РАЗДЕЛ 3. МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.5281/zenodo.4444593
УДК 511.52

РЕШЕНИЕ КЛАССА ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ ВИДА: $X^2+Y^2=Z^n$

Р.В. Романенко,
инженер,
РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина
В.А. Павлов,
к.ф.-м.н., доц.,
МАБИУ,
г. Москва

Аннотация: В данной статье получено полное множество решений класса диофантовых уравнений вида: $x^2 + y^2 = z^n$. Рассматриваются неожиданные результаты решения классов диофантовых уравнений с применением простейших свойств комплексных чисел. Для понимания предлагаемого материала достаточно уровня знаний базового курса технического вуза и некоторого представления о формировании новых числовых систем. Все результаты легко проверяемы, представлены таблицы с примерами. Полнота множества решений доказывается совершенно новым способом.

Ключевые слова: диофантовы уравнения, комплексные числа

SOLUTION OF THE CLASS OF DIOPHANTE EQUATIONS OF THE FORM: $X^2 + Y^2 = Z^n$

R.V. Romanenko,
engineer,
Russian State University of Oil and Gas THEM. Gubkin
V.A. Pavlov,
Ph.D., Assoc.,
MABIU,
Moscow

Abstract: In this article, a complete set of solutions for the class of Diophantine equations of the form: $x^2 + y^2 = z^n$ is obtained. Unexpected results of solving classes of Diophantine equations using the simplest properties of complex numbers are considered. To understand the proposed material, the level of knowledge of the basic course of a technical university and some idea of the formation of new numerical systems are sufficient. All results are easily verifiable, tables with examples are presented. The completeness of the set of solutions is proved in a completely new way.

Key words: Diophantine equations, complex numbers

Введение. Изучением вопросов решения уравнений вида:

$$P(a_1,\dots,an,x_1,\dots,xm)=0, \qquad (1)$$

где P(…) является полиномом с целыми (или рациональными) коэффициентами ai в целых числах xi, занимались еще античные ученые. И название этого класса уравнений дано в честь античного математика Диофанта Александрийского [1-7]. Этими уравнениями интересовались выдающиеся математики всего мира всех времен. Многие важные результаты были получены в ранние века Леонардом Фибоначчи (13 век), Франсуа Виетом (17 век), индийским математиком Брахмагуптой (7 век) и т.д.

Проблема решена полностью для уравнений с одним неизвестным или уравнений второй степени с двумя неизвестными.

Всем хорошо известна Великая теорема Ферма:

$$x^n+y^n=z^n$$

Для n=2 решения были предложены еще Пифагором, а согласно предположению Ферма, уравнение неразрешимо в целых числах при n≥3. Ряд гипотез по множеству решений уравнений подобного класса, например:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i^n = a_n^n, n > 2\,,$$

который предполагал отсутствие решений был, опровергнут: в 20 веке были сделаны расчеты на современных вычислительных мощностях, предложенными примерами для n=4 и n=5.

Один из предлагаемых подходов к решению проблемы был основан на рассмотрении так называемых «диофантовых множеств» [1].

Эти множества представляют собой упорядоченные наборы целых чисел $(a,\dots,a_n)$, значения которых позволяют найти решение уравнения (1).

На основании этого подхода была поставлена проблема выдающимся математиком Гильбертом на знаменитом заседании математического общества в 1900 году, имеющая название «Десятая проблема Гильберта».

Предлагалось найти алгоритмическое решение диофантовых уравнений общего вида.

В 1970 году молодой, в то время советский математик Ю. Матиясевич доказал алгоритмическую неразрешимость поставленной проблемы [2].

В предлагаемой работе рассматриваются неожиданные результаты решения классов диофантовых уравнений с применением простейших свойств комплексных чисел, а также развитие числовых систем, аналогичных гиперкомплексным числам и дающих решение в совсем неожиданной форме.

