

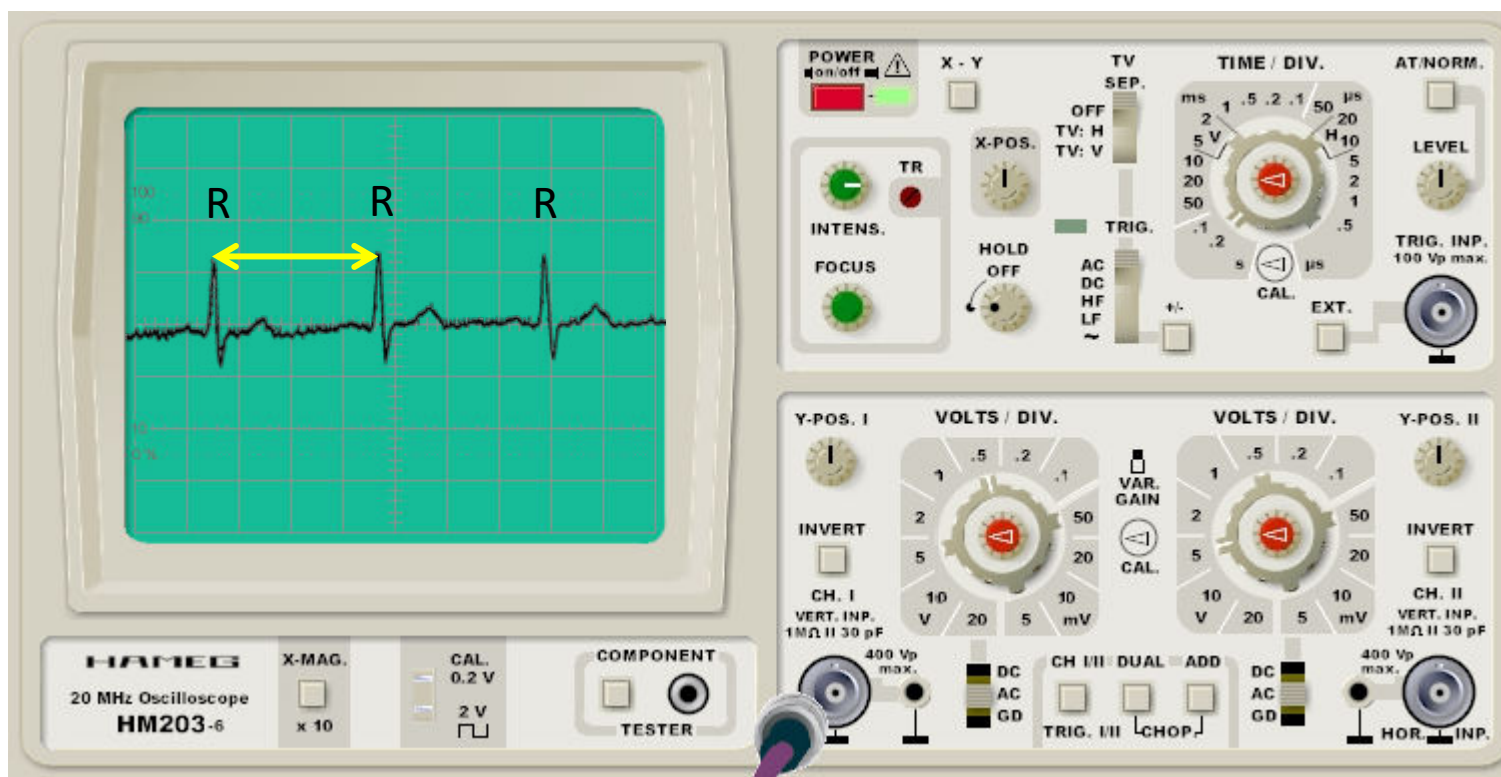
Merni sistemi u računarstvu, <http://automatika.etf.bg.ac.rs/sr/13e053msr>

Merna nesigurnost tipa A

Dr Nadica Miljković, vanredni profesor, kabinet 68 i laboratorija 69,
nadica.miljkovic@etf.bg.ac.rs

Prezentacija za ovo predavanje je skoro u potpunosti pokrivena udžbenikom N. Miljković: <https://zenodo.org/record/1335250#.W2XpdrixXIU>, odakle su i preuzete ilustracije.

Merenje EKG signala osciloskopom



Maska osciloskopa je preuzeta sa sajta Oscilloscope Simulation, © 2002 Peter Debik, Berlin.

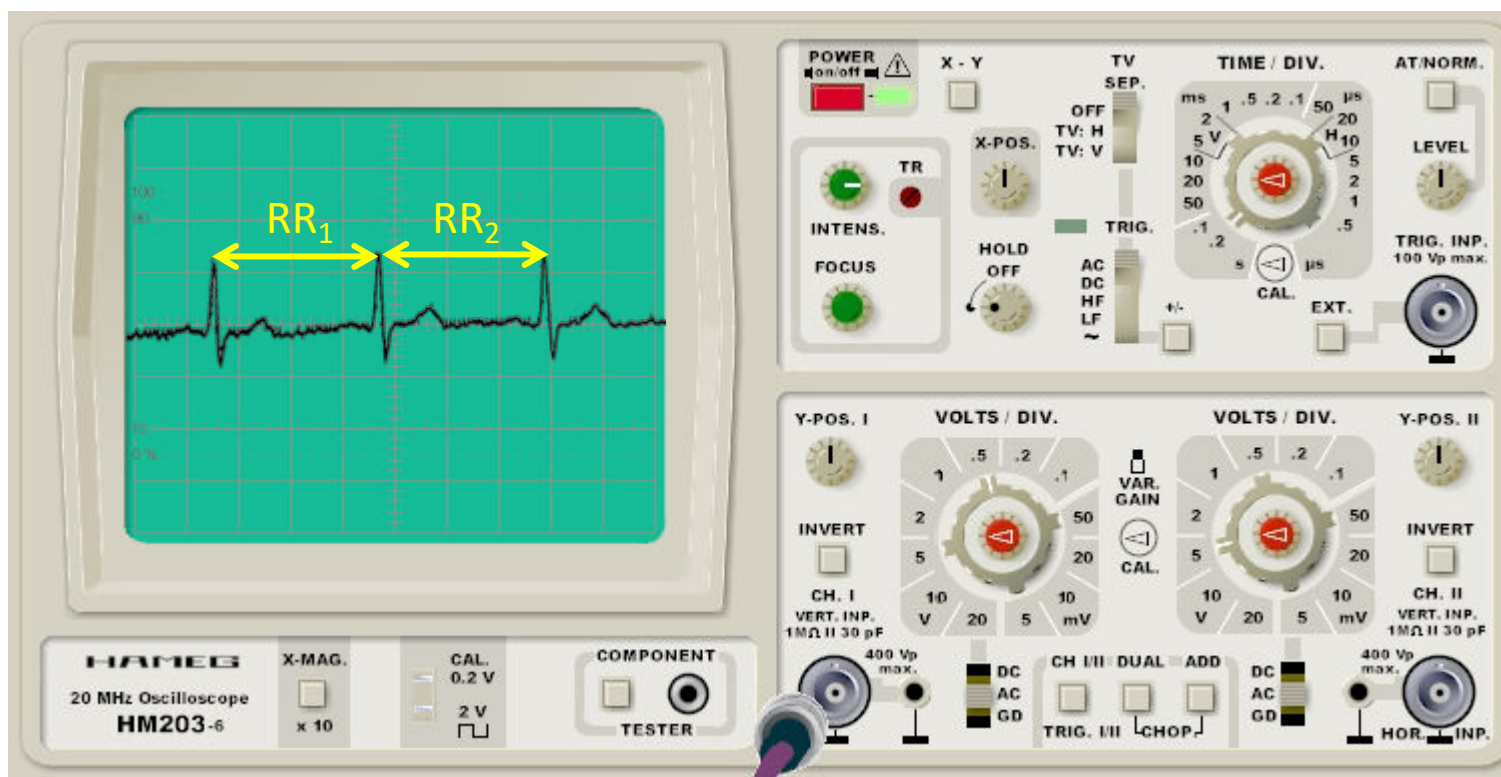
EKG (<https://en.wikipedia.org/wiki/Electrocardiography>) – napon koji se posmatra na osciloskopu.

