивност и ангажираност. Тези два компонента предлагат възможност на търговците да насърчават ценни отношения, които надхвърлят ограниченията на традиционните медии. Интерактивността и ангажираността позволяват на организациите да осъществяват непрекъснат контакт с клиенти или потребители, които се интересуват от техния продукт.
3. Прегледът на различните авторски подходи към инбаунд маркетинг позволява да се обобщи, че същностно той е определян, като вид маркетинг (входящ), маркетингова тактика, стил на маркетинг, проправяне на път, чрез полезна информация и процес на достигане на квалифицирани потребители, открита и интелигентна комуникация. Общото в определянето на инбаунд маркетинг от всички автори е акцент към комуникацията само с квалифицирани потенциални потребители, чрез висококачествено полезно съдържание и с крайна цел дългосрочни взаимоотношения с потенциални клиенти.

Според фундаменталното определение на Котлър, че “маркетингът е човешка дейност, насочена към задоволяване на нуждите и потребностите посредством обмен”[4] и от цялостната концепция за 4P на маркетинг микса, в който най-важни са продукт и комуникация, става ясно, че концепцията за инбаунд маркетинг не може да се определи като вид маркетинг. А колкото до определянето за инбаунд маркетинг, че е стил, също не може да се каже, тъй като стилът се определя като система от елементи (в случая елементите на маркетинг микса), която се характеризира с тяхното вътрешно единство, с тяхната общност. [8]

Изхождайки от направеното заключение за това, че всички определения за инбаунд маркетинг се съсредоточват в идеята за процес на преминаване на различни етапи на превръщане на потенциални клиенти в дълготрайни чрез различни комуникационни инструменти, за по-нататъшното изследване и изграждане на модел, приемаме следното определение за инбаунд маркетинг:

Инбаунд маркетинг е процес на интегрирани маркетингови онлайн комуникации (комбинация на различни елементи на комуникация с общо послание) с потенциални клиенти, с цел изграждане на дългосрочни взаимовръзки и превръщането им в постоянни клиенти.

Инбаунд маркетинг е обективно обусловен от новите интернет технологии и инструменти за комуникация, позволява по-точно прицелване и индивидуален подход към потребителя, но в същото време става и основен фактор за доверието на клиента, корпоративен имидж и постигане целите на организациите.

3 Съпоставка между традиционен (изходящ) и инбаунд (входящ) маркетингови подходи

Основните различия и аспекти в традиционния (изходящ) и инбаунд (входящ) маркетингови подходи са представени, посредством Таблица 1.

Таблица 1

Съществени различия между традиционен (изходящ) и инбаунд (входящ) маркетингов подход [20]

	Традиционен (Изходящ) маркетинг	Инбаунд (Входящ) маркетинг
Основа	Прекъсване	Позволение (Естествено свързване)
Фокус	Намиране на клиенти	Откриване на потенциални, съществуващи и желани потребители
Цел	Увеличаване на продажбите	Създаване на дълготрайни отношения чрез достигане и превръщане на потенциални клиенти, попадащи в критериите на компанията за клиенти с бъдеще, сегментирани по определени критерии
Целева аудитория	Големи аудитории	Потенциални клиенти, проявяващи сериозен интерес към продукта
Тактики	Печатна реклама; ТВ реклами; Външна реклама; Студени обаждания; Търговски изложения; Имейл списъци	Блогове, електронни книги, статии; Видео в Youtube, Vimeo и други; Тактики за оптимизация на сайтовете в търсачки; Инфографики; Уебинари; Новини, RSS; Тактики за прилагане на маркетинг в социалните медии

От направената съпоставка може да се направи извода, че във всеки аспект се намират съществени различия между двата подхода. Въпрос на проследяване и изследване на инбаунд маркетинговия подход е да се установи до каква степен се получават ефективни резултати от прилагането му.

4 Стратегически насоки и основни етапи на развитие на взаимовръзките с клиенти във фунията на продажбите при инбаунд маркетингов подход

Еделман се фокусира върху основните аспекти във фокуса на интернет маркетинга за създаване и поддържане на стойност. Той определя четири източници на стойност:

Първо – организациите съсредоточват усилията си върху координирането на действията, за да създадат потребителски ангажимент във фунията на продажбите.

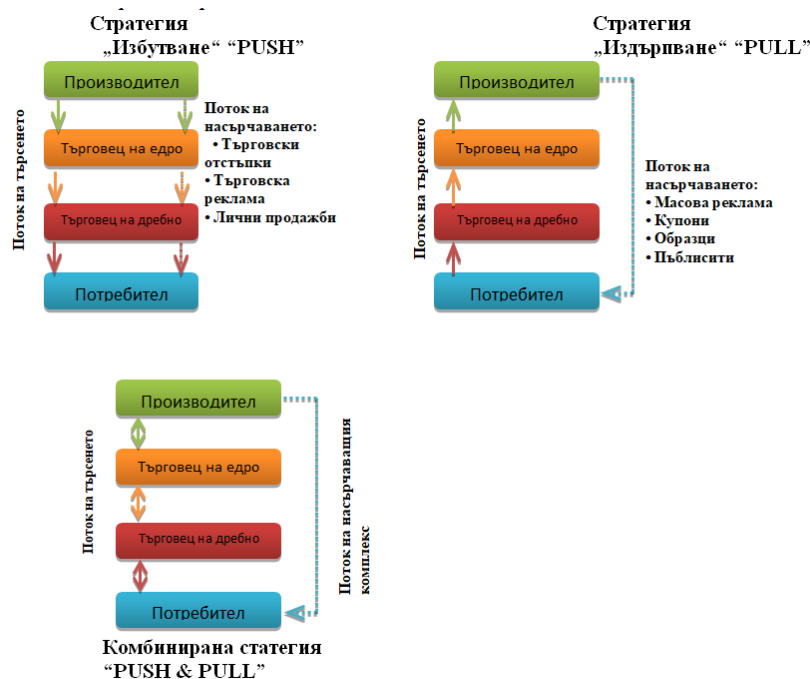
Второ – дава се власт на потребителя за сътрудничество за създаване на допълнителна стойност на продукта, както за изграждане на потребителя в лицето на защитник и посланик на марката.

Трето – организациите създават различни форми на съдържание в подкрепа на продукти, сегменти, канали и промоции.

Четвърто - събират, създават и използва множество цифрови данни, за да научат повече за потребителите, в подкрепа на последващите им маркетингови усилия. [12]

Две са основните комуникационни стратегии, чрез които може да се представят входящ (inbound) и респективно изходящ (outbound) маркетинг съответно стратегия на издърпване - pull и стратегия на избутване push [19]

Комбинацията от комуникационни средства зависи от избора на стратегия на „избутване“ или „издърпване“. (фиг.1)



Фиг. 1 Стратегии на избутване, на издърпване и комбиниран вариант

Pull („издърпване“) се използва за генериране на търсене на продукт. Реализират се големи рекламни разходи, с основна насока – краен клиент. Не изисква големи усилия по промоция от страна на търговеца. От друга страна, push („избутване“) натрапва съществуващо предлагане на продукт. Техниките на натиск са известни също като маркетинг на прекъсването или изходящ маркетинг, тъй като компанията иницира комуникацията, като изпраща рекламни съобщения до потенциалните клиенти. Повечето от традиционните рекламни методи като телевизионни реклами, радио реклами, печатни реклами и т.н. принадлежат към изходящия маркетинг. По отношение на дигиталните маркетингови техники можем да класифицираме нежеланите имейли и повечето от рекламите като изходящи техники. Изходящите техники са по-лесни за изпълнение и са по-бърз начин за достигане до потенциалните клиенти. Тъй като онлайн конкуренцията нараства и интернет потребителите не са склонни да прекъсват онлайн съобщенията, тези методи стават по-скъпи и по-малко ефективни, в началото на развитието им. Фирмите се фокусират върху методи, които дават повече свобода на потенциалните клиенти, които избират кога и как ще консумират маркетинговите съобщения. Комбинираната стратегия – създава се търсене, както в крайния потребител, така и в търговската аудитория.

Стратегията е комбинация между двете горепосочени стратегии. Изисква мащабен бюджет и се реализира от големи компании.

Фунията за продажби на фигура 2 представлява визуално представяне на пътуването на купувача на компанията през процеса на продажби. Този инструмент дава възможност на маркетинговия екип и/или екипите по продажби, да измерват, управляват, прогнозираат и в крайна сметка подобряват процеса на продажби, за да увеличат в крайна сметка броя на осъществените сделки.

Рамката на фунията на продажбите илюстрира последователното стесняване на клиентската база на фирмата от всички потенциални клиенти, които могат да се интересуват от продукта на фирмата, до „завършените“ клиенти, които действително осъществяват покупка.[10] Фунията на продажбите, която е представена в разработката се базира на източниците за инбаунд маркетинг и категоризацията на клиентите в тези източници.



Фиг.2 Фуния на маркетинг и продажби (HubSpot 2014)

За да бъде ефективен инбаунд маркетинга на фирмата е необходимо да се осигурява стойност на клиента на всеки етап от пътуването му във фунията на продажбите:

- (1) Във входа на фунията са най-много и най-вече **непознати** и просто **посетители** на уебсъдържанието на фирмата. За да се привлекат непознатите е необходимо да се привлече тяхното внимание. Използва инструментариум, като публикации във форуми, социални мрежи, обяви в директории, PPC реклама, RSS канали, оптимизация на уебсайтовете, препратки отвън за публикуване на уникално съдържание и привличане на непознатите и посетителите надолу във фунията на продажбите. В тази част на фунията са всички онези „заподозрени“, „предполагаеми“ или „възможни“ клиенти, които могат да проявят някакъв интерес. [11]
- (2) След като непознатият посети уебсайта на компанията за първи път, той попада в категорията **проспекти**. Това са всички потенциални клиенти, проявили интерес за първи път към продукта на фирмата. В това ниво „заподозрените“ проучват и проявяват първоначален интерес към продукта на фирмата. Минимални грешки и неточности в съдържанието може да ги отблъсне още в самото начало. Започва втората фаза на процеса, където е необходимо да се попълни информация за клиентите, които все още не са изградили достатъчно доверие за да предоставят такава. За да получат фирмите контактна информация за потенциалните си клиенти, е необходимо да предоставят нещо в замяна. Например електронни книги, бюлетини, уебинари или друго ценно съдържание. Системите за управление на връзките с клиенти се задействат. Попълва се информация в базите данни от частичните проучвания. Създава се информацията за бъдещите лийдове – потенциални клиенти, попадащи в

- критериите за бъдещи клиенти, категоризирани по сегментационни принципи. На този етап фирмите наблягат на призивите към действие „Call to action“, целевите страници, форми за контакт.
- (3) **MQL** – Marketing Qualified Lead - **лиидове**, за които фирмата притежава налична и точна информация за бъдещ контакт (име, телефон, имейл), предпочитания, но все още не е осъществила контакт с тях. Целевите страници в тази част на фунията поддържат информацията за клиентите посредством регистрационните форми, които са прикачени към тях. Всеки клиент, който независимо дали има или не регистрация, но е отправил запитване, чрез формата за контакт, секция за коментари, чатбот и т.н. влиза в изградената база данни от „възможни“ клиенти. На този етап се провеждат имейл маркетингови кампании. Обикновено потенциалните клиенти не са готови да направят покупката веднага. Вместо това, поредица от имейли, фокусирани върху полезно и подходящо съдържание, могат да спечелят доверието им и да ги направят по-готови да купуват.
- (4) **SQL** – категория лиидове, специфични за всяка една организация. На този етап от развитието си лиидовете са с най-голям потенциал за реална сделка, като проявяват ангажираност и задълбочен интерес към предлаганите от фирмата продукти, услуги и решения. В процеса на квалификация се идентифицират и администрират всички предварително дефинирани критерии за идеалния лиид. На този етап регистрираните лиидове получават точни оферти, персонализирани имейли, предложения на база получена информация от бисквитките на сайта.
- (5) **Клиенти (Реализации)** – информацията за клиента се предава от маркетинг на търговския отдел, след предварително и щателна класификация и ангажиране на проспекта. Идентификацията и документацията в CRM системата на компанията свързва клиента със съответната сделка.
- (6) **Постоянни клиенти („промоутъри“, „защитници на бранда“)** – лоялни клиенти с изградено чувство на доверие към бранда, фирмата и нейният продукт. Промоутърите препоръчват на други проспекти, отправят препоръки и мнения, допринасят за добавянето на стойност на продукта. На този етап се развиват взаимовръзките с клиентите. Те участват в усъвършенстването на маркетинговия микс на фирмата. Превръщането на клиента в промоутър е най-трудната цел в маркетинга. Последната фаза на процеса на инбаунд маркетинг е всичко за постигането на това. И така, маркетинговите усилия не спират, когато клиентът е придобит. Компанията трябва допълнително да подхранва клиента с ангажиращо съдържание, превъзходно обслужване на клиентите и също така трябва да слуша техните отзиви. Само в този случай клиентът ще бъде удовлетворен, ще се върне и ще насърчи бизнеса допълнително.