Для понимания предлагаемого материала достаточно уровня знаний базового курса технического вуза и некоторого представления о формировании новых числовых систем.

Некоторые вспомогательные утверждения хорошо известны, но для полноты изложения доказываются при их использовании.

В конце работы приведена таблица решений рассматриваемых уравнений, которая является демонстрацией эффективности предлагаемого подхода.

Решение уравнения $x^2 + y^2 = z^n$ при n=2 при помощи комплексных чисел.

Уравнение:

$$x^2+y^2=z^n, \qquad (1)$$

где $x,y,z\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $xyz\neq 0$, НОД(x,y,z)=1при n=2 принимает вид$x^2+y^2=z^2$. Его решение было получено еще Пифагором [1].

$$(\pm(a^2-b^2))^2+(\pm 2ab)^2=(\pm(a^2+b^2))^2,$$

где $a, b \in \mathbb{Z}$.

Такого же результата можно добиться, воспользовавшись свойствами комплексного числа.

Лемма. Для $a,b\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ верно тождество:

$$|(a+bi)^n|^2 =|a+bi|^{2n}. \qquad (2)$$

Доказательство. Действительно, комплексное число можно представить в виде $a+bi=r(\cos\varphi +i\sin\varphi)$.

По формуле Муавра [1]:

$$(a+bi)^n=r^n(\cos n\varphi +i\sin n\varphi),$$

$$|(a+bi)^n|^2 =|r^n(\cos n\varphi +i \sin n\varphi)|^2 =r^{2n},$$

$$|a+bi|^{2n}=|r(\cos \varphi +i \sin \varphi)|^{2n}=r^{2n},$$

$$r^{2n}=r^{2n}.$$

Возведем в квадрат комплексное число $a+bi$, где $a,b\in\mathbb{Z}$,НОД(a,b)=1, $2|ab$:

$$(a+bi)^2=(a^2-b^2)+(2ab)i.$$

Воспользуемся (2) при n=2:

$$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2.$$

Здесь реальная часть $\Re((a+bi)^2)=a^2-b^2$,
мнимая часть $\Im((a+bi)^2)=2ab$,

$$|a+bi|^2=a^2+b^2.$$

Множество решений уравнения (1) зависит от попарной взаимной простоты x,y,z, в случае выполнения этого требования справедливо утверждение 1, в случае отсутствия этого требования справедливо утверждение 2.

Утверждение 1. Множеством решений уравнения (1) является:

$$x=\pm\Re((a+bi)^n),\ y=\pm\Im((a+bi)^n),\ z=(\pm1)^{n+1}(a^2+b^2), \qquad (3)$$

где $a, b\in\mathbb{Z}$, $ab\neq0$, НОД(a,b)=1, 2|ab (2 делитab, ab – четное).

Каждое решение утверждения 1 удовлетворяет уравнению (1) при любом $n>2$.

Замечание. Используемый подход позволяет находить решения не только в целых числах, но и в комплексных числах с целыми реальной и мнимой частями, поэтому доказательство именно в целых, а не в натуральных числах, что в дальнейшем позволит проще понять последующие доказательства (в комплексных числах есть еще комплексно сопряженные, а не только ± в целых), доказательство.

Воспользуемся (2):

$$|(a+bi)^n|^2=|a+bi|^{2n},$$

$$(\Re((a+bi)^n))^2+(\Im((a+bi)^n))^2=((\pm1)^{n+1}(a^2+b^2))^n.$$

Нетрудно заметить, что если n – нечетно, то z только положительное.

Всякое решение (3) удовлетворяет (1), тем более для $a,b\in\mathbb{Z}$, $ab\neq0$, НОД(a,b)=1, 2|ab.

