

# UNIVERSITÉ — — PARIS-EST

THÈSE

présentée pour obtenir le diplôme de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST**

Spécialité : Géotechnique

par

**POONEH MAGHOUL**

Sujet de la thèse :

**SOLUTIONS FONDAMENTALES EN GÉO-PORO-MÉCANIQUE  
MULTIPHASIQUE POUR L'ANALYSE DES EFFETS DE SITE  
SISMIQUES**

Soutenue publiquement le 12 Novembre 2010 à l'École des Ponts ParisTech

devant le jury composé de :

|                       |                         |   |
|-----------------------|-------------------------|---|
| Rapporteurs :         | <b>Isam SHAHROUR</b>    | USTL1 de Lille                                  |
|                       | <b>Fabian DUDDECK</b>   | Technical University of Munich                  |
| Examineurs :          | <b>Ferri ALIABADI</b>   | Imperial College London                         |
|                       | <b>Hormoz MODARESSI</b> | Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, BRGM |
|                       | <b>Tom SCHANZ</b>       | Ruhr-Universität Bochum                         |
| Directeurs de thèse : | <b>Behrouz GATMIRI</b>  | U.R. Navier (ENPC), Université Paris-Est        |
|                       | <b>Denis DUHAMEL</b>    | U.R. Navier (ENPC), Université Paris-Est        |

préparée à

**l'Unité de recherche Navier (UMR 8205)**



*Je dédicace cette thèse*

*à mes parents, Sima et Behzad,*

*à mon seul frère, Pouya,*

*et à tous ceux qui me sont chers.*



---

# Remerciements

MA reconnaissance va en premier lieu à mon directeur de thèse, Monsieur Behrouz Gatmiri, qui a encadré et suivi mon travail avec intérêt depuis mes premiers pas dans le domaine de la recherche, du Master jusqu'à la fin de la thèse. J'ai eu la chance de travailler non seulement aux côtés d'un grand scientifique, mais aussi auprès d'une personne chaleureuse, dont j'aimerais saluer ici les qualités humaines. Merci de m'avoir appris un métier, d'avoir encouragé mes initiatives, de m'avoir fait confiance et soutenue dans les moments difficiles de ces années. J'espère un jour être capable de tirer pleinement profit de tous ses conseils.

Je voudrais exprimer ma gratitude envers Monsieur Denis Duhamel qui a co-encadré ma thèse. Je tiens à rendre hommage à ses qualités humaines et scientifiques.

J'adresse tous mes remerciements à Monsieur Hormoz Modaressi qui a présidé le jury de thèse, à Messieurs Isam Shahrour et Fabian Duddeck qui ont accepté de rapporter sur ma thèse ainsi que pour la richesse de leurs commentaires. Je remercie vivement Messieurs Ferri Aliabadi et Tom Schanz qui m'ont fait l'honneur de s'intéresser à mon travail et d'être membres de jury.

Cette thèse s'est déroulée successivement au sein du laboratoire Navier. Je tiens, donc, à remercier tous mes collègues et mes amis des trois équipes de géotechnique, de dynamique et de structure pour l'ambiance chaleureuse et pour les moments de convivialité. Un grand merci aussi à Monsieur Karam Sab qui m'a acceptée au sein de l'ancien LAMI.

Je voudrais particulièrement dire merci à Madame Marie-Françoise Kaspi qui m'a vraiment aidé durant cette période.

Je souhaiterais témoigner ma reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont formée, et en particulier, à tous mes professeurs au Lycée Farzanegan (Organisation nationale pour le développement des talents exceptionnels) en Iran qui m'ont donné l'envie d'explorer de nouveaux domaines, la volonté d'apprendre et la rage de chercher.

Toute ma gratitude à mon cher ami Mohamed Hammoud pour son amitié et pour m'avoir aidé

dans la corrections de mon manuscrit.

Je remercie profondément tous les amis qui m'ont épaulée pendant la longue épreuve qu'est la thèse, notamment Lina Bouhaya, Wafa Belhak, Chloé Arson, Sahar Radfar, Rabie Meftah, Navid Saeedi, Laurent Brochard, Salma Barboura, Hamideh Riseh, Mahsa Mozayan-Kharazi, Arézou Gatmiri, Azadeh Gatmiri et Mehdi Bahri. Merci pour vos encouragements, votre soutien et tous les moments très agréables que j'ai eus avec vous.

Ce travail est l'occasion de remercier mes parents et mon frère qui me sont les plus chers au monde. Je manque des mots pour vous exprimer ma gratitude et mon amour profond. Je vous dis tout simplement que sans vous, je n'aurais jamais réussi à arriver là où je suis. J'espère qu'un jour vous serez fiers de moi.

---

# Résumé

Ce travail de recherche se situe dans le cadre du développement de la méthode des éléments de frontière (BEM) pour les milieux poreux multiphasiques. À l'heure actuelle, l'application de la BEM aux problèmes des milieux poreux non-saturés est encore limitée, car l'expression analytique exacte de la solution fondamentale n'a pas été obtenue, ni dans le domaine transformé ni dans le domaine réel. Ceci provient de la complexité du système d'équations régissant le comportement des milieux poreux non-saturés.

Les développements de la BEM pour les sols non-saturés effectués au cours de cette thèse sont basés sur les modèles thermo-hydro-mécanique (THHM) et hydro-mécanique (HHM) présentés dans la première partie de ce mémoire. Ces modèles phénoménologiques basés sur la théorie de la poromécanique et les acquis expérimentaux sont obtenus dans le cadre du modèle mathématique présenté par Gatmiri (1997) et Gatmiri et al. (1998).

Après avoir présenté les modèles THHM et HHM, on établit pour la première fois les équations intégrales de frontière et les solutions fondamentales associées pour un milieu poreux non-saturé sous chargement quasi-statique pour les deux cas isotherme (2D dans le domaine de Laplace) et non-isotherme (2D et 3D dans les domaines de Laplace et temporel). Aussi, les équations intégrales de frontière ainsi que les solutions fondamentales 2D et 3D (dans le domaine de Laplace) pour le modèle dynamique couplé des sols non-saturés sont obtenues.

Ensuite, les formulations d'éléments de frontière (BEM) basées sur la *méthode quadrature de convolution* (MQC) concernant les milieux poreux *saturé* et *non-saturé* sous chargement quasi-statique isotherme et dynamique sont implémentées dans le code de calcul « HYBRID ». Ayant intégrées les formulations de BEM pour les problèmes de propagation d'ondes ainsi que pour les problèmes de consolidation dans les milieux poreux saturés et non-saturés, il semble que nous ayons fourni à l'heure actuelle le premier code de calcul aux éléments de frontière (BEM) qui modélise les différents problèmes dans les sols secs, saturés et non-saturés.

Une fois le code vérifié et validé, des études paramétriques portant sur des effets de site sismiques sont effectuées. Le but recherché est d'aboutir à un critère simple, directement exploitable par les ingénieurs, combinant les caractéristiques géométriques et les caractéristiques du sol, permettant de prédire l'amplification du spectre de réponse en accélération dans des vallées sédimentaires aussi bien que vides.

**Mots clés :** méthode des éléments de frontière, équation intégrale de frontière, solution fondamentale, sol non-saturé, milieux poreux multiphasique, comportement dynamique, comportement thermo-hydro-mécanique, consolidation



---

# Abstract

THE purpose of this dissertation is to develop a boundary element method (BEM) for multiphase porous media. At present, the application of the BEM in solving problems of unsaturated porous media is still limited, because no fundamental solution exists in the published literature, in either the frequency or the time domain. This lack of solution stems from the complexity of the coupled partial differential equations governing the behaviour of such media. The developments of the BEM for the unsaturated soils carried out during this thesis are based on the thermo-hydro-mechanical (THHM) and hydro-mechanical (HHM) models presented in the first part of this dissertation. The phenomenological models presented are based on poromechanical theory and experimental observations, and were obtained within the framework of the suction-based mathematical model presented by Gatmiri (1997) and Gatmiri et al. (1998).

After presentation of the THHM and HHM models, we establish for the first time the boundary integral equations (BIE) and the associated fundamental solutions for unsaturated porous media subjected to quasi-static loading for both isothermal (2D in the Laplace transform domain) and non-isothermal (2D and 3D in Laplace transform and time domain) cases. We also obtain the boundary integral equations as well as the fundamental solutions (2D and 3D in the Laplace transform domain) for the fully coupled dynamic model of unsaturated soils.

In the next step, the boundary element formulations (BEM) based on the convolution quadrature method (CQM) concerning saturated and unsaturated porous media subjected to isothermal quasi-static and dynamic loadings are implemented via the computer code « HYBRID ». Having integrated the BEM formulations for wave propagation, as well as for problems of consolidation in saturated and unsaturated porous media, we now appear to have obtained the first boundary element code that can model the various problems in dry, saturated and unsaturated soils.

Once the code is verified and validated, parametric studies on seismic site effects are carried out. The aim is to achieve a simple criterion directly usable by engineers, combining the topographical and geological characteristics of the soil, to predict the amplification of acceleration response spectra in sedimentary and hollow valleys.

**Keywords :** boundary element method, boundary integral equation, fundamental solution, unsaturated soil, multiphase porous medium, dynamic behaviour, thermo-hydro-mechanical behaviour, consolidation



---

# Table des matières

|   |            |
|---|------------|
| <b>Résumé</b>   | <b>v</b>   |
| <b>Abstract</b>   | <b>vii</b> |
| <b>Introduction générale</b>  | <b>1</b>   |
| <b>I Modélisation du Comportement des Sols Non Saturés sous Charge-<br/>ment Thermique et Dynamique</b> | <b>9</b>   |
| <b>1 Synthèse Bibliographique</b>   | <b>13</b>  |
| 1.1 Terminologie des sols non saturés . . . . .   | 13         |
| 1.1.1 Porosité partielle et degré de saturation . . . . .   | 13         |
| 1.1.2 Densité et Fraction de masse . . . . .  | 15         |
| 1.2 Sols non-saturés du point de vue mécanique . . . . .  | 17         |
| 1.2.1 Théorie des milieux poreux saturés . . . . .  | 17         |
| 1.2.2 Théorie des milieux poreux non-saturés . . . . .  | 18         |
| 1.2.2.1 Une seule contrainte effective ? . . . . .  | 18         |
| 1.2.2.2 Identification des variables d'état pour les sols non-saturés . .                               | 21         |
| 1.2.2.3 Variables conjuguées dans les sols non-saturés . . . . .  | 22         |
| 1.2.2.4 Surfaces d'état : . . . . .   | 25         |
| 1.2.2.5 Différentes théories : . . . . .  | 27         |
| <b>2 Modélisation thermo-hydro-mécanique des sols non-saturés</b>                                       | <b>29</b>  |

|         |  |    |
|---------|--|----|
| 2.1     | Bibliographie sur le transfert couplé de l'humidité et de la chaleur dans les milieux poreux non saturés . . . . . | 30 |
| 2.2     | Système d'équations . . . . .  | 33 |
| 2.2.1   | Squelette solide . . . . .   | 34 |
| 2.2.1.1 | Équation d'équilibre . . . . .   | 34 |
| 2.2.1.2 | Lois de comportement . . . . .   | 34 |
|         | Surface d'état de l'indice des vides . . . . .   | 36 |
|         | Surface d'état du degré de saturation . . . . .  | 37 |
| 2.2.2   | Eau (liquide et vapeur) . . . . .  | 38 |
| 2.2.2.1 | Transfert en phase liquide . . . . .   | 38 |
|         | Tension superficielle de l'eau . . . . .   | 40 |
|         | Coefficient de perméabilité à l'eau du milieu . . . . .  | 41 |
|         | Relations entre le coefficient de perméabilité à l'eau et le degré de saturation . . . . .                         | 42 |
|         | Relations entre le coefficient de perméabilité à l'eau et la succion . . . . .                                     | 44 |
|         | Relations entre le coefficient de perméabilité à l'eau et la température . . . . .                                 | 47 |
|         | Variation de la viscosité de l'eau en fonction de la température . . . . .   | 49 |
| 2.2.2.2 | Transfert de vapeur . . . . .  | 50 |
| 2.2.2.3 | Transfert total de l'humidité . . . . .  | 56 |
| 2.2.2.4 | Conservation de la masse d'humidité . . . . .  | 56 |
| 2.2.3   | Air . . . . .  | 57 |
| 2.2.3.1 | Transfert de l'air . . . . .   | 57 |
| 2.2.3.2 | Conservation de la masse d'air . . . . .   | 59 |
| 2.2.4   | Chaleur . . . . .  | 60 |
| 2.2.4.1 | Transfert de la chaleur . . . . .  | 60 |
|         | Transfert de chaleur par conduction dans le sol non saturé . . . . .   | 61 |
|         | conductivité thermique du sol . . . . .  | 61 |
|         | Transfert de chaleur par convection dans un sol non saturé . . . . .   | 63 |
|         | Capacité thermique volumique de sol non saturé . . . . .   | 64 |
|         | Transfert de chaleur latente dans le sol non saturé . . . . .  | 64 |
|         | Transfert total de chaleur dans le sol non saturé . . . . .  | 64 |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
|           | Conservation de l'énergie . . . . .   | 64        |
| <b>3</b>  | <b>Modélisation du comportement dynamique des sols non-saturés</b>                        | <b>67</b> |
| 3.1       | Concepts basiques et la cinématique . . . . .   | 69        |
| 3.1.1     | Déformation du squelette solide . . . . .   | 71        |
| 3.1.2     | Vecteur courant relatif de volume des fluides . . . . .                                   | 73        |
| 3.2       | Formulation eulérienne de la conservation de la masse . . . . .                           | 73        |
| 3.2.1     | Conservation de la masse de squelette solide . . . . .                                    | 73        |
| 3.2.2     | Conservation de la masse d'eau . . . . .  | 74        |
| 3.2.3     | Conservation de la masse d'air . . . . .  | 76        |
| 3.3       | Conservation de la quantité de mouvement . . . . .  | 76        |
| 3.4       | Équation d'écoulement de l'eau . . . . .  | 80        |
| 3.5       | Équation d'écoulement de l'air . . . . .  | 80        |
| 3.6       | Loi de comportement du squelette solide . . . . .   | 81        |
| 3.6.1     | Surface d'état de l'indice des vides . . . . .  | 82        |
| 3.6.2     | Surface d'état du degré de saturation . . . . .   | 83        |
| 3.7       | Résumé des équations . . . . .  | 84        |
| 3.8       | Conclusion . . . . .  | 85        |
| <b>II</b> | <b>Méthode des Éléments de Frontière en Milieu Poreux</b>                                 | <b>87</b> |
| <b>4</b>  | <b>Bibliographie</b>  | <b>89</b> |
| 4.1       | BEM pour l'élastodynamique . . . . .  | 91        |
| 4.2       | BEM pour la poroélasticité . . . . .  | 93        |
| 4.3       | Solution fondamentale . . . . .   | 94        |
| <b>5</b>  | <b>Équations intégrales de frontière et solutions fondamentales pour les sols saturés</b> | <b>97</b> |
| 5.1       | Théorie des milieux poreux saturés . . . . .  | 97        |
| 5.2       | Problèmes dynamiques . . . . .  | 99        |
| 5.2.1     | Théorie de Biot : Système d'équations . . . . .   | 99        |
| 5.2.2     | Solutions fondamentales . . . . .   | 103       |
| 5.2.2.1   | Idée centrale dans la méthode de Hörmander . . . . .                                      | 104       |
| 5.2.2.2   | Solutions fondamentales pour la poroélastodynamique . . . . .                             | 105       |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 5.2.3    | Équations intégrales de frontière pour la poroélastodynamique . . . . .  | 109        |
| 5.3      | Problèmes quasi-statiques . . . . .  | 118        |
| 5.3.1    | Système d'équations de champs . . . . .  | 118        |
| 5.3.2    | Solutions fondamentales . . . . .  | 119        |
| 5.3.3    | Équations intégrales de frontière . . . . .  | 120        |
| <b>6</b> | <b>Équations intégrales de frontière et solutions fondamentales pour les sols non-saturés</b>                                | <b>125</b> |
| 6.1      | Problèmes dynamiques . . . . .   | 125        |
| 6.1.1    | Système d'équations de champs . . . . .  | 126        |
| 6.1.2    | Équations intégrales de frontière pour l'analyse du comportement dynamique des sols non saturés . . . . .                    | 128        |
| 6.1.3    | Solutions fondamentales pour l'analyse du comportement dynamique des sols non saturés . . . . .                              | 131        |
| 6.1.4    | Comportement singulier des solutions fondamentales . . . . .   | 146        |
| 6.1.5    | Vérification analytique des solutions fondamentales . . . . .  | 151        |
| 6.1.6    | Visualisation des solutions fondamentales 2D . . . . .   | 153        |
| 6.2      | Problèmes quasi-statiques isothermes . . . . .   | 157        |
| 6.2.1    | Système d'équations de champs . . . . .  | 157        |
| 6.2.2    | Équations intégrales de frontière pour l'analyse du comportement quasi-statique des sols non saturés . . . . .               | 159        |
| 6.2.3    | Solutions fondamentales pour l'analyse du comportement quasi-statique des sols non saturés . . . . .                         | 160        |
| 6.2.4    | Vérification analytique des solutions fondamentales . . . . .  | 171        |
| 6.2.5    | Illustration des solutions fondamentales . . . . .   | 172        |
| 6.3      | Problèmes quasi-statiques non-isothermes . . . . .   | 175        |
| 6.3.1    | Système d'équations de champs . . . . .  | 175        |
| 6.3.2    | Équations intégrales de frontière pour l'analyse du comportement quasi-statique non-isotherme des sols non saturés . . . . . | 179        |
| 6.3.3    | Solutions fondamentales pour l'analyse du comportement quasi-statique non-isotherme des sols non saturés . . . . .           | 183        |
| 6.3.3.1  | Solutions fondamentales dans le domaine de Laplace . . . . .   | 183        |
| 6.3.3.2  | Solutions fondamentales dans le domaine temporel . . . . .   | 190        |
| 6.3.4    | Vérification analytique des solutions fondamentales . . . . .  | 195        |