Kolika je vrednost bpm (eng. *beats per minute*)?

Kolika je PTP (eng. *peak-to-peak*) vrednost signala?

Kolika je vrednost RR intervala?

Merenje EKG signala osciloskopom



Da li je $RR_1 = RR_2$?

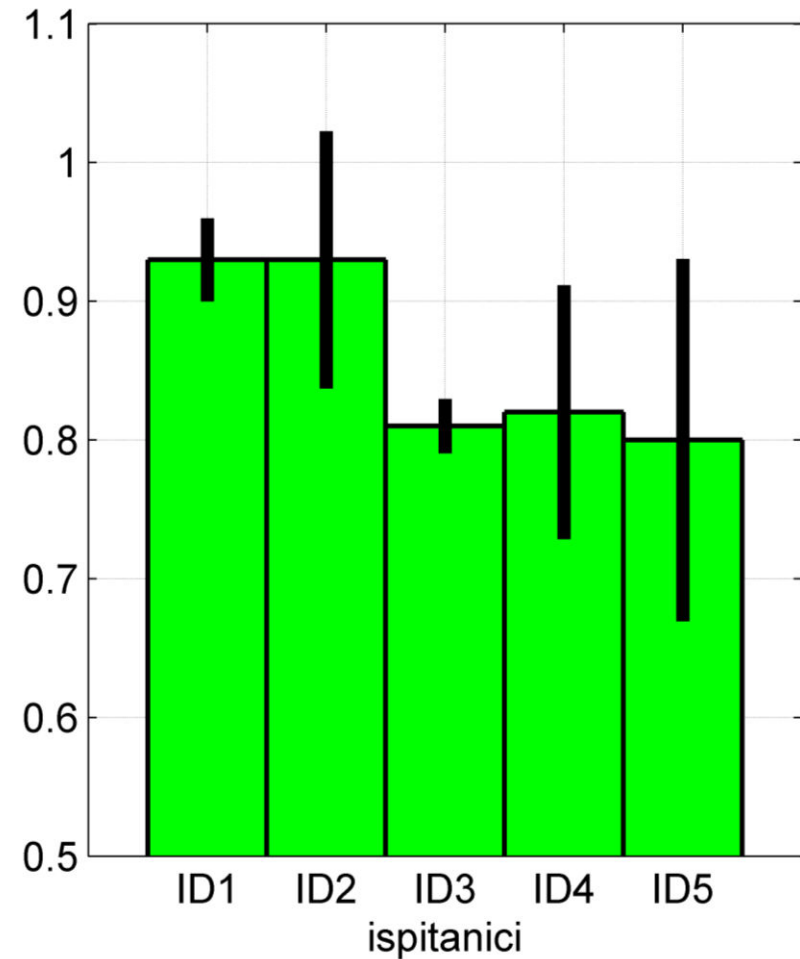
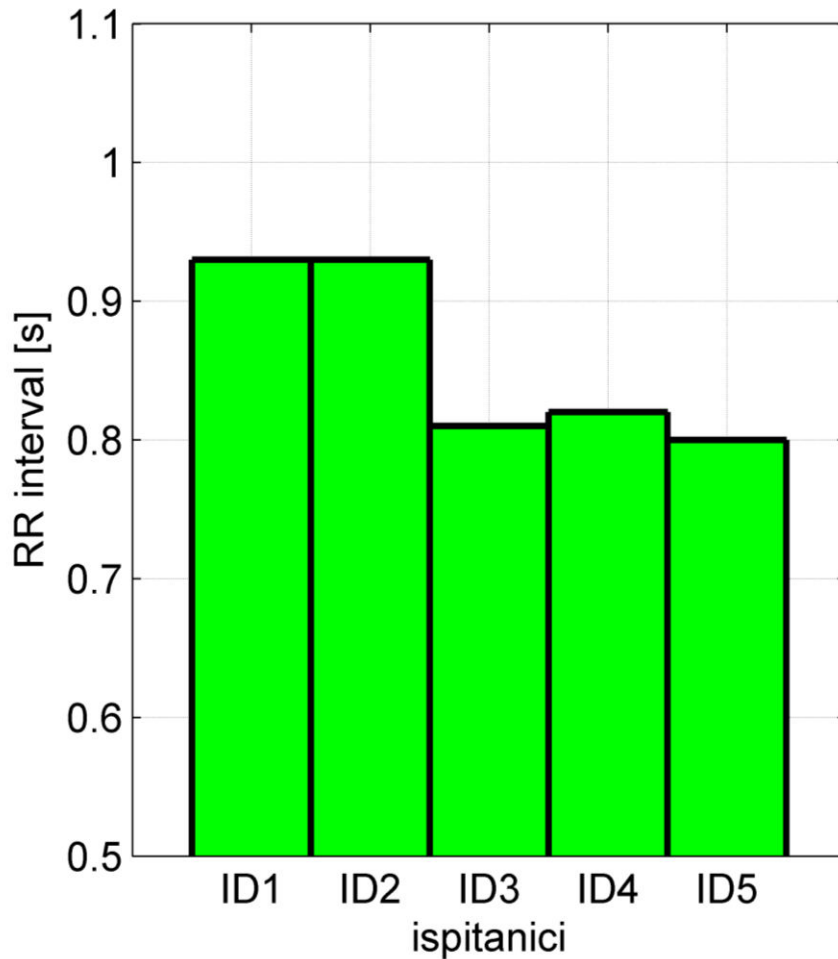
Zadatak:

Izmeriti vrednost RR intervala na 5 ispitanika (ID1-5) i prikazati rezultat merenja. Za svakog ispitanika ponoviti merenje 10 puta.

Predstavljanje rezultata merenja: RR?

br. merenja	RR interval [s]				
	ID 1	ID 2	ID 3	ID 4	ID 5
1	1	1	0.8	0.6	0.6
2	0.9	1	0.8	0.7	0.6
3	0.9	1	0.8	0.8	0.6
4	0.9	0.6	0.8	1	1
5	1	1	0.8	1	1
6	0.9	1	0.8	1	1
7	0.9	1	0.8	0.7	1
8	0.9	1	0.9	0.8	1
9	0.9	0.7	0.8	0.9	0.6
10	1	1	0.8	0.7	0.6

Predstavljanje rezultata merenja: RR

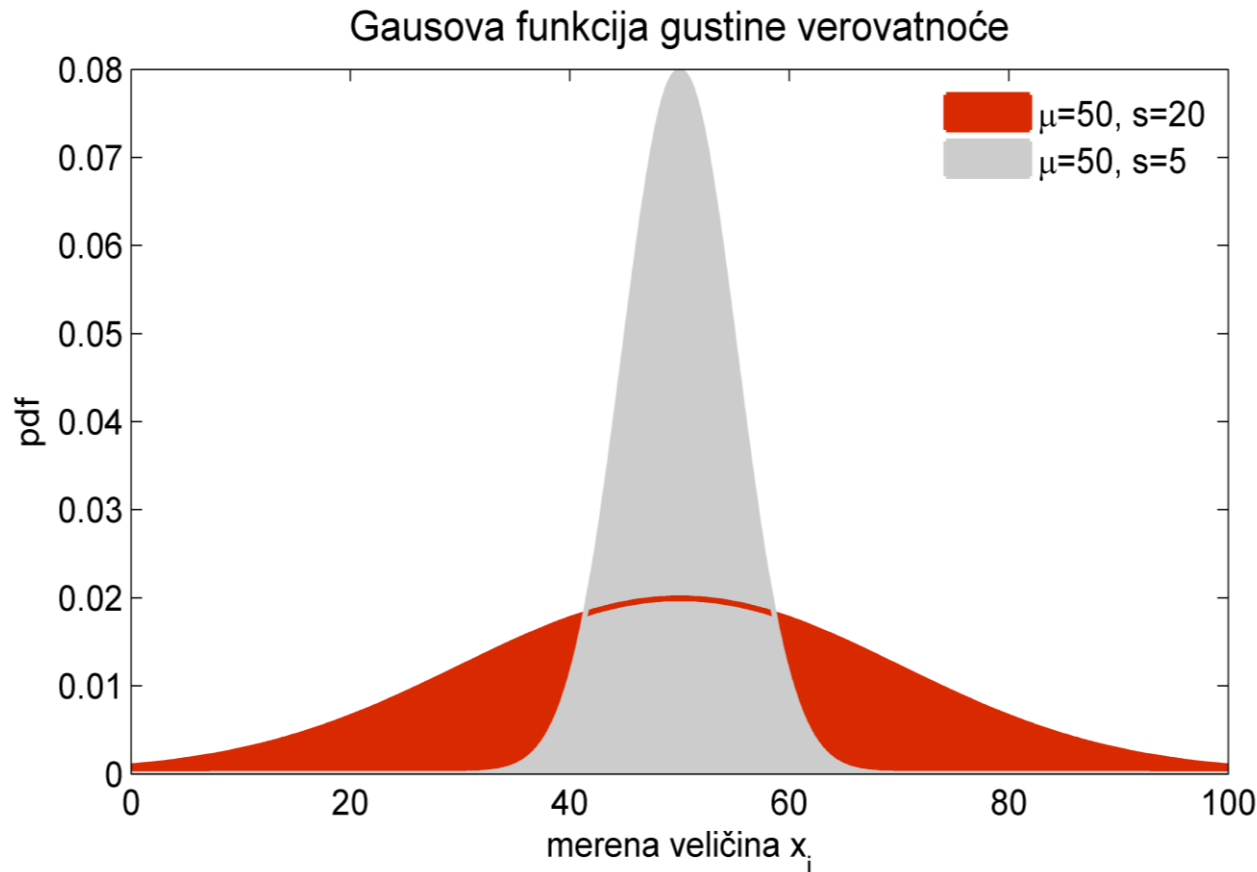


Ova vrsta grafika se naziva *error bar* (https://en.wikipedia.org/wiki/Error_bar).

Zašto se merenja razlikuju?

- Konkretno, za EKG tj. RR interval:
 - odnos signal/šum,
 - pomeranje elektroda,
 - nestabilan *offset* potencijal elektroda,
 - metoda detekcije R intervala i
 - Druge
- Odnosno, postoji niz, u ovom slučaju, fizioloških faktora koje nije moguće odrediti deterministički tj. jednoznačno. (Deterministički modeli su takvi da se mogu predstaviti matematičkim modelom.)
- Zato koristimo statistiku i teoriju verovatnoće da ocenimo slučajni proces tj. stohastički proces!
- Postoji li slučajnost? Ko želi, može više o tome da pogleda na: <https://plato.stanford.edu/entries/statistics/> (*Philosophy of Statistics, Stanford Encyclopedia of Philosophy*).

