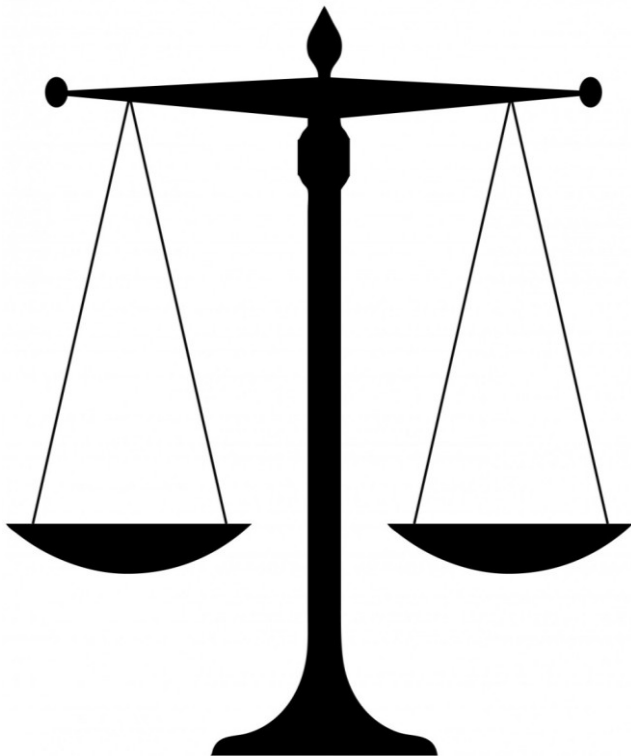


Merni sistemi u računarstvu 13E053MSR, <http://automatika.etf.rs/sr/13e053msr>

Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet, <http://www.etf.bg.ac.rs/>

Merna nesigurnost tipa A



Dr Nadica Miljković, vanrendi profesor, nadica.miljkovic@etf.rs

Zadaci prikazani u ovim materijalima su preuzeti iz [MIEM](#) udžbenika.

u Beogradu, decembar 2020. godine

Zadaci za rad sa rešenjima

1. Digitalnim multimetrom visoke tačnosti (merna nesigurnost tipa B se može zanemariti) izvršeno je po 10 uzastopnih merenja otpornosti dva otpornika R_1 i R_2 . Rezultati ova dva merenja dati su u tabeli 1 (pretpostaviti da oba merenja imaju Gausovu funkciju gustine verovatnoće).

Poznato je da je prilikom merenja jednog od ova dva otpornika korišćen priključak sa Kelvinovim kontaktima, a u drugom merenju nije. Na osnovu *Color Code* šeme proizvođača, poznato je da su nominalne vrednosti ova dva otpornika od $R_{nom1} = 820 \Omega$ i $R_{nom2} = 540 \Omega$. Potrebno je:

- Izračunati mernu nesigurnost tipa A za oba merenja i prikazati rezultat merenja za faktor proširenja $k = 2$.
- Koje merenje je preciznije, a koje merenje je tačnije?
- Koje merenje je izvršeno primenom Kelvinovih kontakta, a koje nije?
- Izračunati otpornost kablova u slučaju merenja bez Kelvinovih kontakta?

Tabela 1, Podaci izmereni prilikom 10 ponovljenih merenja otpornosti za otpornike R_1 i R_2 .

redni br. merenja	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
otpornost [Ω]	R_1	820.5	820.0	820.1	820.6	820.4	820.3	820.2	820.1	820.4	820.7
	R_2	547.9	546.9	547.1	547.6	547.3	547.0	547.1	547.8	547.6	547.7

Rešenje 1. zadatka:

Srednje vrednosti rezultata merenja za 10 ponovljenih merenja ($n = 10$) otpornosti su:

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{1i} = 820.33 \Omega$$

$$\bar{R}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{2i} = 547.40 \Omega$$

Standardne devijacije za oba merenja su:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((R_{1i} - R_{nom1})^2)} = 0.4 \Omega$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((R_{2i} - R_{nom2})^2)} = 7.4 \Omega$$

Standardne devijacije sa Beselovom korekcijom za oba merenja su:

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n ((R_{1i} - \bar{R}_1)^2)} = 0.23 \Omega$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n ((R_{2i} - \bar{R}_2)^2)} = 0.36 \Omega$$