Примеры.

$$n=3,\ a=1, b=2,$$

$$x=\pm\Re((a+bi)^3),\ y=\pm\Im((a+bi)^3),\ z=a^2+b^2,$$

$$x=a^3-3ab^2=1^3-3\times1\times2^2=-11,\ y=3a^2b-b^3=3\times2-8=-2,\ z=1+4=5,$$

$$(\pm11)^2+(\pm2)^2=5^3,$$

$$n=4,\ a=2,\ b=1,$$

$$x=\pm\Re((a+bi)^4),\ y=\pm\Im((a+bi)^4),\ z=\pm(a^2+b^2),$$

$$x=\pm(a^4-6a^2b^2+b^4)=\pm(16-6\times4+1)=\pm7,\ y=4a^3b-4ab^3=4\times8-8=\pm24, z=\pm(4+1)=\pm5,$$

$$(\pm7)^2+(\pm24)^2=(\pm5)^4.$$

Множество решений является полным.

Доказательство. Для этого рассмотрим произвольное комплексное число $a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $a,b\in\mathbb{Z}$, $ab\neq0$, НОД(a,b)=1, r^2 также является целым числом, так как $r^2=a^2+b^2$.

Любое такое комплексное число является решением уравнения (1) при n=1. Действительно, x=a, y=b, $z=a^2+b^2$. Нетрудно заметить, что это полное множество решений.

Точнее, любому решению уравнения (1) при n=1 соответствует комплексное число a+bi, r^2 можно представить в виде произведения простых сомножителей, причем единственным образом.

Все простые сомножители делятся на три группы:

$$p=2=1^2+1^2,$$

$$p=4k+1,\ k\in\mathbb{N},\ p \text{ – простое число.}$$

В соответствии с теоремой Ферма-Эйлера «Всякое простое число вида 4k+1, где k – натуральное число, представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел, причём единственным с точностью до перестановки слагаемых способом» [1]:

$$p=4k+3,\ k\in\mathbb{N},\ p \text{ – простое число.}$$

В виде суммы двух квадратов не представимы не только простые числа 4k+3, но и вообще все такие целые числа.

Лемма. Всякое представимое в виде суммы квадратов двух целых чисел нечетное число при делении на 4 дает остаток 1, а не 3.

Доказательство. Из двух квадратов, сумма которых нечетна, обязательно один четен, а другой нечетен. Квадрат четного числа нацело делится на 4, а квадрат нечетного числа при делении на 4 дает остаток 1.

Теперь из всех таких чисел r^2 нужно выбрать только те, которые являются полными степенями n. Для начала нам потребуются две леммы.

Лемма. Для $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ верно тождество:

$$|(a+bi)|^2|(c+di)|^2=|(a+bi)(c+di)|^2. \qquad (4)$$

Доказательство. Действительно, комплексное число можно представить в виде:

$$a+bi=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\ c+di=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

$$r_1^2r_2^2=|r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))|^2=(r_1r_2)^2.$$

Теперь докажем тождество Брахмагупты:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2,$$

при помощи комплексных чисел [1]:

Лемма. Для $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ верно тождество Брахмагупты:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

Доказательство.

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i,$$

$$(a-bi)(c+di)=ac+bd+(ad-bc)i,$$

$$(a+bi)(c-di)=ac+bd+(-ad+bc)i,$$

$$(a-bi)(c-di)=ac-bd+(-ad-bc)i.$$

Из (4) следует:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

Следствие. Два варианта представления произведения двух сумм двух квадратов в виде суммы двух квадратов обусловлены представлением суммы квадратов в виде квадрата модуля комплексного числа и квадрата модуля его комплексно-сопряженного. Причем с точностью до знака имеет значение только разные знаки у мнимых частей или одинаковые.

Теперь рассмотрим $(4k+3)^2=(4k+3)^2 + 0^2$. По тождеству Брахмагупты два варианта представления может быть только тогда, когда$4k+3$ представимо в виде суммы двух квадратов, а это невозможно, следовательно, квадрат простого числа вида $4k+3$ представим в виде суммы двух квадратов единственным образом.