Predstavljanje rezultata merenja

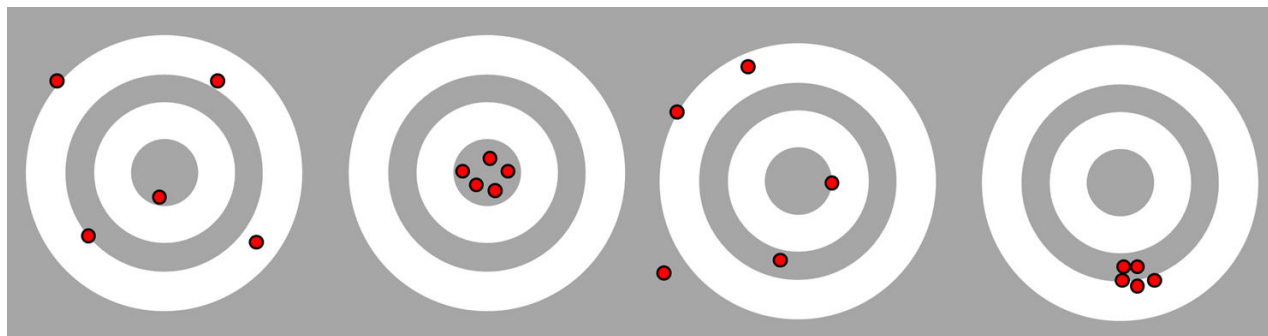


Merna nesigurnost je neizostavni parametar rezultata merenja, jer sa sobom nosi informaciju o pojedinačnim merenjima – koju je nemoguće predstaviti isključivo preko srednje vrednosti merene veličine. Na slici su prikazane dve Gausove raspodele dobijene za dva merenja koja imaju istu srednju vrednost (μ), ali različitu standardnu devijaciju (s).

Zaključak?

- Merna nesigurnost daje informaciju o rasipanju (raspodeli) rezultata merenja oko srednje vrednosti.
- Merna nesigurnost nosi informaciju o pojedinačnim merenjima.
- Rezultat je potpun ako sadrži podatak o mernoj nesigurnosti.
- Pored informacije o mernoj nesigurnosti, poželjno je da rezultat merenja sadrži i:
 - opis metode merenja i
 - instrumentacije koja je primenjena (pogotovu ako se radi o merenjima gde se zahteva relativno velika preciznost i tačnost).