Standardne devijacije srednje vrednosti (merna nesigurnost tipa A) je:

$$u_{A1} = \frac{s_1}{\sqrt{n}} = 0.07 \Omega$$

$$u_{A2} = \frac{s_2}{\sqrt{n}} = 0.12 \Omega$$

Za faktor proširenja $k = 2$ (u slučaju Gausove funkcije gustine verovatnoće, odgovarajuća verovatnoća je 95 %), dobija se sledeći rezultat merenja za otpornosti ova dva otpornika:

$$R_1 = 820.33 \pm 0.07 \Omega \text{ (ili u procentima } 820.33 \Omega \pm 0.01 \%)$$

$$R_2 = 547.40 \pm 0.12 \Omega \text{ (ili u procentima } 547.10 \Omega \pm 0.02 \%)$$

Merenje napona R_1 je preciznije jer je merna nesigurnost tipa A.

Postoji više načina da se prikaže rezultat merenja. Na primer, za R_1 :

1. $R_1 = 820.33 \Omega$ sa mernom nesigurnošću tipa A (u opštem slučaju sa ukupnom mernom nesigurnošću) $u_A = 70 \text{ m}\Omega$,
2. $R_1 = 820.33 (07) \Omega$ - ovde broj u zagradi označava numeričku vrednost merne nesigurnosti i odnosi se na poslednje dve cifre rezultata merenja,
3. $R_1 = 820.33 (0.07) \Omega$ - ovaj prikaz je sličan prethodnom prikazu rezultata merenja, sa razlikom što vrednost u zagradi označava vrednost merne nesigurnosti i
4. $R_1 = (820.33 \pm 0.07) \Omega$ - ovakav prikaz se vrlo često koristi kada se zahteva relativno visok interval poverenja.

U većini slučajeva, dovoljno je da se rezultat zaokruži na dve decimale, osim kada je merenje takvo da se zahteva veći broj decimala. Prilikom zaokruživanja merne nesigurnosti ima smisla da se zaokruživanje izvrši na veću vrednost. Isto tako, u nekim slučajevima brojna vrednost merne nesigurnosti diktira broj decimala u konačnom prikazu rezultata.

Apsolutne greške za ova dva merenja su:

$$\Delta_1 = |\bar{R}_1 - R_{nom1}| = 0.33 \Omega$$

$$\Delta_2 = |\bar{R}_2 - R_{nom2}| = 7.40 \Omega$$

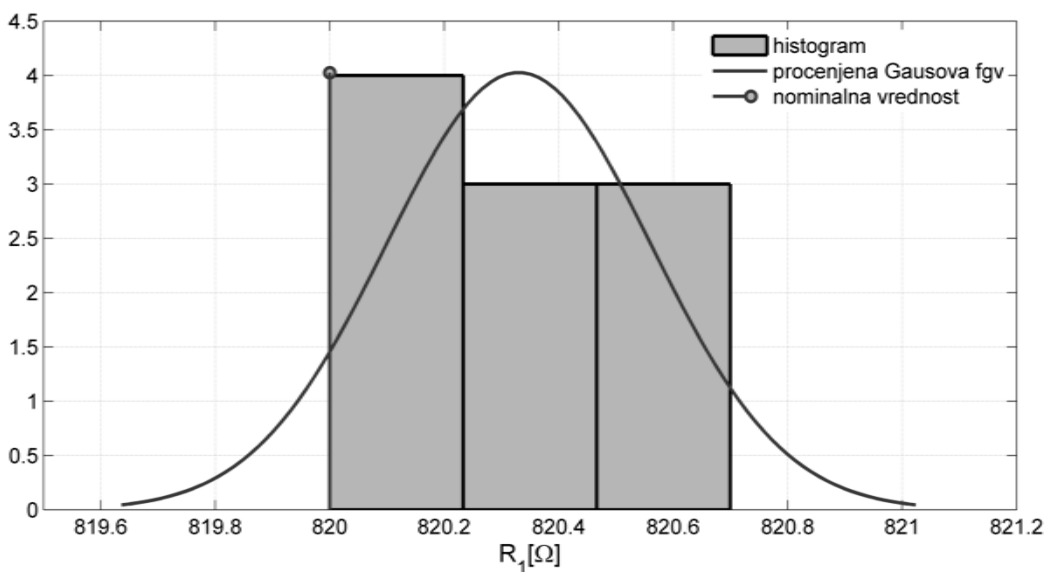
Relativne greške za ova dva merenja su:

$$r_1 = \frac{|\bar{R}_1 - R_{nom1}|}{R_{nom1}} = 0.0004 (0.04 \%)$$

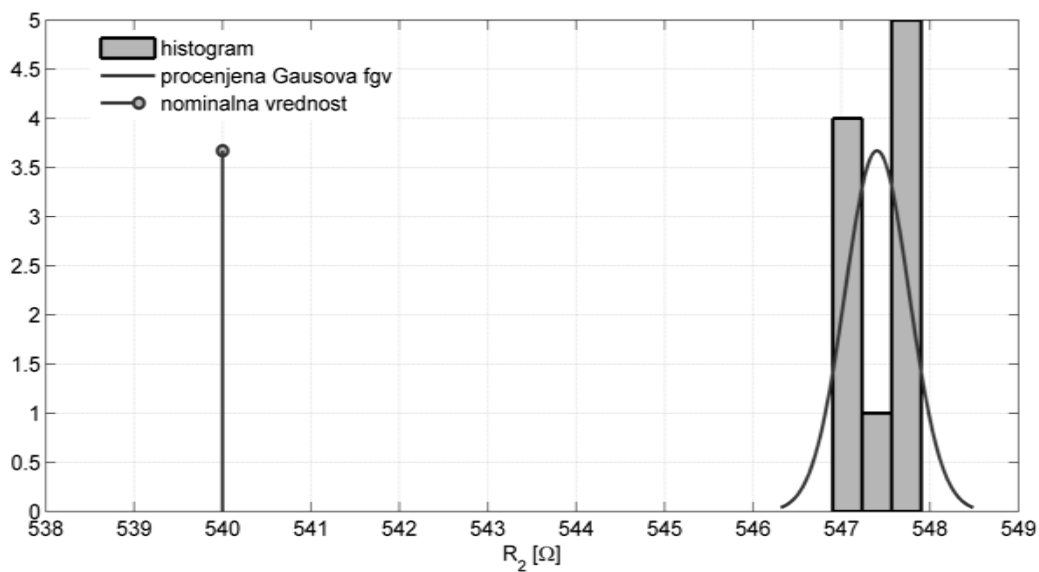
$$r_2 = \frac{|\bar{R}_2 - R_{nom2}|}{R_{nom2}} = 0.0137 \text{ (1.37 \%)}$$

Merenje otpornosti otpornika R_1 tačnije.

Dolazi se do zaključka da je merenje otpornosti otpornika R_2 izvršeno bez upotrebe Kelvinovih kontakta i da je otpornost kablova $2R_c$ jednaka apsolutnoj razlici Δ_2 tj. $R_c = \frac{\Delta_2}{2} = 3.7 \Omega$.



Sl. 1, Histogram za broj intervala $m = \sqrt{n} \approx 3$ i procenjena Gausova funkcija gustine verovatnoće (fgv) za merenje otpornosti otpornika R_1 .



Sl. 2, Histogram za broj intervala $m = \sqrt{n} \approx 3$ i procenjena Gausova funkcija gustine verovatnoće (fgv) za merenje otpornosti otpornika R_2 .

Šta ako se umesto Gausove raspodele pretpostavi uniformna raspodela? Ima smisla, zar ne?

Na histogramima na slikama 1 i 2, primetno je da merenja ne odgovaraju Gausovoj raspodeli.

U tom slučaju su granice uniformne funkcije gustine verovatnoće za merenje R_1 jednake: $a_1 = \min(R_{1i})$ i $b_1 = \max(R_{1i})$, a granice uniformne funkcije gustine verovatnoće za merenje R_2 su: $a_2 = \min(R_{2i})$ i $b_2 = \max(R_{2i})$. Matematičko očekivanje za uniformnu raspodelu je jednako poluširini raspodele, pa se za ova dva merenja dobijaju sledeći rezultati:

$$\mu_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 820.35 \Omega$$

$$\mu_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 547.40 \Omega$$

Standardna devijacija za uniformnu raspodelu je jednaka:

$$s_1 = \frac{b_1 - a_1}{\sqrt{12}} = 0.20 \Omega$$

$$s_2 = \frac{b_2 - a_2}{\sqrt{12}} = 0.29 \Omega$$

Ako bi se rezultat predstavio sa faktorom proširenja $k = 1$, onda bi verovatnoća (poverenje) koje bi bilo pripisano tom intervalu bilo jednako 57.7 %. Ove merne nesigurnosti su značajno veće nego u prvom slučaju kada je pretpostavljena Gausova raspodela.

