ISSN 2757-5543 GÜFFD 1. Cilt (1-2): 132-143 (2020) DOI: 10.5281/zenodo.4398933

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi
http://sci-fac-j.gazi.edu.tr/

İnterval Ağırlıklı Grafların Zagreb İndeksi Üzerinde Graf İşlemleri

Semiha Başdaş Nurkahlı[1*], Şerife Büyükköse[2]
[1] *Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye*
[2] *Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye*

Öne Çıkanlar

- Bu makalede interval ağırlıklı grafların 1. ve 2. Zagreb indeksi üzerinde durulmuştur.
- Bazı graf işlemleri altında söz konusu indeklerin davranışları incelenmiştir.
- İnterval aritmetiğine dayanan bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Makale Bilgileri

Geliş: 03/11/2020
Kabul: 17/12/2020

Anahtar Kelimeler
Zagreb indeks,
Ağırlıklı Graf,
İnterval Ağırlıklı Graf

Özet

Bu çalışmada, ağırlıklı graflar üzerinde 1. ve 2. Zagreb indeksi tanımlanmıştır. Daha sonra, interval ağırlıklı graflar üzerinde 1. ve 2. Zagreb indeksi tanımlanmıştır. Bu tanımlar kullanılarak, Zagreb indekslerin bazı graf işlemleri altında davranışları incelenmiştir.

Graph Operations on the Zagreb Index of Interval Weighted Graphs

Highlights

- This paper focuses on the first-second Zagreb indices of interval weighted graphs.
- Their behaviors are investigated under some graph operations.
- Some results based on interval arithmetic have been obtained.

Article Info

Received: 03/11/2020
Accepted: 17/12/2020

Keywords
Zagreb index,
Weighted graph,
Interval weighted graph

Abstract

In this study, the first-second Zagreb indices are defined on weighted graphs. Then, the first-second Zagreb indices are defined on interval weighted graphs. Their behaviors are investigated under some graph operations by using these definitions.

Araştırma Makalesi

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Semiha Başdaş Nurkahlı, semiha.basdas@gazi.edu.tr

1. GİRİŞ

Graf teori, kimyacılara topolojik indeks gibi çeşitli faydalı araçlar sağlamıştır. Bir topolojik indeks kimyada uygulanabilen bir graf değişmezidir. Moleküler yapı tanımlayıcıları (topolojik indeksler), kimyasal bileşiklerin özelliklerini tanımlamak için matematiksel kimyada kullanılır [1].

Moleküller ve moleküler bileşikler genellikle moleküler grafla modellenir. Bir moleküler graf, köşeleri bileşiğin atomlarına, kenarları kimyasal bağlara karşılık gelen graf teori terimlerinde kimyasal bir bileşiğin yapısal formülünün bir temsilidir [1].

Wiener indeks, kimyacı Harold Wiener tarafından üretilen ilk topolojik indekstir. Moleküler grafların dereceye dayandırılan bazı indeksleri vardır. Bu indeksler, Gutman ve Trinajstic tarafından 1972 yılında, birinci ve ikinci Zagreb indeksler olarak tanımlanmıştır. Bir G grafının birinci Zagreb indeksi $M_1 = M_1(G) = Z^{(1)}(G)$ ve ikinci Zagreb indeksi $M_2 = M_2(G) = Z^{(2)}(G)$ şeklinde gösterilir [2].

1. **Zagreb İndeksi:**

   G basit, bağlantılı bir graf olsun. $d(i)$, i köşesinin derecesi olmak üzere, G grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z^{(1)}(G) = \sum_{i \in V(G)} d^2\,(i)$$

   şeklinde tanımlanır [2].

2. **Zagreb İndeksi:**

   G basit, bağlantılı bir graf olsun. $d(i)$, i köşesinin derecesi olmak üzere, G grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z^{(2)}(G) = \sum_{ij \in E(G)} d\,(i)d(j)$$

   şeklinde tanımlanır [2].

Şimdi bu makalede ihtiyaç duyacağımız bazı graf işlemlerini hatırlayalım.

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ noktalar kümesi ayrık iki graf olmak üzere bu iki grafın toplamı $V_1 \cup V_2$ noktalarından ve G_1'in her bir noktasını G_2'nin her bir noktasına bağlayan kenarlardan oluşan bir graf olup, $G_1 + G_2 = (V_1 + V_2, E_1 + E_2)$ şeklinde gösterilir [3].