5 Заключение

Основна причина за намаляване на конкурентоспособността и пропуснати ползи за компаниите в България е трудното адаптиране в дигиталната среда и бързия технологичен подем. Инбаунд маркетинговата стратегия привлича потенциалните потребители и ги подхранва чрез изграждане на доверие, докато те станат клиенти. Добавянето на стойностно съдържание е ключов момент в дигиталния инбаунд маркетинг. Правилното й формулиране се състои в измерване на показатели за оценка на всеки етап от пътя на клиента във фунията на продажбите, така че тази стратегия да доведе до ефективни резултати в бъдеще.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Анастасова, Л., Маркетинг на взаимовръзките. Концептуална основа и практика, издл Екс-Прес, 2008
- [2] Годин, С., Маркетингът на позволениято: Да превърнем непознатите в приятели, а приятелите – в клиенти.,изд.Фокус, София, 2010
- [3] Димитрова, Т., Основи на маркетинга, УИ Шуменски университет, Шумен, 2014
- [4] Котляр, Ф., Основи на маркетинга, част I. С., 1993
- [5] Котляр, Ф., Х. Картаджая, А. Сетиаван, Маркетинг 3.0. От продуктите към клиентите към човешкия дух, изд. Локус Пъблишинг, София, 2010
- [6] Томс, Ж., Георгиев, Д., Успешен онлайн маркетинг с 65 примера от практиката, изд. Сиела, София, 2010
- [7] Томс, Ж., К. Георгиева. Инструменти за социални мрежи. София: Сиела, 2011
- [8] Тълковен речник
- [9] Bezhovski, Z.,Inbound Marketing – A New Concept In Digital Business. Conference: SELTH 2015 - International Scientific Conference of the Romanian-German University of Sibiu, Romania, 2015
- [10] Cooper, M.J., Budd, C.S., Tying the pieces together: A normative framework for integrating sales and project operations. *Industrial Marketing Management*, 36(2), 2007, 173–182.
- [11] D'Haen, J., Van den Poel, D., & Thorleuchter, D., Predicting customer profitability during acquisition: Finding the optimal combination of data source and data mining technique. *Expert Systems with Applications*, 40(6), 2013, 2007–2012
- [12] Edelman, D.C., *Branding in the Digital Age: You're Spending Your Money in All the Wrong Places*, Boston: Harvard Business Review, December Issue, 2010
- [13] Georgieva, M. "The ultimate inbound marketing glossary" Informe de la empresa HubSpot, focused on making revolutionary marketing segmentation, automation, and forms., Estados Unidos, 2013
- [14] Gummesson, E, 'The New Marketing - Developing Long Term Interactive Relationships', *Long Range Planning*. Vol 20, No 4, 1987
- [15] Halligan, B., Shah, D., *Inbound Marketing: Get Found Using Google, Social Media, and Blogs* John Wiley & Sons, Inc, 2014 (6,19)
- [16] Halligan, B., Shah, D., *Inbound Marketing: Get Found Using Google, Social Media, and Blogs*. Wiley, 2009
- [17] Holliman, G. & Rowley, J., (2014). Business to business digital content marketing: marketers' perceptions of best practice. *Journal of Research in Interactive Marketing*, 8(4), 269–293
- [18] Kotler, P., Keller, K.L., Goodman, M., Hansen, T., *Marketing Management – 2th European Edition*, Harlow, England: Pearson Education – Prentice Hall, 2012
- [19] Miller, S.A., *Inbound Marketing for Dummies*, Wiley, 2015
- [20] Opreana, A., Vinerean, S., *A New Development in Online Marketing: Introducing Digital Inbound Marketing*
- [21] Patrutiu-Baltes, L., *Inbound Marketing - the most important digital marketing strategy*, *Bulletin of the Transilvania University of Braşov Series V: Economic Sciences • Vol. 9 (58) No. 2 – 2016*
- [22] *Customer Acquisition Statistics And Trends*, https://visual.ly/community/Infographics/business/customer-acquisition-statistics-and-trends?utm_source=visually_embed, [last available at 26.04.2020]
- [23] *Expert Journal of Marketing*, 3(1)pp. 29-34, <http://marketing.expertjournals.com/23446773-305/> последно посетен на 23.06.2019г.
- [24] HubSpot, *Inbound marketing*, <https://www.hubspot.com/inbound-marketing>, [last available 04.05.2020]
- [25] Saarinen V., *Increasing sales with inbound marketing*, Master's Thesis in Information Systems, Åbo Akademi University, Faculty of Social Sciences, Business and Economics, 2019 https://www.doria.fi/bitstream/handle/10024/168697/saarinen_ville.pdf?sequence=2, [available on 4.04.2020]

- [26] НСИ, Национален статистически институт,
https://www.nsi.bg/sites/default/files/files/pressreleases/ICT_ent2019_LDOBNRL.pdf [посетен последно на 26.04.2020]

EFFECTS OF THE CHANGE OF THE STATE BUDGET OF THE REPUBLIC OF BULGARIA FOR 2020, AS A RESULT OF THE COVID 19 PANDEMIC

DENITSA P. ZAGORCHEVA-KOYCHEVA

ABSTRACT: *The talk presents the amendment of the State Budget of the Republic of Bulgaria caused by the COVID 19 pandemic. The aim is, by reviewing the budget implementation as of 30.06.2020, to determine the effect of the change and the readiness of the state to ensure financial stability in the present situation. For this purpose, real data from the reports published by the Ministry of Finance were used. This talk is based only on an overview of the reported values for the individual budget items. A final analysis with an opinion can be made only in the final annual report of the implementation of the state budget.*

KEYWORDS: *Budget, State budget, Budget deficit, Budget surplus, COVID 19*

ЕФЕКТИ ОТ ПРОМЯНАТА НА ДЪРЖАВНИЯ БЮДЖЕТ НА РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ ЗА 2020 Г., ПРОВОКИРАНА ОТ ПАНДЕМИЯТА КОВИД 19*

ДЕНИЦА П. ЗАГОРЧЕВА-КОЙЧЕВА

АБСТРАКТ: *Докладът представя изменението на Държавния бюджет на Република България, породено от пандемията КОВИД 19. Целта е, чрез преглед на изпълнението към 30.06.2020 г. да се определи ефектът от промяната и готовността на държавата да осигури финансова стабилност в настоящата ситуация. За целта са ползвани реални данни от публикуваните от Министерство на финансите отчети. Настоящият доклад се основава само на преглед на отчетените стойности по отделните пера. Окончателен анализ с мнение може да бъде направен едва при окончателното годишно отчитане на изпълнението на държавния бюджет.*

Бюджетът на държавата е основния документ, представящ финансовите ангажименти, намеренията и участниците при провеждането на цялостната държавна политика.

Държавният бюджет представлява финансов план на приходите, разходите, бюджетните взаимоотношения и формираният резултат за една календарна година. При изготвянето му се наблюдава една специфична релация между изпълнението на текущи задачи и стратегически цели при условия, формиращи от текущата икономическа, социална и политическа обстановка. Влиянието от текущите условия допълнително се усилва, ако те се проявяват не просто на национално, а на световно ниво.

Устойчивостта на държавния бюджет е основен принцип при съставянето му. Чрез нея се гарантира, че бюджетът е съставен при разумно планиране на потребностите (разходите), реално планиране на възможностите (приходите), анализ на рисковите фактори и осигуреност за изпълнение на поетите държавни ангажименти.

* Докладът е частично финансирана по проект с вх.№ РД-08-93 от 28.01.2020 г. на тема "Икономика 2020: национални приоритети и стратегии", финансиран по НИХТД на ШУ „Епископ Константин Преславски“

Текущото изменение (актуализацията) на държавния бюджет не е необичайно, но следва да се основава на сериозни аргументи. Актуализацията на бюджета може да се прояви на две нива:

- Вътрешно-компенсирани промени – представляват актуализация на отделни пера от бюджета или разпоредители. При тези промени основната рамка на бюджета не се изменя;
- Изменение в рамката на бюджета – представлява изменение на основните пера от бюджета.

Държавният бюджет има строго определена форма, изградена на математически връзки в нея и включва пет основни пера:

- приходи, помощи и дарения;
- разходи и трансфери;
- вноска в общия бюджет на ЕС;
- бюджетно салдо;
- финансиране.



Фиг.1. Структура на държавния бюджет

Първия елемент в структурата са приходите, помощите и даренията по бюджета. Включват се всички приходи и други постъпления, които се записват с положителен знак.

Вторият елемент са **разходите и трансферите**. Те се отчитат винаги с отрицателен знак. Изключение се допуска само в случаи на възстановени разходи и трансфери.

Третият елемент е **вноската в общия бюджет на ЕС**. България като член на Европейския съюз има ангажимент да прави вноска в общия бюджет на ЕС, която се определя се по специален механизъм. Вноската в бюджета на ЕС представлява разход и се отчита винаги като отрицателна величина. Извеждането ѝ извън общите разходи и трансфери в отделено перо в рамката на бюджета е с цел осигуряване на постоянна отчетност и мониторинг върху размера ѝ и плащанията.

Бюджетното салдо е математически резултат на изписаните в горние елементи стойности. То може да бъде положително или отрицателно. Положителното бюджетно салдо определяме като „излишък”, а отрицателното бюджетно салдо, определяме като „дефицит”.

Финансирането на бюджетното салдо е механизъм за представяне на финансирането на дефицита или натрупването на остатъци при излишъка. Винаги този елемент е еднакъв по стойност с „бюджетното салдо”, но с обратен знак.

Правилно изравненият и балансиран общински бюджет, след натрупване на округнените стойности от петте елемента дава резултат **нула**. [1]

Пандемията КОВИД 19 предизвика икономическа и финансова криза в световен мащаб. Всички държави се оказаха неподготвени не само за проявата ѝ в лечебно-медицински аспект, но и за причинените дефекти от икономически, социален и политически характер. Ако можем изобщо да обобщим тези дефекти, ще ги определим като траен дискомфорт до пълен срив на трафика, търговията, туризма, заетостта и др.

Икономическите и финансови кризи, породени от икономически, демографски и политически фактори, се приемат като предвидими и може да се приложи съвременна превенция за преодоляването им или за намаляване на влиянието на последиците от тях. При кризите, породени от непредвидими събития (каквото е пандемията КОВИД 19) единственият вариант за всяка държава е да реагира на момента според конкретната икономическа обстановка. Проблемът се усилва и от това, че последиците от кризи, породени конкретно от пандемии, не могат да бъдат ограничени в конкретна крайна стойност или срок.

При условията на пандемията КОВИД 19 и въведеното Извънредно положение в България важно беше да се предприемат съответните мерки за справяне с икономическата криза. Въвеждането на мерките наложи значително да бъде изменен приетият вече държавен бюджет. В случая бяха променени всички основни пера от рамката на бюджета без вноската в общия бюджет на ЕС. Аргументите за промяната напълно съответстваха на видимите вече негативи от кризата: облекчаване на данъчната тежест за бизнеса, финансово поддържане и стимулиране на икономиката, обезщетения за домакинствата, поддържане на заетостта, недопускане на масова безработица и др.

Преглед на изменението на държавния бюджет за 2020 година

Промяната в Закона за държавния бюджет на Република България за 2020 г. [2] е направена със Закона за изменение и допълнение на Закона за държавния бюджет на Република България за 2020 г. [3]

С промяната на Закона за държавния бюджет на Република България за 2020 г. се направи изменение в четири от петте основни пера в рамката на бюджета, а именно:

Таблица 1. Изменение на Закона за държавния бюджет за 2020 г. по основни пера

Основни пера на държавния бюджет	Закон 2020 г. ДБ (млн.лв.) първоначален	Закон 2020 г. ДБ (млн.лв.) изменен	Изменение (млн.лв.)
I. ПРИХОДИ, ПОМОЩИ И ДАРЕНИЯ	28 054,7	26 040,8	-2 013,8
II. РАЗХОДИ И ТРАНСФЕРИ	26 594,9	28 094,9	1 500,0
III. ВНОСКА В ОБЩИЯ БЮДЖЕТ НА ЕС	1 397,4	1 397,4	0,0
IV. БЮДЖЕТНО САЛДО (дефицит "-" / излишък "+") /I-II-III/	62,4	-3 451,5	-3 513,8
V. ФИНАНСИРАНЕ	-62,4	3 451,5	3 513,8

Източник: Министерство на финансите [4]

Общият преглед на изменението показва, че очакваните постъпления в приходите са намалени, увеличено е перото разходи и трансферни плащания, което пък от своя страна, води до сумарна промяна в бюджетното салдо като резултат. По-важно е в случая да се констатира, че промяната в бюджетното салдо не променя само неговата величина като стойност, но и го преобразува от излишък (положително бюджетно салдо) в дефицит (отрицателно бюджетно салдо).

Изменението във второто основно перо „разходи и трансфери“ е увеличение в общ размер 1.5 млрд.лв. Интересно е разпределението на тези средства – само 70 млн.лв. са разпределени в частта на разходите и то в едно единствено перо „лихви по вътрешни заеми“, а останалите 1430 млн.лв. са насочени като трансфер за социално осигурителни фондове. Тук аргументите отново се основават на предприетите от правителството мерки, насочени към поддържане трудовата заетост на населението и компенсиране с обезщетения на засегнатите лица.

Промяната между приходната и разходната част е в посока, която не осигурява компенсиране помежду им, а води до значително намаляване на бюджетното салдо.