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| 6.3.4.1    | Cas limite : solutions fondamentales thermo-hydro-mécaniques à l'état stationnaire . . . . .     | 195        |
| 6.3.4.2    | Cas limite : solutions fondamentales hydro-mécaniques à l'état stationnaire . . . . .            | 198        |
| 6.3.4.3    | Cas limite : solutions fondamentales élasto-statiques . . . . .                                  | 199        |
| 6.3.5      | Validation des solutions fondamentales THHM quasi-statiques 2D . . . . .                         | 200        |
| 6.3.6      | Quelques résultats numériques pour les solutions fondamentales 3D . . . . .                      | 201        |
| 6.3.7      | Illustration des solutions fondamentales 2D et 3D . . . . .                                      | 206        |
| <b>7</b>   | <b>Mise en œuvre numérique de la méthode des éléments de frontière</b>                           | <b>213</b> |
| 7.1        | Discrétisation dans le temps : Méthode Quadrature de Convolution (MQC) . . . . .                 | 214        |
| 7.1.1      | Test numérique . . . . .   | 219        |
| 7.2        | Discrétisation dans l'espace . . . . .   | 221        |
| 7.2.1      | Discrétisation de la géométrie et interpolation des variables . . . . .                          | 221        |
| 7.2.2      | Technique d'assemblage du système d'équations . . . . .  | 224        |
| 7.2.3      | Évaluation numérique des intégrales élémentaires . . . . .                                       | 228        |
| 7.2.3.1    | Intégrales élémentaires régulières . . . . .   | 228        |
| 7.2.3.2    | Intégrales élémentaires singulières . . . . .  | 232        |
|            | Translation du corps rigide . . . . .  | 234        |
| <b>III</b> | <b>Algorithmique et Programmation</b>  | <b>239</b> |
| <b>8</b>   | <b>Code de calcul « HYBRID »</b>   | <b>241</b> |
| 8.1        | Architecture du code « HYBRID » . . . . .  | 242        |
| 8.1.1      | Acquisition des données de base et dimensionnement des variables de stockage dynamique . . . . . | 244        |
| 8.1.2      | Initialisation des variables . . . . .   | 246        |
| 8.1.3      | Constitution du vecteur de forces nodales externes . . . . .                                     | 247        |
| 8.1.4      | Construction de la matrice de rigidité et des vecteurs de forces de la zone BEM . . . . .        | 248        |
| 8.1.5      | Construction de la matrice de rigidité et des vecteurs de forces de la zone FEM . . . . .        | 251        |
| 8.1.6      | Constitution du vecteur global des forces nodales . . . . .                                      | 253        |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 8.1.7 | Résolution du système . . . . .  | 253 |
| 8.1.8 | Traitement des résultats, mise à jour des données . . . . .  | 253 |
| 8.2   | Subroutines spécifiques ajoutées dans HYBRID pour modéliser les différents phénomènes dans les milieux poreux saturés et non-saturés . . . . . | 261 |
| 8.3   | Validation du code « HYBRID » . . . . .  | 265 |
| 8.3.1 | Problème de consolidation dans les sols saturés . . . . .  | 265 |
| 8.3.2 | Problème de propagation d'ondes 2D dans les sols saturés . . . . .   | 269 |
| 8.3.3 | Comparaison avec le cas élastostatique . . . . .   | 270 |
| 8.3.4 | Comparaison avec le cas élastodynamique . . . . .  | 273 |

## **IV Application aux Calculs Sismiques 275**

### **9 Effets topographiques et sédimentaires sur l'amplification d'un mouvement sismique 277**

|         |  |     |
|---------|--|-----|
| 9.1     | Introduction et bibliographie . . . . .                      | 277 |
| 9.1.1   | Généralité sur les Effets de site . . . . .                  | 277 |
| 9.1.1.1 | Effets de site dans les remplissages sédimentaires . . . . . | 279 |
|         | Effet de site stratigraphique 1D . . . . .                   | 280 |
|         | Effet de bassin sédimentaire 2D . . . . .                    | 284 |
| 9.1.1.2 | Effets de site topographiques . . . . .                      | 290 |
| 9.1.2   | Importance des effets de site en ingénierie . . . . .        | 294 |
| 9.1.3   | Méthodes pour estimer les effets de site . . . . .           | 296 |
| 9.1.3.1 | Enregistrement de signaux sismiques . . . . .                | 298 |
|         | Microtremors (Micro-vibrations) . . . . .                    | 298 |
|         | Séismes de faible intensité . . . . .                        | 298 |
|         | Séismes de forte intensité . . . . .                         | 299 |
| 9.1.3.2 | Solutions analytiques . . . . .                              | 299 |
| 9.1.3.3 | Méthodes numériques . . . . .                                | 299 |
|         | Méthode des différences finies . . . . .                     | 300 |
|         | Méthode des éléments finis (FEM) . . . . .                   | 300 |
|         | Méthode des éléments de frontière (BEM) . . . . .            | 300 |
|         | Méthodes hybrides . . . . .                                  | 300 |

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| 9.2     | Spectre de réponse spécifique d'un site . . . . .   | 301 |
| 9.2.1   | Équation du mouvement . . . . .   | 302 |
| 9.3     | Modélisation numérique . . . . .  | 303 |
| 9.3.1   | Type de sollicitation . . . . .   | 303 |
| 9.3.2   | Propriétés des matériaux . . . . .  | 303 |
| 9.3.3   | Caractéristiques géométriques . . . . .   | 305 |
| 9.3.4   | Méthode d'étude . . . . .   | 305 |
| 9.4     | Étude de l'effet de site topographique dans les vallées vides . . . . .   | 307 |
| 9.4.1   | Domaine d'influence de l'effet topographique dans les vallées vides . . . . .   | 311 |
| 9.4.2   | Quantification de l'effet topographique dans les vallées vides . . . . .  | 311 |
| 9.4.2.1 | Géométries non-courbes (triangle, trapèzes et rectangles) . . . . .   | 311 |
| 9.4.2.2 | Géométries courbes (ellipses et ellipses tronquées) . . . . .   | 313 |
| 9.5     | Étude des effets combinés topographiques et géologiques dans les bassins sédimentaires 2D . . . . .                       | 313 |
| 9.5.1   | Cas d'une couche de sol unidimensionnelle . . . . .   | 314 |
| 9.5.1.1 | Période du site $T_s$ . . . . .   | 314 |
| 9.5.1.2 | Rapport spectral . . . . .  | 316 |
| 9.5.2   | Cas bidimensionnel . . . . .  | 317 |
| 9.5.2.1 | Vallées pleines . . . . .   | 317 |
|         | Comparaison des effets combinés et 1D dans les vallées pleines  | 318 |
| 9.5.2.2 | Vallées semi-pleines . . . . .  | 323 |
|         | Évolution spatiale . . . . .  | 323 |
|         | Point de contact sédiments/substratum . . . . .   | 325 |
|         | Point central de la vallée . . . . .  | 325 |
|         | Période du site . . . . .   | 326 |
|         | Rapport spectral . . . . .  | 329 |
| 9.6     | Conclusion . . . . .  | 330 |
| 9.6.1   | Définition d'un critère clair pour l'effet topographique dans une vallée vide . . . . .                                   | 331 |
| 9.6.2   | Définition d'un critère clair pour l'effet combiné aux différents points superficiels d'une vallée sédimentaire . . . . . | 332 |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Conclusions et Perspectives</b>  | <b>335</b> |
| <b>A Détail du calcul des solutions fondamentales pour les sols non-saturés soumis aux chargements dynamiques</b>                     | <b>341</b> |
| A.1 Dérivées partielles de $\Phi(r, s)$ . . . . .   | 341        |
| A.2 Coefficients des termes adjoints $C_i^{mn}$ . . . . .   | 345        |
| <b>B Détail du calcul des solutions fondamentales pour les sols non-saturés soumis aux chargements quasi-statiques</b>                | <b>347</b> |
| B.1 Dérivées partielles de $\phi(r, s)$ et $\Phi(r, s)$ . . . . .   | 347        |
| <b>C Détail du calcul des solutions fondamentales pour les sols non-saturés soumis aux chargements non-isothermes quasi-statiques</b> | <b>349</b> |
| C.1 Coefficients de l'équation du déterminant $D_m$ . . . . .   | 349        |
| C.2 Coefficients des éléments de la matrice des cofacteurs $B_i$ . . . . .  | 350        |
| C.3 Application de la matrice d'opérateur $\mathbf{B}^{co}$ à la solution scalaire $\phi(r, s)$ . . . . .                             | 355        |
| C.4 Fonctions intermédiaires $\Omega_{kl}^{nD}$ . . . . .   | 360        |
| C.5 Fonctions intermédiaires $\psi_{kl}^{nD}$ . . . . .   | 362        |
| <b>D Triplet de courbes <math>SA, SA_R</math> et <math>SR</math> pour les différentes vallées vides</b>                               | <b>365</b> |
| <b>E Triplet de courbes <math>SA, SA_R</math> et <math>SR</math> pour les différentes vallées pleines</b>                             | <b>371</b> |
| <b>F Valeurs du paramètre <math>S_1/\alpha\sqrt{\alpha}</math> pour les différentes configurations étudiées</b>                       | <b>377</b> |
| <b>Références bibliographiques</b>  | <b>379</b> |

---

# Introduction générale

DE nombreux problèmes concernant les sols non-saturés sont rencontrés dans beaucoup d'applications géo-environnementales. Par exemple, à côté des ouvrages en terre construits en sol compacté (remblais routiers, barrages en remblai, digues), on sait que la stabilité des talus est souvent conditionnée par l'état de non-saturation du massif. Les fondations superficielles peuvent être affectées, comme le montre le cas extrême des dégâts causés aux bâtiments par les effets de la sécheresse. Les excavations en zone urbaine et les ouvrages de soutènements peuvent aussi être concernés [97].

Le mouvement simultané de l'humidité et de la chaleur est un des phénomènes principaux observés dans les milieux poreux sous condition non-isotherme. Ce phénomène est important par rapport à plusieurs problèmes, y compris la dissipation de la chaleur produite par les câbles à haute tension enterrés, l'extraction du pétrole ou de l'énergie géothermique, les remblais routiers et les fondations des chaussées soumis à des cycles thermiques, l'échauffement dû au frottement au niveau des failles dans le sol ou des formations rocheuses et le stockage des déchets radioactifs, etc. Le mouvement de l'humidité provoqué par la chaleur peut mener à des modifications des propriétés thermiques et mécaniques du sol. Ceci peut par la suite affecter le fonctionnement du sol par rapport à son but prévu. Les transferts d'humidité et d'énergie dans les milieux poreux non-saturés sont fortement couplés en raison de la dépendance exclusive de la pression de vapeur saturante à la température. La présence d'un gradient thermique induit des gradients concomitants dans la densité et dans la pression de vapeur qui la font se déplacer dans la direction de la température décroissante par une combinaison de diffusion et d'écoulement de gaz [277]. Cela nécessite une meilleure compréhension du comportement thermo-hydro-mécanique (THHM) des milieux poreux multiphasiques et des couplages entre trois mécanismes : thermique, hydrique et mécanique.

Également, l'étude du comportement dynamique des milieux poreux non-saturés isotherme est un champ relativement nouveau dans le domaine du génie parasismique. La mesure précise de diverses quantités telles que les pressions dynamiques de l'eau et de l'air, et le degré de saturation dans les sols partiellement saturés est une tâche difficile au cours des chargements dynamiques [282]. La propagation des ondes dans les sols non-saturés dans les régions arides et la réponse dynamique de tels milieux sont de grand intérêt dans la géophysique.