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki graf olmak üzere bu iki grafın çarpımı, $G_1 \times G_2$ ile gösterilir ve u_1, $v_1 \in V_1$ ve u_2, $v_2 \in V_2$ için noktalar kümesi

$$u = (u_1, u_2),\; v = (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$$

ile tanımlı olup grafın herhangi iki $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ noktalarının komşuluğu

$$u \sim v \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 & ve \quad u_2 \sim v_2 \\ u_2 = v_2 & ve \quad u_1 \sim v_1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır [4].

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki graf olmak üzere bu iki grafın birleşimi,

$$G_1 \cup G_2 = \big(V(G_1 \cup G_2), E(G_1 \cup G_2)\big)$$

ile gösterilir ve

$$V(G_1 \cup G_2) = V_1 \cup V_2$$
$$E(G_1 \cup G_2) = E_1 \cup E_2$$

şeklinde tanımlıdır [5].

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki graf olmak üzere bu iki grafın simetrik farkı,

$$G_1 \oplus G_2 = \big(V(G_1 \oplus G_2), E(G_1 \oplus G_2)\big)$$

ile gösterilir ve

$$V(G_1 \oplus G_2) = V_1 \cup V_2$$
$$E(G_1 \oplus G_2) = (E_1 \cup E_2) - (E_1 \cap E_2)$$

şeklinde tanımlıdır [6].

Şimdi de makale boyunca kullanacağımız interval kavramından bahsedelim.

$\underline{x}$ ve $\overline{x}$, $\underline{x} \leq \overline{x}$ eşitsizliğini sağlayan reel sayılar olsun. O zaman $x = [\underline{x}, \overline{x}] = \{y \in \mathbb{R}: \underline{x} \leq y \leq \overline{x}\}$ kümesine bir interval (reel aralık) denir. Tüm intervallerin kümesi $\mathbb{IR}$ olarak gösterilir. $\underline{x}$ reel sayısına $[\underline{x}, \overline{x}]$ intervalinin alt sınırı, $\overline{x}$ reel sayısına da $[\underline{x}, \overline{x}]$ intervalinin üst sınırı denir [7].

Eğer $\underline{x} = \overline{x} = \tilde{x}$ ise o zaman $x = [\tilde{x}, \tilde{x}]$ bir reel sayıdır (ya da bir dejenere aralık).

$x = [\underline{x}, \overline{x}]$ ve $y = [\underline{y}, \overline{y}]$ iki reel interval olsun. $\mathbb{IR}$ üzerinde toplama $(+)$, çıkarma $(-)$, çarpma $(\cdot)$ ve bölme $(/)$ ikili işlemleri aşağıda tanımlanmıştır [7].

- $x + y = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}]$
- $x - y = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}]$
- $x \cdot y = [min\{\underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \overline{y}, \overline{x} \cdot \underline{y}, \overline{x} \cdot \overline{y}\}, max\{\underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \overline{y}, \overline{x} \cdot \underline{y}, \overline{x} \cdot \overline{y}\}]$
- $x/y = x \cdot y'$. Burada $y' = \left[\frac{1}{\overline{y}}, \frac{1}{\underline{y}}\right]$ ve $0 \notin y$ dir.

Bir $\tilde{X}$ interval matris, elemanları interval sayılar olan bir matristir. Bir $\tilde{X}$ interval matris,

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} = (x_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

şeklinde yazılır. Burada $x = [\underline{x}_{ij}, \overline{x}_{ij}]$ ya da $\underline{X} \leq \overline{X}$ şartını sağlayan bazı $\underline{X}, \overline{X}$ için $\tilde{X} = [\underline{X}, \overline{X}]$ şeklindedir. Tüm $(m \times n)$ tipindeki interval matrislerin kümesini tanımlamak için $\mathbb{R}^{m \times n}$ kullanılır [7].

İnterval sayılarda olduğu gibi interval matrisler üzerinde de aritmetik işlemler tanımlanmıştır. Bu aritmetik işlemler aşağıdaki gibidir [7].