Таким образом, числоr^2 представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда любое простое число вида $4k+3$ входит в его разложение в четной степени.

Значит, под r^2 мы всегда можем понимать комплексное число:

$$h=(a_1\pm b_1 i)(a_2+b_2 i)=a\pm bi, \quad (5)$$

где $a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$, $a_1 a b a_2 b_2 \neq 0$, НОД$(a,b)=1$, от которого взят квадрат модуля.

Наример: $r^2=5$ при$a_1=1$, $b_1=0$, $a_2=1$, $b_2=2$, $a=1$, $b=2$.

Или $r^2=34$ при $a_1=1$, $b_1=0$, $a_2=3$, $b_2=5$, $a=3$, $b=5$.

А $r^2=637=7^2\times13$ при $a_1=7$, $b_1=0$, $a_2=2$, $b_2=3$, $a=14$, $b=21$ не входит в h, потому что НОД$(14,21)=7\neq1$.

Разберем для примера $r^2=325=5^2\times13$, h в этом случае будет:

$$[(1\pm2i)(1\pm2i)](2\pm3i)=(1\pm2i)[(1\pm2i)(2\pm3i)],$$

Всего 16 вариантов:

$$[(1+2i)(1+2i)](2+3i)=(-3+4i)(2+3i)=-18-i,$$
$$[(1+2i)(1+2i)](2-3i)=(-3+4i)(2-3i)=6+17i,$$
$$[(1+2i)(1-2i)](2+3i)=5(2+3i)=10+15i,$$
$$[(1+2i)(1-2i)](2-3i)=5(2-3i)=10-15i,$$
$$[(1-2i)(1+2i)](2+3i)=5(2+3i)=10+15i,$$
$$[(1-2i)(1+2i)](2-3i)=5(2-3i)=10-15i,$$
$$[(1-2i)(1-2i)](2+3i)=(-3-4i)(2+3i)=6-17i,$$
$$[(1-2i)(1-2i)](2-3i)=(-3-4i)(2-3i)=-18+i,$$
$$(1+2i)[(1+2i)(2+3i)]=(1+2i)(-4+7i)=-18-i,$$
$$(1+2i)[(1+2i)(2-3i)]=(1+2i)(8+i)=6+17i,$$
$$(1+2i)[(1-2i)(2+3i)]=(1+2i)(8-i)=10+15i,$$
$$(1+2i)[(1-2i)(2-3i)]=(1+2i)(-4-7i)=10-15i,$$
$$(1-2i)[(1+2i)(2+3i)]=(1-2i)(-4+7i)=10+15i,$$
$$(1-2i)[(1+2i)(2-3i)]=(1-2i)(8+i)=10-15i,$$
$$(1-2i)[(1-2i)(2+3i)]=(1-2i)(8-i)=6-17i,$$
$$(1-2i)[(1-2i)(2-3i)]=(1-2i)(-4-7i)=-18+i.$$

Нетрудно заметить, что решением уравнения (1) при $n=1$ являются случаи 1-2,7-10,15,16, а случаи 3-6,11-14 не удовлетворяют условию НОД$(x,y,z)=1$ (соответственно НОД$(a,b)=1$) по одной простой причине: в произведении «простых» сомножителей (комплексные сомножители, у которых квадрат модуля – простое число) встречаются комплексно сопряженные числа. Поэтому их лучше собрать в $(a_1\pm b_1 i)$ и исключить на этапе «сборки» решения. Итого уравнение (1) при z=325 и n=1 имеет 8 решений: $(\pm1)^2+(\pm18)^2=(\pm6)^2+(\pm17)^2$. Других решений нет.

Теперь из всех r^2 выберем только те, которые являются n-ой степенью целого числа s:

$$r^2=s^n.$$

Для примера разберем $r^2=614125=5^3\times13^3$, тогда:

$$h=(1\pm2i)(1\pm2i)(1\pm2i)(2\pm3i)(2\pm3i)(2\pm3i).$$

Но мы уже знаем, что комплексно-сопряженных чисел в разложении h быть не должно.