Tačnost ≠ preciznost merenja

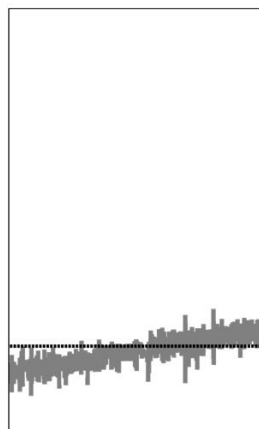


neprecizno i tačno

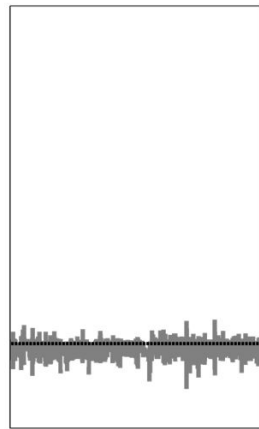
precizno i tačno

neprecizno i netačno

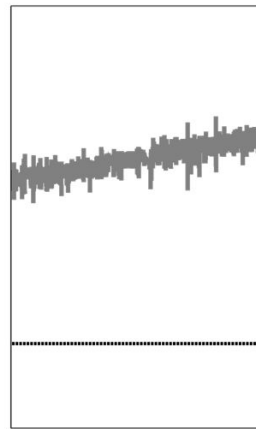
precizno i netačno



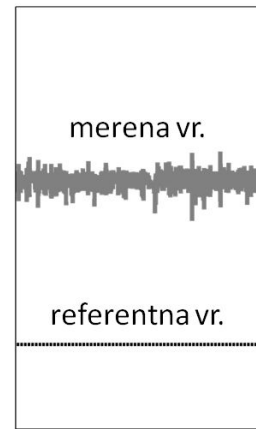
nestabilno i tačno



stabilno i tačno



nestabilno i netačno



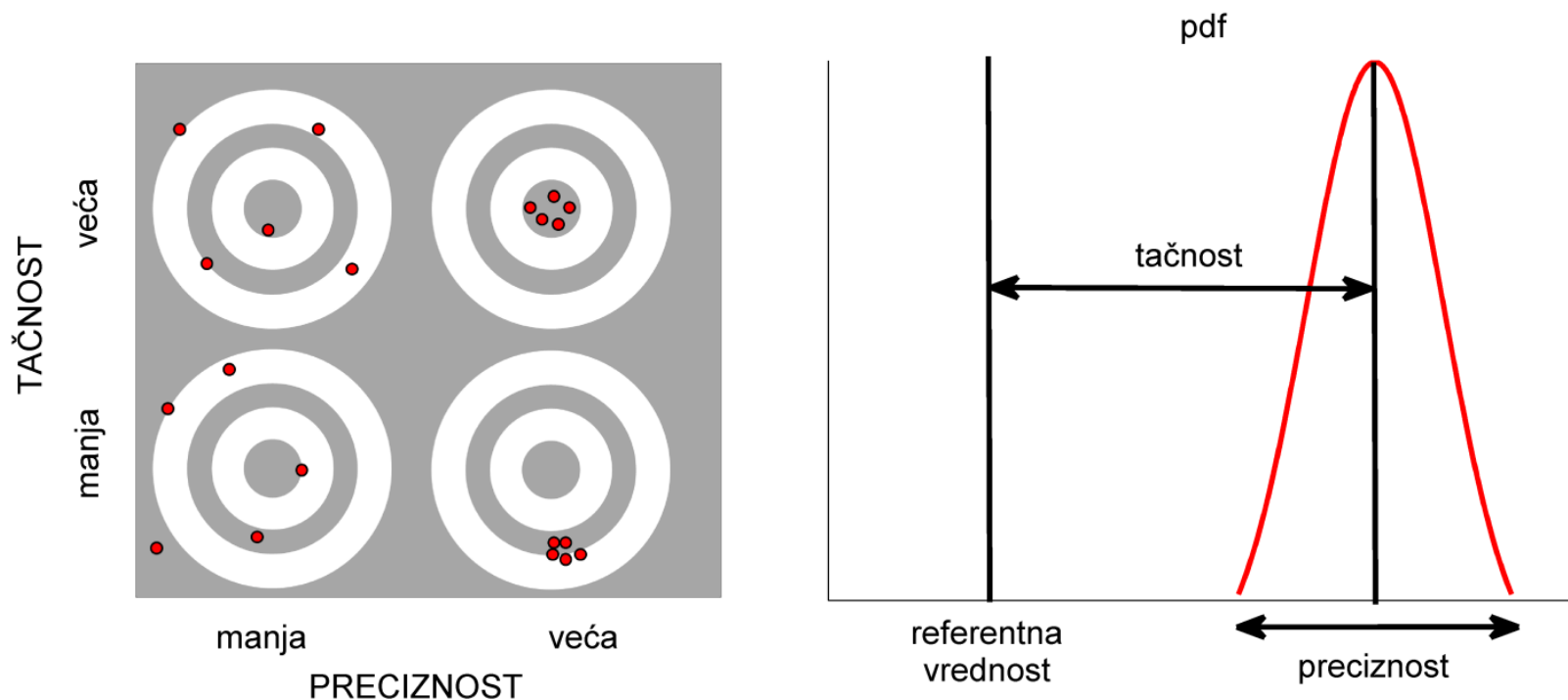
stabilno i netačno

Preciznost vs. tačnost? Ovo su dve najvažnije osobine merenja.

Na tačnost merenja utiču greške prilikom merenja. Klasična podela grešaka je na:

- grube greške,
- sistematske greške i
- slučajne greške.

Tačnost \neq preciznost merenja



Preciznost i tačnost merenja u slučaju pikada (levi panel) i u odnosu na Gausovu funkciju gustine verovatnoće koja je prikazana na desnom panelu. Oznaka pdf (eng. *probability density function*) označava funkciju gustine verovatnoće.

Pod referentnom vrednošću, na desnom panelu, podrazumeva se tačna vrednost nekog merenja i odgovara centru mete na levom panelu.

Greške i merna nesigurnost

What's the fuzz?

- Merna nesigurnost određuje širinu intervala u kojoj se može naći merena vrednost sa određenom verovatnoćom i vrednost merne nesigurnosti je uvek pozitivnog znaka. Pri ponovljenim merenjima, merna nesigurnost se javlja iz sledećih razloga:
 - 1) izvor greške nije poznat ili
 - 2) izvor greške nije jednostavno jednoznačno odrediti (npr. ima ih više).
- Na tačnost merenja, osim merne nesigurnosti ponovljenih merenja, utiču i greške prilikom merenja.
- Klasična podela grešaka je na:
 - 1) grube greške,
 - 2) sistematske greške i
 - 3) slučajne greške.
- Pod greškom merenja se podrazumeva razlika između merene i tačne vrednosti. Greška merenja može biti ili pozitivnog ili negativnog znaka. Podela grešaka na sistematske i slučajne je na osnovu fizičkih uzoraka tih grešaka.

Grube greške

Be patient!

Grube greške (eng. *blunder*) su rezultat nestručnosti i nepažnje koje vode izboru neodgovarajućeg mernog postupka ili pogrešnog korišćenja instrumenta.

Nisu predmet razmatranja na 13E053MSR, jer se pretpostavlja da su stručnost i obazrivost svake inženjerke i inženjera (kao i budućih inženjerki i inženjera) na prvom mestu prilikom rukovanja laboratorijskom opremom.

Kako ih izbeći?

PRAVILA PONAŠANJA U LABORATORIJI!

Sistematske greške

More patience!

Najčešće su konstantne, ali mogu da se menjaju i po određenom zakonu prilikom svakog merenja. Na primer, ako se koristi neispravno baždaren / kalibrisan* instrument za merenje.

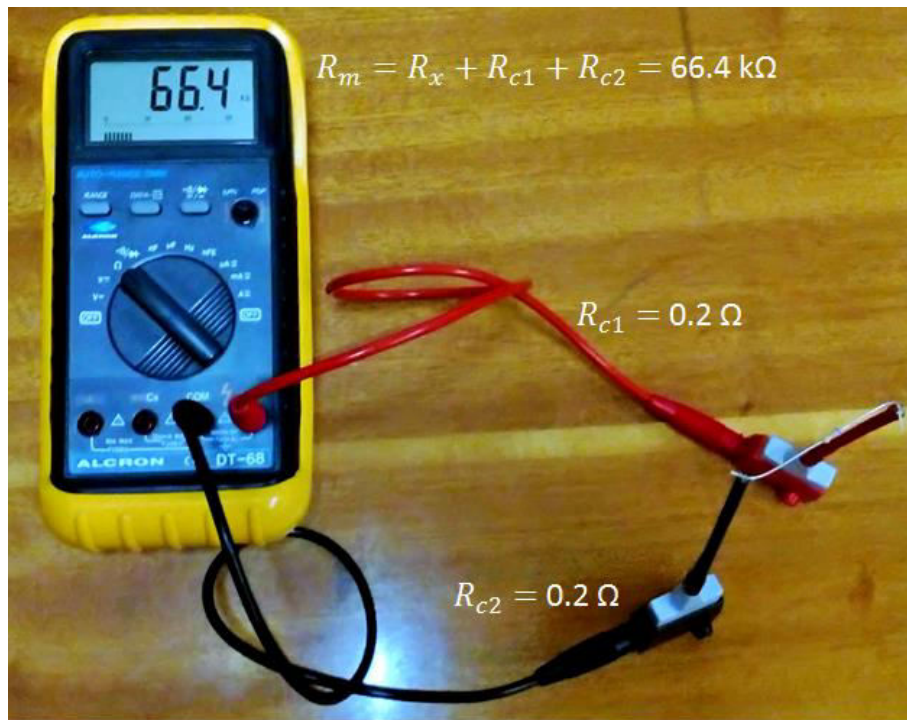
Kako ih izbeći?

Pravilnim izborom metode merenja, kontrola tačnosti instrumenata i eliminisanje uticaja spoljnih faktora. Nekada se uvodi korekcija rezultata merenja.

**kalibracija (eng. calibration) – “operation that, under specified conditions, in a first step, establishes a relation between the quantity values with measurement uncertainties provided by measurement standards and corresponding indications with associated measurement uncertainties and, in a second step, uses this information to establish a relation for obtaining a measurement result from an indication”, International Vocabulary of Metrology, ©JCGM 200:2012, http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_200_2012.pdf.*

Primer sistematske greške

Bit more patience!



- Primer iz laboratorije.
- Za merenje je korišćen ALCRON DT-68 digitalni multimeter sa automatskim podešavanjem opsega za merenje otpornosti.
- Kolika je sistematska greška u ovom merenju?
- Kako je ukloniti?