Eğer $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $a \in \mathbb{R}^n$ ve $\tilde{\propto} \in \mathbb{R}$ ise o zaman

- $\tilde{\propto} \tilde{X} = \left(\tilde{\propto} x_{ij}\right)_{m\times n}$; $(1 \leq i \leq m), (1 \leq j \leq n)$
- $\tilde{X} + \tilde{Y} = \left(x_{ij} + y_{ij}\right)_{m\times n}$; $(1 \leq i \leq m), (1 \leq j \leq n)$
- $\tilde{X} - \tilde{Y} = \begin{cases} \left(x_{ij} - y_{ij}\right)_{m\times n} & ;\ if\ \tilde{X} \neq \tilde{Y} \\ \tilde{0} = 0 & ;\ if\ \tilde{X} = \tilde{Y} \end{cases}$
- Eğer $\tilde{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ise o zaman

  $\tilde{X} \cdot \tilde{Y} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj}\right)_{m\times p}$; $(1 \leq i \leq m), (1 \leq j \leq p)$
- $\tilde{X} \cdot a = \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} a\right)_{m\times 1}$; $(1 \leq i \leq m)$

şeklindedir [7].

2. İNTERVAL AĞIRLIKLI GRAFLAR ÜZERİNDE ZAGREB İNDEKSİ

Biz bu makalede ağırlıklı graflar üzerinden devam edeceğimiz için öncelikle ağırlıklı graf tanımını yapalım.

Her bir kenarına ağırlık atanarak oluşturulan grafa ağırlıklı graf denir. G, köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ve kenar kümesi E olan ağırlıklı bir graf olsun. w_{ij}, ij kenarının pozitif tanımlı ağırlığıdır. Ayrıca $w_{ij} = w_{ji}$ dir. Eğer i ve j köşeleri komşu ise $i \sim j$ yazılır. i köşesinin ağırlığı $w_i = \sum_{j:j\sim i} w_{ij}$ şeklinde bulunur [3].

Tanım 2.1. $G = (V, E)$ ağırlıklı bir graf olsun. $w(i)$, i köşesinin ağırlığı olmak üzere, G grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z_w^{(1)}(G) = \sum_{i\in V(G)} w^2(i)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2. $G = (V, E)$ ağırlıklı bir graf olsun. $w(i)$, i köşesinin ağırlığı olmak üzere, G grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z_w^{(2)}(G) = \sum_{ij\in E(G)} w(i) w(j)$$

şeklindedir.

Her bir kenarına ağırlık olarak bir interval ya da bir interval matris atanarak oluşturulan grafa da interval ağırlıklı graf denir. Burada tüm kare interval matrisler aynı dereceye sahiptir.

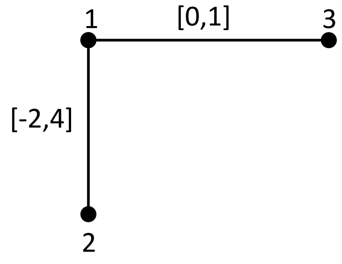
G, n köşeli bir interval ağırlıklı graf olsun. $\widetilde{w}_{ij}$, ij kenarının interval ağırlığıdır. Ayrıca $\widetilde{w}_{ij} = \widetilde{w}_{ji}$ dir. Eğer i ve j köşeleri komşu ise $i \sim j$ yazılır. i köşesinin interval ağırlığı $\widetilde{w}_i = \sum_{j:j\sim i} \widetilde{w}_{ij}$ şeklinde bulunur.

Tanım 2.3. $G = (V, E)$ interval ağırlıklı bir graf olsun. $\widetilde{w}(i)$, i köşesinin interval ağırlığı olmak üzere, G grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z_{\widetilde{w}}^{(1)}(G) = \sum_{i\in V(G)} \widetilde{w}^2(i)$$

şeklindedir.

Örnek 2.1.



Şekil 1. *İnterval ağırlıklı G grafı*

G grafı 3 noktalı interval ağırlıklı bir graftır.

$\widetilde{w}(1) = [-2,4] + [0,1] = [-2,5]$

$\widetilde{w}(2) = [-2,4]$

$\widetilde{w}(3) = [0,1]$

$$Z_{\widetilde{w}}^{(1)}(G) = \sum_{i \in V(G)} \widetilde{w}^2\,(i) = \widetilde{w}^2(1) + \widetilde{w}^2(2) + \widetilde{w}^2(3)$$

$$= ([-2,5])^2 + ([-2,4])^2 + ([0,1])^2$$

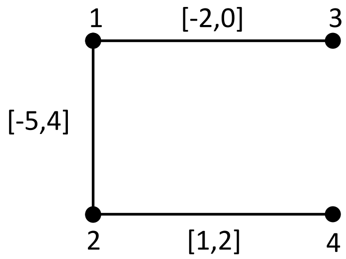
$$= [-18,42]$$

Tanım 2.4. $G = (V, E)$ interval ağırlıklı bir graf olsun. $\widetilde{w}(i)$, i köşesinin interval ağırlığı olmak üzere, G grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z_{\widetilde{w}}^{(2)}(G) = \sum_{ij \in E(G)} \widetilde{w}(i)\widetilde{w}(j)$$

şeklindedir.

