

Merni sistemi u računarstvu 13E053MSR, <http://automatika.etf.rs/sr/13e053msr>

Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet, <http://www.etf.bg.ac.rs/>

# Merna nesigurnost tipa B

---

Dr Nadica Miljković, vanredni profesor, [nadica.miljkovic@etf.rs](mailto:nadica.miljkovic@etf.rs)

Zadaci prikazani u ovim materijalima su preuzeti iz [MIEM](#) udžbenika.

u Beogradu, decembar 2020. godine

## Zadaci za rad sa rešenjima

1. Dati su analogni voltmetri istih opsega od  $M = 30$  V, ali različitih klasa tačnosti  $K_T$  od 0.1, 0.2, 0.5, 1, 1.5, 2.5 i 5. Kolike su merne nesigurnosti tipa B (MNB) svih instrumenata?

Rešenje 1. zadatka:

Ako se pretpostavi uniformna raspodela rezultata merenja, onda se MNB u oznaci  $u_B$  procenjuje kao standardna devijacija za uniformnu raspodelu:

$$u_B = \frac{K_T M}{100\sqrt{3}}$$

Moguće je izvršiti ova proračunavanja u Python kodu i rezultat je kao na Sl. 1.

```
MNB.py - C:/Users/Nadica Miljkovic/Desktop/MNB.py
File Edit Format Run Options Windows Help
# merna nesigurnost tipa B, zadatak #1
kT = [0.1, 0.2, 0.5, 1, 1.5, 2.5, 5]
M = 30 # V
uB = [vr*M/(100 * (3**0.5)) for vr in kT]
uB = [round(vr, 2) for vr in uB]

print 'Za ispitivane klase tačnosti od: ', kT, ','
print 'merne nesigurnosti su: ', uB, '.'

Python Shell
File Edit Shell Debug Options Windows Help
Python 2.7.13 (v2.7.13:a06454blafal, Dec 17 2016, 20:42:59) [MSC v.150
0 32 bit (Intel)] on win32
Type "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>> ===== RESTART =====
>>>
>>>
Za ispitivane klase tačnosti od: [0.1, 0.2, 0.5, 1, 1.5, 2.5, 5] ,
merne nesigurnosti su: [0.02, 0.03, 0.09, 0.17, 0.26, 0.43, 0.87] .
>>>
```

Slika 1, Python kod i rezultat za izračunavanje mernih nesigurnosti tipa B ( $u_B$ ) za zadate klase tačnosti ( $k_T$ ) i maksimalni opseg ( $M$ ) kod 7 instrumenata.

Očekivano sa Sl. 1 MNB koje odgovaraju većim klasama tačnosti su i veće. Dodatno, kako je maksimalni opseg merenja isti za sve ove instrumente, to se MNB može izraziti u procentima. Za MNB u procentima dobijaju se sledeći brojevi: 0.07 %, 0.10 %, 0.30 %, 0.57 %, 0.87 %, 1.43 % i 2.90 %.

NAPOMENA: Kada se predstavljaju vrednosti u procentima, uobičajeno je zaokruživanje na celobrojne vrednosti, ređe na jednu decimalu, a skoro nikada se ne zaokružuje na više od jedne decimale. Ovde je to urađeno sa ciljem kako bi bilo jasno da prva MNB nije jednaka nuli, ali jeste dovoljno mala da se njen uticaj može zanemariti.

2. Neka je dat instrument sa 3½ cifara. Izračunati mernu nesigurnost ovog instrumenta u procentima.

Rešenje 2. zadatka:

Instrument sa 3½ cifara prikazuje najmanju vrednost od 0000 i najveću vrednost of 1999, pa je ukupan broj *count*-a jednak 2000.

Rezolucija takvog instrumenta u procentima je  $\delta_x = \frac{1}{2000} 100 \% = 0.05 \text{ b\%}$ . Kako se za poznatu rezoluciju  $\delta_x$  merena vrednost  $x$  nalazi u opsegu  $\left[x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}\right]$ , to je MNB u oznaci  $u_B$  jednaka  $u_B = \frac{\delta_x}{\sqrt{12}} = 0.29\delta_x = 0.0145 \%$ , odnosno  $0.01 \%$ .

3. Potrebno je izračunati ukupnu mernu nesigurnost za 10 merenja DC napona od nominalnih 3.3 V (bez Beselove korekcije) primenom UNO R3 mikrokontrolerske pločice koja ima rezoluciju A/D konvertora od 10 bita. Dodatno, maksimalna vrednost napona koju može da meri UNO R3 je 5 V, a minimalna 0 V. Ponovljena merenja su prikazana u Tabeli 1.

Preporučeno je da se MNB proceni kao procentualna greška u odnosu na pročitane vrednosti (eng. *accuracy*).