Biot [39, 41] a développé la théorie de propagation des ondes dans les milieux poreux saturés pour les deux gammes des basses fréquences et des hautes fréquences. Parmi les résultats importants de la théorie de Biot se situe l'identification de trois types d'ondes de volume : la première onde de compression ( $P_1$ ), la seconde onde de compression connue sous le nom d'onde lente ( $P_2$ ) et l'onde de cisaillement  $S$ . En ce qui concerne la théorie de propagation des ondes dans les milieux poreux non-saturés, Berryman [31] a étudié la théorie de Biot pour de tels milieux. Il a démontré que si la longueur d'onde est suffisamment grande pour que les changements de pression engendrés dans le liquide et dans le gaz dus à la propagation d'onde soient égaux, la théorie de Biot est valable et les trois types d'ondes de volume se propagent alors dans le milieu. Muraleetharan et Wei [257], en utilisant la *théorie des mélanges avec des interfaces* (TMI) pour modéliser le comportement dynamique des milieux poreux non-saturés, ont prédit l'existence d'une troisième onde de compression  $P_3$  (c.-à-d., une deuxième onde lente). Cela est due aux forces capillaires existantes dans les espaces poreux.

Quand un séisme se produit par la rupture d'une faille en profondeur, les ondes sismiques sont rayonnées par la source et se propagent rapidement dans la croûte terrestre. Durant leur parcours de la source du séisme jusqu'à la surface du sol, les ondes sismiques traversent en grande majorité de la roche. Mais, la portion finale de ce voyage est souvent effectuée dans le sol dont les caractéristiques peuvent beaucoup influencer la nature de la secousse à la surface. Dans le cas des sols non-saturés, les ondes sismiques arrivées à la surface sont affectées par le degré de saturation et la distribution spatiale des fluides (eau et air) dans le milieu. Également, les études expérimentales sur les irrégularités topographiques montrent l'existence de variations dans l'amplitude et le contenu fréquentiel de la réponse du sol le long des pentes des collines. En bref, le mouvement sismique induit en surface d'un site donné dépend de la magnitude du séisme (l'énergie produite par la source), mais aussi du chemin parcouru dans la lithosphère (aléa régional) et des conditions locales (aléa local). L'aléa local ou l'*effet de site* signifie la modification du mouvement sismique en surface due aux conditions géotechniques et topographiques locales d'un site par rapport au mouvement d'un site voisin correspondant à des conditions de référence. L'endommagement peut être très variable à l'intérieur d'une zone peu étendue, et des dommages importants peuvent toucher des sites éloignés de la source du séisme. Parfois cela peut être en raison des différents types de construction, mais, dans certains cas, les conditions topographiques et géotechniques du site ont joué leur rôle dans la destruction des bâtis. C'est la raison pour laquelle on voit souvent un bâtiment lourdement endommagé à proximité d'un bâtiment de construction quasiment similaire qui n'a pas été autant affecté.

Malgré le rôle important des effets de site locaux dans la conception parasismique, c'est seulement dans ces dernières années que ce problème est devenu l'objet d'une discussion. Effectivement, les coefficients spécifiques représentant les effets de site locaux ne sont apparus dans les codes de construction des bâtiments que dans les années 1970. Les codes de dimensionnement parasismiques actuels comme l'Eurocode 8 ou le PS 92/5.2.4 reposent sur

des calculs issus de modèles unidimensionnels. Cette méthode permet de mesurer l'influence de la nature et de l'épaisseur de la couche sédimentaire sur la propagation verticale des ondes de volume en multipliant l'accélération spectrale attendue du sol par un coefficient dépendant de la raideur des matériaux, de l'épaisseur de la couche de sédiments mous et de la vitesse de l'onde de cisaillement. Cependant, ces résultats ne concordent pas avec les estimations fournies par des modélisations bidimensionnelles ou tridimensionnelles comportant l'influence des conditions topographiques et géologiques sur le mouvement sismique et sur le contenu fréquentiel. Lorsque le contraste d'impédance entre le sédiment et le substratum ou la profondeur de la vallée alluviale augmente, la résonance verticale 1D des ondes de volume et la propagation latérale des ondes de surface tendent à intervenir simultanément [24]. Par conséquent, la prise en compte des effets de site bidimensionnels dans les codes parasismiques, d'une manière simple et utilisable par les ingénieurs et les praticiens, nous semble indispensable.

La complexité du système d'équations, gouvernant le comportement couplé entre le champ de déplacement et le champ scalaire de pression (et/ou de température) dans un milieu poreux (qu'il soit saturé ou non-saturé), exclut la dérivation de solutions analytiques (sauf dans les cas les plus simples). Plus généralement, l'utilisation des méthodes numériques est incontournable. Également, pour l'analyse des effets de site comme les phénomènes de propagation d'ondes sismiques présentent des aspects particuliers (par exemple, la diffraction d'ondes, le rayonnement d'ondes à l'infini), il est souvent indispensable de procéder à des simulations numériques.

La méthode numérique la plus populaire appliquée aux problèmes de l'ingénierie est la méthode des éléments finis (FEM). La FEM s'est avérée être souvent nécessaire, parfois indispensable, pour modéliser le comportement hétérogène, non-élastique et non-linéaire des domaines bornés ou à géométrie complexe. Cependant, cette méthode se montre mal adaptée au calcul de la propagation d'ondes dans les milieux infinis ou semi-infinis en raison de la réflexion d'ondes sur les limites du milieu discrétisé. Toutefois, pour modéliser ces problèmes par la méthode des éléments finis, on est contraint de faire appel à une troncature artificielle, qui provoque des réflexions des ondes sur les bords du maillage FE (réflexions parasites) pouvant compromettre gravement la précision du résultat. En régime transitoire, le maillage doit s'élargir suffisamment pour éviter ces ondes parasites, ce qui augmente considérablement la taille du modèle et rend le coût des calculs prohibitifs. En régime stationnaire, l'extension du maillage n'est même pas applicable ; la totalité du domaine d'étude est affectée par des ondes parasites. Pour résoudre ce problème, des techniques spéciales telles que les frontières absorbantes peuvent être appliquées [229, 338]. D'autres techniques, telle que la méthode nommée « *cellule EF infiniment cohérent* » ne peuvent pas être utilisées pour l'analyse dynamique non-linéaire en raison de leur inconvénient majeur d'être formulées dans les domaines transformés.

D'autre part, la méthode des éléments de frontière (BEM) possède une assise solide dans le domaine des méthodes numériques pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Dans cette méthode, la discrétisation numérique est effectuée avec une dimension spatiale réduite.

Par exemple, pour des problèmes en trois dimensions spatiales, la discrétisation est seulement effectuée sur la surface de la frontière ; tandis que pour des problèmes en deux dimensions spatiales, elle se fait seulement sur le contour de la frontière. Cette dimension réduite mène à de petits systèmes linéaires, à de moindre d'exigences de mémoire d'ordinateur, et à un calcul plus efficace. Cet effet est plus prononcé lorsque le domaine est non borné. Cette méthode est particulièrement performante, par rapport à la méthode des éléments finis, pour traiter des problèmes extérieurs (infinis ou semi-infinis) et des domaines variables ou inconnus (propagations de fissures). Un autre avantage est que la BEM modélise automatiquement les conditions à l'infini sans qu'il soit nécessaire de déployer un maillage. Autrement dit, la condition de rayonnement de Sommerfeld en utilisant la méthode des éléments de frontière sera implicitement satisfaite, ce qui est très utile pour l'analyse de propagation d'ondes dans un domaine semi-infini.

Afin de modéliser un problème mécanique par la méthode des éléments de frontière, en utilisant la formulation des équations intégrales, les solutions fondamentales (qui sont la réponse du milieu infini soumis à une force ponctuelle, unitaire et impulsionnelle, exercée en un point dans ce milieu) pour les équations aux dérivées partielles gouvernant le comportement du milieu, doivent premièrement être obtenues. Ceci peut être considéré comme étant un grand inconvénient de la BEM, car tenter de résoudre numériquement les problèmes aux valeurs limites en utilisant la méthode des éléments de frontière mène à faire des développements analytiques et à chercher des solutions fondamentales associées. C'est pourquoi il est difficile de modéliser les milieux complexes comme les sols saturés/non-saturés ou les comportements inélastiques et non-linéaires par cette méthode.

Par conséquent, il est souvent indispensable de modéliser par la méthode des éléments finis (FEM) une partie bornée du domaine comprenant une partie du sol infini de façon à prendre en compte la non-linéarité du comportement et l'hétérogénéité des propriétés des couches du sol comme un milieu poreux et de modéliser la partie semi-infinie par la méthode des éléments de frontière (BEM). Une combinaison des méthodes des éléments finis et des éléments de frontière (FEM/BEM) s'impose alors, car cette méthode hybride bénéficie des avantages des deux méthodes de manière efficace et optimale.

Ce travail de thèse vise à développer la méthode des éléments de frontière (BEM) pour les milieux poreux multiphasiques. À l'heure actuelle, l'application de la BEM aux problèmes des milieux poreux non-saturés est encore limitée, car l'expression analytique exacte de la solution fondamentale n'a pas été publiée, ni dans le domaine fréquentiel ni dans le domaine temporel. Ceci provient de la complexité du système d'équations régissant le comportement des milieux poreux non-saturés.

Sur le plan théorique, on a établi pour la première fois les équations intégrales de frontière et les solutions fondamentales associées pour un milieu poreux non-saturé sous chargement quasi-statique pour les deux cas isotherme (2D dans le domaine de Laplace) et non-isotherme (2D et 3D dans les domaines de Laplace et temporel) [161, 231, 232, 235, 239]. Aussi, les

équations intégrales de frontière ainsi que les solutions fondamentales 2D et 3D (dans le domaine de Laplace) pour le modèle dynamique couplé des sols non-saturés décrit en termes de déplacement et de pressions interstitielles de l'eau et de l'air ( $u_i - p_w - p_a$ ) sont obtenues [233, 234, 238, 240].

Sur le plan numérique, les formulations 2D concernant les milieux poreux *saturé* et *non-saturé* sous chargement quasi-statique isotherme et dynamique développées dans ce travail sont mises en oeuvre dans le code de calcul HYBRID [236, 237].

Une fois le code vérifié et validé, des études paramétriques portant sur des effets de site sismiques sont effectuées. Le but recherché est d'aboutir à un critère simple, directement exploitable par les ingénieurs, combinant les caractéristiques géométriques et les caractéristiques du sol, permettant de prédire l'amplification du spectre de réponse en accélération dans des vallées sédimentaires aussi bien que vides [160, 159].

Le rapport de thèse est divisé en quatre parties :

La première partie de ce mémoire, composée de 3 chapitres, est consacrée aux modélisations pour les sols non-saturés.

Le chapitre 1 est dédié à l'étude bibliographique des milieux poreux non-saturés et plus précisément la terminologie des sols non-saturés, le problème du choix des variables d'états, la présentation du concept de surfaces d'état et les différentes théories existantes pour les milieux poreux multiphasiques.

Dans le chapitre 2, on présente le modèle thermo-hydro-mécanique (THHM) proposé par Gatmiri [143] et Gatmiri et al. [150] pour les sols non-saturés soumis au chargement quasi-statique non-isotherme. Ce modèle ne contient ni les actions chimio-physiques ni toutes les actions mécaniques au niveau microscopique. Il est à noter que ce modèle phénoménologique a été dérivé en se basant sur la théorie de la poromécanique et les acquis expérimentaux. Par conséquent, quelques phénomènes microscopiques qui se manifestent au niveau macroscopique dans les expérimentations sont automatiquement considérés. Autrement dit, ce modèle est multi-échelle. Un de ces phénomènes est la pression capillaire de la succion qui a été prise en compte au niveau du Volume Élémentaire de Référence (VER). Quant à la théorie de la poromécanique, ce modèle a été obtenu dans le cadre du modèle mathématique présenté par Gatmiri [143] et Gatmiri et al. [150] en utilisant la succion et la température comme des variables indépendantes. Dans ce modèle, l'effet de déformation sur la distribution de succion et de température dans le squelette solide ainsi que l'effet réciproque sont inclus par l'intermédiaire d'une formulation des surfaces d'état en indice des vides et en degré de saturation.

Dans le chapitre 3, on cherche à déduire le modèle hydro-mécanique (HHM) pour les sols non-saturés soumis au chargement dynamique isotherme. Ceci est obtenu dans le cadre du modèle mathématique présenté par Gatmiri [143] et Gatmiri et al. [150] en utilisant la succion comme une variable indépendante. Le milieu poroélastique du squelette est supposé

être isotrope et linéaire. Les propriétés mécaniques et hydrauliques du sol sont supposées être dépendantes de la succion. Le système final des équations de champs concernant le comportement dynamique des sols non-saturés est fondé sur des hypothèses simplificatrices dans lesquelles les accélérations relatives de l'eau et de l'air par rapport au squelette solide sont négligées.

La deuxième partie de ce mémoire (chapitres 4, 5, 6 et 7) est l'exposé complet des formulations de la BEM en milieux poreux saturés et non-saturés.

Les études bibliographiques sur la méthode des éléments de frontière en poroélasticité sont traitées dans le chapitre 4.

Le chapitre 5 aborde les équations intégrales de frontière ainsi que les solutions fondamentales pour les sols saturés sous chargements quasi-statique et dynamique. Les expressions explicites des solutions fondamentales dans le domaine de Laplace concernant les deux problèmes quasi-statique et dynamique sont développées respectivement par Cheng et Detournay [75] et Schanz et Struckmeier [298]. La méthode de Hörmander [182] appliquée dans ce travail pour obtenir les solutions fondamentales est bien détaillée pas-à-pas dans ce chapitre. La méthode des résidus pondérés utilisée pour dériver les équations intégrales est également décrite. Cette méthode utilise les solutions fondamentales comme étant les pondérations.

Le chapitre 6 vise à développer, pour la première fois, les équations intégrales de frontière et les solutions fondamentales associées pour des modèles THHM et HHM (présentés respectivement dans les chapitres 2 et 3) des sols non-saturés, soumis aux chargements :

- quasi-statiques isothermes. Les solutions fondamentales sont obtenues dans le domaine de Laplace pour le cas 2D.
- quasi-statiques non-isothermes. Les solutions fondamentales sont dérivées pour les deux cas 2D et 3D dans le domaine de Laplace. Comme les transformées inverses des fonctions qui forment les solutions dans le domaine de Laplace peuvent se trouver analytiquement, on fait un effort pour obtenir les formes explicites des solutions fondamentales dans le domaine temporel.
- dynamiques. Les solutions fondamentales sont trouvées pour les deux cas 2D et 3D dans le domaine de Laplace.