Таблица 2. Изменение на Закона за държавния бюджет за 2020 г. /подробно/

Пера на държавния бюджет	Закон 2020 г. ДБ (млн.лв.) първоначален	Закон 2020 г. ДБ (млн.лв.) изменен	Изменение (млн.лв.)
I. ПРИХОДИ, ПОМОЩИ И ДАРЕНИЯ	28 054,7	26 040,8	-2 013,8
Данъчни приходи	25 039,9	23 026,0	-2 013,8
Корпоративен данък	2 731,1	2 410,6	-320,5
Данъци върху дивидентите, ликвидационни дялове и доходите на местни и чужд. юрид. лица	84,0	76,8	-7,2
Данъци в/у доходите на физически лица	4 358,5	4 074,6	-283,9
Данък върху добавената стойност	11 730,0	10 640,4	-1 089,6
Акцизи	5 695,2	5 450,0	-245,2
Данък върху застрахователните премии	44,8	44,2	-0,6
Мита и митнически такси	237,2	187,4	-49,8

Такса върху производството на захар и изоглюкоза			
Други данъци	159,1	142,1	-17,0
Неданъчни приходи	3 014,8	3 014,8	0,0
II. РАЗХОДИ И ТРАНСФЕРИ	26 594,9	28 094,9	1 500,0
Разходи	14 356,4	14 426,4	70,0
Персонал	5 783,2	5 783,2	0,0
Издръжка	2 455,0	2 455,0	0,0
Лихви - общо	621,6	691,6	70,0
Лихви по външни заеми	433,0	433,0	0,0
Лихви по вътрешни заеми	188,6	258,6	70,0
Социални разходи, стипендии	1 399,5	1 399,5	0,0
Субсидии	1 080,0	1 080,0	0,0
Предоставени текущи и капиталови трансфери за чужбина	28,5	28,5	0,0
Капиталови разходи	2 888,4	2 888,4	0,0
Прираст на държавния резерв - нето	19,2	19,2	0,0
Резерв за непредвидени и/или неотложни разходи:	81,1	81,1	0,0
Трансфери (нето)	12 238,5	13 668,5	1 430,0
Предоставени на:	12 257,5	13 687,5	1 430,0
ДВУЗ, БАН, ССА, БНТ, БНР и БТА	760,7	760,7	0,0
Общини	4 202,5	4 202,5	0,0
Социално - осигурителни фондове	5 929,5	7 359,5	1 430,0
Бюджети по чл.13 (4) от ЗПФ - нето	109,9	109,9	0,0
Други трансфери	1 254,8	1 254,8	0,0
Получени от:	18,9	18,9	0,0
Общини	0,0	0,0	0,0
Други трансфери	18,9	18,9	0,0
III. ВНОСКА В ОБЩИЯ БЮДЖЕТ НА ЕС	1 397,4	1 397,4	0,0
IV. БЮДЖЕТНО САЛДО			
(дефицит "-" / излишък "+") = /I-II-III/	62,4	-3 451,5	-3 513,8
V. ФИНАНСИРАНЕ	-62,4	3 451,5	3 513,8
Външно финансиране (нето)	-361,4	5 811,2	6 172,6
Вътрешно финансиране (нето)	209,0	-1 749,8	-1 958,8
Приватизация, придобиване на дялове и акции възмездни средства (нето)	90,1	-609,9	-700,0
в т.ч.: приватизация на дялове, акции и участия	3,1	3,1	0,0

Източник: Министерство на финансите [4]

Изменението в бюджетното салдо, като основен елемент на държавния бюджет, в случая, е сума от двете негативни изменения – намаление на приходите и увеличение на разходите. Първоначално със Закона за държавния бюджет на Република България за 2020г. е планирано бюджетното салдо да е „излишък“ в размер на 62,4 млн.лв. С изменението на закона се формира ново бюджетно салдо – „дефицит“ в размер на 3 451,5 млн.лв. или генерираното изменение на база първоначално планираното салдо е намалено с над 3,5 млрд.лв.

Финансирането на бюджетното салдо е бюджетен механизъм за осигуряване на формирания със салдото резултат с конкретни позиции в бюджета, които да се представят като източник на салдовата стойност (на формирания недостиг или наличност).

В първоначалният държавен бюджет за 2020 година е предвидено намаляване на външните заеми, за сметка на слабо увеличение на вътрешните заеми в нетен размер. В актуализираният държавен бюджет се наблюдава промяна в тази политика. Финансирането на целия недостиг, като бюджетно салдо е планирано чрез външно финансиране, а допълнително е планирано и значително намаляване на вътрешното финансиране, което също като стойност се компенсира чрез допълнително увеличение на външния дълг. Планираното външно финансиране с промяната на закона е над 5,8 млрд.лв.

Преглед на изпълнението на държавния бюджет към 30.06.2020 г.

Най-правилният начин да се отчете ефекта от направените промени в държавния бюджет е да се проследи неговото изпълнение.

Таблица 3. Изпълнение на държавния бюджет към 30.06.2020 г. /по месеци/

Бюджетни пера	Бюджет т 2020 г. (млн.лв.) първонач. .	Бюджет т 2020 г. (млн.лв.) изменен	Отчет 01.2020 (млн.лв.)	Отчет 02.2020 (млн.лв.)	Отчет 03.2020 (млн.лв.)	Отчет 04.2020 (млн.лв.)	Отчет 05.2020 (млн.лв.)	Отчет 06.2020 (млн.лв.)
I. ПРИХОДИ, ПОМОЩИ И ДАРЕНИЯ	28 054,7	26 040,8	2 504,1	4 348,3	6 296,8	8 377,1	9 998,6	12 159,5
<i>Данъчни приходи</i>	<i>25 039,9</i>	<i>23 026,0</i>	<i>2 269,4</i>	<i>3 915,3</i>	<i>5 679,5</i>	<i>7 658,4</i>	<i>9 167,6</i>	<i>11 153,5</i>
Корпоративен данък	2 731,1	2 410,6	15,5	74,5	284,1	559,2	662,7	1 051,7
Данъци върху дивидентите, ликв. дялове и доходите на юрид. лица	84,0	76,8	20,4	21,7	21,1	34,9	35,0	37,8
Данъци в/у доходите на физич.лица	4 358,5	4 074,6	365,7	674,1	997,8	1 426,7	1 753,4	2 072,3
Данък върху добавената стойност	11 730,0	10 640,4	1 329,4	2 151,9	2 940,9	3 728,3	4 425,0	5 206,5
Акцизи	5 695,2	5 450,0	489,0	920,0	1 320,6	1 740,5	2 097,0	2 546,4
Данък върху застраховат.премии	44,8	44,2	9,2	12,3	12,0	19,2	23,0	22,8
Мита и митнически такси	237,2	187,4	21,4	39,6	54,6	69,4	86,8	104,2
Други данъци	159,1	142,1	18,8	21,1	48,3	80,1	84,6	111,9
<i>Неданъчни приходи</i>	<i>3 014,8</i>	<i>3 014,8</i>	<i>228,8</i>	<i>426,8</i>	<i>608,5</i>	<i>705,7</i>	<i>817,3</i>	<i>991,3</i>
II. РАЗХОДИ И ТРАНСФЕРИ	26 594,9	28 094,9	1 839,0	3 631,3	5 767,3	7 787,1	9 709,9	11 532,9
<i>Разходи</i>	<i>14 356,4</i>	<i>14 426,4</i>	<i>765,6</i>	<i>1 590,6</i>	<i>2 695,1</i>	<i>3 506,3</i>	<i>4 334,2</i>	<i>5 174,4</i>
Персонал	5 783,2	5 783,2	453,8	915,2	1 396,0	1 864,5	2 322,4	2 775,4
Издръжка	2 455,0	2 455,0	77,0	193,2	389,0	526,4	639,4	778,1
Лихви - общо	621,6	691,6	43,0	42,7	311,5	313,7	332,1	344,2
Социални разходи, стипендии	1 399,5	1 399,5	87,9	177,6	269,1	358,7	448,4	532,1
Субсидии	1 080,0	1 080,0	72,0	212,5	286,3	363,2	418,8	503,7
Предостав.трансфери за чужбина	28,5	28,5	0,2	0,5	0,7	3,0	3,9	4,5
Капиталови разходи	2 888,4	2 888,4	28,9	46,1	41,3	75,9	175,4	246,3
Прираст на държ. резерв - нето	19,2	19,2	2,8	2,7	1,3	0,9	-6,2	-9,8
Резерв за непредв. и неотп.разходи:	81,1	81,1						
<i>Трансфери (нето)</i>	<i>12 238,5</i>	<i>13 668,5</i>	<i>1 073,4</i>	<i>2 040,7</i>	<i>3 072,2</i>	<i>4 280,8</i>	<i>5 375,7</i>	<i>6 358,4</i>
<i>Предоставени на:</i>	<i>12 257,5</i>	<i>13 687,5</i>	<i>1 085,8</i>	<i>2 067,0</i>	<i>3 113,3</i>	<i>4 343,8</i>	<i>5 445,5</i>	<i>6 444,5</i>
ДВУЗ, БАН, ССА, БНТ, БНР и БТА	760,7	760,7	63,7	127,2	195,1	268,7	339,1	410,2
Общини	4 202,5	4 202,5	518,0	905,1	1 355,3	1 715,5	2 128,9	2 484,3
Социално - осигурителни фондове	5 929,5	7 359,5	486,8	978,6	1 455,8	2 176,2	2 745,3	3 306,6
Бюджети по чл.13 (4) от ЗПФ - нето	109,9	109,9	3,5	5,9	15,5	41,3	53,6	53,7
Други трансфери	1 254,8	1 254,8	13,8	50,2	91,6	142,1	178,6	189,8
<i>Получени от:</i>	<i>18,9</i>	<i>18,9</i>	<i>12,4</i>	<i>26,2</i>	<i>41,1</i>	<i>63,0</i>	<i>69,8</i>	<i>86,1</i>

Общини	0,0	0,0	2,2	7,3	9,5	10,8	12,7	14,7
Други трансфери	18,9	18,9	10,2	18,9	31,6	52,2	57,1	71,4
III. ВНОСКА В ОБЩИЯ БЮДЖЕТ НА ЕС	1 397,4	1 397,4	187,3	305,1	373,6	474,1	615,3	688,6
IV. БЮДЖЕТНО САЛДО (дефицит "-" / излишък "+") = /I-II-III/	62,4	-3 451,5	477,9	411,9	155,8	115,9	-326,6	-62,0
V. ФИНАНСИРАНЕ	-62,4	3 451,5	-477,9	-411,9	-155,8	-115,9	326,6	62,0
<i>Външно финансиране (нето)</i>	<i>-361,4</i>	<i>5 811,2</i>	<i>-0,1</i>	<i>-0,6</i>	<i>-15,7</i>	<i>740,1</i>	<i>683,6</i>	<i>641,8</i>
<i>Вътрешно финансиране (нето)</i>	<i>209,0</i>	<i>-1 749,8</i>	<i>-478,0</i>	<i>-411,7</i>	<i>-141,0</i>	<i>-682,1</i>	<i>1 341,1</i>	<i>1 110,8</i>
<i>Приватизация, придобиване на дялове и акции и възмездни средства (нето)</i>	<i>90,1</i>	<i>-609,9</i>	<i>0,2</i>	<i>0,4</i>	<i>0,9</i>	<i>-173,9</i>	<i>-1 698,1</i>	<i>-1 690,7</i>
<i>в т.ч.: приватизация на дялове, акции и участия</i>	<i>3,1</i>	<i>3,1</i>	<i>0,0</i>	<i>0,0</i>	<i>0,0</i>	<i>0,0</i>	<i>0,8</i>	<i>0,1</i>

Източник: Министерство на финансите [4]

От представените данни в таблица 3 ще проследим изпълнението в основните пера. В първото основно перо „приходи“ се наблюдава общо изпълнение на данъчните приходи е 48 % от вече променения план. Интересно констатация в случая е, че в неданъчните приходи изпълнението е значително по-ниско (32 %), а в това перо не е предвидена промяна със закона.

В частта на разходите припомним, че промяната е само в перото „лихви“. В перото реалния разход за полугодieto, оправдава направената промяна. При прегледа на останалите разходи обаче се наблюдава, че същите имат значително по-ниско от планираното изпълнение. Тук остава въпросът дали промените в увеличение не можеше да се осъществят и като частично компенсирани промени между отделните разходи.

Най-интересно е отчетеното като изпълнение бюджетно салдо. До края на месец април България отчита положително бюджетно салдо. През м.май 2020 г. е отчетено вече отрицателно бюджетно салдо от 326,6 млн.лв., а през м. юни размерът на дефицита е намален до 62 млн.лв., което може да се приеме като незначителна величина в обемите на цялостния бюджет.

На база на формираното към 30.06.2020 г. бюджетно салдо е представено и последното основно перо в бюджета „финансиране на бюджетното салдо“. В него се наблюдава динамика в отделните подпера, но предвид, че тук се представят реалните източници на финансиране на недостига и съхранение най-реално е прегледа да се направи при цялостното отчитане на държавния бюджет, т.е. към 31.12.2020 г.