Örnek 2.2.



Şekil 2. *İnterval ağırlıklı G grafı*

G grafı 4 noktalı interval ağırlıklı bir graftır.

$\widetilde{w}(1) = [-2,0] + [-5,4] = [-7,4]$

$\widetilde{w}(2) = [-5,4] + [1,2] = [-4,6]$

$\widetilde{w}(3) = [-2,0]$

$\widetilde{w}(4) = [1,2]$

$$Z_{\widetilde{w}}^{(2)}(G) = \sum_{ij\in E(G)} \widetilde{w}(i)\widetilde{w}(j)$$

$$= \widetilde{w}(1)\widetilde{w}(3) + \widetilde{w}(1)\widetilde{w}(2) + \widetilde{w}(2)\widetilde{w}(4)$$

$$= [-7,4]\,[-2,0] + [-7,4][-4,6] + [-4,6][1,2]$$

$$= [-8,14] + [-42,28] + [-8,12]$$

$$= [-58,54]$$

3. İNTERVAL AĞIRLIKLI GRAFLARIN ZAGREB İNDEKSİ ÜZERİNDE GRAF İŞLEMLERİ

Teorem 3.1. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ basit, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z^{(1)}(\,G_1 + G_2) = \sum_{i\in V_1} \left(d_i + n_{G_2}\right)^2 + \sum_{j\in V_2} \left(d_j + n_{G_1}\right)^2$$

şeklindedir. Burada, n_{G_1}ve n_{G_2} sırasıyla G_1 ve G_2 graflarının köşe sayısıdır.

Teorem 3.2. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ ağırlıklı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z_w^{(1)}(\,G_1 + G_2) = \sum_{i\in V_1} \left(w_i + \sum\nolimits_{k\in V_2} w_k\right)^2 + \sum_{j\in V_2} \left(w_j + \sum\nolimits_{t\in V_1} w_t\right)^2$$

şeklindedir. Burada w_i, i köşesinin ağırlığıdır.

Teorem 3.3. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ interval ağırlıklı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z_{\widetilde{w}}^{(1)}(\,G_1 + G_2) = \sum_{i\in V_1} \left(\widetilde{w}_i + \sum\nolimits_{k\in V_2} \widetilde{w}_k\right)^2 + \sum_{j\in V_2} \left(\widetilde{w}_j + \sum\nolimits_{t\in V_1} \widetilde{w}_t\right)^2$$

şeklindedir. Burada $\widetilde{w}_i$, i köşesinin interval ağırlığıdır.

İspat. $V = V(G_1) \cup V(G_2)$ ve $E = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(u_1, u_2): u_1 \in V(G_1), u_2 \in V(G_2)\}$ olsun. Biz sırasıyla aşağıda T_1, T_2 ile gösterilen iki toplamı elde etmek için $G_1 + G_2$ ‘nin köşe kümesini parçaladık. İlk olarak, her toplam için, $\widetilde{w}_i$ yi her i köşesinin interval ağırlığı olarak düşündük. T_1 de, $i \in V_1$, $k \in V_2$ şartlarını sağlayan tüm i, k köşe çiftlerini ele aldık. Dolayısıyla, T_1 için

$$T_1 = \sum_{i\in V_1} \left(\widetilde{w}_i + \sum\nolimits_{k\in V_2} \widetilde{w}_k\right)^2$$

elde ettik.

İkinci olarak T_2 toplamında, $j \in V_2$, $t \in V_1$ şartlarını sağlayan tüm j, t köşe çiftlerini ele aldık. Dolayısıyla, T_2 için

$$T_2 = \sum_{j \in V_2} \left(\widetilde{w}_j + \sum\nolimits_{t \in V_1} \widetilde{w}_t \right)^2$$

elde ettik.

T_1 ve T_2 den istenilen elde edilmiş olur.