2. Izvršeno je po 10 merenja pet referentnih napona U_1, U_2, U_3, U_4 i U_5 . Rezultati merenja su prikazani u tabeli 2. Nominalne vrednosti referentnih napona su poznate jer je korišćen izvor napona visoke preciznosti (čija se greška može zanemariti): $U_1 = 200$ mV, $U_2 = 400$ mV, $U_3 = 600$ mV, $U_4 = 800$ mV i $U_5 = 1$ V. Smatrati da je A / D konvertor visoke rezolucije i da je uticaj rezolucije A / D konvertora tj. merene nesigurnosti tipa B na merenje zanemarljiv.

Potrebno je izračunati mernu nesigurnost tipa A za svih pet merenja i uporediti dobijene merne nesigurnosti za svih pet napona.

Tabela 2, Vrednosti napona dobijene za 10 ponovljenih merenja.

redni br. merenja	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
napon [mV]	U_1	180.0	185.0	220.0	215.0	170.0	230.0	175.0	225.0	187.0	214.0
	U_2	385.0	415.0	390.0	410.0	395.0	405.0	388.0	412.0	393.0	407.0
	U_3	590.0	610.0	595.0	605.0	592.0	608.0	596.0	604.0	591.0	609.0
	U_4	795.0	805.0	796.0	804.0	795.0	805.0	797.0	803.0	800.0	797.0
	U_5	999.0	1001.0	998.0	1002.0	1000.0	999.5	1001.5	998.5	1002.5	1000.0

Rešenje 2. zadatka:

Pod pretpostavkom da je funkcija gustine verovatnoće Gausova, na slici 3 prikazani su histogrami sa procenjenim funkcijama gustine verovatnoće i sa nominalnim vrednostima za svih pet merenja.. Sa slike 2 se može primetiti da ne postoji nikakav značajni sistematski efekat.

Srednje vrednosti ovih napona su:

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{1i} = 200.1 \text{ mV}$$

$$\bar{U}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{2i} = 400.0 \text{ mV}$$

$$\bar{U}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{3i} = 600.0 \text{ mV}$$

$$\bar{U}_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{4i} = 799.7 \text{ mV}$$

$$\bar{U}_5 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{5i} = 1000.2 \text{ mV}$$

Standardne devijacije sa Beselovom korekcijom su:

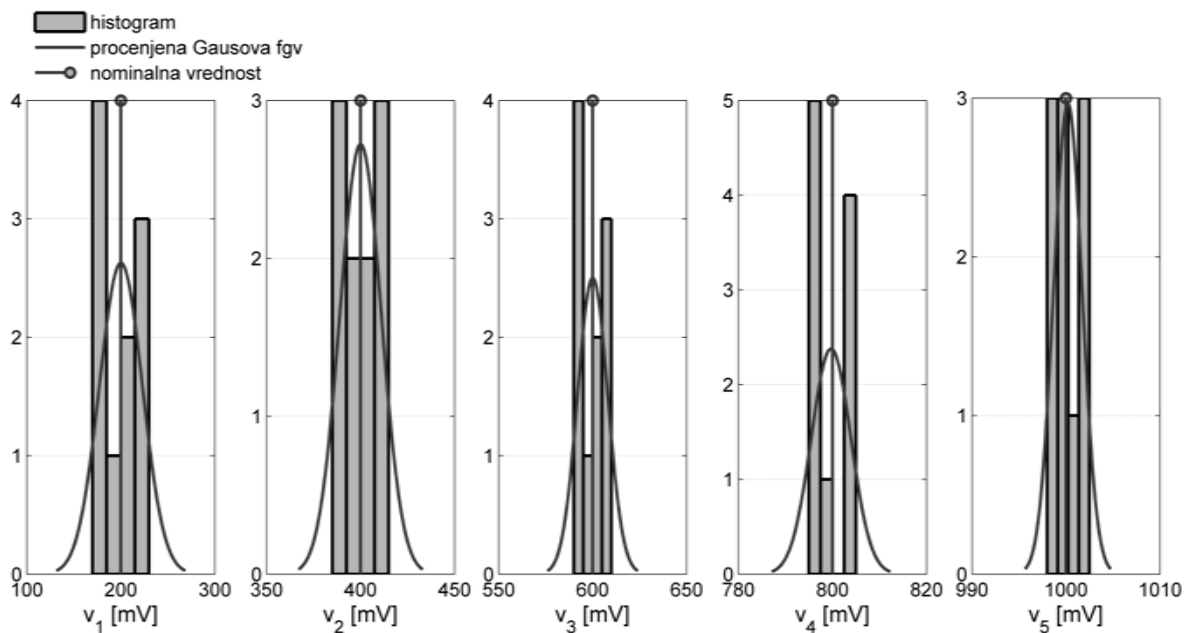
$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n ((U_{1i} - \bar{U}_1)^2)} = 22.77 \text{ mV}$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n ((U_{2i} - \bar{U}_2)^2)} = 10.98 \text{ mV}$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n ((U_{3i} - \bar{U}_3)^2)} = 7.97 \text{ mV}$$

$$s_4 = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n ((U_{4i} - \bar{U}_4)^2)} = 4.19 \text{ mV}$$

$$s_5 = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n ((U_{5i} - \bar{U}_5)^2)} = 1.51 \text{ mV}$$