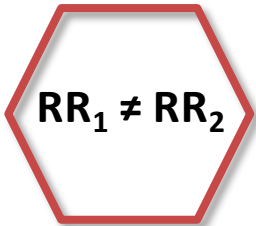
~~Slučajne greške~~ Merna nesigurnost tipa A

Right at the corner!

Pri ponovljenim merenjima jedne iste konstantne fizičke veličine i pri istim uslovima (isti operater, ista metoda, isti instrumenti, isti spoljni uslovi, ...) dobijaju se različiti rezultati. Oni su rezultat slučajnih grešaka i opisuje ih merna nesigurnost.

Kako ih izbeći?

Nikako. Postoji veliki broj uzročnika i nije ih moguće izbeći.

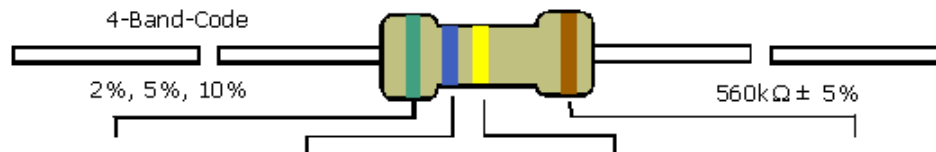


Nova podela grešaka i nesigurnosti

At last!

- Nakon konstituisanja Pravilnika o merenju i prikazu merenih veličina 1993. godine, podela mernih grešaka je nešto drugačija (https://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf).
- Kako bi se na odgovarajući način predstavila merena veličina, uvedeno je računanje merne nesigurnosti (eng. *uncertainty*) koje se ne sme pogrešno tumačiti kao merna greška (eng. *error*).
- Sam pojam nesigurnosti se najjednostavnije može opisati sinonimom sumnja.
- S druge strane, greška je idealizovan koncept i ne može biti poznata u potpunosti, jer poznavanje greške podrazumeva i poznavanje tačne vrednosti koja praktično nije dostupna.
- Sistematske greške, koje su opisane ranije, ne ulaze u proračun merne nesigurnosti i po novoj klasifikaciji se smatraju sistematskim efektima.
- Merna nesigurnost definiše disperziju rezultata oko srednje vrednosti, a sistematski efekti mogu da utiču na procenu srednje vrednosti.
- Na osnovu odabira metode koja se koriste prilikom određivanja merne nesigurnosti, dogovorena je podela na mernu nesigurnost tipa A i mernu nesigurnost tipa B.

Merna nesigurnost tipa A



COLOR	1st BAND	2nd BAND	3rd BAND	MULTIPLIER	TOLERANCE
Black	0	0	0	1Ω	
Brown	1	1	1	10Ω	± 1% (F)
Red	2	2	2	100Ω	± 2% (G)
Orange	3	3	3	1KΩ	
Yellow	4	4	4	10KΩ	
Green	5	5	5	100KΩ	±0.5% (D)
Blue	6	6	6	1MΩ	±0.25% (C)
Violet	7	7	7	10MΩ	±0.10% (B)
Grey	8	8	8		±0.05%
White	9	9	9		
Gold				0.1	± 5% (J)
Silver				0.01	± 10% (K)

Color Code,

https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic_color_code

Kako je smanjiti? Ponavljanjem merenja.

Kako ih predstaviti? Korišćenjem statističkih metoda (metode teorije verovatnoće) za njihovu procenu. Statističke metode se koriste da se sa određenom verovatnoćom garantuje proračunata procena rezultata merenja.

Na primer: proizvođač za otpornik od 560 kΩ garantuje sledeće: Otpornost je 560 kΩ sa tolerancijom od 5% ili od 28 kΩ, odnosno otpornost je 560±28 kΩ.

Rezultat merenja i merna nesigurnost

Rezultat merenja se zapisuje kao:

$$\bar{x} \pm u$$

Rezultat merenja se predstavlja pomoću merne nesigurnosti (oznaka “ u ”).

Merna nesigurnost je interval u okviru koga se nalazi merna veličina sa određenom verovatnoćom.

Komponente merne nesigurnosti su:

- merna nesigurnost tipa A (oznaka “ u_A ”)
- merna nesigurnost tipa B (oznaka “ u_B ”)

Da li uopšte postoji greška?

- Da, i Vi ste je računali na laboratorijskim vežbama i kolokvijumu. Ako je poznata tačna vrednost nekog merenja, onda se mogu izračunati:
 - apsolutna i
 - relativna greška.
- Tačna vrednost (eng. *true value*) je vrednost koja bi se dobila savršenim mernim postupkom koji ne postoji. Međutim, nekada se kvantitet (određena brojna vrednost) neke veličine smatra tačnom vrednošću na osnovu usvojene konvencije (nominalna vrednost).
- Apsolutna greška (https://en.wikipedia.org/wiki/Absolute_value) u oznaci Δ se definiše kao:

$$\Delta = |\hat{x} - x_n|$$

- Koristi se i relativna greška (https://en.wikipedia.org/wiki/Relative_change_and_difference) u oznaci r_d .

$$r_d = \frac{|\hat{x} - x_n|}{x_n}$$

- Mana ove relacije je što ovu relativnu grešku nije moguće odrediti u slučaju kada je nominalna vrednost jednaka 0, jer deljenje sa nulom nije moguće. Šta onda?

Još neke mere?

- Nekada se računa i opseg (eng. *range*) u kome se nalazi neka merena veličina (kao razlika maksimalne i minimalne vrednosti merenja).
- Međutim, rezultat ponovljenih merenja može biti takav da se baš ova ekstremna merenja značajno razlikuju od susednih vrednosti i da kao ekstremne vrednosti merenja nisu od značaja za rezultat merenja (eng. *outlier*).
- Predstavljanje opsega merenja se ne koristi često u praksi.

Srednja vrednost rezultata merenja

Pri višestruko ponovljenim merenjima neke električne (u opštem slučaju fizičke) veličine, najverovatnija vrednost te veličine biće aritmetička sredina (tj. srednja vrednost) rezultata merenja.

Veći broj ponovljenih merenja -> rezultat je tačniji

Teorijski: pri beskonačno velikom broju merenja, dobiće se najtačniji rezultat

Praktično: moguće je izvršiti konačan broj merenja.

Ako su pri ponovljenom merenju dobijene sledeće vrednosti:

$$x_n > x_{n-1} > \dots > x_2 > x_1$$

tada se tačna vrednost x_0 sigurno nalazi u intervalu $[x_1, x_n]$.