L'objectif du dernier chapitre de cette partie (chapitre 7) est de traiter les équations intégrales de frontière obtenues, par la méthode des éléments de frontière (BEM). Tandis que la succion dans les sols non-saturés provoque des comportements physiques non linéaires, ceci nécessite un développement de la BEM dans le domaine temporel. Comme il semble être difficile d'obtenir les solutions fondamentales pour les sols non-saturés explicitement dans le domaine temporel, les intégrales temporelles de convolution sont numériquement approximées par la *méthode quadrature de convolution* (MQC) développée par Lubich [222, 223]. Dans cette méthode, les pondérations sont déterminées par la transformée de Laplace de la solution fondamentale et une méthode multipas linéaire. Également, les intégrales spatiales seront évaluées à l'aide des

techniques numériques. La technique de la régularisation des équations intégrales singulières, dite la technique de « *translation du corps rigide* » est décrite. Aussi, la mise en œuvre des équations algébriques obtenues sera présentée dans ce chapitre.

Le troisième volet de ce mémoire (chapitre 8) est consacré au travail de programmation des équations discrétisées dans le code de calcul « HYBRID », initialement écrit par Gatmiri. Ceci est effectué en utilisant la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments de frontière (BEM) de telle sorte que chaque partie, FEM ou BEM, peut être appliquée séparément ou elles peuvent être couplées l'une avec l'autre pour analyser des problèmes plus complexes. L'architecture du code HYBRID ainsi que le mode de stockage des variables sont expliqués en détail. Ensuite, les sous-routines spécifiquement créées pour modéliser les différents phénomènes dans les milieux poreux saturés et non-saturés, ainsi que les sous-routines très affectées par l'implantation des nouvelles formulations, sont présentées en détail. Enfin, nous nous intéressons à valider et à vérifier les développements effectués dans la partie des éléments de frontière (BEM) du code de calcul HYBRID.

Ayant intégrées les formulations de BEM pour les problèmes de propagation d'ondes ainsi que pour les problèmes de consolidation dans les milieux poreux saturés et non-saturés, il nous semble avoir fourni à l'heure actuelle le premier code de calcul aux éléments de frontière (BEM) qui modélise les différents problèmes dans les sols secs, saturés et non-saturés.

La dernière partie (chapitre 9) est destinée à caractériser et à quantifier les effets de site dans des configurations bidimensionnelles dans le domaine spectral. Il s'agit de prendre en compte les influences combinées de la topographie et de la géologie sur la réponse sismique de vallées alluviales.

Pour comprendre le problème de l'effet topographique dans les vallées vides, les spectres de réponse en accélération de différentes vallées vides sont étudiés. Les courbes seront regroupées sur une figure unique, qui caractérisera l'effet topographique de manière quantitative et qualitative dans le domaine spectral. Toutes les configurations géométriques seront représentées. Ensuite, nous nous intéressons à étudier l'effet combiné des caractéristiques géométriques et du contraste d'impédance des sédiments par rapport au substratum  $\alpha$  ainsi que les effets de taux de remplissage sur le spectre de réponse élastique en accélération.

Le but recherché est de définir un critère simple combinant les caractéristiques géométriques et les caractéristiques du sol, permettant de prédire l'amplification du spectre de réponse en accélération dans des vallées sédimentaires aussi bien que vides.



## **Première partie**

# **Modélisation du Comportement des Sols Non Saturés sous Chargement Thermique et Dynamique**



DE nombreux milieux dont le comportement n'est pas compatible avec les principes et les concepts de la mécanique des sols classique, existent. Les problèmes des sols partiellement saturés incluent non seulement des problèmes normaux de la consolidation et de la résistance au cisaillement, mais aussi des phénomènes non rencontrés dans les sols parfaitement saturés. Parmi ces derniers, on peut citer le soulèvement dû au gonflement des argiles séchées (*desiccated clays*) et le tassement additionnel en raison de l'effondrement de la structure du grain en humidifiant le sol chargé. Un des premiers problèmes qui semble confondre les ingénieurs en génie civil a été le mouvement de l'eau au-dessus de la nappe phréatique. Le terme de « *pression capillaire* » a été adopté pour décrire ce phénomène. Généralement, c'est la présence de plus de deux phases dans un sol qui provoque ce genre de problème.

Le mouvement simultané de l'humidité et de la chaleur est un des phénomènes principaux observés dans les milieux poreux sous condition non-isotherme. Ce phénomène peut mener aux modifications des propriétés thermiques et mécaniques du sol. Ceci peut par la suite affecter le fonctionnement du sol pour son but prévu. Également, l'étude du comportement dynamique des milieux poreux non-saturés est un champ relativement nouveau dans le domaine du génie parasismique. La mesure précise de diverses quantités telles que les pressions dynamiques de l'eau et de l'air, et le degré de saturation dans les sols partiellement saturés est une tâche difficile au cours des chargements dynamiques. La propagation des ondes dans les sols non-saturés dans les régions arides et la réponse dynamique de tels milieux sont de grand intérêt dans la géophysique.

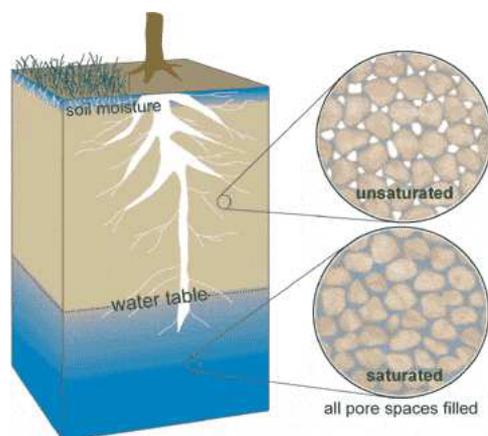


Figure 1 — Sol non-saturé au niveau de la surface terrestre

En général, les sols non-saturés se trouvent au niveau de la surface terrestre, support de fondation de la plupart des structures de génie civil (Fig.1). Les sols secs et saturés peuvent devenir non-saturés par différents phénomènes thermiques ou hydriques tels que les variations saisonnières mais aussi les interventions humaines dans le domaine de l'ingénierie : géothermie, stockage des déchets, enterrement de câbles à haute tension, etc.

Dans cette partie, après avoir abordé la terminologie des sols non-saturés, le problème du choix des variables d'états et la présentation du concept de surfaces d'état pour les milieux poreux

multiphasiques, on cherche à déduire des modèles thermo-hydro-mécanique (THHM) et hydro-mécanique (HHM) pour les sols non-saturés soumis respectivement aux chargements quasi-statique non-isotherme et dynamique.

## 1.1 Terminologie des sols non saturés

Un milieu poreux non-saturé est représenté comme étant un système tri-phasique (gaz, liquide et squelette solide), ou tri-constituant (eau, air sec et squelette solide) dans lequel deux phases sont classifiées comme fluides (liquide et gaz).

L'espace poreux interconnecté est l'endroit à travers lequel les échanges de masse des fluides se produisent. L'espace complémentaire s'appelle la matrice. Par conséquent, la matrice peut se composer d'une partie solide et d'un espace occlu, qu'il soit saturé ou pas. Dans cette étude, cet espace occlu est une partie intégrante de la matrice solide.

Dans un système tri-phasique, la *phase liquide* est constituée d'eau liquide contenant de l'air dissous, la *phase gazeuse* est un mélange binaire d'air sec et de vapeur d'eau [269, 277], tandis que le *constituant eau* est un mélange d'eau liquide et de vapeur d'eau. Dans ce mémoire, le terme *humidité* sera utilisé à la place du *constituant eau*. Le constituant air est associé à l'ensemble de l'air dissous dans l'eau et l'air sec (Fig.1.1). En bref, un système tri-phasique est composé de :

- squelette solide ( $s$ )
- liquide ( $l$ ) : eau liquide + air dissous
- gaz ( $g$ ) : air sec + vapeur d'eau

et un système tri-constituant de :

- squelette solide ( $s$ )
- eau ( $w$ ) : eau liquide + vapeur d'eau
- air ( $a$ ) : air dissous dans l'eau + air sec

Dans le travail présenté, les équations de champs s'écrivent pour un système tri-constituant.

### 1.1.1 Porosité partielle et degré de saturation

Lorsque l'espace poreux d'un sol non-saturé est rempli par plusieurs fluides, la porosité Eulérienne  $n$  est divisée en porosités partielles  $n_\alpha$ , de sorte que le volume occupé par le fluide  $\alpha$ ,

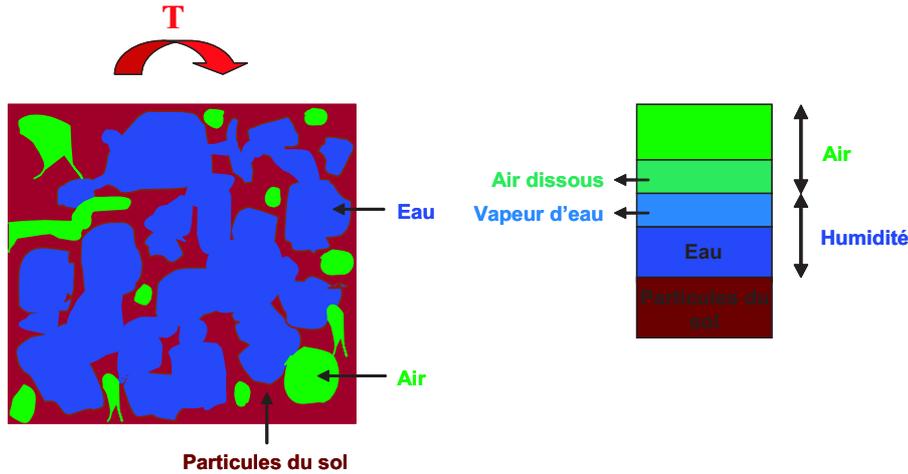


Figure 1.1 — Sol non-saturé : un milieu poreux multiphasique

$(V_\alpha)$ , sera  $n_\alpha dV$ , où  $V$  est le volume total du sol étudié.  $n$  s'écrit :

$$n = \sum_{\alpha} n_{\alpha} = \sum_{\alpha} V_{\alpha} / V \tag{1.1a}$$

$$0 \preceq n_{\alpha} \preceq 1 \tag{1.1b}$$

Le degré de saturation relatif au fluide  $\alpha$ , (Fig.1.2), appelé aussi la fraction de volume du pore ( $V_{void}$ ) occupée par la phase  $\alpha$ , est défini par :

$$S_{\alpha} = \frac{n_{\alpha}}{n} = \frac{V_{\alpha}}{V_{void}} \tag{1.2a}$$

$$\sum_{\alpha} S_{\alpha} = 1 \tag{1.2b}$$

Par conséquent,  $n$  s'écrit sous la forme :

$$n = \sum_{\alpha} n S_{\alpha} \tag{1.3}$$

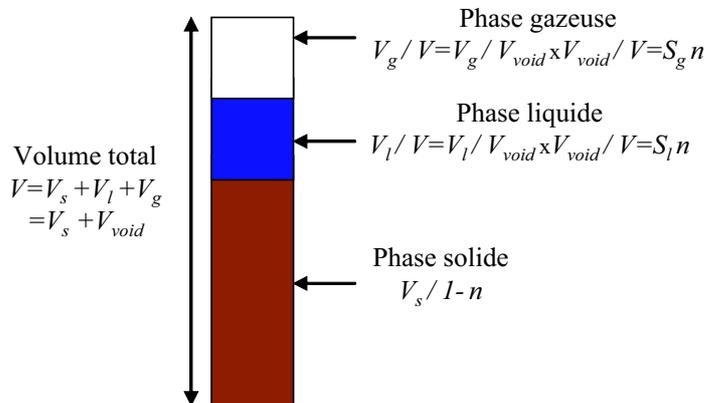


Figure 1.2 — Volume occupé par la phase  $\alpha$  par unité de volume total

### 1.1.2 Densité et Fraction de masse

Dans cette étude, la densité, soit la masse divisée par le volume, est utilisée pour la phase  $\alpha$  :

$$\rho_\alpha = \frac{M_\alpha}{V_\alpha} ; \alpha = s, l, g \quad (1.4)$$

La masse de chaque composant  $\beta$  par rapport à la masse totale de la phase  $\alpha$  est appelée la fraction de masse :

$$\omega_\alpha^\beta = \frac{M_\beta}{M_\alpha} ; \alpha = l, g ; \beta = w, a \quad (1.5)$$

où l'indice inférieur  $\beta = (w, a)$  est relatif au constituant eau et air et l'indice supérieur  $\alpha = (s, l, g)$  est relatif au squelette solide et aux phases liquide et gazeuse, respectivement. Ainsi, la masse de chaque composant par unité de volume d'une phase, est décrit comme suit :

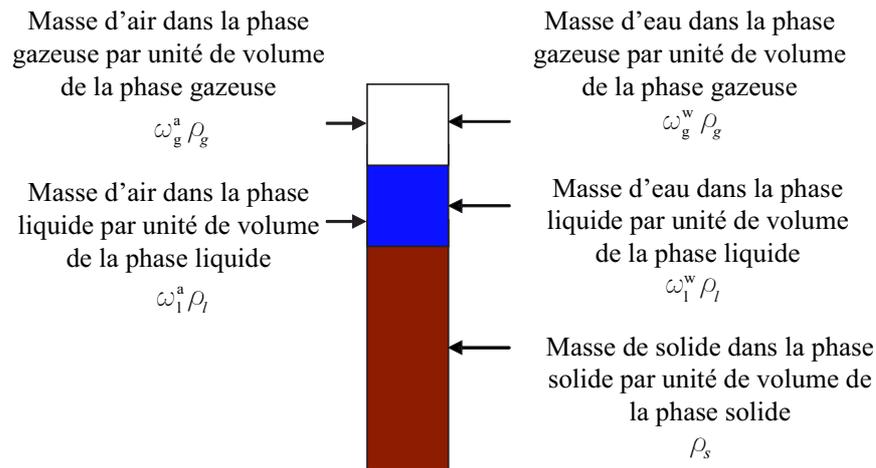


Figure 1.3 — Masse du composant  $\beta$  par unité de volume de la phase  $\alpha$

La masse de chaque composant par unité de volume total est schématisée sur la figure (Fig.1.4) :

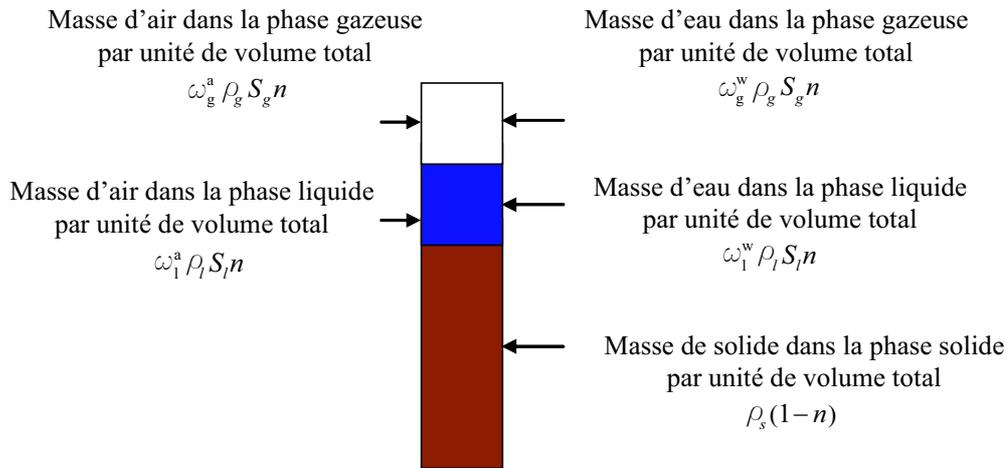


Figure 1.4 — Masse du composant  $\beta$  par unité de volume total

Dans les problèmes isothermes, la présence de la vapeur d'eau dans la phase gazeuse est négligée ( $\omega_g^w = 0$ ) et par conséquent, la fraction de la masse d'air dans la phase gazeuse est égale à l'unité ( $\omega_g^a = 1$ ). En outre, en négligeant l'air dissous dans l'eau ( $\omega_l^a = 0$ ), la fraction d'eau dans la phase liquide est égale à l'unité ( $\omega_l^w = 1$ ) (Fig.1.5).