На база на направения преглед на изменението и изпълнението на държавния бюджет за 2020 г. могат да се направи обобщение, че държавата е направила необходимите промени, за да осигури финансова стабилност в условията, породени от пандемията КОВИД 19.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Загорчева, Д., Основни проблеми при изготвяне на бюджетите на общините, Годишник на ШУ "Епископ Константин Преславски" - ФМИ, том XIX С, 2018, ISSN 1311-834X, с.81-90.
- [2] Закон за държавния бюджет на Република България за 2020 г., обнародван с ДВ бр.100 от 20.12.2019 г., изменен с ДВ бр.28 от 24.03.2020 г., изменен и допълнен с ДВ бр. 34 от 09.04.2020 г., изменен и допълнен с ДВ бр. 44 от 13.05.2020 г., изменен и допълнен с ДВ бр. 60 от 07.07.2020 г.
- [3] Закон за изменение и допълнение на Закона за държавния бюджет на Република България за 2020 г., приет на 06.04.2020 г., обнародван с ДВ бр.34 от 09.04.2020 г.

- [4] Официална интернет страница на Министерство на финансите, <https://www.minfin.bg/>, последно посетена на 22.07.2020 г.

THE GOVERNMENT DEBT MANAGEMENT STRATEGY FOR THE PERIOD 2019-2021

ANIFE A. SALIEVA

ABSTRACT: *Government debt management is the overall process, the coordination of which is carried out through the creation and implementation of a Government Debt Management Strategy (SDMS). The strategy paper sets out the approach to achieving the objectives aimed at meeting the debt financing needs, taking into account the impact and constraints of the external and internal macroeconomic environment and potential risks. The strategy for government debt management for the period 2019–2021 is developed by the Minister of Finance on the basis of Art. 16, para. 1 of the State Debt Act and Art. 77 a of the Public Finance Act, for the period of the respective Medium-Term Budget Forecast (SBI). The object of the Strategy is the government debt - internal and external, undertaken under the Government Debt Act.*

KEYWORDS: *Strategy, Risks, Plan, Government debt, Internal and external management*

СТРАТЕГИЯТА ЗА УПРАВЛЕНИЕ НА ДЪРЖАВНИЯ ДЪЛГ ЗА ПЕРИОДА 2019-2021*

АНИФЕ А. САЛИЕВА

АБСТРАКТ: *Управлението на държавния дълг е цялостният процес, чиято координация се осъществява чрез създаване и изпълнение на Стратегия за управление на държавния дълг (СУДД). Стратегическият документ определя подхода за постигане на целите, насочени към удовлетворяване на потребностите от дългово финансиране, при отчитане влиянието и ограничителните условия на външната и вътрешната макроикономическа среда и потенциалните рискове. Стратегията за управление на държавния дълг за периода 2019–2021 г. се разработва от министъра на финансите на основание на чл. 16, ал. 1 от Закона за държавния дълг и чл. 77 а от Закона за публичните финанси, за периода на съответната Средносрочна бюджетна прогноза (СБП). Обект на Стратегията е държавният дълг – вътрешен и външен, поет по реда на Закона за държавния дълг.*

1 Основни допускания в плана за развитие на дълговото управление

База за разработване на СУДД за периода 2019–2021 г. е Закон за държавния бюджет на Република България (ЗДБРБ) 2018 г., като са взети предвид и фискалните цели, политики, прогнози и допускания за следващите три години, залегнали при разработване на проекта на Актуализираната СБП за периода 2019–2021 г. и проекта на ЗДБРБ за 2019 г. Високото ниво на фискалния резерв през 2018 г., продължаващата фискална консолидация и залегналите основни цели на фискалната политика за поддържане на близка до балансирана позиция на бюджетното салдо в средносрочен хоризонт дават възможност за провеждане на гъвкава политика по управлението на държавния дълг, съобразена както с конкретните пазарни условия за минимизиране на ликвидните рискове при изпълнението на бюджета, така и с намаляващата необходимост от дългово

* Настоящата статия е частично финансирана по проект №РД-08-93/28.01.2020г. „Икономика 2020: национални приоритети и стратегии“

финансиране при запазване устойчивостта на основните дългови параметри. В допълнение към финансирането с ДЦК, през 2019–2021 г. са предвидени усвоявания на средства в размер на около 586,7 млн. лв. по вече договорени ДЗ.

Табл. 1: Дълг и лихвени разходи – ключови параметри

Показател	2017 г.	2018 г.	2019 г.	2020 г.	2021 г.
	отчет	очаквано	проект	прогноза	прогноза
Държавен дълг					
Държавен дълг, млн. лв.	23 534.1	22 186.3	22 196.8	22 063.0	21 979.8
Държавен дълг/БВП, %	23.3%	20.5%	19.1%	17.7%	16.5%
Държавногарантиран дълг					
Държавногарантиран дълг, млн. лв.	1 996.8	1 908.7	1 782.0	1 664.3	1 560.7
Държавногарантиран дълг/БВП, %	2.0%	1.8%	1.5%	1.3%	1.2%
Дълг на сектор "Държавно управление"					
Дълг на сектор "Държавно управление", млн. лв.	25 907.8	24 347.2	23 898.1	23 667.3	23 471.3
Дълг на сектор "Държавно управление"/БВП, %	25.6%	22.5%	20.5%	19.0%	17.7%
Разходи за обслужване на държавния дълг					
Лихвени разходи по дълга, млн. лв.	754.6	650.0	633.3	639.8	622.7
Лихвени разходи по дълга/БВП, %	0.7%	0.6%	0.5%	0.5%	0.5%
БВП, млн.лв. (есенна макроикономическа прогноза на МФ 2018 г.)	101 043	108 141	116 412	124 627	132 884

Източник: По прогноза на МФ

Съгласно заложените допускания и прогнозното нетно дългово финансиране през 2018 г. съотношението „държавен дълг/БВП“ намалява до 20,5% (при 23,3% през 2017 г.). В номинално изражение размерът на държавния дълг през периода 2019–2021 г. се редуцира незначително. Отчитайки прогнозния по-голям ръст на БВП, стойността на съотношението дълг/БВП ще отбележи значителен спад от 19,1% в края на 2019 до 16,5% през 2021 г.

Показателят „държавногарантиран дълг/БВП“ към 31 декември 2018 г. се очаква да отбележи намаление спрямо 2017 г. от 2,0% до 1,8%, като в периода до 2021 г. продължава да спада до равнище от 1,2%. Предварителните оценки за съотношението „дълг на сектор „Държавно управление“ спрямо БВП“ показват, че през следващия тригодишен период (2019–2021 г.), този индикатор ще се запази на ниски нива, далеч под максимално допустимата референтна стойност на Маастрихтския критерий за конвергенция от 60%. През 2019–2021 г. се планира стойността на показателя да се понижава през всяка една от разглежданите години, достигайки до ниво от около 17,7% в края на периода.

2 Държавен и държавногарантиран дълг

Вследствие от изплащането през 2018 г. на ДЦК, емитирани на местния пазар и регулярните погашения по държавните заеми, се очаква спад в нивото на дълга към края на 2018 г. до около 22,2 млрд. лв. или под прага на предвиденото в ЗДБРБ 2018 г. дългово ограничение за максимален размер на държавния дълг в края на годината от 23,5 млрд. лв. В структурата на държавния дълг към 31 декември 2018 г. относителният дял на външния държавен дълг нараства до 75,4%, за сметка на вътрешния, който е с дял от 24,6%, при съответно 71,5% и 28,5% през 2017 г.

Табл. 2: Основни показатели на държавния дълг

Показатели	31.12.2017 г.	30.09.2018 г.	31.12.2018 г.
	отчет	отчет	очаквано изпълнение
Общо държавен дълг, млн. лв.	23 534.1	22 275.5	22 186.3
БВП, млн. лв.	101 042.5	108 141.0	108 141.0
Общо държавен дълг /БВП, (%)	23.3%	20.6%	20.5%
Вътрешен държавен дълг, млн. лв.	6 711.6	5 647.5	5 454.3
Външен държавен дълг, млн. лв.	16 822.5	16 628.1	16 731.9
Вътрешен държавен дълг/Общо държавен дълг (%)	28.5%	25.4%	24.6%
Външен държавен дълг/Общо държавен дълг (%)	71.5%	74.6%	75.4%
Лихвена структура на държавния дълг			
Дълг с фиксиран лихвен процент, млн. лв.	22 469.6	21 346.8	21 323.0
Дълг с променлив лихвен процент, млн. лв.	1 064.5	928.7	863.3
Дълг с фиксиран лихвен процент (%)	95.5%	95.8%	96.1%
Дълг с променлив лихвен процент (%)	4.5%	4.2%	3.9%
Валутна структура на държавния дълг			
Дълг в EUR, млн. лв.	18 240.7	18 038.7	17 933.3
Дълг в BGN, млн. лв.	5 146.5	4 113.5	4 113.0
Дълг в USD, млн. лв.	37.5	15.9	16.3
Дълг в други валути, млн. лв.	109.3	107.4	123.7
Дълг в EUR (%)	77.5%	81.0%	80.8%
Дълг в BGN (%)	21.9%	18.5%	18.6%
Дълг в USD (%)	0.2%	0.1%	0.1%
Дълг в други валути (%)	0.5%	0.5%	0.5%
Матуритетна структура на държавния дълг (по остатъчен срок)			
Дълг до 1 година включително, млн. лв.	1 304.5	1 149.6	958.9
Дълг над 1 до 5 години включително, млн. лв.	5 947.8	7 503.7	7 655.1
Дълг над 5 до 10 години включително, млн. лв.	10 593.6	9 703.6	9 852.7
Дълг над 10 години включително, млн. лв.	5 688.2	3 918.7	3 719.5
Дълг до 1 година включително (%)	5.5%	5.2%	4.3%
Дълг над 1 до 5 години включително (%)	25.3%	33.7%	34.5%
Дълг над 5 до 10 години включително (%)	45.0%	43.6%	44.4%
Дълг над 10 години включително (%)	24.2%	17.6%	16.8%
Среден остатъчен срок на държавния дълг (години)	7 г. 8 м.	7 г. 4 м.	7 г. 4 м.

* БВП: 2017 г. – по данни на НСИ ; 2018 г. – съгласно есенната макроикономическа прогноза на МФ, октомври 2018г., <http://www.minfin.bg/bg/866> .

Източник: МФ

В края на 2018 г. се очаква минимално намаление на Държавногарантиран дълг (ДГД) ли в размер на 1,9 млрд. лв. при 2,0 млрд. лв. в края на 2017 г. Вътрешният ДГД се състои от държавните гаранции, издадени по реда на Закона за кредитиране на студенти и докторанти, който към 30 септември 2018 г. заема дял от около 3,6% в общия размер на ДГД. Като процент спрямо БВП през 2018 г. държавногарантираните задължения се очаква да се редуцират до нива от 1,8% при 2,0% спрямо края на предходната година. През 2018 г. няма издадени нови държавни гаранции по външни кредитни споразумения.

Табл. 3: Размер и динамика на държавногарантирания дълг

Държавногарантиран дълг, млн.лв.	31.12.2017 г.	30.09.2018 г.	31.12.2018 г.
	отчет	отчет	очаквано изпълнение
Вътрешен държавногарантиран дълг	68.6	67.2	85.0
1.Гаранции по Закона за кредитиране на студенти и докторанти	68.6	67.2	85.0
Външен държавногарантиран дълг	1928.2	1809.2	1823.7
1.МБВР /Световна банка/	560.6	597.1	594.6
2.ЕИБ	3.1	3.2	7.6
3.ЕБВР	586.7	586.7	586.7
4.Други (ЕВРАТОМ, ЯБМС, БРСЕ и др.)	777.7	622.2	634.7
Общ размер на държавногарантирания дълг	1996.8	1876.4	1908.7
Държавногарантиран дълг/БВП (%)	2.0%	1.7%	1.8%

Източник: МФ

3 Икономически перспективи за периода 2019-2021

Икономическият растеж слабо ще се повиши до 3,7% през 2019 г., поради очакваното нарастване на публичните инвестиции и потребление. Очаква се ръстът на общите инвестиции в основен капитал да достигне 9,5%. Частното потребление ще запази своя сравнително висок темп на растеж, но в сравнение с предходната година, темпът леко ще се забави, поради поограничено нарастване на заетостта.

През 2019 г. се очаква ограничаване на отрицателното влияние от търговията с трети страни, което ще се отрази в ускоряване на общия растеж на износа на стоки и услуги. В периода 2020–2021 г. БВП се очаква да се повиши с 3,5%. Вътрешното търсене ще остане водещо за растежа на БВП по линия както на потреблението, така и на инвестициите. Докато по-ниските правителствени разходи за потребление и инвестиции ще доведат до по-слабо повишение на вътрешното търсене през 2020 г., растежът на публичните разходи ще се ускори в края на прогнозния период и ще се отрази в по-висок растеж на инвестициите и съответно на вътрешното търсене. Очаква се негативният ефект върху БВП по линия на нетния износ да се забави до около 1,1 пр.п. средно за периода 2020–2021 г.

Средногодишната инфлация през 2019 г. се очаква да бъде 3% и ще бъде движена най-вече от повишение на цените на услугите предвид прогнозирания ръст на вътрешното търсене. През 2020 и 2021 г. темпът на нарастване на цените ще се забави в съответствие с допусканията за понижение на международните цени на петрола и неенергийните суровини. През следващите две години темпът на реален растеж на износа ще се понижава в съответствие с очакванията за забавяне на икономическата активност, както в ЕС, така и в глобален план. Ограниченото нарастване на вътрешното и външно търсене ще доведат до забавяне растежа на вноса. Въпреки това, номиналният му растеж ще се характеризира с изпреварващи темпове спрямо този на износа, което ще бъде основен фактор за свиване на излишъка по текущата сметка и формирането на дефицит от 0,3% от БВП през 2021 г. През 2020 и 2021 г. растежът на вземанията от частния сектор се прогнозира да бъде съответно 6,9% и 7,3%.