Tabela 1, Podaci izmereni prilikom 10 ponovljenih merenja DC napona nominalne vrednosti od 3.3 V.

redni br. merenja	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DC napon	3.2	3.3	3.1	3.0	3.4	3.3	3.2	3.1	3.4	3.0

Rešenje 3. zadatka:

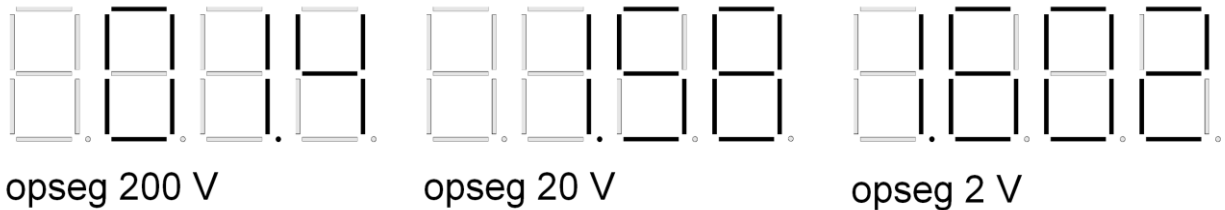
Rezolucija ovog instrumenta  $\delta_1$  je  $\delta_1 = \frac{5 \text{ V}}{2^{10}} = 4.88 \text{ mV}$ , a MNB je jednaka:  $u_B = \frac{\delta_1}{\sqrt{12}} = 1.41 \text{ mV}$ . Merna nesigurnost tipa A se računa prema formuli sa Beselovom korekcijom. Prema tome,  $u_A = 14.91 \text{ mV}$ . Kombinovana merna nesigurnost  $u_C$  se računa prema sledećoj formuli:

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

Zamenom brojnih vrednosti dobija se da je:  $u_C = 14.98 \text{ mV}$ .

NAPOMENA: U ovom slučaju MNB se mogla zanemariti, jer kombinovana merna nesigurnost u najvećoj meri zavisi od MNA.

4. Digitalnim voltmetrom sa 3½ cifara meri se napon od 1.6 V. Ako DMM za merenje DC napona ima tačnost definisanu kao  $\pm(0.5 \% + 3)$  od merene vrednosti, potrebno je odrediti mernu nesigurnost tipa B za mereni napon. Merenje napona za različite opsege je prikazano na Sl. 2.



Slika 2, Očitavane vrednosti merenog napona nominalne vrednosti od 1.6 V primenom tri različita opsega. Primer iz knjige.

Rešenje 4. zadatka:

MNB za najveći opseg od 200 V je jednaka:

$$u_{B200} = \frac{\Delta_x + 3 * LSD}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\delta_1}{100} X + 3 * 0.1}{\sqrt{3}} = 0.18 \text{ V}$$

U prethodnoj relaciji sa  $\delta_1$  je predstavljena tačnost (ovde 0.5 %) od merene vrednosti  $X$  (ovde 1.6 V). analogno, za opseg od 20 V (menja se samo LSD), MNB je jednaka:

$$u_{B20} = \frac{\Delta_x + 3 * LSD}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\delta_1}{100} X + 3 * 0.01}{\sqrt{3}} = 0.02 \text{ V}$$

Na kraju, za najmanji opseg (od 2 V), MNB je:

$$u_{B2} = \frac{\Delta_x + 3 * LSD}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\delta_1}{100} X + 3 * 0.001}{\sqrt{3}} = 0.01 \text{ V}$$

NAPOMENA: U knjizi MNB nije predstavljena sa uniformnom raspodelom odnosno vrednosti koje su dobijene nisu podeljene sa  $\sqrt{3}$ , pa treba imati na umu moguća neslaganja rezultata. Oba načina su tačna. Naime, ovde je pretpostavljena uniformna raspodela, a u knjizi je samo na osnovu podataka i na osnovu preporuke proizvođača  $\pm(0.5 \% + 3)$  izračunata MNB.

Na osnovu dobijenih MNB ( $u_{B200}$ ,  $u_{B20}$  i  $u_{B2}$ ), zaključuje se da je poželjno meriti u najmanjem mogućem opsegu. Veći broj digitalnih instrumenata automatski podešava opseg.

5. Pod pretpostavkom da su unutrašnje otpornosti ampermetra, voltmetra i izvora jednosmernog napona idealne, da je faktor proširenja  $k = 2$ , da je  $E = 12\text{ V}$  i da su svi instrumenti pravilno kalibrisani, izračunati mernu nesigurnost tipa A za merenje nepoznate otpornosti  $R_x$  u slučaju: indirektnog merenja. Izmerene vrednosti napona (V) voltmetrom i struje (mA) ampermetrom za ponovljena merenja date su u Tabeli 2.

Tabela 2, Rezultati merenja nepoznate otpornosti indirektnom metodom.