Neka su pojedinačne “stvarne” greške:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_0$$

...

$$\Delta x_n = x_n - x_0$$

Srednja vrednost rezultata merenja

Sabiranjem svih “stvarnih” grešaka, moguće je pokazati da važe sledeće relacije:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{n-1} + \Delta x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n - nx_0$$

$$x_0 = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n) - \frac{1}{n} (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{n-1} + \Delta x_n)$$

Prvi član sa desne u prethodnoj jednakosti predstavlja srednju vrednost merenja (aritmetička sredina):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Sada, izraz za tačnu vrednost može da se napiše kao:

$$x_0 = \bar{x} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i$$

$$x_0 = \bar{x} - \varepsilon$$

Srednja vrednost rezultata merenja

Kako za svako pojedinačno merenje Δx_i važi da sa podjednakom verovatnoćom može imati i pozitivan i negativan predznak, može se pisati:

$$x_0 = \bar{x} \pm \varepsilon$$

Pri velikom broju ponovljenih merenja (kada n teži beskonačnosti), ε u prethodnom izrazu teži nuli. Odatle sledi da je tačna vrednost približno jednaka srednoj vrednosti rezultata merenja.

$$x_0 \approx \bar{x}$$

Kako je u praksi nemoguće izvršiti beskonačno veliki broj merenja, to je srednja vrednost rezultata merenja procena merne veličine.

Srednja vrednost rezultata merenja je slučajna promenljiva.

Merna nesigurnost tipa A

Kako je srednja vrednost samo procena, to i dalje postoji neko ε koje se ne može zanemariti.

$$x_0 = \bar{x} \pm \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \quad \text{ili} \quad \varepsilon = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})$$

Opseg u kome se nalazi merena vrednost je od velikog značaja. Vrednosti koje se nalaze “najdalje” od procenjene vrednosti se mogu ukloniti, bez gubitka opštosti (njihova verovatnoća je najmanja). Standardna devijacija (https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_deviation) opisuje kako su greške raspodeljene (u opsegu oko srednje vrednosti).

$$u_A = \varepsilon \quad u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad \text{otkud kvadrat, koren i (n-1)?}$$

Merna nesigurnost tipa A – u_A

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Kako “stvarne” greške prilikom merenja mogu sa podjednakom verovatnoćom da imaju i pozitivan i negativan predznak, potrebno je uvesti način da one sa istim težinskim faktorom budu uračunate u ukupnu mernu nesigurnost.



Umesto n^2 , koristi se $n(n-1)$ zbog Beselove korekcije (https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel's_correction). Ovakva korekcija doprinosi većoj mernoj nesigurnosti, ali zato procena merne nesigurnosti ne zavisi od procene srednje vrednosti (za slučaj da nije unapred poznato odstupanje srednje vrednosti od populacije, već od uzorka).

Beselova korekcija u praksi

- Koristi se kada nije poznata “tačna” tj. nominalna vrednost za neko merenje.
- Ne koristi se kada je poznata “tačna” vrednost nekog merenja.
- => u 99.99% praktičnih slučajeva se koristi Beselova korekcija.
- Kada se računa u programskim jezicima postoje *sd()*, *std()* ili slične funkcije za računanje standardne devijacije tj. merne nesigurnosti tipa A i većina njih koristi Beselovu korekciju.

Python (“numpy” biblioteka)

Notes

The standard deviation is the square root of the average of the squared deviations from the mean, i.e.,

```
std = sqrt(mean(abs(x - x.mean())**2))
```

The average squared deviation is normally calculated as $x.\text{sum}() / N$, where $N = \text{len}(x)$. If, however, *ddof* is specified, the divisor $N - \text{ddof}$ is used instead. In standard statistical practice, *ddof=1* provides an unbiased estimator of the variance of the infinite population. *ddof=0* provides a maximum likelihood estimate of the variance for normally distributed variables. The standard deviation computed in this function is the square root of the estimated variance, so even with *ddof=1*, it will not be an unbiased estimate of the standard deviation per se.

Note that, for complex numbers, *std* takes the absolute value before squaring, so that the result is always real and nonnegative.

For floating-point input, the *std* is computed using the same precision the input has. Depending on the input data, this can cause the results to be inaccurate, especially for float32 (see example below). Specifying a higher-accuracy accumulator using the *dtype* keyword can alleviate this issue.

- U Python-u u “numpy” biblioteci se koristi *numpy.std()* funkcija.
- Slika je sa sajta: <https://docs.scipy.org/doc/numpy-1.13.0/reference/generated/numpy.std.html>.

Primer koda

```
Merenje je ponovljeno 10 puta.  
Srednja vrednost merenja je 0.965 sekundi.  
Merna nesigurnost tipa A je 0.0579750904364 sekundi.  
Merna nesigurnost tipa A je 0.055 sekundi.  
Koriscenjem numpy, sr. vr. je: 0.965  
Koriscenjem numpy, SD je 0.055  
>>> |
```

```
import numpy as np  
  
# promenljiva u koju se smeštaju učitane vrednosti  
mer = []  
  
# čitanje podataka iz fajla u promenljivu m  
f = open('C:/Users/Nadica Miljkovic/Desktop/merenja.txt', 'r')  
for line in f:  
    mer.append(float(line.strip()))  
  
N = len(mer)  
merSr = sum(mer) / len(mer)  
merSrN = np.zeros(N) + merSr  
sd1 = ( sum((mer-merSrN)**(2)) / (N - 1))**(0.5) # sa Beselovom korekcijom  
sd2 = ( sum((mer-merSrN)**(2)) / N)**(0.5)  
  
# osnovni parametri merenja  
print 'Merenje je ponovljeno ', N, ' puta.'  
print 'Srednja vrednost merenja je ', merSr, ' sekundi.'  
print 'Merna nesigurnost tipa A je ', sd1, ' sekundi.'  
print 'Merna nesigurnost tipa A je ', sd2, ' sekundi.'  
  
# korišćenje numpy biblioteke  
print 'Koriscenjem numpy, sr. vr. je: ', np.mean(mer)  
print 'Koriscenjem numpy, SD je', np.std(mer)
```

- Kod pod nazivom *racun.py* i *merenja.txt* je dostupan na sajtu predmeta 13E053MSR u delu Skripta za programabilnu instrumentaciju.
- Na gornjem panelu je prikazan i *Python Schell*.