Основните рискове пред прогнозата, които оказват влияние върху публичните финанси и нивото на държавния дълг, се свързват с несигурността за развитието на международната търговия, динамиката на международните цени. Основните рискове по

линия на външната среда са свързани с нестабилната геополитическа обстановка и нарастващия брой протекционистични мерки, въведени от отделни държави.

Продължаващото обезценяване на новата турска лира доведе до отрицателен баланс на външната търговия с южната ни съседка. Липсата на ясни и предвидими очаквания за обменния курс на турската валута затруднява сключването на дългосрочни договори между икономическите агенти и ограничава конкурентоспособността на българския износ.

Настоящата прогноза е изготвена при допускане за минимално понижение на цената на нефта в доларово изражение през 2019 г. По-силното нарастване на цените от своя страна ще допринесе за по-високи номинални растежи на БВП и неговите компоненти през 2018 г., като ефектът върху БВП и потреблението ще остане съществен и през 2019 г., въпреки ограничаването на растежите им в реално изражение.

4 Анализ на рисковете, свързани със структурата на държавния дълг

През следващия тригодишен период дълговата структура се запазва устойчива на влиянието на рисковете, което се потвърждава от резултатите от проведеня анализ за периода от 2019 г. до 2021 г. При съпоставка на прогнозите за основните наблюдавани параметри, свързани с неговата оценка, включени в Стратегията за управление на държавния дълг за периода 2018–2020 г. не се наблюдават съществени отклонения в стойностите им. За целите на разработване на анализа е взето предвид планираното дългово финансиране, съгласно допусканията, залегнали в проекта на актуализираната СБП за периода 2019–2021 г. и проекта на ЗДБРБ за 2019 г., разчетено в съответствие с макроикономическите и фискални прогнози.

Табл. 4: Индикатори за оценка на риска

Риск	Индикатор	2017 г. отчет	2018 г. очаквано	2019 г. проект	2020 г. прогноза *	2021 г. прогноза*
Риск за рефинансиране	Дълг до 1 г. (по остатъчен срок като дял от държавния дълг, %)	5.5	4.3	5.0	3.7	12.6
	Среден период до матуритета (години) - Average time to maturity (ATM)	7.2	6.8	6.3	5.9	5.3
Лихвен риск	Съотношение между дълг с фиксиран лихвен процент и дълг с плаващ лихвен процент (%)	95.5 / 4.5	96.1 / 3.9	96.8 / 3.2	97.5 / 2.5	98.0 / 2.0
	Среден период до следващо фиксиране на лихвените купони (години) - Average time to refixing (ATR)	7.2	6.8	6.3	5.9	5.3
	Продължителност (години) - Duration	6.9	6.5	6.1	5.7	5.1
Валутен риск	Съотношение между външен и вътрешен държавен дълг (%)	71.5 / 28.5	75.4 / 24.6	75.2 / 24.8	75.0 / 25.0	74.9 / 25.1
	Съотношение между дълга в рисково неутрални валути - лева и евро спрямо дял на дълга в други валути (% от общия размер на държавния дълг)	99.4 / 0.6	99.4 / 0.6	99.5 / 0.5	99.5 / 0.5	99.6 / 0.4
Ликвиден риск	Съотношение между дълг до 1 г. (по остатъчен срок) и данъчно-осигурителни приходи (%)	4.4	3.2	3.2	2.2	7.2
Риск, свързан с размера на дълга	Съотношение между дълга на сектор "Държавно управление" и БВП (%)	25.6	22.5	20.5	19.0	17.7
	Съотношение между държавен дълг и БВП (%)	23.3	20.5	19.1	17.7	16.5
Риск, свързан с условните задължения	Съотношение между държавногарантиран дълг и държавен дълг (%)	8.5%	8.6%	8.0%	7.5%	7.1%
	Съотношение между държавногарантиран дълг и БВП (%)	2.0%	1.8%	1.5%	1.3%	1.2%
Оперативен риск	– изградена стабилна институционална структура за управление на държавния дълг, с ясно делегирани отговорности на персонала, която действа в рамките на Министерството на финансите;					
	– поддържане на информационна система за анализ, прогнози и управление на държавния и държавногарантирания дълг - официален регистър за държавния и държавногарантирания дълг;					
	– провеждане на политика за намаляване на оперативния риск чрез прилагане и спазване на вътрешни стандарти и системи за контрол;					
	– подробно разписани правила и процедури за организация на дейността на структурното звено, отговорно за управление на държавния дълг.					

Заб.: * Данните са прогнозни. Взети са предвид прогнозите за финансирането съгласно актуализираната СБП 2019-2021 г.

В периода 2018-2020 г. индикаторът „дял на държавния дълг с остатъчен срок до 1 година в общия размер на държавния дълг в обращение“ отбелязва спад от 4,3% до 3,7%, запазвайки се на ниво, което не предполага дълговият портфейл да бъде изложен на сътресения при рефинансиране. В края на 2021 г. се очаква този показател да достигне ниво от 12,6% в следствие на предстоящия през 2022 г. падеж на 7-годишната емисия еврооблигации, пласирана като част от първата трансакция под основаната GMTN програма през м.март 2015 г.

Валутната и лихвената структура на държавния дълг, очаквана към края на 2018 г. с преобладаващ дял на задължения в лева и евро - от около 99,4% и фиксирани лихвени купони – 96,1% се планира да се запази и през целия период 2019–2021 г. Неутралното влияние от изменението в стойностите на основните пазарни променливи върху дълга и на средствата за неговото обслужване не индикира зависимост на дълговия портфейл от въздействието на пазарните рискове.

В средносрочен план, вследствие на последователната фискална политика през последните години и заложените цели за постигане и поддържане на близка до балансирана бюджетна позиция и ниското ниво на показателя дълг към БВП, рисковете пред устойчивостта на държавната задължнялост също са ниски.

Предварителните оценки за динамиката на съотношението „дълг на сектор Държавно управление към БВП“ през текущата и следващите три години (2019–2021 г.) остават далеч под максимално допустимата референтна стойност на Маастрихтския критерий за конвергенция от 60% и гарантират запазване на равнището на държавна задлъжнялост в рамките на устойчиви граници. На база последните годишни данни, публикувани от Евростат през месец октомври 2018 г., съотношението - дълг на сектор „Държавно управление“ спрямо БВП към края на 2017 г. възлиза на 25,6% (при 29,6 % в края на 2016 г.). Текущата стойност на показателя отрежда на Република България за поредна година трето място сред страните-членки на ЕС с най-ниска държавна задлъжнялост. По прогнозни данни, нивото на този параметър се очаква постепенно да се понижава всяка година от периода 2018–2021 г., достигайки съответно до 22,5%³ през 2018 г., 20,5%³ през 2019 г., 19,0%³ през 2020 г. и 17,7%³ през 2021 г. Съотношението „държавен дълг/ БВП“ също следва тенденция на намаление през целия разглеждан период съответно от 20,5% през 2018 г. до 16,5% в края на 2021 г.

През 2018–2019 г. се наблюдава подобрене при изменението на индикаторите за оценка на този вид риск - съотношението на ДГД към БВП и към общия размер на държавния дълг. Предвижда се ДГД да регистрира спад, както в номинално изражение, така и като съотношение спрямо БВП. Като дял от БВП се предвижда ДГД да отчете ниво от 1,8% в края на 2018 г. (при 2,0% в края на 2017 г.), а спрямо размера на държавния дълг до ниво от 8,6% (при 8,5% в края на 2017 г.).

През периода 2019–2021 г. се предвижда запазване на насочените към формата на организация дейности по управление и контрол на суверенните задължения, пряко свързани с прилагането на последователна и стандартизирана вътрешна система за контрол.

5 Цели на политиката по управление на държавния дълг

Основната цел на дълговото управление е осигуряване на необходимия ресурс за рефинансиране на дълга в обращение, при необходимост финансиране на държавния бюджет и обезпечаване стабилността на фискалния резерв при оптимално възможна цена и приемлива степен на риск.

В предстоящия тригодишен период 2019–2021 г. политиката по ново заемане ще се осъществява при стриктното спазване на законоустановените ред и процедури и при съблюдаване на заложените в Закона за държавния бюджет дългови ограничения. Заемната политика ще се детерминира от постигнатия устойчив икономически растеж, подобреното на бюджетните параметри и акумулираните средства във фискалния резерв. Одобряването на нови инвестиционни проекти за финансиране с държавни и държавногарантирани заеми и в рамките на разглеждания период (2019– 2021 г.) ще продължи да бъде рестриктивно в контекста на изпълнението на поставените правителствени приоритети за насърчаване развитието на ключови сектори в икономиката..

Отсъствието на пикови плащания по външните еврооблигации през периода 2019–2021 г. и протичащата фискална консолидация превръщат вътрешният дългов пазар в най-ефективния достъпен източник за осигуряване на дългово финансиране на бюджета. Емисионната политика през този период ще има за цел да обезпечи при необходимост текущите ликвидни нужди на бюджета и да рефинансира настъпващите падежи на ДЦК, емитирани на вътрешния пазар.

В края на 2017 г. едновременно стартира вторичната търговия на ДЦК на многостранна система за търговия (E-Bond Bulgaria) и на регулиран пазар (Българска фондова борса –

София“ АД), с което се разшири обхвата както на пазара на ДЦК и мониторинга върху него от страна на МФ.

През 2018 г. стартира процесът по изграждане на интегрирана информационна система (Система за мониторинг, анализ, регистрация и търговия на ДЦК /СМАРТ/), с цел обезпечаване мониторинга на вторичния пазар на ДЦК в съответствие с динамично променящите се нови регулации в областта на финансовите услуги и евентуална промяна в методологията за оценка на представянето и избор на първичните дилъри на ДЦК.

6 Заключение

В заключение може да се отбележи, че анализът на тежестта от дълга се свежда до разпределението на данъчната тежест между членовете на дадено поколение или между самите поколения. Това прави резултатите от анализа много условни и комплексни. Така в концепцията на Лернер вътрешният дълг не създава тежест за бъдещите поколения, защото той е просто трансфер на доходи вътре в рамките на дадено поколение. От друга страна, в модела на застъпване на поколенията обаче дефицитното финансиране поражда реална тежест за бъдещото поколение. България е сред държавите членки на ЕС с най-нисък държавен дълг. Първият значим ръст на дълга е от 2014 г., следващият беше резултат от фалита на четвъртата по големина българска банка, предизвикан от злоупотреба с вътрешна информация. Правителството осигури ликвидност на друга българска банка с допълнителен дълг, който тя върна в рамките на една година. Въпреки стабилната понастоящем банкова система, беше взет заем за гарантиране на ликвидността при нужда, който е във фискалния резерв. Така замразените средства не създават възможности за икономическо оживление и повишаване на потреблението. Консервативният подход засега създава стабилност, но на ниски нива. Това не дава положителна перспектива на страната. Знак за това са и становищата на европейски комисари, които подчертаха, че финансовата стабилност не създава социална такава, поради което се въздържат да окуражат България да пристъпи към влизане в Еврорезоната.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Антонов, П., Захаров Ю. Към въпроса за анализа и избора на комплексните показатели за оценка на качеството. Стандарти и качество, 5 (1981), 23-30.
- [2] Захариев, Андрей. Управление на дълга, Свищов АИ „Ценов”
- [3] Иванов, И., Георгиев Г., Информатика. Техника, София (1992).
- [4] Adati, T., Miyazawa, T., On paracontact Riemann manifolds. TRU Math. 13 (2) (1977), 27-39.
- [5] СИМЕОНОВ С. и Захариева, Г. Дефицитно финансиране на бюджета в: BROWN C. and P. Jackson. Икономика на публичния сектор. София, FSSA, 1998.
- [6] РАДКОВ, Р. и Захариев, А. Международни финанси. (2016). В.Търново: ФАБЕР..
- [7] СТОЯНОВ, В., Фолкерс, К., Кузманова, Кр. и Стоянов, П. Данъчна хармонизация в страните – членки на ЕС. НУЦ „Икономика на публичния сектор, София, 2002.
- [8] БЕРЕМСКА, Г. Непазарни дългови инструменти предназначени за дългови инвеститори. Government Debt Management Seminar, Sofia, Interpred, 19-20 October 1995.
- [9] Davids, D.L., Recovery effects in binary aluminum alloys, Ph.D. thesis, Harvard University (1998).
- [10] <https://www.imf.org/en/News/Articles/2017/05/24/PR17190-Bulgaria-IMF-Executive-Board-Approves-2017-Financial-System-Stability-Assessment>
- [11] <https://ideas.repec.org/a/dat/almphd/v15y2019i15p213-225.html>

[12] <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/bg/TXT/?uri=CELEX%3A52014DC0904>

RISKS TO THE BULGARIAN ECONOMY - GEOPOLITICAL, ECONOMIC, FINANCIAL

VIOLETA N. LUKOVA

ABSTRACT: *In the first four months of 2020 the major factors determining global economic activity were the measures to curb the rapid spread of the new coronavirus, SARS-COV-2, which causes COVID-19. The measures led to a complete disruption of activities in a number of economic sectors worldwide, with the services sector being affected most strongly. Already in the first quarter significant declines in economic activity were reported in all leading economies, and in the second quarter they are expected to deepen. In response to the expected economic fallout from the measures against the spread of COVID-19 the world leading central banks, including the ECB and the US Federal Reserve System, launched a series of extraordinary monetary policy measures.*