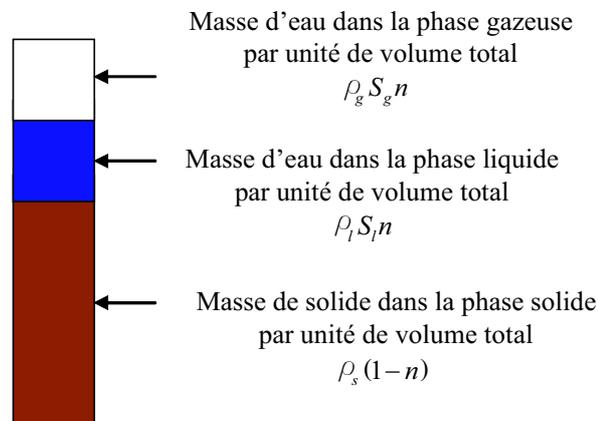


Figure 1.5 — Masse du composant  $\beta$  par unité de volume total en négligeant la vapeur d'eau et l'air dissous

## 1.2 Sols non-saturés du point de vue mécanique

### 1.2.1 Théorie des milieux poreux saturés

L'étude des milieux poreux saturés a été un domaine de recherche très actif depuis longtemps [100, 111, 315]. Cependant, la base théorique n'a pas été établie jusqu'au début des années 1920, au moment où Terzaghi a formulé le concept de contrainte effective. Le concept de contrainte effective pour milieux poreux a été utilisé pour fournir une base rationnelle pour la compréhension du comportement mécanique des sols saturés. Selon la définition classique de Terzaghi :

1. tous les effets mesurables d'un changement de contrainte, telle que la compression, la distorsion et un changement de résistance au cisaillement d'un sol sont exclusivement dus aux changements de la contrainte effective.
2. la contrainte effective  $\sigma'$  est définie comme l'excès de la contrainte totale  $\sigma$  sur la pression d'eau interstitielle  $p_w$  :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p_w \delta_{ij} \quad (1.6)$$

Il a ainsi déduit sur une base, quelque peu intuitive, sa célèbre théorie de la consolidation unidimensionnelle. Dans sa théorie, l'écoulement dans les milieux poreux n'est pas couplé au processus de la déformation et l'équation de champs est réduite à une équation de diffusion.

Biot [36, 37, 38] a construit une base rigoureuse du couplage en poroélasticité en publiant une série d'articles concernant la théorie générale de la poroélasticité. Dans sa théorie, le squelette solide est considéré élastique linéaire et subit de petites déformations, tandis que l'écoulement du fluide produit par la déformation du matériau est régi par la loi de Darcy. Cette théorie a été plus tard généralisée pour expliquer les effets non linéaires par Biot [42], Prevost [279] et Zienkiewicz et al. [353].

Schiffman et al. [299] ont montré que Biot [36, 37] a décrit le comportement de consolidation du sol d'une manière plus correcte que celle de Terzaghi et cela en prenant en compte le couplage entre les contraintes et les déformations du solide et du fluide. Biot a défini un coefficient de couplage hydro-mécanique  $(1 - \frac{K}{K_s})$  et l'a introduit dans l'expression de la contrainte effective :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + (1 - \frac{K}{K_s}) p_w \delta_{ij} \quad (1.7)$$

$K$  et  $K_s$  étant respectivement le coefficient de compressibilité du système ouvert du squelette/fluide et celui du grain solide.

Plus tard, Biot [39, 40] a développé une théorie dynamique complète pour étudier la propagation des ondes dans les milieux poreux saturés et cela en utilisant une approche phénoménologique. L'exactitude de la théorie de Biot a été confirmée à l'aide d'une analyse 2D de l'équation de Navier-Stokes [63] d'une part, et d'autre part du point de vue de la théorie des mélanges [54, 56, 279] dont le cadre théorique général a été pour la première fois développé par Trues-

dell and Toupin [325] et ultérieurement par Green et Naghdi [172]. Cependant, certaines de ces théories contiennent souvent des constantes constitutives non déterminables en pratique.

## 1.2.2 Théorie des milieux poreux non-saturés

Le besoin de prévoir le comportement des sols non-saturés sur une base scientifique solide a été longtemps reconnu comme une nécessité urgente. En développant la connaissance de la mécanique des sols pour couvrir le cas de sols non-saturés, la possibilité que certaines des théories classiques puissent nécessiter une modification ne doit pas être négligée. Pour cette raison, il est important d'être conscient que des théories formulées pour les sols parfaitement saturés ne devraient pas être appliquées aux sols non-saturés jusqu'à ce que leur validité soit examinée.

En ce qui concerne les sols saturés, la plupart des chercheurs se réfèrent souvent à la théorie de la poroélasticité de Biot comme point de départ de leurs recherches. En revanche, la recherche sur les sols non-saturés a conduit à des groupes distincts de chercheurs qui apparemment ne commencent pas à partir des mêmes bases théoriques. Cette situation est certainement due aux différentes difficultés rencontrées en réalisant des essais et à des réponses complexes des sols non-saturés.

### 1.2.2.1 Une seule contrainte effective ?

Un des problèmes sur lequel il n'y a pas d'accord commun entre les différents chercheurs, est la définition d'une contrainte effective pour les sols non-saturés.

De nombreux chercheurs en mécanique des sols ont essayé d'étendre le principe de contrainte effective proposé par *Terzaghi* au cas des sols non-saturés.

Croney et al. [92] ont proposé la forme suivante de l'équation de contrainte effective pour un sol non-saturé :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \beta' p_w \delta_{ij} \quad (1.8)$$

où  $\sigma'$ ,  $\sigma$ ,  $\beta'$ ,  $p_w$  sont respectivement, la contrainte normale effective, la contrainte normale totale, le facteur de liaison et la pression de l'eau interstitielle.

Bishop [43] et Aitchison [3] ont proposé des formes modifiées de l'équation de contrainte effective pour expliquer la nature bi-phasique du pore de fluide dans un sol non-saturé :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - k_1 p_w \delta_{ij} - k_2 p_a \delta_{ij} \quad (1.9)$$

où  $p_a$  est la pression d'air dans l'espace poreux.

En pratique, il est accepté que le concept de contrainte neutre soit appliqué et ainsi le même changement simultané de la contrainte totale, la pression d'eau et la pression d'air n'exerceront

aucun effet mesurable sur le volume ou la résistance. Ceci suppose que la géométrie du *mé-nisque* dépend seulement de la différence  $(p_a - p_w)$  et est indépendant de la pression absolue. La validité du concept de la contrainte neutre à cet égard a été démontrée expérimentalement par Bishop et Donald [46] et plus tard par Bishop et Blight [45].

En supposant que l'eau est incompressible, la constante  $(p_a - p_w)$  est associée à une teneur en eau constante sous un tel changement. En supposant que  $\Delta\sigma = \Delta p_w = \Delta p_a$  et que  $k_1, k_2$  sont constants, l'équation (1.9) prend la forme suivante :

$$0 = \Delta\sigma - k_1\Delta p_w - k_2\Delta p_a \quad (1.10)$$

Il en résulte que  $k_2 = 1 - k_1$ . Si  $k_1 = \chi$ , l'équation (1.9) s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma'_{ij} = (\sigma_{ij} - p_a\delta_{ij}) + \chi(p_a - p_w)\delta_{ij} \quad (1.11)$$

$\chi$  est un paramètre identique aux paramètres  $\beta', \psi$  et  $\beta$  proposés par Cronley et al. [92], Aitchison [3] et Jennings [188] lorsque la pression de pore utilisée dans les équations est la même. Ce coefficient peut être différent pour la résistance au cisaillement ou la déformation volumique.

L'équation (1.11) est réécrite sous sa nouvelle forme :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - (\chi p_w + (1 - \chi)p_a)\delta_{ij} \quad (1.12)$$

$$= \sigma_{ij} - p_w^*\delta_{ij} \quad (1.13)$$

où  $(p_w^* = \chi p_w + (1 - \chi)p_a)$  est considéré comme un équivalent de la pression de pore qui maintient la définition actuelle de la loi de contrainte effective dans laquelle la contrainte effective est séparée en deux composants. Le premier résulte de la contrainte normale totale et le deuxième de la pression exercée par le fluide dans les pores.

Il est rappelé que la relation (1.11) montre la moyenne des contraintes sur un volume élémentaire représentatif contenant tous les constituants (les grains solides, l'air et l'eau). Comme mentionné précédemment, la contrainte effective ne doit être que représentant de la contrainte du squelette solide.

Si  $\chi = 1$  (sols parfaitement saturés) ou  $\chi = 0$  (sols secs), cette expression se réduit à celle établie dans (1.6), qui est l'équation de contrainte effective pour un seul fluide. Il est supposé que dans l'intervalle de saturation partielle, la valeur de  $\chi$  dépend principalement du degré de saturation  $S_r$ , mais également de la structure du sol et du cycle de séchage/humidification ou du changement de contrainte menant à une valeur particulière de  $S_r$ .

Bishop et Donald [46], en supposant la validité de l'équation (1.11) dans des conditions élastique, ont évalué les valeurs de  $\chi$  comme suit :

$$\chi = \tilde{\chi}(S_r) \quad (1.14)$$

Plusieurs chercheurs ont tenté de mesurer  $\chi$  pour différents sols en utilisant des processus de changement de volume et de résistance au cisaillement [3, 44, 188, 202, 217, 201].

Si le paramètre de Bishop  $\chi$  est remplacé par le degré de saturation en eau  $S_r$ , l'équation (1.11) prend la forme suivante :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p_a \delta_{ij} + S_r(p_a - p_w) \delta_{ij} = \sigma_{ij} - (1 - S_r) p_a \delta_{ij} - S_r p_w \delta_{ij} \quad (1.15)$$

Cette forme a été obtenue par Lewis et Schrefler [215], en utilisant la moyenne du volume (*volume averaging*) et par Hassanizadeh et Gray [178] à partir de l'inégalité d'entropie en utilisant la procédure de Coleman-Noll [84]. Récemment, Hutter et al. [184] ont montré, en utilisant la théorie des mélanges, que le paramètre  $p_w^*$  est significatif pour des sols partiellement saturés à condition que  $\chi = S_r$ . Ce résultat est obtenu si (i) le mélange se compose des constituants dont la masse volumique ne change pas, (ii) l'eau est un fluide parfait, et (iii) aucune contrainte effective est introduite pour le fluide.

La définition de la contrainte effective pour les sols non-saturés comme donnée par l'équation (1.12) ou (1.15) est en contradiction avec la définition initialement présentée pour les sols saturés, car le paramètre de Bishop  $\chi$  dépend des fluides. Il est donc préférable de parler de *contrainte de Bishop* ou de *contrainte moyenne du squelette* [166].

Avant les années 1990, le principe de contrainte effective étendu aux sols partiellement saturés est resté essentiellement limité au cas d'un comportement élastique (linéaire ou non). Cette approche élémentaire semblait apporter un certain nombre de facilités pour la modélisation constitutive et tromper de nombreuses équipes de recherche sur la validité de la contrainte effective.

Jennings et Burland [189] semblent être les premiers à penser que l'équation de *Bishop* (1.12) ne fournit pas une relation proportionnée entre le changement de volume et la contrainte effective pour la plupart des sols, en particulier ceux au-dessous d'un degré de saturation critique. Pour démontrer la validité du principe de la contrainte effective, ils ont supposé qu'il était nécessaire de prouver que le comportement du sol est non affecté par le changement de  $(\sigma - p_a)$  et de  $\chi(p_a - p_w)$  puisque leur somme ( $\sigma'$ ) est une valeur constante. Leurs données expérimentales ont montré que ce n'est pas  $\sigma'$  qui contrôle le comportement de la majorité des sols non-saturés mais plutôt les fonctions des valeurs séparées de  $\sigma$  et  $p_w^*$ . Par conséquent, l'équation (1.12) qui définit la contrainte effective dans un sol non-saturé selon le principe de la contrainte effective n'est pas toujours correcte. L'équation (1.12) définit réellement une contrainte intergranulaire mais qui est différente de la contrainte effective. La contrainte effective contrôle le comportement du sol, ce qui n'est pas nécessairement le cas d'une contrainte intergranulaire.

Bishop et Blight [45], Burland [61][62] et Blight [47] ont confirmé les résultats expérimentaux de Jennings et Burland [189] et ont également reconnu les limitations de la loi de comportement formulée en (1.12). Dans le cas d'un sol non-saturé, ils ont conclu que ce n'est pas seulement le chemin de la contrainte effective mais aussi les chemins des deux composants  $(\sigma - p_a)$  et  $(p_a - p_w)$  qui doivent être pris en considération.

### 1.2.2.2 Identification des variables d'état pour les sols non-saturés

Comme mentionné ci-dessus, les modèles constitutifs basés sur une seule contrainte effective semblent être incapables de décrire toutes les caractéristiques du comportement des sols non-saturés. Il est donc proposé d'adopter une approche de variables de contraintes multiples.