Значит, остается 4 варианта:

$$(1+2i)^3(2+3i)^3=524-7i,$$
$$(1+2i)^3(2-3i)^3=488+191i,$$
$$(1-2i)^3(2+3i)^3=488-191i,$$
$$(1-2i)^3(2-3i)^3=524+7i.$$

Значит, $h=(a+bi)^n$.

Строго математически это доказывается так:

Пусть $k\in\mathbb{Z}$, $k=\min(k,n-k)$, $k\geq0$, тогда из (5) и (4):

$$r^2=s^n=|(a\pm bi)\cdot(a\pm bi)\cdot\ldots\cdot(a\pm bi)|^2=|(a-bi)^k\cdot(a+bi)^{n-k}|^2=(a^2+b^2)^k|(a+bi)^{n-2k}|^2.$$

Поскольку НОД $(\Re(r^{2n}), \Im(r^{2n}))=(a^2+b^2)^k=1$, значит, k=0.

Или без ограничения общности:

$$r^2=s^n=|(a_1\pm b_1i)\cdot(a_1\pm b_1i)\cdot\ldots\cdot(a_1\pm b_1i)\cdot(a_2+b_2i)^n|^2=(a_1{}^2+b_1{}^2)^k|(a_1+b_1i)^{n-2k}(a_2+b_2i)^n|^2.$$

Аналогично, k=0.

Итого, $r^2=s^n=|(a+bi)^n|^2=(a^2+b^2)^n=\Re((a+bi)^n)^2+\Im((a+bi)^n)^2$.

Теперь добавим условие $2|ab$ для n>1. Действительно, допустим, a и b оба нечетны и НОД (x,y,z)=1, тогда для

1) n=2, $\Re((a+bi)^2)=a^2-b^2$ – четное, $\Im((a+bi)^2)=2ab$ – четное;
2) n=3, $\Re((a+bi)^3)=a^3-3ab^2$ – четное, $\Im((a+bi)^3)=3a^2b-b^3$ – четное;
3) n=4, $\Re((a+bi)^4)=a^4-6a^2b^2+b^4$ – четное, $\Im((a+bi)^4)=4a^3b-4ab^3$ – четное;
4) n=5, $\Re((a+bi)^5)=a^5-10a^3b^2+5ab^4$- четное, $\Im((a+bi)^5)=5a^4b-10a^2b^3+b^5$ – четное;
5) n=6, $\Re((a+bi)^5)=a^6-15a^4b^2+15a^2b^4-b^6$ – четное, $\Im((a+bi)^5)=6a^5b-20a^3b^3+6ab^5$ – четное, и т.д.

Вообще, тогда $h=(1\pm i)^n(a_2+b_2i)$.

При $n=2k(1\pm i)^{2k}=(\pm2i)^k$ – четная или мнимая или реальная часть, другая равна нулю.

При $n=2k+1$ $(1\pm i)^{2k+1}=(1\pm i)(\pm2i)^k$ – четная и мнимая, и реальная части.

Значит, НОД$(x,y,z)\geq2\neq1$.

Мы пришли к противоречию. Утверждение 1 доказано полностью (табл. 1).

Таблица 1 – Примеры решений уравнения (1), полученных на основе утверждения 1

n	**a**	**b**	**x=±ℜ((a+bi)ⁿ)**	**y=±ℑ((a+bi)ⁿ)**	**z=(±1)ⁿ⁺¹(a²+b²)**
3	2	1	±2	±11	5
3	5	8	±835	±88	89
3	11	2	±1199	±718	125
3	7	2	±259	±286	53
3	27	31	±58158	±38006	1690
3	11	10	±1969	±2630	221
3	5	12	±2035	±828	169
3	3	10	±873	±730	109
3	89	54	±73603	±1125738	10837
4	1	2	±7	±24	±5
4	5	2	±41	±840	±29
4	3	2	±119	±120	±13
4	9	8	±20447	±4896	±145
4	7	4	±2047	±3696	±65

Полное множество решений, включая попарно не взаимно простые x,y,z.