KEYWORDS: *Risks, Bulgarian economy*

РИСКОВЕ ПРЕД ИКОНОМИКАТА НА БЪЛГАРИЯ – ГЕОПОЛИТИЧЕСКИ, ИКОНОМИЧЕСКИ, ФИНАНСОВИ *

ВИОЛЕТА Н. ЛУКОВА

АБСТРАКТ: *През първите четири месеца на 2020 г. основните фактори, които определят икономическата активност в глобален мащаб, са мерките за ограничаване на бързото разпространение на новия коронавирус COVID-19. Мерките доведоха до пълно прекъсване на дейността в редица икономически сектори в глобален мащаб, като най-засегнат е секторът на услугите. Още през първото тримесечие са отчетени значителни спадове в икономическата активност във всички водещи икономики. В отговор на очакваните негативни икономически ефекти от мерките срещу разпространението на COVID-19 водещите централни банки по света, включително ЕЦБ и Федералният резерв, предприемат поредица от извънредни мерки по паричната политика.*

1 Въведение

Поради намалялата външна задлъжнялост и натрупаните финансови буфери през последните години поставят българската икономика в добри първоначални условия преди кризата, свързана с разпространението на новия коронавирус. През 2019 г. и в началото на 2020 г. се наблюдава продължаващо нарастване на излишъка и запазване на положителното салдо по финансовата сметка. Данните за март 2020 г. показват формиране на нисък дефицит по текущата сметка, което вероятно отразява само частично ефектите от кризата, свързана с COVID-19, върху външните финансови потоци. През първите четири месеца на 2020 г. привлечените средства от домакинства, корпорации, правителствени агенции и др. в банковата система продължават да нарастват със сравнително високи темпове. Факторите, които обуславят тази динамика след обявяването в средата на март на извънредното положение в страната, включваха доверието в банковата система, липсата на сигурна алтернатива на депозитите, както и формирането на предпазни спестявания от икономическите агенти в условията на среда с повишена несигурност. При

* Настоящата статия е частично финансирана по проект №РД-08-93/28.01.2020г. „Икономика 2020: национални приоритети и стратегии“

кредита очакваме забавяне на годишния растеж поради отслабване на търсенето и вероятно затягане на кредитните стандарти от страна на банките и намаляване на склонността им да поемат риск.

2 Рискове пред икономиката на България – геополитически, икономически, финансови

Според оценките на НСИ през първото тримесечие на 2020 г. реалният БВП нараства с 0.3% на верижна база. За този растеж допринася отчетеното нарастване на износа на стоки и услуги, което вероятно се дължи на факта, че по-значителното разпространение на новия коронавирус COVID-19 е наблюдаван в края на тримесечието. В същото време при разходите за крайно потребление и инвестициите в основен капитал се наблюдава понижение спрямо четвъртото тримесечие на 2019 г. При реализиране на допускането, че няма да има втора вълна от COVID-19 и ново затягане на мерките, най-вероятно икономическото възстановяване на верижна база ще започне през третото тримесечие на годината. През второто и третото тримесечие на 2020 г. основният риск пред глобалната икономика, и съответно пред външното търсене на български стоки и услуги, е свързан с вероятността от по-бавно намаляване на новите случаи на заболявания с COVID-19 в основните икономически региони в света, което предполага повторно въвеждане на ограничителни мерки или забавяне на тенденцията на отмяната им в глобален мащаб. Това от своя страна би било фактор за по-бавно възстановяване на икономиките на основните търговски партньори на България и съответно за по-ниско външно търсене на български стоки и услуги.

Външна среда - геополитически фактори

БВП на еврозоната

Икономическата активност в еврозоната следва устойчива тенденция към забавяне през последните две години. През 2019 г. растежът на реалния БВП на еврозоната възлиза на 1.2%, като през четвъртото тримесечие на годината растежът се забавя до 0.1% на верижна база. През тримесечието основен принос за растежа на БВП на верижна база има брутно образуване на основен капитал (с 0.9 процентни пункта) и в по-малка степен частното и правителственото потребление (с по 0.1 процентни пункта). Отрицателен принос за изменението на БВП на тримесечна база има нетният износ (с -0.9 процентни пункта) и в по-малка степен изменението на запасите (с -0.1 процентни пункта).

Принос по компоненти за изменението на реалния БВП на еврозоната

(%, процентни пунктове; на тримесечна база)



Източник: Евростат.

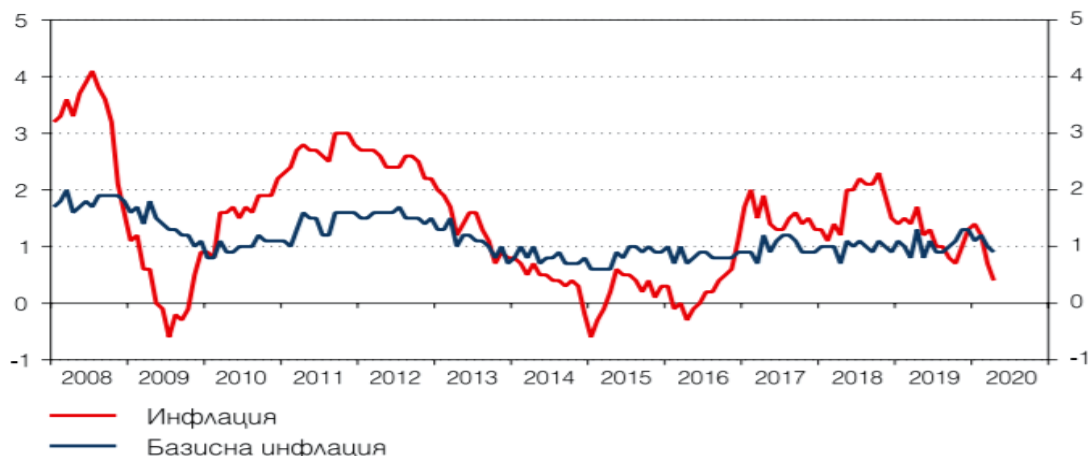
Фигура 1

Инфлация в еврозоната

Инфлацията в еврозоната се повиши през последното тримесечие на 2019 г. поради повишението на цените на енергийните продукти, достигайки 1.3% на годишна база в края на годината. Ускоряването на инфлацията продължава и през януари 2020 г. Низходящата динамика се дължеше главно на изменението на цените на енергийните продукти, като през април енергийният компонент в ХИПЦ се понижи с 9.6% на годишна база при спад с 4.5% през март и спад с 1.0% средно за първото тримесечие на 2020 г. Базисната инфлация, изключваща цените на храните и енергийните продукти, се ускори до 1.3% в края на 2019 г., след което се забави до средно 1.1% през първото тримесечие на 2020 г., а през април възлезе на 0.9% на годишна база. През периода на действие на мерките за ограничаване на разпространението на COVID-19 се наблюдаваше съществено забавяне на инфлацията при услугите (от 1.8% в края на 2019 г. до 1.2% през април 2020 г.) и значително ускоряване на инфлацията при храните (от 2.0% в края на 2019 г. до 3.6% през април 2020 г.). Поскъпването на храните се дължеше главно на по-високите цени на непреработените храни.

Инфлация в еврозоната

(%, на годишна база)



Забележки: Инфлацията е измерена чрез ХИПЦ. Базисната инфлация е измерена чрез ХИПЦ, без енергийни продукти, храни, алкохол и тютюневи изделия.

Източник: Евростат.

Фигура 2

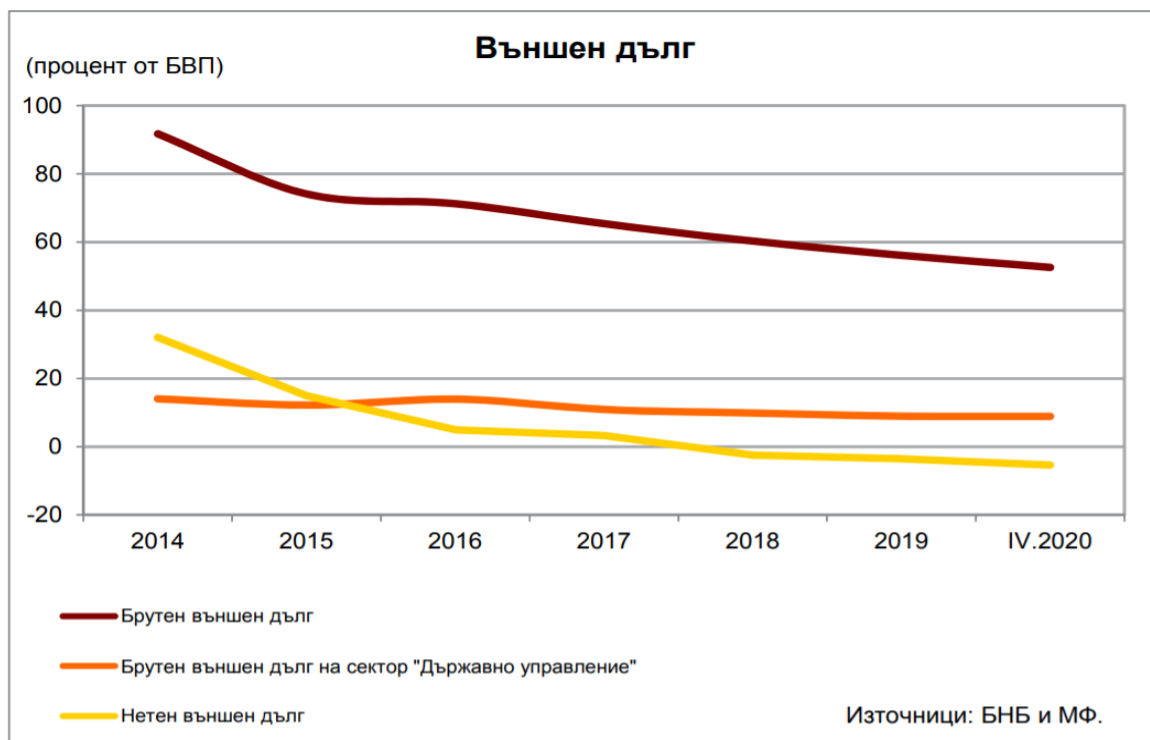
Външен сектор

През март балансът по текущата сметка се влошава на годишна база, за първи път от август 2019 г. Спадът на износа на стоки с 5.9% изпреварва понижението на вноса от 4.2%, като по-съществено бе свиването на търговията със страни от ЕС. В същото време, излишъкът при услугите се увеличава с 6.7%. И при износа, и при вноса на услуги е отчетен спад, съответно от 19.3% и 27.3%, като водещо е понижението при пътуванията. Динамиката на паричните преводи от емигранти също намалява с 66.4% или почти 80 млн. евро. Въпреки това, благоприятната среда през първите два месеца на годината позволиха удвояването на излишъка по текущата сметка през първото тримесечие на 2020 г. до 501.6 млн. евро или 0.8% от прогнозния БВП. Изтеглянето на част от депозитите на банките в чуждестранните компании майки се отрази в спад на активите по финансовата сметка през първо тримесечие по статия валута и депозити.

Брутният външен дълг

Брутният външен дълг в края на април 2020 г. е в размер на 34 172.9 млн. евро (52.6% от БВП), което е със 101.6 млн. евро (0.3%) повече в сравнение с края на 2019 г. (34 071.3 млн. евро, 56.2% от БВП). Дългът намалява с 295.6 млн. евро (0.9%) спрямо април 2019 г. (34 468.6 млн. евро, 56.8% от БВП). В края на април 2020 г. дългосрочните задължения са 26 123.2 млн. евро (76.4% от брутния дълг, 40.2% от БВП), като нарастват с 476.2 млн. евро (1.9%) спрямо края на 2019 г. (25 647 млн. евро, 75.3% от дълга, 42.3% от БВП). Дългосрочните задължения се повишават с 209.8 млн. евро (0.8%) спрямо април 2019 г. (25 913.3 млн. евро, 42.7% от БВП). Краткосрочните задължения възлизат на 8049.8 млн. евро (23.6% от брутния дълг, 12.4% от БВП) и намаляват с 374.5 млн. евро (4.4%) спрямо края на 2019 г. (8424.3 млн. евро, 24.7% от дълга, 13.9% от БВП).

Краткосрочният външен дълг намалява с 505.5 млн. евро (5.9%) спрямо април 2019 г. (8555.2 млн. евро, 14.1% от БВП).



Фигура 3

През януари – април 2020 г. извършените плащания по обслужването на brutния януари – април 2019 г. Нетният външен дълг в края на април 2020 г. е отрицателен в размер на 3505.2 млн. евро (5.4% от БВП), като намалява с 1344.1 млн. евро (62.2%) спрямо края на 2019 г. (отрицателна стойност от 2161.1 млн. евро, 3.6% от БВП). Понижението се дължи на по-голямото увеличение на brutните външни активи (с 1445.7 млн. евро, 4%) в сравнение с увеличението на brutния външен дълг (със 101.6 млн. евро, 0.3%). Нетният външен дълг намалява с 2129.4 млн. евро (154.8%) спрямо април 2019 г. (отрицателна стойност от 1375.8 млн. евро, 2.3% от БВП).