Teorem 3.4. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ basit, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının 2. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} Z^{(2)}(\ G_1 + G_2) = & \sum_{ij \in E_1} \left(d_i + n_{G_2}\right)\left(d_j + n_{G_2}\right) \\ & + \sum_{ij \in E_2} \left(d_i + n_{G_1}\right)\left(d_j + n_{G_1}\right) \\ & + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left(d_i + n_{G_2}\right)\left(d_j + n_{G_1}\right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 3.5. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ ağırlıklı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının 2. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} Z_w^{(2)}(\ G_1 + G_2) = & \sum_{i,j \in V_1, ij \in E_1} \left(w_i + \sum\nolimits_{k \in V_2} w_k \right)\left(w_j + \sum\nolimits_{k \in V_2} w_k \right) \\ & + \sum_{i,j \in V_2, ij \in E_2} \left(w_i + \sum\nolimits_{t \in V_1} w_t \right)\left(w_j + \sum\nolimits_{t \in V_1} w_t \right) \\ & + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left(w_i + \sum\nolimits_{k \in V_2} w_k \right)\left(w_j + \sum\nolimits_{t \in V_1} w_t \right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 3.6. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ interval ağırlıklı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının 2. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} Z_{\widetilde{w}}^{(2)}(\ G_1 + G_2) = & \sum_{i,j \in V_1, ij \in E_1} \left(\widetilde{w}_i + \sum\nolimits_{k \in V_2} \widetilde{w}_k \right)\left(\widetilde{w}_j + \sum\nolimits_{k \in V_2} \widetilde{w}_k \right) \\ & + \sum_{i,j \in V_2, ij \in E_2} \left(\widetilde{w}_i + \sum\nolimits_{t \in V_1} \widetilde{w}_t \right)\left(\widetilde{w}_j + \sum\nolimits_{t \in V_1} \widetilde{w}_t \right) \\ & + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left(\widetilde{w}_i + \sum\nolimits_{k \in V_2} \widetilde{w}_k \right)\left(\widetilde{w}_j + \sum\nolimits_{t \in V_1} \widetilde{w}_t \right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. $V = V(G_1) \cup V(G_2)$ ve $E = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(u_1, u_2): u_1 \in V(G_1), u_2 \in V(G_2)\}$ olsun. Biz sırasıyla aşağıda S_1, S_2, S_3 ile gösterilen üç toplamı elde etmek için $G_1 + G_2$ 'nin köşe kümesini parçaladık. İlk olarak, her toplam için, $\widetilde{w}_i$ yi her i köşesinin interval ağırlığı olarak düşündük. S_1 de, $i, j \in V_1$ ve $ij \in E_1$ şartlarını sağlayan tüm i ve j köşe çiftlerini ele aldık. Dolayısıyla, S_1 için

$$S_1 = \sum_{i,j\in V_1, ij\in E_1} \left(\widetilde{w}_i + \sum\nolimits_{k\in V_2} \widetilde{w}_k\right)\left(\widetilde{w}_j + \sum\nolimits_{k\in V_2} \widetilde{w}_k\right)$$

elde ettik.

İkinci olarak S_2 toplamında, $i, j \in V_2$ ve $ij \in E_2$ şartlarını sağlayan tüm i ve j köşe çiftlerini ele aldık. Dolayısıyla, S_2

$$S_2 = \sum_{i,j\in V_2, ij\in E_2} \left(\widetilde{w}_i + \sum\nolimits_{t\in V_1} \widetilde{w}_t\right)\left(\widetilde{w}_j + \sum\nolimits_{t\in V_1} \widetilde{w}_t\right)$$

şeklindedir.

Üçüncü toplam olarak S_3 de, i leri V_1 den, j leri V_2 den alarak

$$S_3 = \sum_{i\in V_1, j\in V_2} \left(\widetilde{w}_i + \sum\nolimits_{k\in V_2} \widetilde{w}_k\right)\left(\widetilde{w}_j + \sum\nolimits_{t\in V_1} \widetilde{w}_t\right)$$

denklemini elde ettik.

Bu üç toplamdan istenilen elde edilmiş olur.

Teorem 3.7. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ basit, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \times G_2$ grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z^{(1)}(\ G_1 \times G_2) = \sum_{(u,v)\in V(G_1\times G_2)} \big(d(u) + d(v)\big)^2$$

şeklindedir.