En réponse immédiate aux Jennings et Burland [189] qui ont mis en doute la validité du concept d'une seule contrainte effective dans les sols non-saturés, Coleman [85] a proposé l'utilisation des variables de contraintes *réduites*,  $(\sigma_1 - p_a)$ ,  $(\sigma_3 - p_a)$  et  $(p_w - p_a)$ , qui désignent respectivement les pressions axiale, de confinement, et d'eau dans les essais triaxiaux. Il a supposé que les lois de comportement pour la déformation volumique dans un sol non-saturé doivent être formulées en terme de variables de contraintes proposées ci-dessus, comme suit :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = C_{ijkl}^e (\dot{\sigma}_{kl} - \dot{p}_a \delta_{kl}) + C^s (\dot{p}_a - \dot{p}_w) \delta_{ij} \quad (1.16)$$

Burland [61, 62] a supposé que le comportement mécanique des sols non-saturés doit être indépendamment lié aux variables de contrainte,  $(\sigma_1 - p_a)$  et  $(p_a - p_w)$ . Une explication qualitative pour le comportement du changement de volume des sols non-saturés a été donnée par lui en terme de stabilité de contact de grain.

Matyas et Radhakrishna [249] ont prouvé que la compressibilité du sol est une variable quantitative qui dépend de l'état physique du sol (à savoir l'indice des vides, le degré de saturation et la contrainte) contrairement à ce qui est supposé par Blight [47]. Ainsi les changements de volume de deux échantillons de sol identiques soumis à différentes histoires de contrainte et de saturation mais subissant le même changement de la contrainte effective, peuvent être largement différents dans la nature et dans la grandeur. Ils semblent être les premiers à étudier les relations possibles entre les propriétés du sol (la résistance au cisaillement et la compressibilité) et les paramètres de contrainte appropriés. Ils ont présenté le concept des *variables d'état* en décrivant le comportement volumétrique des sols non-saturés, ainsi que le changement de volume comme une surface tridimensionnelle en ce qui concerne les variables d'état  $(\sigma - p_a)$ , et la succion  $(p_a - p_w)$ .

Barden et al. [26] ont également supposé que le changement de volume des sols non-saturés doit être analysé en terme de composants de contrainte appliquée,  $(\sigma - p_a)$ , et de la succion,  $(p_a - p_w)$ .

Les différentes études menées et présentées ci-dessus prouvent qu'un effort considérable a été fait pour la recherche d'une équation de contrainte effective à valeur unique pour les sols non-saturés. De nombreuses équations de contrainte effective ont été proposées. Les expérimentations ont démontré que l'équation de contrainte effective ne dépend pas d'une seule variable. En revanche, il y a une dépendance à l'égard du chemin de contrainte suivi. En général, les équations de contrainte effective proposées n'ont pas suscité beaucoup d'attention récente en décrivant le comportement mécanique des sols non-saturés. La recherche sur des équations de contrainte effective proposées a mené beaucoup de chercheurs à proposer l'utilisation des variables d'état indépendantes (par exemple,  $(\sigma - p_a)$  et  $(p_a - p_w)$ ) pour décrire le comportement

mécanique des sols non-saturés.

Dans les travaux récents [7, 132, 336, 337], trois combinaisons possibles peuvent être employées en tant que variables d'état pour un sol non-saturé. En d'autre terme, n'importe quel couple de trois variables possibles de contrainte normale peut être employé pour décrire l'état de contrainte d'un sol non-saturé. Ceux-ci sont :

$$\begin{aligned} & (\sigma_{ij} - p_a \delta_{ij}), & (p_a - p_w) \delta_{ij} \\ & (\sigma_{ij} - p_w \delta_{ij}), & (p_a - p_w) \delta_{ij} \\ & (\sigma_{ij} - p_a \delta_{ij}), & (\sigma_{ij} - p_w \delta_{ij}) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Geiser et al. [164] ont cependant adopté la seconde combinaison de contraintes dans l'équation (1.17) pour surmonter des problèmes soulevés par l'utilisation de contrainte nette en décrivant toute la gamme de saturation. La combinaison de la contrainte effective pour les sols saturés ou la contrainte effective de Terzaghi ( $\sigma - p_w$ ) avec la matrice de succion ( $p_a - p_w$ ) mène à une modification dans la relation constitutive variationnelle comme suit :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = C'_{ijkl} \dot{\sigma}'_{kl} + C'_s (\dot{p}_a - \dot{p}_w) \delta_{ij} \quad (1.18)$$

Finalement, peu importe la combinaison choisie de l'équation (1.17), l'utilisation de deux variables d'état indépendantes permettra la décomposition des incréments de déformation  $\dot{\varepsilon}$  en une partie mécanique  $\dot{\varepsilon}_m$  et en une partie hydraulique  $\dot{\varepsilon}_h$  :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_m + \dot{\varepsilon}_h \quad (1.19)$$

### 1.2.2.3 Variables conjuguées dans les sols non-saturés

Une question inévitable dans la modélisation des sols non-saturés est le choix des variables d'états.

Houlsby [183] a montré que la puissance virtuelle par unité de volume de sol non-saturé est :

$$\dot{W} = p_a n (1 - S_r) \frac{\dot{\rho}_a}{\rho_a} - (p_a - p_w) n \dot{S}_r + \left( \sigma_{kl} - (S_r p_w + (1 - S_r) p_a) \delta_{kl} \right) \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (1.20)$$

$\rho_a$  et  $n$  étant respectivement la masse volumique de l'air et la porosité du squelette solide.

Les trois termes de l'équation (1.20) décrivent les puissances virtuelles pour respectivement compresser la phase d'air, changer le degré de saturation  $S_r$  et modifier la déformation moyenne. Cette relation est dérivée en prenant les hypothèses simplificatrices suivantes : les travaux dissipés par l'interface air-eau sont négligés et la vitesse relative entre le squelette solide et des interfaces est supposée être nulle.

En négligeant le terme de compressibilité d'air, on arrive à la forme simplifiée suivante :

$$\dot{W} = -(p_a - p_w) n \dot{S}_r + \left( \sigma_{kl} - (S_r p_w + (1 - S_r) p_a) \delta_{kl} \right) \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (1.21)$$

Cette équation montre que le deuxième terme du membre de droite (connu comme la contrainte moyenne ou la contrainte de Bishop) est conjugué à la déformation du squelette solide, alors que la succion est conjuguée à la teneur en eau relative dans les vides. La puissance virtuelle pour la déformation du squelette solide est contrôlée par une contrainte moyenne et la déformation du squelette solide. Ceci est similaire au cas des sols saturés, où la déformation du squelette solide est exclusivement contrôlée par la contrainte effective.

Les termes du membre de droite de l'équation (1.21) peuvent être réarrangés de plusieurs manières, par exemple :

$$\begin{aligned}\dot{W} &= (\sigma_{kl} - p_a \delta_{kl}) \dot{\varepsilon}_{kl} + ((p_a - p_w) \delta_{kl}) \left( -n \dot{S}_r + S_r \dot{\varepsilon}_{kl} \right) \\ &= (\sigma_{kl} - p_a \delta_{kl}) \dot{\varepsilon}_{kl} + (p_a - p_w) S_r \dot{\varepsilon}_v - (p_a - p_w) n \dot{S}_r \\ &= (\sigma_{kl} - p_a \delta_{kl}) \dot{\varepsilon}_{kl} + (p_a - p_w) \dot{\varepsilon}_w\end{aligned}\quad (1.22)$$

où  $\dot{\varepsilon}_w = S_r \dot{\varepsilon}_v - n \dot{S}_r$  est le taux d'une déformation volumique et  $\varepsilon_w = n S_r$ .

L'équation (1.22) montre que la succion doit être associée à  $\varepsilon_w$  si la contrainte nette  $(\sigma_{kl} - p_a \delta_{kl})$  est associée à la déformation du squelette solide. Vaunat et al. [328] ont appelé la quantité de déformation  $\varepsilon_w$  comme la déformation hydraulique.

Puisqu'il est clair que n'importe quel ensemble conjugué adéquat de contraintes et de déformations peut être utilisé pour la modélisation constitutive des sols non-saturés, la différence vient de la mise en oeuvre des modèles constitutifs dans les codes de calcul numériques.

Une autre approche pour identifier des variables conjuguées de contraintes et de déformations dans les sols non-saturés a été introduite par Coussy et Dangla [90]. Ils ont supposé que le squelette solide du sol se compose des particules solides et des interfaces de phases. Ce point de vue est interprétable comme une nécessité de prendre en compte des effets de collage (*bonding effect*), en plus de l'identification de la contrainte volumique moyenne agissant sur les particules solides. Par conséquent, dans le cas où l'espace poreux est rempli par deux fluides, toutes les interfaces fluide-fluide et des interfaces solide-fluides possèdent leurs propres énergies d'interface et d'entropie et sont supposées agir directement sur l'énergie libre du squelette  $\Psi_S$  :

$$\Psi_S(\varepsilon_{ij}, S_r, T) = \psi_S(\varepsilon_{ij}, T) + nU(S_r, T) \quad (1.23)$$

$\psi_S$  est l'énergie libre de la matrice solide par unité de volume,  $U$  est l'énergie d'interface globale par unité de volume et  $T$  désigne la température.

Les équations d'état du squelette pour la thermo-poro-élasticité non-saturée sont écrites comme suit :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \pi_{ij} = \left( \frac{\partial \psi_S}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T \quad (1.24)$$

$$S_S = - \left( \frac{\partial \psi_S}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}} \quad (1.25)$$

$$n(p_a - p_w) = - \frac{\partial \Psi_S}{\partial S_r} \quad (1.26)$$

où  $S_S$  est l'entropie et  $\pi_{ij}$ , nommée la pression de pore équivalente, est une fonction des pressions de fluides, du degré de saturation et de l'énergie d'interface :

$$\pi_{ij} = (S_r p_w + (1 - S_r) p_a) \delta_{ij} - \left( \frac{\partial(nU)}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{S_r, T} \quad (1.27)$$

La contrainte effective définie par Coussy et Dangla [90] dans l'équation (1.24) et (1.27) est similaire à la contrainte effective de Bishop (1.15) à laquelle le terme concernant l'énergie des interfaces est ajouté. En plus, la deuxième variable d'état est définie sous la forme de succion réduite par la porosité. Elle gouverne la valeur du degré de saturation.

En considérant les deux formes présentées dans les équations (1.21) et (1.22), on peut obtenir les modèles constitutifs en se basant sur un des ensembles des variables d'état présentés ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{contrainte nette : } (\sigma_{kl} - p_a \delta_{kl}) \leftrightarrow \dot{\varepsilon}_{kl} \\ \text{succion : } (p_a - p_w) \leftrightarrow \dot{\varepsilon}_w \end{array} \right. \quad (1.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{contrainte de Bishop : } (\sigma_{kl} - (S_r p_w + (1 - S_r) p_a) \delta_{kl}) \leftrightarrow \dot{\varepsilon}_{kl} \\ \text{succion modifiée : } n(p_a - p_w) \leftrightarrow -\dot{S}_r \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Plusieurs chercheurs se sont récemment intéressés à utiliser d'autres formes de combinaisons de contraintes comme suit [166] :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{ij} - p_a \delta_{ij}) + \tilde{\mu}_1(s, S_r) \\ \tilde{\mu}_2(s, S_r) \end{array} \right. \quad (1.30)$$

où  $s$  est la succion.

D'une manière similaire à Gens [167], il est proposé de classer des modèles basés sur les contraintes présentées dans l'équation (1.30) dans trois catégories.

- **Catégorie 1**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} - p_a \delta_{ij} \quad (\tilde{\mu}_1 = 0) \\ \tilde{\mu}_2(s, S_r) \end{array} \right. \quad (1.31)$$

Cette catégorie a été utilisée par plusieurs chercheurs tels que Alonso et al.[7], Josa et al. [192], Wheeler and Sivakumar [337], Cui et al. [98], Gatmiri et Delage [149], Gatmiri [143], etc.

Les caractéristiques des modèles basés sur cette catégorie sont :

- la représentation simple des chemins conventionnels de contrainte,
- les difficultés pour modéliser la transition de l'état saturé à l'état non-saturé,
- les difficultés pour intégrer l'hystérésis et les effets hydrauliques,
- la nécessité de prendre en compte des fonctions indépendantes pour modéliser l'augmentation de la résistance avec la succion.

- **Catégorie 2**

$$\begin{cases} \sigma_{ij} - p_a \delta_{ij} + \tilde{\mu}_1(s) \\ \tilde{\mu}_2(s, S_r) \end{cases} \quad (1.32)$$

Cette catégorie a été utilisée par plusieurs chercheurs tels que Kohgo et al. [204], Modaressi and Abou Bekr [253], Geiser et al. [164], Loret and Khalili [221], etc.

Les caractéristiques des modèles basés sur cette catégorie sont :

- les difficultés pour modéliser des chemins conventionnels de contrainte,
- les difficultés pour modéliser la transition de l'état saturé à l'état non-saturé,
- les difficultés pour intégrer l'hystérésis et les effets hydrauliques,
- l'augmentation de la résistance avec la succion résulte de la définition de variable d'état.

### • Catégorie 3

$$\begin{cases} \sigma_{ij} - p_a \delta_{ij} + \tilde{\mu}_1(s, S_r) \\ \tilde{\mu}_2(s, S_r) \end{cases} \quad (1.33)$$

Cette catégorie a été utilisée par plusieurs chercheurs tels que Jommi and de Prisco [191], Bolzon et al. [48], Jommi [190], Wheeler et al. [335], Gallipoli et al. [134], Sheng et al. [305], etc. Les caractéristiques des modèles basés sur cette catégorie sont :

- la représentation des chemins conventionnels de contrainte semble être difficile, même parfois impossible,
- la facilité pour modéliser la transition de l'état saturé à l'état non-saturé,
- l'hystérésis et les effets hydrauliques peuvent naturellement être intégrés,
- l'augmentation de la résistance avec la succion résulte de la définition de variables d'état.

#### 1.2.2.4 Surfaces d'état :

Deux relations constitutives *volume-masse* sont exigées afin de relier toutes les propriétés liées à la masse et au volume du sol à l'état de contrainte [131]. Les propriétés les plus communes utilisées en géotechnique pour définir des relations volume-masse sont : l'indice des vides  $e$ , la teneur en eau  $\theta_w$  et le degré de saturation  $S_r$ . Le recours aux variables indépendantes a permis de mettre au point des modèles de comportement élastiques fondés sur la définition des surfaces d'état pour l'indice des vides, la teneur en eau et le degré de saturation. De telles représentations donnent une bonne description de la dépendance des modules vis-à-vis de l'état de contraintes [15]. Les relations constitutives pour un sol non-saturé exigent une extension des modèles non linéaires pour le sol saturé. Les modèles développés doivent inclure l'effet de la succion qui provoque une non linéarité.