Sl. 3, Histogrami, procenjene Gausove funkcije gustine verovatnoće (fgv) i nominalne vrednosti za pet ponovljenih merenja napona prilikom kalibracije A / D konvertora.

Za faktor proširenja $k = 1$ (interval statističkog poverenja koji odgovara ovom faktoru proširenja za pretpostavljenu Gausovu raspodelu je 68 %) rezultat svih 5 merenja je:

$$U_1 = (200.10 \pm 22.77) \text{ mV (11.4 \%)}$$

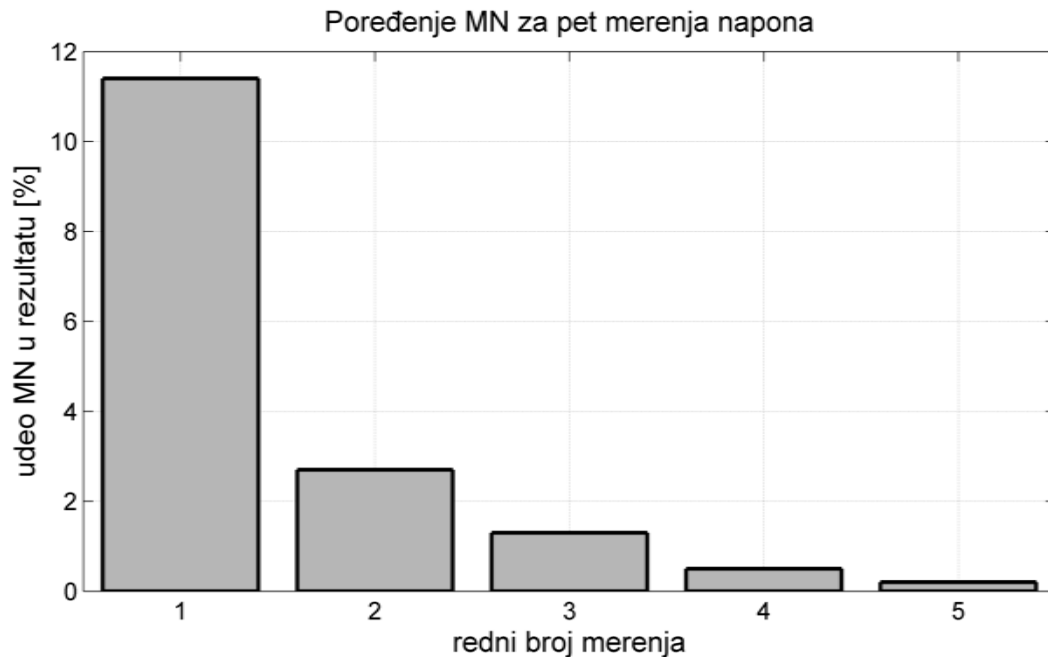
$$U_2 = (400.00 \pm 10.98) \text{ mV (2.7 \%)}$$

$$U_3 = (600.00 \pm 7.97) \text{ mV (1.3 \%)}$$

$$U_4 = (799.70 \pm 4.19) \text{ mV (0.5 \%)}$$

$$U_5 = (1000.20 \pm 1.51) \text{ mV (0.2 \%)}$$

Može se primetiti da je merna nesigurnost merenja napona datim A / D konvertorom veća za merenje manjih napona, a da se kasnije smanjuje kako se vrednost napona povećava (slika 4). Ovo je verovatno rezultat poboljšanog odnosa signal / šum prilikom merenja napona.



Sl. 4. Bar dijagram mernih nesigurnosti izraženih u procentima za ponovljenih pet merenja napona pri kalibraciji A / D konvertora.