Teorem 3.8. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ ağırlıklı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \times G_2$ grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z_w^{(1)}(\ G_1 \times G_2) = \sum_{(u,v)\in V(G_1\times G_2)} \big(w(u) + w(v)\big)^2$$

şeklindedir.

Teorem 3.9. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ interval ağırlıklı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \times G_2$ grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z_{\widetilde{w}}^{(1)}(\ G_1 \times G_2) = \sum_{(u,v)\in V(G_1\times G_2)} \big(\widetilde{w}(u) + \widetilde{w}(v)\big)^2$$

şeklindedir.

İspat. $G_1 \times G_2$ grafında $u_1, v_1 \in V_1$ ve $u_2, v_2 \in V_2$ için noktalar kümesi $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ dir. Ayrıca $\widetilde{w}(u)$, u köşesinin interval ağırlığıdır. Dolayısıyla, $G_1 \times G_2$ grafında herhangi bir $(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$ köşesinin interval ağırlığı $\widetilde{w}(u_1) + \widetilde{w}(u_2)$ dir.

1. Zagreb indeksi, grafın tüm köşe çiftlerinin derecelerinin kareleri toplamına eşittir. İnterval ağırlıklı bir grafta dereceler interval ağırlığa dönüşeceğinden

$$Z_{\widetilde{w}}^{(1)}(\ G_1 \times G_2) = \sum_{(u,v)\in V(G_1\times G_2)} \big(\widetilde{w}(u) + \widetilde{w}(v)\big)^2$$

elde edilir.

Teorem 3.10. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ basit, bağlantılı iki graf olmak üzere $G_1 \times G_2$ grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z^{(2)}(\ G_1 \times G_2) = \sum_{(u_i,v_j)(u_k,v_l)\in E(G_1\times G_2)} \Big(d(u_i) + d\big(v_j\big)\Big)\big(d(u_k) + d(v_l)\big)$$

şeklindedir.

Teorem 3.11. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ ağırlıklı iki graf olmak üzere $G_1 \times G_2$ grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z_w^{(2)}(\ G_1 \times G_2) = \sum_{(u_i,v_j)(u_k,v_l)\in E(G_1\times G_2)} \Big(w(u_i) + w\big(v_j\big)\Big)\big(w(u_k) + w(v_l)\big)$$

şeklindedir.

Teorem 3.12. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ interval ağırlıklı iki graf olmak üzere $G_1 \times G_2$ grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z_{\widetilde{w}}^{(2)}(\ G_1 \times G_2) = \sum_{(u_i,v_j)(u_k,v_l)\in E(G_1\times G_2)} \Big(\widetilde{w}(u_i) + \widetilde{w}\big(v_j\big)\Big)\big(\widetilde{w}(u_k) + \widetilde{w}(v_l)\big)$$

şeklindedir.

İspat. $G_1 \times G_2$ grafında u_1, $v_1 \in V_1$ ve u_2, $v_2 \in V_2$ için noktalar kümesi $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ dir. Ayrıca $\widetilde{w}(u)$, u köşesinin interval ağırlığıdır. Dolayısıyla, $G_1 \times G_2$ grafında herhangi bir $(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$ köşesinin interval ağırlığı $\widetilde{w}(u_1) + \widetilde{w}(u_2)$ dir.
2. Zagreb indeksi, grafın tüm komşu köşe çiftlerinin dereceleri çarpımına eşittir. İnterval ağırlıklı bir grafta dereceler interval ağırlığa dönüşeceğinden

$$Z_{\widetilde{w}}^{(2)}(\ G_1 \times G_2) = \sum_{(u_i,v_j)(u_k,v_l)\in E(G_1\times G_2)} \Big(\widetilde{w}(u_i) + \widetilde{w}\big(v_j\big)\Big)\big(\widetilde{w}(u_k) + \widetilde{w}(v_l)\big)$$

elde edilir.

Teorem 3.13. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ basit, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \cup G_2$ grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z^{(1)}(\ G_1 \cup G_2) = \sum_{i\in V\setminus(V_1\cap V_2)} d_i^2 + \sum_{i\in V_1\cap V_2} (d_i - t_i)^2$$

şeklindedir. Burada $d_i = d_{G_1}(i) + d_{G_2}(i)$ ve t_i de i köşesinin $E_1 \cap E_2$ kümesindeki kenar sayısıdır.