Икономически и финансови фактори вътрешна среда

Пазара на труда

През първото тримесечие броят на заетите в икономиката според Служба за национална статистика намалява с 1.3% на годишна база до 3398,2 хил.д., основно поради ограничената икономическата дейност в редица сектори в следствие на предприетите мерки против разпространението на COVID-19.

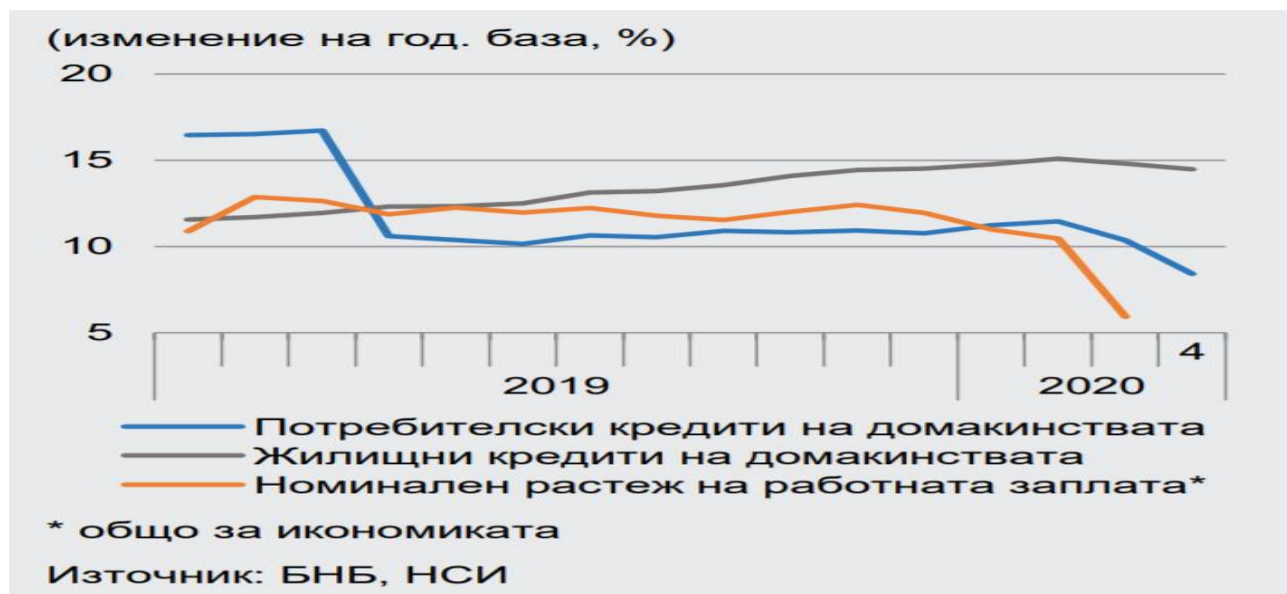
Агенция по заетостта отчита намаление с 0,7 процентни пункта за месец и увеличение с 3,1 процентни пункта на годишна база. През месец юни безработицата в страната остава висока въпреки мерките на управляващите за подпомагане на заетостта и бизнеса. Равнището на регистрирана безработица в страната през юни е 8,3%. В края на юни Агенция по заетостта отчита 273 367 регистрирани безработни лица, като спрямо май те са с 22 086 по-малко или спадът е от 7,5%. В същото време увеличението спрямо юни

2019 г. е с 61,1% или със 103 708 лица. За ползване на посредничеството и услугите на бюрата по труда през юни се регистрираха нови 26 415 безработни лица. Освен тях, други нови 822 души от групите на търсещите работа заети, учащи и пенсионери, също са регистрирани в Агенцията по заетостта. През юни броят на започналите работа безработни лица достига 36 621, като 95,7% от тях са устроени в реалната икономика, сочат данните от месечната статистика на Агенцията по заетостта. Заедно със спада на заетостта във всички основни сектори на икономиката се наблюдава повишение на производителността на труда, което е основният фактор за реалния ръст на БДС. Най-много нараства производителността в аграрния сектор, 5.2% на годишна база, но индустрията и услугите също демонстрираха относително висок ръст от съответно 1.6 и 2.1%.

Финансов сектор

Годишното нарастване на кредитите за частния сектор се забавя до 7.6% при 9.1% в края на март. Най-голям отрицателен принос имат кредитите за нефинансови предприятия, чийто растеж се забавя от 5.2% до 3.2% поради отрицателни ефекти по линия на ограничената икономическа активност и влошени очаквания, поради въведените извънредни мерки и ограниченията които ги последваха. Обемът на новите кредити на фирмите се понижава с 30% спрямо април 2019 г. в съответствие със значителния спад на бизнес климата и голяма част от другите показатели от краткосрочната бизнес статистика през април. Годишният темп на растеж леко се забавя от 14.8% през март до 14.5% в края на април, а месечното изменение бе положително. Въпреки, че лошите и пререструктурирани кредити остават с непроменен дял 8.8% в общите кредити за нефинансови предприятия и домакинства, през април размерът им се повишава на годишна база за първи път от октомври 2014 г. Растежът от 0.9% се дължи изцяло на портфейла на нефинансовите предприятия.

Динамика на доходите и кредитите на домакинствата



Фигура 4

Потребление на домакинствата

Предприетите мерки срещу разпространението на COVID-19 окажат значително негативно влияние върху крайните потребителски разходи на домакинствата. От една страна, за това ще допринесе характерът на въведените мерки, които са насочени към намаляване на социалните контакти и придвижването на хората, ограничавайки възможностите за потребление на определени категории стоки и услуги. Пряко засегнати от мерките са услугите по обществено хранене, краткосрочно настаняване, развлечение и култура, и транспортните услуги, които формират общо около 22.2% от крайните потребителски разходи на домакинствата и са в размер на 14% от БВП.

Повишената несигурност и влошаването на условията на трудовия пазар са фактори, които се отразят негативно върху динамиката на частното потребление. Понижението на икономическата активност и на производителността на труда е предпоставка засегнатите предприятия да предприемат стратегии за оптимизиране на разходите за труд чрез намаляване на работното време, освобождаване на заети и/или понижение на трудовите възнаграждения, което намалява способността на домакинствата за потребление и увеличава несигурността относно финансовото им състояние. По данни на НСИ за структурата на домакинските бюджети за 2019 г. доходите от работна заплата и самостоятелна заетост представляват около 63% от общите доходи. В резултат на това може да се очаква домакинствата да свият крайните потребителски разходи поради намалените възможности за потребление. В допълнение по-голямата несигурност в икономиката е предпоставка домакинствата да подхождат предпазливо, като отложат планирани покупки, дори и да не изпитват финансови затруднения.

Таблица 1

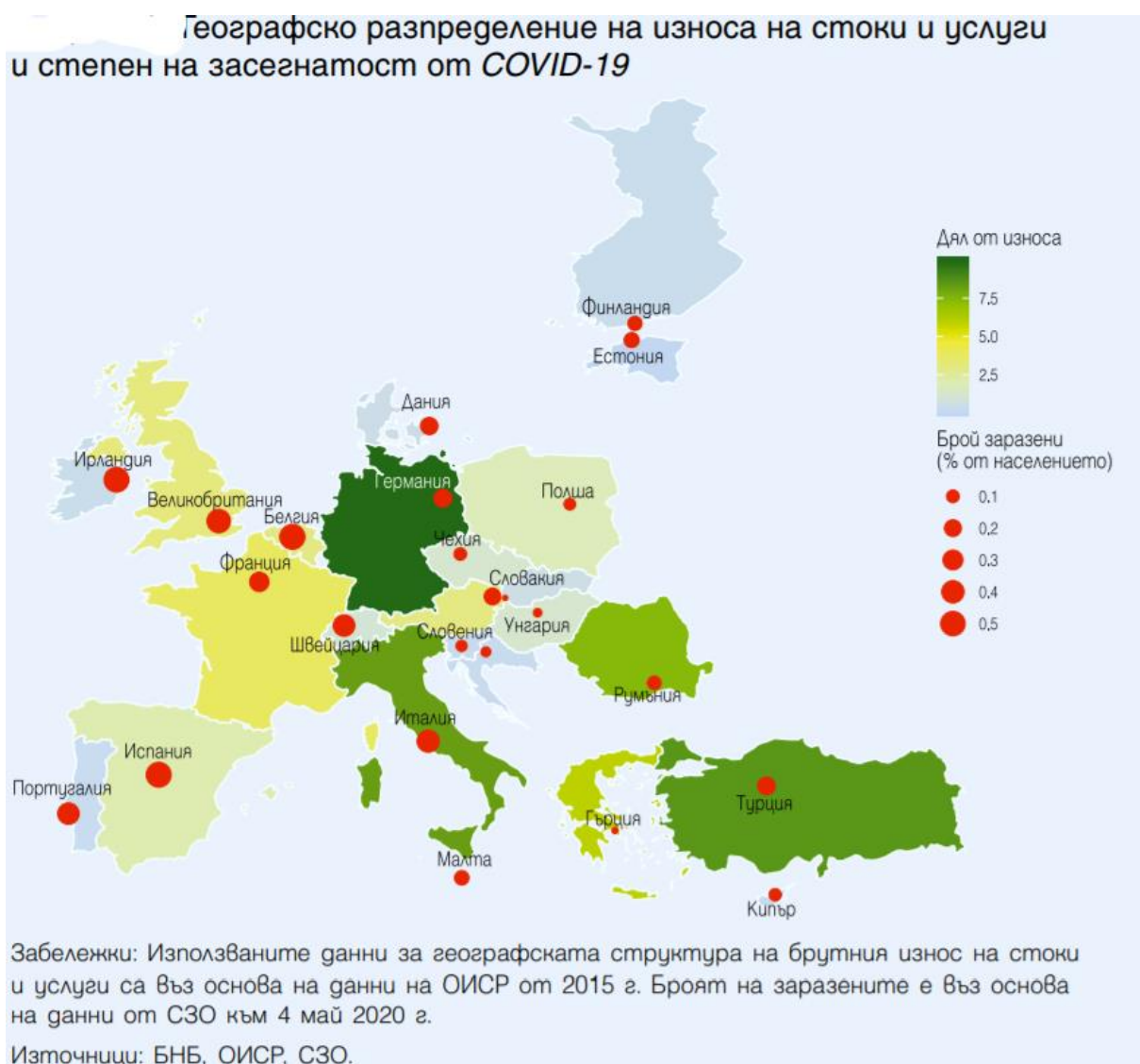
Структура на разходите за потребление на домакинствата по цел

	Дял от общите разходи	Дял от БВП
Хранителни продукти и безалкохолни напитки	19.1	12.0
Облекло и обувки	3.2	2.0
Жилища, вода, електроенергия, газ и други горива	19.9	12.6
Жилищно обзавеждане, стоки и услуги за домакинството и за обичайно поддържане на дома	5.1	3.2
Здравеопазване	6.3	4.0
Транспорт	13.3	8.4
Покупка на лични транспортни средства	1.7	1.1
Поддържане и експлоатация на лични транспортни средства	7.4	4.7
Транспортни услуги	4.2	2.6
Съобщения	4.8	3.0
Развлечения и култура	7.8	4.9
Образование	1.2	0.8
Ресторанти и хотели	7.0	4.4
Услуги по обществено хранене	4.5	2.8
Услуги по краткосрочно настаняване	2.5	1.6
Разнообразни стоки и услуги	7.1	4.5
Крайни потребителски разходи	100.0	63.1

Забележка: Данните се отнасят за 2018 г.
Източници: Евростат, изчисления на БНБ.

Износ и внос на стоки и услуги

Икономиката на България се характеризира с висока степен на отвореност - външната търговия през 2019 г. представлява 123.7% от БВП, и интегрираност в глобалните производствени вериги, поради което отслабеното външно търсене на български стоки и услуги, свързано с пандемията от COVID-19, има съществен отрицателен ефект върху българския износ. Съгласно географската структура около 65% от общия номинален износ на стоки и услуги от страната е насочен към Европейския съюз, като държавите от еврозоната, чиито икономики са сред най-засегнатите от пандемията в глобален план, имат около 45% дял в износа на България.