В предыдущих рассуждениях предполагалась попарная взаимная простота x,y,z. Если это условие исключить, то мы получим (табл. 2).

Утверждение 2. Полным множеством решений уравнения:

$$x^2+y^2=z^{2n+1},$$

где $x,y,z \in \mathbb{Z}$,$n \in \mathbb{N}$, является:

$$z=\prod_{k=0}^{n}(a_k^2+b_k^2),$$

$$x=\pm\Re\left(\prod_{k=0}^{n}(a_k+b_k i)^{2n+1-2k}\right)\prod_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)^k, \qquad (6)$$

$$y=\pm\Im\left(\prod_{k=0}^{n}(a_k+b_k i)^{2n+1-2k}\right)\prod_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)^k,$$

где $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$.

Полным множеством решений уравнения:

$$x^2+y^2=z^{2n},$$

где x,y,z∈ℤ ,n∈ℕ, является:

$$z = \pm m \prod_{k=0}^{n-1} (a_k^2 + b_k^2),$$
$$x = \pm m^n \Re \left(\prod_{k=0}^{n-1} (a_k + b_k i)^{2n-2k} \right) \prod_{k=1}^{n-1} (a_k^2 + b_k^2)^k, \qquad (7)$$
$$y = \pm m^n \Im \left(\prod_{k=0}^{n-1} (a_k + b_k i)^{2n-2k} \right) \prod_{k=1}^{n-1} (a_k^2 + b_k^2)^k,$$

где $a_k, b_k, m \in \mathbb{Z}$.

Доказательство.

Под r² мы всегда можем понимать комплексное число

$$h = \prod_{k=1}^{t} (a_k \pm b_k i)\,,$$

где ak, bk, t∈ℤ, t>0, ak² +bk² – простое или 0 или 1.

Обозначим 2n или 2n+1 , какu.

Здесь t=u×s – количество простых сомножителей, ± – независимые. Поскольку квадрат модуля h всегда является u – ой степенью, можно переписать:

$$h = \prod_{k=1}^{s} \prod_{j=1}^{u} (a_k \pm b_k i)\,,$$

где ak, bk, s,u∈ℤ, s>0,u≥2,ak² +bk² – простое или 0 или 1, или:

$$h = \prod_{k=1}^{s} (a_k^2 + b_k^2)^{j_k} (a_k + b_k i)^{u-2j_k}\,,$$

где ak, bk, s,u∈ℤ, s>0,u≥2,ak² +bk² – простое или 0 или 1, $0 \le j_k \le \left[\frac{u-1}{2}\right]$. Поскольку всех вариантов jk – ровно от 0 до $\left[\frac{u-1}{2}\right]$, то:

$$h = \prod_{k=1}^{\left[\frac{u-1}{2}\right]} (a_k^2 + b_k^2)^k \prod_{k=0}^{\left[\frac{u-1}{2}\right]} (a_k + b_k i)^{u-2k}\,,$$

где ak, bk, k, u∈ℤ, u≥2,$0 \le k \le \left[\frac{u-1}{2}\right]$.

Откуда, принимая во внимание, что при четных u есть тривиальное решение (общий множитель не вида a²+b²), получаем (6) и (7).

Утверждение 2 доказано.