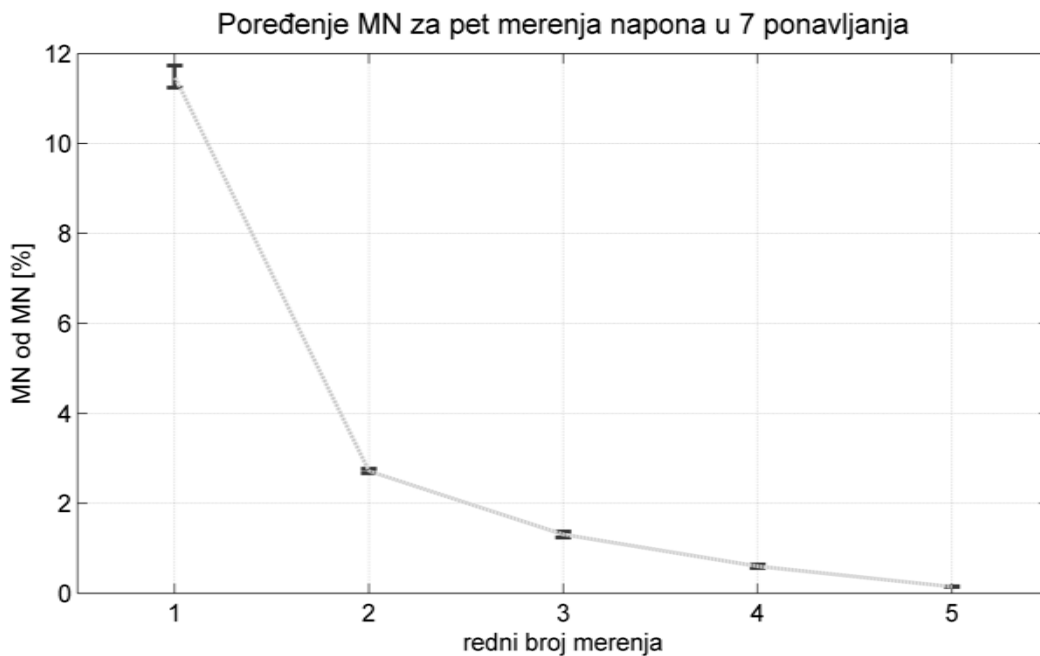
Jedna od posledica centralne granične teoreme je i ta što je raspodela srednjih vrednosti za neko ponovljeno merenje Gausova. Tako se prethodni primer može proširiti na slučaj u kome je procedura 10 ponovljenih merenja ponovljena još 6 puta i dobijeni rezultati su prikazani u tabeli 3.

Prema Centralnoj graničnoj teoremi i srednje vrednosti za 7 ponovljenih merenja imaju Gausovu raspodelu, pa se može odrediti i merna nesigurnost ovako ponovljenih merenja. Dalje, ako su merenja vršile različite institucije može se odabrati referentno merenje na osnovu merne nesigurnosti (bira se ono sa najmanjom mernom nesigurnošću).

Na slici 5 su prikazane merne nesigurnosti mernih nesigurnosti.

Tabela 3, Rezultati 10 ponovljenih merenja pet napona u procesu kalibracije A / D konvertora

redni br. merenja		1	2	3	4	5	6	7
napon [mV]	U_1	200.10 ± 22.77	200.20 ± 23.02	200.00 ± 22.64	200.15 ± 23.10	199.90 ± 22.81	199.85 ± 22.50	200.05 ± 24.00
	U_2	400.00 ± 10.98	400.10 ± 11.00	400.10 ± 10.64	399.90 ± 10.54	399.95 ± 11.10	400.08 ± 10.90	400.09 ± 10.92
	U_3	600.00 ± 7.97	601.10 ± 8.01	600.60 ± 8.05	600.20 ± 8.10	599.95 ± 6.96	599.90 ± 7.82	600.15 ± 8.01
	U_4	799.70 ± 4.19	800.10 ± 5.10	800.15 ± 4.67	800.14 ± 4.88	799.85 ± 5.13	801.00 ± 4.90	800.12 ± 4.71
	U_5	1000.20 ± 1.51	1000.10 ± 1.35	1000.15 ± 1.46	1000.12 ± 1.39	999.99 ± 1.53	1000.09 ± 1.44	1000.14 ± 1.52



Sl. 5, Error bar dijagram mernih nesigurnosti (MN) sa njihovom procenjenim mernim nesigurnostima izraženih u procentima za ponovljenih pet merenja prilikom 7 realizacija procedura merenja napona pri kalibraciji A / D konvertora.

Dakle, nekada ima smisla meriti mernu nesigurnost merne nesigurnosti!