$U_i$ [V]	12.00	12.10	11.80	12.20	12.30	11.50	12.00	12.08	12.10	11.90
$I_i$ [mA]	13.50	14.60	14.80	13.90	14.70	14.00	14.90	13.80	13.90	14.40

Rešenje 5. zadatka:

```

MNB.py - C:/Users/Nadica Miljkovic/Desktop/MNB.py
File Edit Format Run Options Windows Help

# merna nesigurnost tipa A, kombinovano merenje, zadatak #5
import numpy as np

ui = [12, 12.1, 11.8, 12.2, 12.3, 11.5, 12, 12.08, 12.1, 11.9]
ii = [13.5, 14.6, 14.8, 13.9, 14.7, 14, 14.9, 13.8, 13.9, 14.4];

U = np.mean(ui)
I = np.mean(ii)
u_Au = np.std(ui) / (len(ui) - 1)
u_Ai = np.std(ii) / (len(ii) - 1)

u_rx = ( (u_Au/I)**2 + (U*u_Ai/(I**2))**2 )**0.5
print 'Merna nesigurnost tipa A indirektnog merenja je: ', u_rx, ', a'
print 'u procentima: ', 100*u_rx/(U/I), '%'

Python Shell
File Edit Shell Debug Options Windows Help

Python 2.7.13 (v2.7.13:a06454b1afa1, Dec 17 2016, 20:42:59) [MSC v.150
0 32 bit (Intel)] on win32
Type "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>> ===== RESTART =====
>>>
>>> Za ispitivane klase tacnosti od: [0.1, 0.2, 0.5, 1, 1.5, 2.5, 5] ,
merne nesigurnosti su: [0.02, 0.03, 0.09, 0.17, 0.26, 0.43, 0.87] .
Merna nesigurnost tipa A indirektnog merenja je: 0.00346690292635 , a
u procentima: 0.411763349729 %
>>>

```

Slika 3, Python kod za računanje merne nesigurnosti tipa A kod indirektnog merenja.

Za indirektno merenje nepoznate otpornosti koristi se sledeći izraz:  $R_x = \frac{U}{I}$ . Sa  $U$  je označena procenjena vrednost napona na osnovu izvršenih merenja, odnosno srednja vrednost merenog napona, a sa  $I$  je predstavljena srednja vrednost merene struje.

Ako su sa  $u_v$  i sa  $u_i$  označene merne nesigurnosti za merenje napona i struje, respektivno, onda je moguće izračunati mernu nesigurnost  $u_{rx}$  indirektnog merenja nepoznate otpornosti na sledeći način:

$$u_{rx} = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial R_x}{\partial U}\right| u_v\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial R_x}{\partial I}\right| u_i\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{I} u_v\right)^2 + \left(\frac{U}{I^2} u_i\right)^2}$$

Rešenje ovog zadatka se nalazi u fajlu "MNB.py". Izgled Python koda i rezultat su prikazani na Sl. 3.

NAPOMENA: Detaljno urađen primer pogledati u knjizi. Za datu nominalnu vrednost otpornika preko npr. *Color Code*-a moguće je odrediti i apsolutnu i relativnu grešku merenja.

6. Neka je potrebno odrediti kombinovanu mernu nesigurnost za faktor proširenja  $k = 2$  prilikom merenja struje analognim ampermetrom. Rezultati  $n = 8$  ponovljenih merenja su dati u Tabeli 3. Opseg mernog instrumenta je  $I_{max} = 3$  A, tačnost očitavanja (iz specifikacije proizvođača) je  $\pm 0.04$  %, a tačnost opsega (iz specifikacije proizvođača) je  $\pm 0.007$  %. Smatrati da je unutrašnja otpornost ampermetra dovoljno mala i da se svi sistematski efekti mogu zanemariti. Pretpostaviti Gausovu raspodelu za ponovljena merenja i uniformnu raspodelu za računanje merne nesigurnosti tipa B.

Tabela 3, Vrednosti ponovljenih merenja struje

redni broj merenja	1	2	3	4	5	6	7	8
$I$ [A]	0.98	0.90	1.10	1.00	1.05	0.97	1.12	1.03

Rešenje zadatka 6:

Za ponovljena merenja, moguće je izračunati srednju vrednost struje kao:

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i = 1.02 \text{ A}$$

Merna nesigurnost tipa A (kao standardna devijacija od srednje vrednosti sa Beselovom korekcijom) je:

$$u_A = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2} = 0.0255 \text{ A}$$

Merna nesigurnost tipa B se može izraziti kao:

$$u_B = \frac{\frac{\delta_1}{100} I_{max} + \frac{\delta_2}{100} \bar{I}}{\sqrt{3}} = 0.0004 \text{ A}$$

Sada se na osnovu prethodna dva izraza dobija kombinovana merna nesigurnost:  $u_c = 0.03$  A

U ovom slučaju se uticaj merne nesigurnosti tipa B može i zanemariti jer je  $u_c \approx u_A$ . Za faktor proširenja  $k = 2$ , dobija se rezultat merenja oblika:  $I = 1.02 \pm 0.06$  A.

A Python kod?