Teorem 3.14. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ ağırlıklı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \cup G_2$ grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z_w^{(1)}(\ G_1 \cup G_2) = \sum_{i \in V \setminus (V_1 \cap V_2)} w_i^2 + \sum_{i \in V_1 \cap V_2} \left(w_i - w_{t_i}\right)^2$$

şeklindedir. Burada $w_i = w_{G_1}(i) + w_{G_2}(i)$ ve w_{t_i} de i köşesinin $E_1 \cap E_2$ kümesindeki kenar ağırlıklarının toplamıdır. Yani, $w_{t_i} = \sum_{\substack{i \sim j \\ ij \in E_1 \cap E_2}} w_{ij}$ dir.

Sonuç 3.1. İnterval aritmetiğinde çıkarma işlemi

$$[a,b] - [a,b] = [a,b] + [-b,-a] = [a-b, b-a] \neq [0,0]$$

şeklinde tanımlı olduğundan ağırlıklı graflar için tanımladığımız Teorem 3.14 'ü interval ağırlıklı graflar için tanımlayamıyoruz.

Teorem 3.15. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ basit, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \cup G_2$ grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z^{(2)}(\ G_1 \cup G_2) = \sum_{\substack{i,k \in V_1 \cap V_2 \\ ik \in E(G_1 \cup G_2)}} (d_i - t_i)(d_k - t_k) + \sum_{\substack{ik \in E \\ i \in V_1 \setminus (V_1 \cap V_2) \\ k \in V_1 \cap V_2}} d_i\,(d_k - t_k)$$
$$+ \sum_{\substack{pj \in E \\ j \in V_2 \setminus (V_1 \cap V_2) \\ p \in V_1 \cap V_2}} \left(d_p - t_p\right) d_j + \sum_{\substack{(i,j) \notin V_1 \cap V_2 \\ ij \in E}} d_i\ d_j$$

şeklindedir. Burada $d_i = d_{G_1}(i) + d_{G_2}(i)$ ve t_i de i köşesinin $E_1 \cap E_2$ kümesindeki kenar sayısıdır.

Teorem 3.16. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ ağırlıklı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \cup G_2$ grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z_w^{(2)}(\ G_1 \cup G_2) = \sum_{\substack{i,j \in V_1 \cap V_2 \\ ij \in E(G_1 \cup G_2)}} \left(w_i - w_{t_i}\right)\left(w_j - w_{t_j}\right) + \sum_{\substack{ik \in E \\ i \in V_1 \setminus (V_1 \cap V_2) \\ k \in V_1 \cap V_2}} w_i \left(w_k - w_{t_k}\right)$$
$$+ \sum_{\substack{pj \in E \\ j \in V_2 \setminus (V_1 \cap V_2) \\ p \in V_1 \cap V_2}} \left(w_p - w_{t_p}\right) w_j + \sum_{\substack{(i,j) \notin V_1 \cap V_2 \\ ij \in E}} w_i\ w_j$$

şeklindedir. Burada $w_i = w_{G_1}(i) + w_{G_2}(i)$ ve w_{t_i} de i köşesinin $E_1 \cap E_2$ kümesindeki kenar ağırlıklarının toplamıdır. Yani, $w_{t_i} = \sum_{\substack{i \sim j \\ ij \in E_1 \cap E_2}} w_{ij}$ dir.

Sonuç 3.2. İnterval aritmetiğinde çıkarma işlemi

$$[a,b] - [a,b] = [a,b] + [-b,-a] = [a-b, b-a] \neq [0,0]$$

şeklinde tanımlı olduğundan ağırlıklı graflar için tanımladığımız Teorem 3.16 'yı interval ağırlıklı graflar için tanımlayamıyoruz.

Teorem 3.17. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ basit, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \oplus G_2$ grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z^{(1)}(\ G_1 \oplus G_2) = \sum_{i \in V \setminus (V_1 \cap V_2)} d_i^2 + \sum_{i \in V_1 \cap V_2} (d_i - t)^2$$

şeklindedir. Burada $d_i = d_{G_1}(i) + d_{G_2}(i)$ ve $t = |E_1 \cap E_2|$ dir.