Fredlund et Morgenstern [131] ont proposé d'écrire une équation différentielle qui s'applique à

n'importe quel point de contrainte sur les surfaces d'état de  $e$  et de  $\theta_w$  :

$$\begin{cases} de = \frac{\partial e}{\partial(\sigma_m - p_a)} d(\sigma_m - p_a) + \frac{\partial e}{\partial(p_a - p_w)} d(p_a - p_w) \\ d\theta_w = \frac{\partial \theta_w}{\partial(\sigma_m - p_a)} d(\sigma_m - p_a) + \frac{\partial \theta_w}{\partial(p_a - p_w)} d(p_a - p_w) \end{cases} \quad (1.34)$$

où  $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$  et  $\sigma_m - p_a$  est égale à la contrainte moyenne nette.

Fredlund (1979) [130] a donné les premières expressions de surface d'état en indice des vides et teneur en eau :

$$\begin{cases} e = e_0 - C_t \lg(\sigma_m - p_a) - C_m \lg(p_a - p_w) \\ \theta_w = \theta_{w0} - D_t \lg(\sigma_m - p_a) - D_m \lg(p_a - p_w) \end{cases} \quad (1.35)$$

Delage et Cui [110] ont rappelé que ces équations représentent des surfaces planes dans l'espace [ $e$ (ou  $\theta_w$ ) :  $\lg(\sigma - p_a)$  :  $\lg(p_a - p_w)$ ], ce qui ne correspond pas au comportement des sols non saturés. Cela suppose en effet que les modules de déformation volumique sont indépendants de la succion et ne permettent pas de modéliser le gonflement sous faibles contraintes et l'effondrement sous fortes contraintes. La proposition de Lloret et Alonso [219] prend en compte la courbure des surfaces par des coefficients de couplage contrainte-succion ( $d$  et  $d'$ ) et permet de corriger ces problèmes. Ils ont proposé les expressions de surfaces d'état en indice des vides et en degré de saturation comme suit :

$$\begin{cases} e = a + b \lg(\sigma - p_a) + c \lg(p_a - p_w) + d \lg(\sigma - p_a) \lg(p_a - p_w) \\ S_r = a' + [c' + d'(\sigma - p_a)] \tan h [b'(p_a - p_w)] \end{cases} \quad (1.36)$$

Gatmiri [142, 143] et Gatmiri et Delage [149] (en respectant la compatibilité globale entre les aspects volumique (surface d'état) et déviatorique (Kondner-Duncan) du modèle) ont proposé les expressions suivantes pour la surface d'état :

$$\begin{cases} e = \frac{(1 + e_0)}{\exp \frac{\left( a \frac{(\sigma - p_a)}{P_{atm}} + b \left( 1 - \frac{(\sigma - p_a)}{\sigma_e} \right) \frac{(p_a - p_w)}{P_{atm}} \right)^{1-m}}{K_b(1-m)}} - 1 \\ S_r = 1 - [a_s + b_s(\sigma - p_a)][1 - \exp(c_s(p_a - p_w))] \end{cases} \quad (1.37)$$

où  $K_b, a, b, a_s, b_s, c_s$  sont constantes et  $\sigma_e$  est la pression de gonflement. Ainsi, dans le travail de Gatmiri [143] les surfaces d'état en indice des vides et en degré de saturation sont étendues pour prendre en compte l'effet thermique sous forme exponentielle :

$$\begin{cases} e = \frac{(1 + e_0) \exp(-c_e(T - T_0))}{\exp \frac{\left( a \frac{(\sigma - p_a)}{P_{atm}} + b \left( 1 - \frac{(\sigma - p_a)}{\sigma_e} \right) \frac{(p_a - p_w)}{P_{atm}} \right)^{1-m}}{K_b(1-m)}} - 1 \\ S_r = 1 - [a_s + b_s(\sigma - p_a)][1 - \exp(c_s(p_a - p_w))] \exp(d_s(T - T_0)) \end{cases} \quad (1.38)$$

### 1.2.2.5 Différentes théories :

Récemment, considérant les milieux poreux en tant que milieu continu ouvert, Coussy [88] a généralisé la théorie de Biot dans le contexte de la thermodynamique.

La théorie de Biot et ses généralisations, malgré leur simplicité, ne considèrent pas la structure microscopique des milieux poreux qui joue un rôle critique dans le comportement général des matériaux poreux. Hassanizadeh et Gray [179], Muraleetharan et al. [257] et Wei et Muraleetharan [333] ont développé la théorie du mélange avec les interfaces (TMI) d'un point de vue microscopique pour décrire le comportement des milieux poreux non-saturés afin de modéliser les différents phénomènes couplés. Cette théorie est capable de caractériser rigoureusement d'une manière théorique les interactions entre les composants volumiques comprenant les conditions de compatibilité dynamique sur des interfaces.

Dans les modèles basés sur la théorie des mélanges, certaines variables telles que les fractions de volume sont introduites pour représenter la microstructure et les divers processus internes couplés des milieux poreux. Bien que ces approches aient trouvé des applications réussies dans quelques circonstances particulières, elles n'expliquent pas les mécanismes importants susceptibles de se produire dans des milieux poreux. Par exemple, l'hystérésis de la pression capillaire dans les milieux poreux multiphasiques n'a pas été simulée d'une manière satisfaisante basée sur l'une des théories ci-dessus. Aussi les effets de la pression capillaire sur le comportement des milieux poreux multiphasiques demeurent mal compris [333]. Ainsi, quelques paramètres matériels dans la théorie des mélanges peuvent ne pas être accessibles par les expérimentations. En revanche, une théorie à l'échelle macroscopique suppose que les principes standards de la mécanique des milieux continus sont appropriés aux milieux poreux. Dans ce contexte, le comportement des milieux poreux est décrit en se basant sur les variables mesurées directement dans le laboratoire à l'échelle macroscopique. Il est généralement plus concluant d'appliquer une théorie macro-échelle qu'une théorie du mélange. Cependant, la théorie de macro-échelle généralement ne représente pas les détails microscopiques importants des milieux poreux.

En ce qui concerne les modèles mécaniques présentés dans ce mémoire, on n'a pas cherché à intégrer ni les actions chimio-physiques ni toutes les actions mécaniques au niveau microscopique. Il est à noter que ces modèles phénoménologiques sont dérivés en se basant sur la théorie de la poromécanique et les observations expérimentales. Par conséquent, quelques phénomènes microscopiques qui se montrent au niveau macroscopique dans les expérimentations sont automatiquement considérés. Autrement dit, ces modèles sont multi-échelles. Un de ces phénomènes est la pression capillaire de la succion qui a été prise en compte au niveau du Volume Élémentaire de Référence (VER).

Quant à la théorie de la poromécanique, ces modèles sont obtenus dans le cadre du modèle mathématique présenté par Gatmiri [143] et Gatmiri et al. [150] en utilisant la succion et la température (dans le cas non-isotherme) comme des variables indépendantes. Dans ce modèle,

l'effet de déformation sur la distribution de succion et de température dans le squelette solide et l'effet inverse sont inclus par l'intermédiaire d'une formulation des surfaces d'état en indice des vides et en degré de saturation.

# CHAPITRE 2

---

## Modélisation

## thermo-hydro-mécanique des sols non-saturés

DANS ce chapitre, un système d'équations couplées, gouvernant le comportement thermo-hydro-mécanique (THHM) des milieux poreux non saturés soumis aux chargements quasi-statiques est présenté en se basant sur le modèle mathématique présenté par Gatmiri [143]. La simplicité de l'implémentation numérique et de la détermination facile des paramètres sont les avantages de ce modèle. Dans ce modèle, les variables d'état sont la contrainte totale nette «  $\sigma - p_g$  », la succion «  $p_g - p_w$  » et la température «  $T$  ». Comme expliqué dans le chapitre précédent, l'humidité est constituée de la vapeur et du liquide. Le terme de *transfert de liquide* sera utilisé pour le transfert qui se produit exclusivement dans la phase liquide, et le transfert au-delà de celui de l'état liquide est nommé le *transfert de vapeur*. La théorie du transfert de la chaleur et de l'humidité de Philip et De Vries [274] est modifiée de sorte qu'on puisse prendre en compte la déformation du squelette. On conclue, qu'en l'absence de la continuité de l'eau, tout le transfert est celui de la vapeur. En augmentant la teneur en eau, le transfert de phase liquide devient dominant. Les effets de la déformation sur la distribution de la température et de la succion dans le squelette solide et les effets inverses sont inclus dans le modèle via des surfaces d'état en indice des vides «  $e$  » et en degré de saturation «  $S_r$  » dépendantes de la température et de la succion. Le milieu poroélastique du squelette est isotrope et linéaire. Les propriétés mécaniques et hydrauliques de sol sont supposées être dépendantes de la température et de la succion. La loi de Darcy généralisée s'utilise pour le mouvement de l'eau liquide et de l'air sec. Les chaleurs latente et sensible, et l'air dissous sont pris en compte. La loi de Fourier est appliquée pour le flux de chaleur par conduction.

## 2.1 Bibliographie sur le transfert couplé de l'humidité et de la chaleur dans les milieux poreux non saturés

Le mouvement simultané de l'humidité et de la chaleur est un des phénomènes principaux observés dans les milieux poreux sous condition non isotherme. Ce phénomène est important par rapport à plusieurs problèmes, y compris la dissipation de la chaleur produite par les câbles à haute tension enterrés, l'extraction du pétrole ou de l'énergie géothermique, les remblais routiers et les fondations des chaussées soumis à des cycles thermiques, l'échauffement dû au frottement au niveau des failles dans le sol ou des formations rocheuses et le stockage des déchets radioactifs, etc.

Dans les sols saturés, le mouvement de l'humidité a lieu uniquement dans la phase liquide, tandis que dans les sols non saturés il se produit dans les deux phases liquide et gazeuse (vapeur). En raison de la nature complexe des espaces poreux et du champ de force agissant sur la vapeur et sur l'eau, ce processus est plus compliqué dans les sols non saturés, que dans ceux saturés.

Le mouvement de l'humidité provoqué par la chaleur peut mener aux modifications des propriétés thermiques et mécaniques du sol. Ceci peut par la suite affecter le fonctionnement du sol pour son but prévu. Les transferts d'humidité et d'énergie dans les milieux poreux non saturés sont fortement couplés en raison de la dépendance exclusive de la pression de vapeur saturante à la température. La présence d'un gradient thermique induit des gradients concomitants dans la densité et dans la pression de vapeur qui la font déplacer dans la direction de la température décroissante par une combinaison de diffusion et d'écoulement de gaz [277]. Cela nécessite une meilleure compréhension du comportement thermo-hydro-mécanique des milieux poreux multiphasiques et des couplages entre trois mécanismes : thermique, hydrique et mécanique. Il prouve l'intérêt scientifique considérable de l'étude expérimentale, théorique et numérique des effets combinés de transfert et de déformation sous les effets thermiques dans les sols [187].

Une étude bibliographique détaillée montre que plusieurs théories existent pour le transfert de l'humidité sous les gradients thermiques.

Dans les premières décennies du XX siècle, deux études pionnières sur le mouvement de l'humidité dans le sol ont été effectuées. La première a été poursuivie par Bouyoucos [53] dans laquelle seulement l'effet du gradient thermique sur le mouvement de l'humidité du sol a été étudié. Il a observé que l'humidité s'est déplacée du côté chaud au côté froid dans un échantillon du sol. La deuxième étude faite sur ce sujet est réalisée par Lebedeff [212]. Il a étudié le mouvement de l'humidité dans les deux phases, liquide et vapeur, sous des conditions isotherme et non isotherme.

Au début des années 1950, une grande attention a été accordée à la compréhension de la physique et de la nature de ce phénomène dans les milieux poreux. Smith [307] a attribué le mouvement d'humidité au mouvement de masse de la vapeur d'eau (convection de vapeur). Le mécanisme de diffusion de la vapeur a été également étudié par Maclean et Gwatkin [230].

Croney et Coleman [91] en utilisant l'équation de Kelvin ont mis au point une équation reliant

la pression de vapeur à la température et a conclu que le mouvement de l'humidité se déroule normalement en phase vapeur.

Dans tous les cas mentionnés ci-dessus, il a été constaté que pour chaque sol, il existe une teneur en eau initiale optimale dans laquelle le transfert d'eau sera maximal.

Winterkorn [340], a eu l'intention de montrer la similitude entre la thermo-osmose et l'électro-osmose. Il a décrit le mouvement de l'humidité en présentant une phase de film sur la surface interne du système de sol poreux. Cet écoulement de film de la zone chaude à la zone froide est censé être dû au changement de l'affinité de l'eau avec le changement de la température. Winterkorn [340], et Gouda et Winterkorn [170] ont aussi mentionné que la teneur en eau initiale joue un rôle important sur le mouvement de l'humidité.

Gurr et al. [174] ont signalé la contribution de l'écoulement de liquide et de vapeur dans le transfert de l'humidité sous gradient thermique, en mesurant les changements de la distribution d'une petite quantité de sels solubles dans le sol. Il a été supposé que le mouvement des sels solubles est seulement dû au transport dans la phase liquide. Les sels sont situés dans l'extrémité froide comme traceur. Dans tous les cas, sauf les échantillons les plus humides et les plus secs, un transfert de sels vers le côté le plus chaud est observé. Ce résultat peut être dû à un transfert net de l'eau du côté chaud au côté froid. L'eau évaporée du côté chaud se déplace sous forme de vapeur vers le côté le plus froid, où elle se condense et retourne à l'état liquide, quand un gradient approprié de pression d'humidité a été développé. Le transfert net maximal de l'eau à partir du côté chaud vers le côté froid aura lieu dans les échantillons dont la teneur en eau initiale est environ un tiers de l'équivalent d'humidité. Le mouvement de l'eau dans la phase liquide se produit à une teneur basse en eau.

Rollins et al. [286] ont examiné le transfert de l'humidité sous gradient thermique, et ont conclu qu'un état d'équilibre nécessite un transfert cyclique de l'humidité dans le système sol-eau. Leurs résultats expérimentaux montrent que les débits sont fortement influencés par la densité et le pourcentage des vides remplis par l'air. Une comparaison des résultats des distributions de l'humidité pour les systèmes circulatoire et non-circulatoire indique que le mouvement de l'humidité dans l'état liquide n'est pas un phénomène prédominant de transfert de l'humidité pour le sol utilisé.

Comme on a pu conclure, beaucoup de chercheurs avant la présentation de la théorie de Philip et De Vries [274] et de De Vries [107] ont implicitement supposé que le transfert de l'humidité aura lieu dans la phase vapeur. Cette hypothèse conduit à l'utilisation de la *loi de Fick* modifiée pour prendre en considération la réduction de section transversale de la diffusion par la matrice solide, l'eau liquide et la tortuosité du chemin de la diffusion à travers du milieu poreux. La comparaison entre les résultats théoriques et les essais en laboratoire a prouvé que cette théorie sous-estime la quantité du transfert net de la vapeur d'eau par un facteur de 3 à 10 [174, 286, 314].