Таблица 2 – Примеры решений (6), (7), полученных на основе утверждения 2

n	a_0	b_0	a_1	b_1	m	x	y	z
3	2	3	1	2		±320	±415	65
3	3	4	2	3		±4758	±3419	325
3	2	3	3	4		±4350	±3925	325
3	1	2	2	3		±208	±481	65
3	10	3	3	2		±5772	±53027	1417
3	1	0	10	3		±1090	±327	109
3	10	3	1	0		±730	±873	109
3	1	1	2	1		±30	±10	10
3	11	2	3	2		±28093	±59176	1625
4	1	2	2	3	1	±4199	±468	±65
4	1	2	1	0	3	±63	±216	±15
4	2	3	1	2	1	±4185	±580	±65
4	2	3	2	1	1	±615	±4180	±65

Главный результат данной работы состоит в том, что все решения уравнений $x^2+y^2=z^n$ могут быть получены путем выбора произвольных пар ak, bkimпо формулам (6), (7). Все множество решений формируется такими и только такими соотношениями.

Данное исследование будет продолжено для уравнений$x^2+y^2=z^n$ в поле комплексных чисел с целочисленными координатами.

Список литературы

[1] Кожаев Ю.П. Греческий математик Диофант и диофантовы уравнения. Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции «Культура, общество, современность». / Ю.П. Кожаев, О.Ю. Новицкая. – Ставрополь: Агрус, 2015. 150-154 с.

[2] Абакумова С.И. Диофантовы уравнения. Фундаментальные исследования в современном мире. / С.И. Абакумова, А.Н. Гусева. – Санкт-Петербург: «Стратегия будущего», 2014. Т.1. № 6. 133-137 с.

[3] Матиясевич Ю.В. Десятая проблема Гильберта. / Ю.В. Матиясевич. – М.: Наука, 1993. 42-44 с.

[4] Wikipedia. Пифагорова тройка [Электронный ресурс]. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Пифагорова_тройка. (дата обращения: 10.06.2020).

[5] Wikipedia. Формула Муавра [Электронный ресурс]. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Формула_Муавра. (дата обращения: 10.06.2020).
[6] Малый мехмат МГУ. Доказательство Дона Цагира [Электронный ресурс]. – URL: http://mmmf.msu.ru/ vecher/lect/zagir_!.pdf. (дата обращения: 10.06.2020).
[7] Wikipedia. Брахмагупта [Электронный ресурс]. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Брахмагупта#Тождество_Брахмагупты. (дата обращения: 10.06.2020).

Bibliography (Transliterated)

[1] Yu.P. Kozhaev Greek mathematician Diophantus and Diophantine equations. Materials of the IV All-Russian scientific-practical conference "Culture, society, modernity". / Yu.P. Kozhaev, O. Yu. Novitskaya. - Stavropol: Agrus, 2015.150-154 p.
[2] S.I. Abakumova Diophantine equations. Fundamental research in the modern world. / S.I. Abakumova, A.N. Gusev. - St. Petersburg: "Strategy of the future", 2014. V.1. No. 6. 133-137 p.
[3] Matiyasevich Yu.V. Hilbert's tenth problem. / Yu.V. Matiyasevich. - M .: Nauka, 1993.42-44 p.
[4] Wikipedia. Pythagorova troika [Electronic resource]. - URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Pythagorova_Troyka. (date of access: 10.06.2020).
[5] Wikipedia. Moivre's formula [Electronic resource]. - URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Moivr_Formula. (date of access: 10.06.2020).
[6] Small Mechanics and Mathematics of Moscow State University. Don Tsagir's proof [Electronic resource]. - URL: http://mmmf.msu.ru/ vecher / lect / zagir _ !. pdf. (date of access: 10.06.2020).
[7] Wikipedia. Brahmagupta [Electronic resource]. - URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta # Brahmagupta_ Identity. (date of access: 10.06.2020).

Поступила в редакцию 30.11.2020
Принята к публикации 5.12.2020

Для цитирования:

Романенко Р.В., Павлов В.А. Решение класса диофантовых уравнений вида: $X^2+Y^2=Z^n$// Инновационные научные исследования : сетевой журнал. 2020. №12-1(2). С. 25-35. URL: https://ip-journal.ru/