Teorem 3.18. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ ağırlıklı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \oplus G_2$ grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z_w^{(1)}(\ G_1 \oplus G_2) = \sum_{i \in V \setminus (V_1 \cap V_2)} w_i^2 + \sum_{i \in V_1 \cap V_2} \left(w_i - 2w_{t_i}\right)^2$$

şeklindedir. Burada $w_i = w_{G_1}(i) + w_{G_2}(i)$ ve w_{t_i} de i köşesinin $E_1 \cap E_2$ kümesindeki kenar ağırlıklarının toplamıdır. Yani, $w_{t_i} = \sum_{\substack{i \sim j \\ ij \in E_1 \cap E_2}} w_{ij}$ dir.

Sonuç 3.3. İnterval aritmetiğinde çıkarma işlemi

$$[a, b] - [a, b] = [a, b] + [-b, -a] = [a - b, b - a] \neq [0,0]$$

şeklinde tanımlı olduğundan ağırlıklı graflar için tanımladığımız Teorem 3.18 'i interval ağırlıklı graflar için tanımlayamıyoruz.

Teorem 3.19. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ basit, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \oplus G_2$ grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z^{(2)}(\ G_1 \oplus G_2) = \sum_{\substack{i,k \notin E_1 \cap E_2 \\ (i,k) \in V_1 \cap V_2}} (d_i - t)(d_k - t) + \sum_{\substack{ik \in E \\ i \in V_1 \cap V_2 \\ k \in V_2 \setminus V_1}} (d_i - t) d_j$$

$$+ \sum_{\substack{pj \in E \\ j \in V_1 \cap V_2 \\ p \in V_1 \setminus V_2}} d_p \left(d_j - t\right) + \sum_{\substack{(i,j) \notin V_1 \cap V_2 \\ ij \in E}} d_i\, d_j$$

şeklindedir. Burada $d_i = d_{G_1}(i) + d_{G_2}(i)$ ve $t = |E_1 \cap E_2|$ dir.

Teorem 3.20. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ ağırlıklı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \oplus G_2$ grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z_w^{(2)}(\ G_1 \oplus G_2) = \sum_{\substack{i,k \notin E_1 \cap E_2 \\ (i,k) \in V_1 \cap V_2}} \left(w_i - 2w_{t_i}\right)\left(w_j - 2w_{t_j}\right) + \sum_{\substack{ik \in E \\ i \in V_1 \cap V_2 \\ k \in V_2 \setminus V_1}} \left(w_i - 2w_{t_i}\right) w_j$$

$$+\sum_{\substack{pj\in E\\ j\in V_1\cap V_2\\ p\in V_1\setminus V_2}} w_p\left(w_j-2w_{t_j}\right)+\sum_{\substack{(i,j)\notin V_1\cap V_2\\ ij\in E}} w_i\, w_j$$

şeklindedir. Burada $w_i = w_{G_1}(i) + w_{G_2}(i)$ ve w_{t_i} de i köşesinin $E_1 \cap E_2$ kümesindeki kenar ağırlıklarının toplamıdır. Yani, $w_{t_i} = \sum_{\substack{i\sim j\\ ij\in E_1\cap E_2}} w_{ij}$ dir.

Sonuç 3.4. İnterval aritmetiğinde çıkarma işlemi

$$[a,b]-[a,b]=[a,b]+[-b,-a]=[a-b,b-a]\neq[0,0]$$

şeklinde tanımlı olduğundan ağırlıklı graflar için tanımladığımız Teorem 3.20 'yi interval ağırlıklı graflar için tanımlayamıyoruz.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması/çakışması bulunmamaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Fath-Tabar, G.H. (2011). Old and new zagreb ındices of graphs. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 65, 79-84.
[2] Borovicanin, B. and Aleksic Lampert, T. (2015). On the Maximum and minimum zagreb ındices of trees with a given number of vertices of maximum degree. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 74, 81-96.
[3] Vasudev, C. (2006). *Graph Theory with Applications*. New Delhi/Indian: New age International Publishers.
[4] Werst, D.B. (1996). *Introduction to Graph Theory*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
[5] Büyükköse, Ş. and Kaya-Gök, G. (2017). Graph operations of randic ındex. *AIP Conference Proceedings.*
[6] Büyükköse, Ş. and Cangül, I. N. (2019). Some notes on randic index. *The Bulletin of Parana´s Mathematical Society.*
[7] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (2012). Matrix Analysis. *2 nd ed., Cambridge/United Kingdom:Cambridge University Press*, 225-260, 391-425.