A Arduino?

Statistic library

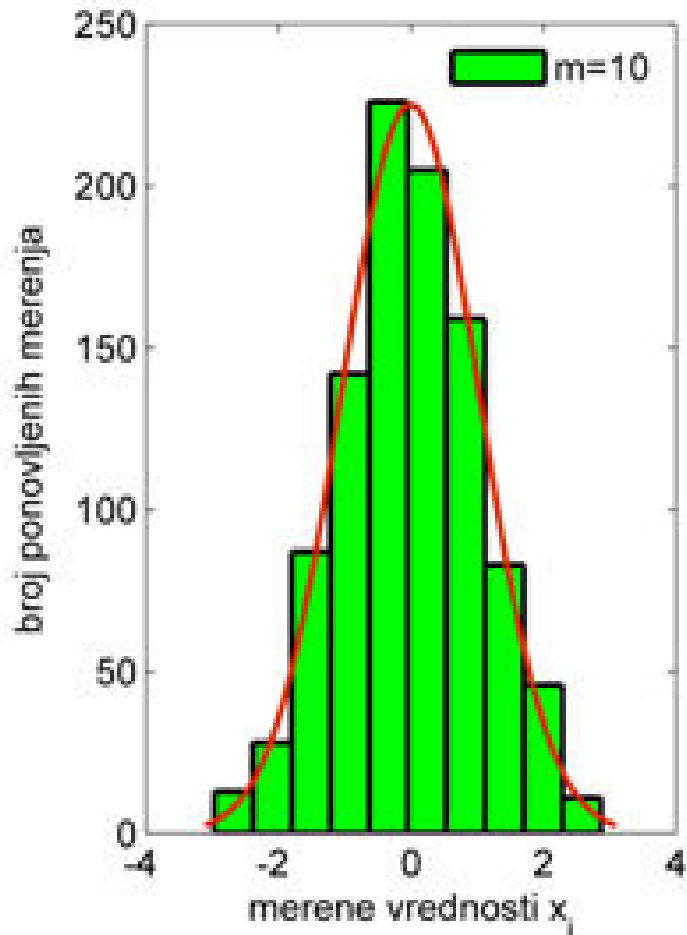
The Statistic library just calculates the average and stdev of a set of data(floats).

Furthermore it holds the minimum and maximum values entered. The interface consists of nine functions: (version 0.3.3 on Github)

```
Statistic();           // constructor
void clear();         // reset all counters
void add(double);     // add a new value
long count();        // # values added
double sum();         // total
double minimum();    // minimum
double maximum();    // maximum
double average();    // average
double pop_stdev();  // population std deviation
double unbiased_stdev(); // unbiased std deviation
```

- Postoji *Statistics* biblioteka za Arduino.
- Dostupna preko: <https://playground.arduino.cc/Main/Statistics>.
- Da li je sa Beselovom korekcijom *population* ili *unbiased*?
- Šta znači *population*?

Prikaz rezultata ponovljenih merenja



Ukoliko se merenje sprovodi tako da se veliki broj puta ponavlja isto merenje dobija se relativno veliki broj podataka koje treba na pogodan način prikazati.

Na ordinati se nalazi broj ishoda – merenja i na apscisi se nalaze merene vrednosti.

Analizom histograma, utvrđuje se koja je vrednost “najčešće” merena. Ovo je najverovatnije i vrednost najbliža tačnoj vrednosti.

Uobičajeno je da se rezultati prikazuju u formi histograma (<https://en.wikipedia.org/wiki/Histogram>).

Python kod

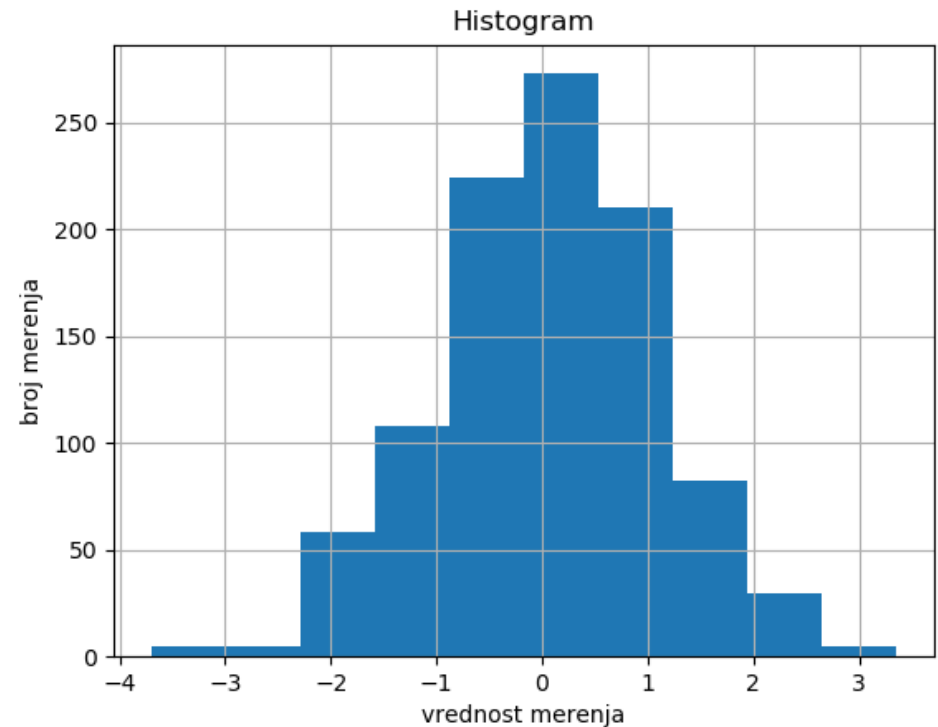
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# promenljiva u koju se smeštaju učitane vrednosti
mer = []

# čitanje podataka iz fajla
f = open('C:/Users/Nadica Miljkovic/Desktop/merenje2.txt', 'r')
for line in f:
    mer.append(float(line.strip()))

# korišćenje numpy biblioteke za osnovne parametre
print np.mean(mer)
print np.std(mer)

# prikaz histograma
plt.hist(mer)
plt.xlabel('vrednost merenja')
plt.ylabel('broj merenja')
plt.grid(True)
plt.title('Histogram')
plt.show()
```



- Prikaz histograma u Python-u primenom “matplotlib” biblioteke je prikaza na slici.
- Kod i signali se mogu naći na sajtu predmeta 13E053MSR.