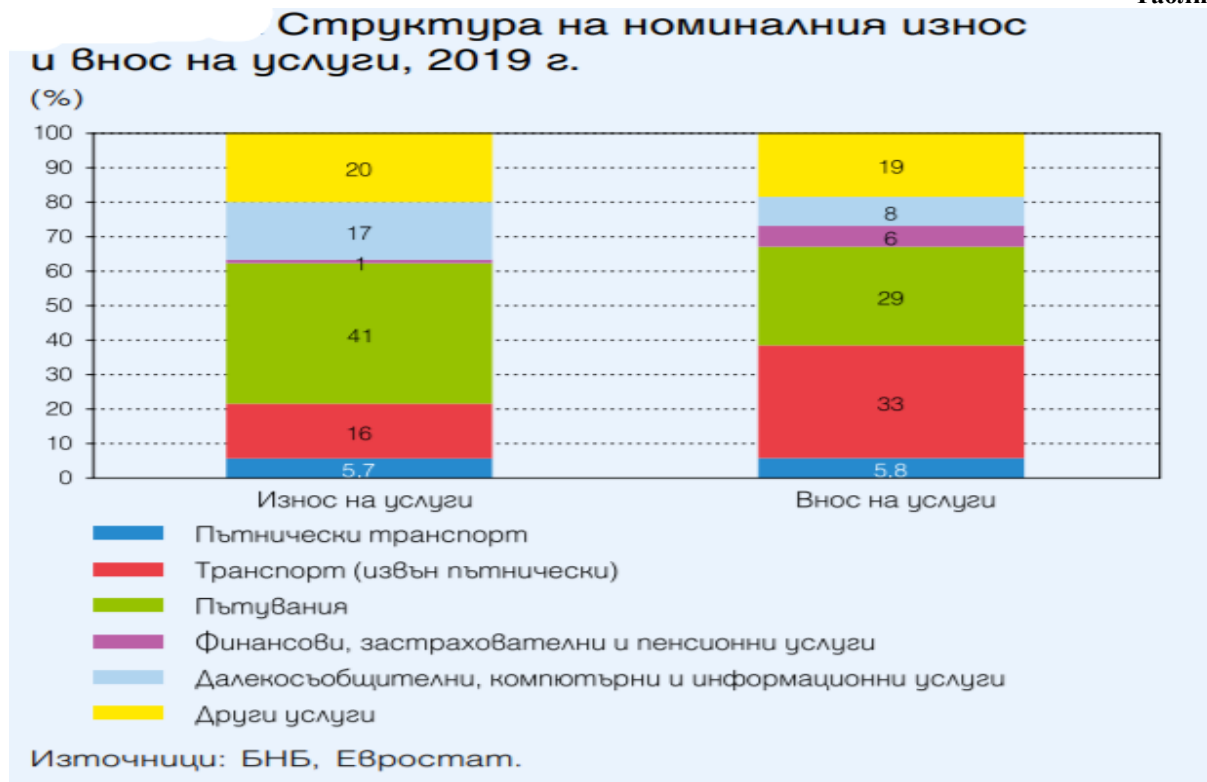


Фигура 5

Въпреки въведените от правителството ограничения за износ на някои медицински стоки са фактор по линия на предлагането, който потенциално също би могъл да има негативно влияние върху износа на стоки. При износа на услуги, освен външното търсене, съществен негативен ефект по линия на предлагането оказват наложените у нас ограничения върху дейността на местата по настаняване и осъществяване на пътнически услуги в периода на извънредното положение. Пряко и в най-голяма степен по линия на тези мерки са засегнати пътуванията и пътническият транспорт. Делът на тези подгрупи в номиналния износ на услуги на страната е около 46%, а годишните им приходи през 2019 г. възлизат на 7.2% от БВП. Основната част от пътуванията на чуждестранни граждани в България са с цел почивка или екскурзия - 47% от всички пътувания, което прави техния размер зависим едновременно от епидемичната обстановка в страната, от условията, при които могат да бъдат извършвани организирани посещения, както и от финансовото състояние и ограниченията пред домакинствата в основните търговски партньори на България. От гледна точка на структурата пряко засегнат от предприетите ограничителни

мерки в страната е вносът на услуги, свързани с пътувания и пътнически транспорт, чийто размер възлиза на около 34% от общия внос на услуги, или на 3.2% от БВП през 2019 г.

Таблица 2



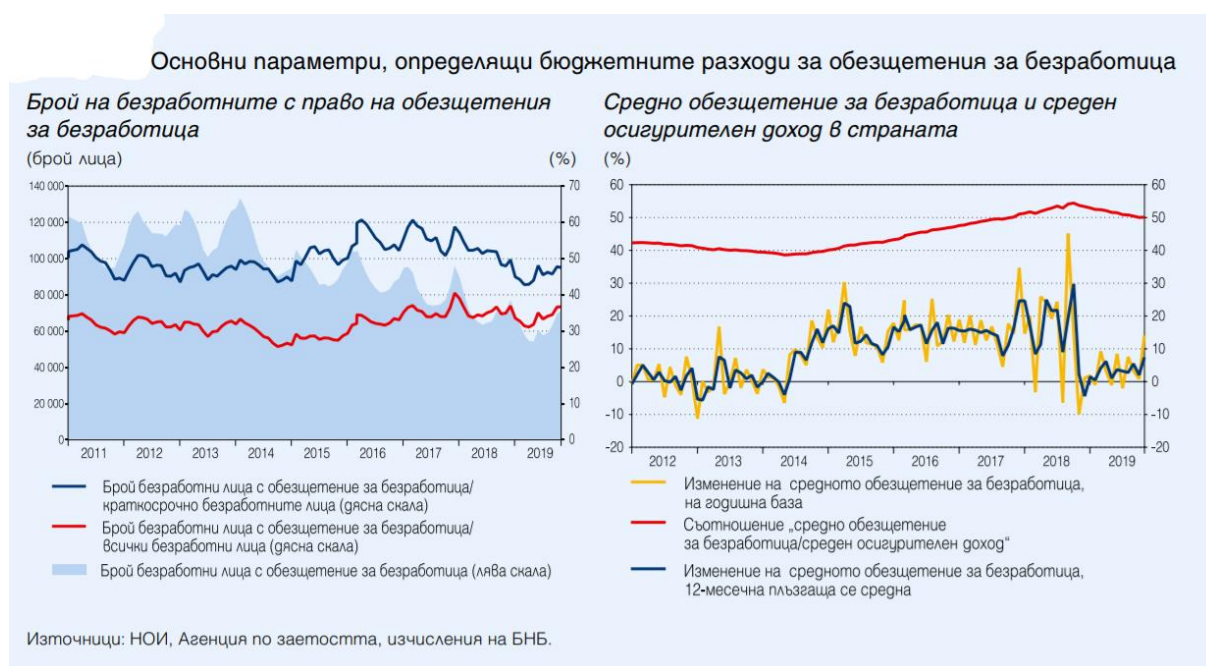
Външнотърговските потоци на България като цяло можем да очакваме влошаване на салдото по търговията със стоки и услуги, което ще има отрицателен ефект върху икономическата активност в страната. Влияние за това ще оказва както експортно ориентираният характер на индустриалния сектор в страната, така и фактът, че България е нетен износител на туристически услуги.

Публичните финанси и кризата с COVID-19

След въвеждането на извънредното положение на 13 март 2020 г. неблагоприятен ефект върху публичните финанси се реализира по линия на повишение на лихвените разходи на правителството при сценарий на по-трайно запазване на тенденцията към повишение на доходността на ДЦК на България, произтичаща от засилената колебливост на финансовите пазари и бягство на инвеститорите към така наречените „безрискови ценни книжа“, емитирани от страни с най-висок кредитен рейтинг. Такъв ефект върху публичните финанси би възникнал при необходимост от издаване на нов дълг за рефинансиране на дълг на правителството с настъпил падеж, за финансиране на бюджетния дефицит или за изграждане на фискални буфери. Негативно влияние върху приходната страна на бюджета очаквано понижение на заетостта, доходите, потреблението на домакинствата, инвестициите и влошаването на финансовото състояние на фирмите и самоосигуряващите се лица. В резултат на потиснатата икономическа активност се очаква намаление на приходите от всички категории данъци. Последната налична оценка на дългосрочната еластичност на данъчните приходи в България от 2014 г. предполага близка до единица еластичност както на преките, така и на косвените данъци,

и по-ниска от единица еластичност единствено по отношение на изменението на социално-осигурителните вноски спрямо нарастването на средните доходи от труд.

Увеличаването на бюджетните разходи за обезщетения за безработица зависи от обхвата на осигурените лица във фонд „безработица“, както и от размера на средното обезщетение за безработица. Средно за 2019 г. обезщетения за безработица са получавали 62.9 хиляди лица, които представляват 45.7% от краткосрочно безработните и 33.9% от всички безработни. До края на 2018 г. се наблюдава постепенно увеличение на средното обезщетение за безработица, съотнесено към средния осигурителен доход, като тази тенденция е преустановена през 2019 г., когато това съотношение възлиза на 50.1%.



Фигура 6

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Българска народна банка, 2020, Издание „Икономически преглед“, Брой 1/2020 г.
- [2] Министерство на финансите, 2020, Дирекция "Икономическа и финансова политика", Българската икономика – месечен обзор.
- [3] <https://www.economic.bg/bg/news/12/darzhavata-dava-zayavka-za-nov-fokus-na-balgarskata-ikonomika.html>
- [4] <https://www.investor.bg/bloomberg-tv/461/a/ikonomist-bylgariia-moje-da-izpolzva-poveche-dylg-za-po-visok-rastej-308518/>
- [5] <https://www.investor.bg/sviat/6/a/prognoza-nad-20-shte-e-rystyt-na-falitite-v-bylgariia-zaradi-koronakrizata-308467/>

ON SOME APPLICATIONS OF COUPLED FIXED (OR BEST PROXIMITY) POINTS BOYAN G. ZLATANOV.....	3
A NOTE ON THE USE OF FUZZY LOGIC IN THE EVALUATION OF STUDENTS' TEST RESULTS VANYA A. IVANOVA, BOYAN G. ZLATANOV.....	21
THE INVERSE WEIERSTRASS ITERATIVE METHOD AS A PROJECTION METHOD FOR SOLVING EIGENVALUE PROBLEM GYURHAN H. NEDZHIBOV	27
NEW FORMULAS FOR THREE-POINT BOUNDS ON THE EFFECTIVE CONDUCTIVITY OF MULTI-PHASE SYMMETRIC CELL MATERIALS KRASIMIR D. TSVYATKOV	35
ON THE ORBITS OF ONE SUBGROUP OF THE MÖBIUS GROUP IN R^3 RADOSTINA P. ENCHEVA.....	43
RELATIONS BETWEEN THREE TRANSFORMATIONS IN THE PLANE OF AN ARBITRARY QUADRILATERAL VESELIN N. NENKOV, YORDAN N. IVANOV, STANISLAV T. STEFANOV, HAIM M. HAIMOV.....	49
THERMODYNAMIC MODELS FOR SOLUTION BEHAVIOR AND SOLID-LIQUID EQUILIBRIUM IN RUBIDIUM BINARY SYSTEMS FROM LOW TO VERY HIGH CONCENTRATION AT 25°C STANISLAV A. DONCHEV, TSVETAN V. TSENOV, CHRISTOMIR I. CHRISTOV.....	57
SOFTWARE APPLICATION FOR DIAGNOSTICS AND REPORTING OF TECHNICAL CONDITION OF MACHINES FROM HEAVY INDUSTRY KRASIMIR M. KORDOV, ZEFER SERAT.....	73
PATIENTS INFORMATION SOFTWARE DESIGNED FOR MEDICAL SPECIALISTS - MODULE TWO MIHAELA D. TODOROVA-KUTSAROVA, ALEKSANDAR S. KUTSAROV AND KRASIMIR M. KORDOV.....	81
BUILDING A VIRTUAL MODEL OF PROTECTED INFRASTRUCTURE MARGARITA C. NIKOLOVA, TEODORA T. STOYANOVA, STANIMIR K. ZHELEZOV, VIKTORIYA R. YANAKIEVA.....	87
AN APPROACH FOR BUILDING SYMMETRIC CRYPTOGRAPHIC ALGORITHMS FOR VIDEO ENCRYPTION IN MATLAB SOFTWARE GEORGI G. DIMITROV.....	105
ABOUT THE PROJECT WORK: "EDUCATION FOR TOMORROW" SVETLA D. MILEVA, HRISTO I. PARASKEVOV.....	111
TRANSPOSITION ISSUES IN DIGITAL LEARNING PROCESS VALENTIN T. ATANASOV.....	117
A VIEW OF THE MATHEMATICAL LITERACY OF THE BULGARIAN STUDENTS ACCORDING TO THE INTERNATIONAL ASSESSMENT ANTOANETA K. KOVACHEVA.....	125
SPECIFICS OF INDIVIDUAL INDEPENDENT STUDENT WORK, CONSIDERED AS A FORM OF TRAINING IN HIGHER EDUCATION LILYANA M. KARAKASHEVA.....	133
CONSTRUCTIVE APPROACHES IN MATHEMATICS EDUCATION KRASIMIR V. HARIZANOV, SEVINCH A. HASHIMOVA.....	141
CLOUDY TECHNOLOGIES IN MATHEMATICS AND INFORMATION EDUCATION KRASIMIR V. HARIZANOV, PAVEL V. PETROV.....	149
CONTINUING PROFESSIONAL EDUCATION - STRATEGIES, OPPORTUNITIES AND REGULATORY GALINA R. PETROVA.....	157
ROLE OF COOPERATIVE STATISTICS FOR RAISING AWARENESS ABOUT THE COOPERATIVE BUSINESS MODEL SLAVENA G. STOYANOVA.....	163
INBOUND MARKETING FOR CUSTOMER RELATIONSHIP RALITSA V. YANEVA.....	171

EFFECTS OF THE CHANGE OF THE STATE BUDJET OF THE REPUBLIC OF BULGARIA FOR 2020, AS A RESULT OF THE COVID 19 PANDEMIC	
DENITSA P. ZAGORCHEVA-KOYCHEVA.....	181
THE GOVERNMENT DEBT MANAGEMENT STRATEGY FOR THE PERIOD 2019-2021	
ANIFE A. SALIEVA.....	189
RISKS TO THE BULGARIAN ECONOMY - GEOPOLITICAL, ECONOMIC, FINANCIAL	
VIOLETA N. LUKOVA.....	199