Philip et De Vries [274] ont considéré que le transfert de l'humidité dans les sols non saturés se produit dans les deux phases liquide et vapeur sous l'influence combinée de la gravité et des

gradients de la température et de la teneur en eau. Plus tard, De Vries [107] a étendu cette théorie pour inclure l'humidité et le stockage de chaleur latente dans la phase de vapeur, la chaleur de mouillage et l'advection de la chaleur sensible par l'eau.

Une autre théorie pour l'analyse du transfert couplé de la masse et de la chaleur dans les milieux poreux a été développée par Taylor et Cary [313] en utilisant la théorie générale de la thermodynamique irréversible. Les expérimentations en laboratoire effectuées par Cassel et al. [66] ont montré que cette approche sous-estime le débit par un facteur de 10 à 40. Il semble que cette approche a manqué de considération rigoureuse pour le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique.

Dirksen [115], en étudiant le mouvement de l'humidité dans une colonne de congélation de sol en l'absence d'une nappe phréatique, a observé une bonne concordance avec la théorie de Philip et De Vries. Cassel et al. [66] ont également montré une corrélation étroite avec la théorie de Philip et De Vries, à travers des études expérimentales.

Il s'avère que la théorie de Philip et De Vries a été généralement acceptée en géotechnique. Cependant, cette théorie a des restrictions dans la pratique du génie géotechnique qui doivent être surmontées. Une de ses limites est l'hypothèse de l'incompressibilité du squelette du sol qui n'est pas réaliste particulièrement dans la modélisation du comportement des barrières ouvrées argileuses qui sont molles et significativement déformables. La formulation utilisant  $\theta$  (teneur en eau volumique) comme une variable d'état qui est initialement choisie par Philip et De Vries pour la présentation de leur théorie est valable pour un sol homogène et ne peut pas considérer les effets de l'hystérésis. Afin de surmonter ces restrictions, deux tentatives ont été signalées dans la littérature par Sophocleous [310] et Milly [251]. Ils ont converti cette formulation à une forme dans laquelle la succion ou la pression capillaire du sol est considérée comme une des variables du problème afin de permettre la considération de l'inhomogénéité du sol et les effets de l'hystérésis dans les cycles de séchage-remouillage. Cependant, les deux formulations développées ne sont pas appropriées pour les analyses du transfert de chaleur et d'humidité dans les sols non saturés déformables. Autrement dit, ces formulations ne tiennent pas compte des effets de changement de la pression de l'air interstitielle due à la température et au chargement, et aussi de la consolidation sur l'écoulement de liquide qui se produit en réponse à un gradient hydraulique [343].

Ces dernières années, avec le développement des techniques numériques puissantes, la formulation de Philip et De Vries fait l'objet de plusieurs modifications et extensions [124, 169, 268, 277, 319, 317]. Ces équations sont fortement couplées et leur résolution est complexe. Cependant, la difficulté fondamentale dans l'application de la théorie vient plus du manque d'informations disponibles pour déterminer les différents paramètres et les coefficients nécessaires que sur la procédure de calcul elle-même.

Geraminegad et Saxena [169] sont les premiers à développer un modèle mathématique couplé thermo-hydro-mécanique en se basant sur la théorie de Philip et De Vries dans laquelle la déformation du squelette de sol est considérée. Dans ce modèle, la déformation du sol est limitée

à la déformation volumique due à la pression du gaz et de la succion dans le cadre de la thermo-élasticité en négligeant l'effet de chargement extérieur. En ce qui concerne le transfert du gaz, il est régi par la loi de Darcy. De plus, l'existence de l'air dissous et le transfert de la chaleur dû au changement de phase entre le liquide et le gaz sont considérés. On note que dans ce modèle, les variables sont la température, la succion et la pression du gaz. Aussi, en élargissant la théorie de Philip et De Vries, Pollock [277] a pris en compte la diffusion de masse de l'air et de la vapeur à travers leurs vitesses moyennes et la chaleur de désintégration radioactive par un terme de source. En raison des limites susmentionnées, le modèle proposé par Geraminegad et Saxena [169] n'est pas applicable pour les milieux poreux non saturés déformables.

Thomas et He [318] ont analysé le transfert couplé de la chaleur, de l'humidité, et de l'air dans un sol non saturé déformable. Le travail a étendu les analyses précédentes du transfert de la chaleur et de l'humidité dans le sol non saturé à la prise en compte des déformation et du comportement contrainte-déformation du sol. Le progrès a été réalisé grâce à l'utilisation de la théorie de l'élasticité couplée avec l'approche de surface d'état pour relier la déformation volumique non seulement à la contrainte, mais aussi à la succion et à la température.

Schrefler et al. [301] ont proposé un modèle numérique afin de simuler le couplage complet thermo-hydro-mécanique. Il a été supposé que le transfert de chaleur se produit par conduction et par convection et que la viscosité du fluide interstitiel varie avec la température. Toutefois, le changement de phase ainsi que le transfert de chaleur dus à l'évaporation et à la condensation (chaleur latente) ne sont pas pris en compte. Cela a été introduit par Gawin et al. [163] dans un modèle destiné à simuler la réponse du milieu non saturé dans les différents états de saturation allant des conditions complètement saturées à des conditions sèches [187].

En se basant sur l'approche proposée par Alonso et al. [6] qui est un modèle élastique, Gatmiri [139, 141, 142] et Gatmiri et al. [140] ont proposé un modèle mathématique pour prendre en compte la réponse mécanique *non linéaire* du squelette solide. Les équations de transfert et de conservation des différentes composantes du sol non saturé dans des conditions non isothermes sont bien intégrées dans ce modèle. Le comportement mécanique non linéaire est basé sur le modèle non linéaire hyperbolique de Kondner-Duncan. La notion d'une surface d'état de l'indice des vides qui dépende de la température, de la succion et des contraintes nettes, est également introduite. De plus, la formulation choisie pour cette surface assure la compatibilité avec le modèle non linéaire de Kondner-Duncan. Ce modèle a été intégré dans les codes d'éléments finis « U-DAM » et «  $\Theta$ -STOCK » développés par Gatmiri [139, 141, 146] pour la modélisation de l'écoulement couplé et de la déformation des sols non saturés. Les aspects importants de la construction des barrages en terres ont été considérés dans ces codes.

## 2.2 Système d'équations

Le système d'équations, gouvernant le comportement des milieux poreux non saturés influencés par les effets de la chaleur est composé de : l'équation d'équilibre et les équations constitutives

du squelette solide, l'équation de transfert et l'équation de conservation de la masse de l'humidité, l'équation de transfert et l'équation de conservation de la masse de l'air, l'équation de conservation de l'énergie et l'équation de diffusion de la chaleur.

## 2.2.1 Squelette solide

La déformation totale d'un milieu poreux peut être calculée à partir de l'équation d'équilibre du squelette solide en adoptant une loi de comportement [143, 144, 151, 146]. Pour obtenir une formulation couplée entre les trois phases, les effets de la succion et de la température sur la déformation et sur le degré de saturation sont modélisés en écrivant deux lois de comportement. La première loi introduit la relation entre la contrainte totale nette et la déformation en tenant compte des effets de la succion et de la température. La deuxième loi représente l'évolution du degré de saturation en fonction du niveau de la contrainte appliquée, de la succion et de la température. La loi de comportement du squelette solide se limite au cas linéaire en simplifiant celle du cas hyperbolique paramétrée par la succion et la température [143].

### 2.2.1.1 Équation d'équilibre

En supposant l'hypothèse des petites perturbations et en définissant le tenseur de contraintes nettes  $(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_g)$ , l'équilibre mécanique d'un sol non saturé s'écrit comme suit :

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_g)_{,j} + p_{g,i} + b_i = 0 \quad (2.1)$$

où  $\sigma_{ij}$  est le tenseur de contrainte totale,  $\delta_{ij}$  est le delta de Kronecker,  $p_g$  est la pression du gaz et  $b_i$  est la force volumique appliquée sur  $\Omega$ .

### 2.2.1.2 Lois de comportement

La première loi constitutive du squelette (relation contrainte-déformation) peut donc être définie incrémentalement en terme de variation de contrainte totale nette  $d(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_g)$  comme suit :

$$d(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_g) = D_{ijkl}d\varepsilon_{kl}^\sigma \quad (2.2)$$

où  $D_{ijkl}$  est la matrice de rigidité élastique linéaire et  $d\varepsilon_{kl}^\sigma$  est l'incrément de la déformation due à la variation de contrainte totale nette dans les sols non saturés.

Il est supposé que :

$$d\varepsilon_{kl}^\sigma = d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^{suc} - d\varepsilon_{kl}^T \quad (2.3)$$

où  $d\varepsilon_{kl}$  est l'incrément de la déformation totale.  $d\varepsilon_{kl}^{suc}$  et  $d\varepsilon_{kl}^T$  sont les incréments de la déformation volumique due respectivement, à la variation de succion et de température.

Par identification de l'équation (3.80) dans (3.79), on obtient :

$$d(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_g) = D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^{suc} - d\varepsilon_{kl}^T) \quad (2.4)$$

Dans cette équation  $d\varepsilon_{kl}^{suc}$  et  $d\varepsilon_{kl}^T$  s'écrivent comme suit :

$$d(p_g - p_w)\delta_{kl} = D_{km}^{suc}d\varepsilon_{ml}^{suc} \Rightarrow d\varepsilon_{kl}^{suc} = (D_{mk}^{suc})^{-1}d(p_g - p_w)\delta_{ml} \quad (2.5a)$$

$$d(T)\delta_{kl} = D_{km}^T d\varepsilon_{ml}^T \Rightarrow d\varepsilon_{kl}^T = (D_{mk}^T)^{-1}d(T)\delta_{ml} \quad (2.5b)$$

où  $d(p_g - p_w)$  et  $d(T)$  sont respectivement, l'incrément de la succion et de la température.  $D_{mk}^{suc} = \beta_{suc}[1, 1, 0]^T$  et  $D_{mk}^T = \beta_T[1, 1, 0]^T$  dans lesquelles  $\beta_{suc}$  et  $\beta_T$  s'obtiennent à partir de la surface d'état de l'indice des vides ( $e$ ).

En substituant l'équation (3.82) dans (3.81), on obtient :

$$d(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_g) = D_{ijkl}d\varepsilon_{kl} - F_{ij}^{suc}d(p_g - p_w) - F_{ij}^T d(T) \quad (2.6)$$

où  $F_{ij}^{suc} = D_{ijkl}(D_{lk}^{suc})^{-1}$  et  $F_{ij}^T = D_{ijkl}(D_{lk}^T)^{-1}$ .

La matrice de rigidité élastique linéaire  $D_{ijkl}$  s'écrit :

$$D_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.7)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé qui dans un milieu non saturé dépendent des variables indépendantes  $(\sigma - p_g)$ ,  $(p_g - p_w)$  et  $(T)$  :

$$D_{ijkl}(\lambda, \mu) = D_{ijkl}(K_0, E_t) = D_{ijkl}(\sigma - p_g, p_g - p_w, T) \quad (2.8)$$

où  $E_t$  est le module tangent d'élasticité et  $K_0$  est le module de compressibilité volumique calculé à partir de la surface d'état de l'indice des vides ( $e$ ).

Dans un cadre linéaire, le module tangent d'élasticité  $E_t$  est évalué comme :

$$E_t = E_l + E_{suc} + E_T \quad (2.9)$$

où  $E_l$  est le module d'élasticité en l'absence de la succion sous conditions isothermes.

Il faut noter que la rigidité initiale augmente avec la succion.  $m_{suc}$  étant constant,  $E_{suc}$  présente l'effet de la succion sur le module d'élasticité :

$$E_{suc} = m_{suc}(p_g - p_w) \quad (2.10)$$

Tandis que,  $E_T$  reproduit les aspects thermiques du problème traité :

$$E_T = m_T T \quad (2.11)$$

où  $m_T$  est constant.

Par conséquent, en injectant (3.84) dans (3.83), la première loi constitutive s'obtient comme suit :

$$d(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_g) = (\lambda\delta_{ij}d\varepsilon_{kk} + 2\mu d\varepsilon_{ij}) - F_{ij}^{suc}d(p_g - p_w) - F_{ij}^T d(T) \quad (2.12)$$

La relation déformation-déplacement, décrivant la cinématique de la déformation s'écrit :

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.13)$$

En substituant la première loi de comportement (3.88) dans l'équation d'équilibre (2.1), on obtient l'équation d'équilibre finale pour le squelette solide, sous la forme suivante :

$$(\lambda + \mu)u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + F^{suc}p_{w,i} + (1 - F^{suc})p_{g,i} - F^T T_{,i} + b_i = 0 \quad (2.14)$$

Dans ce qui précède, il a été mentionné que les effets de la déformation sur la distribution de la température et de la succion dans le squelette solide et les effets inverses doivent être pris en compte dans le modèle via des surfaces d'état en indice des vides et en degré de saturation, dépendantes de la température et de la succion.

Dans ce qui suit, on essaiera de retrouver les relations des surfaces d'état de  $e$  et de  $S_r$  afin de calculer les différents paramètres mécaniques dépendants de la succion et de la température présentés dans cette partie.

### Surface d'état de l'indice des vides

Comme déjà mentionné, la surface d'état de l'indice des vides ( $e$ ) est une fonction des variables indépendantes  $(\sigma - p_g)$ ,  $(p_g - p_w)$  et  $(T)$  :

$$e = f(\sigma - p_g, p_g - p_w, T) \quad (2.15)$$

Les effets de la succion et de la température sur la déformation (3.88) s'expriment respectivement par  $\beta_{suc}$  et  $\beta_T$  :

$$\beta_{suc} = \frac{1}{1 + e} \frac{\partial e}{\partial (p_g - p_w)} \quad (2.16a)$$

$$\beta_T = \frac{1}{1 + e} \frac{\partial e}{\partial T} \quad (2.16b)$$

En considérant la définition du module de compressibilité volumique (variation relative de volume sous l'effet d'une pression appliquée), celui d'un sol non saturé s'écrit :

$$d\varepsilon^v = \frac{1}{1 + e} \frac{\partial e}{\partial (\sigma - p_g)} d(\sigma - p_g) = K_0^{-1} d(\sigma - p_g) \quad (2.17)$$

Afin d'assurer la compatibilité avec la loi linéaire, le module de compressibilité volumique doit être défini de sorte que les propriétés volumiques des sols non saturés soumis à des variations monotones croissantes du degré de saturation soient assurées. L'expression suivante du module de compressibilité volumique est simplifiée par rapport à celle proposée par Gatmiri [142] dans le cas non linéaire :

$$K_0 = \frac{K_0^L P_{atm}}{a_e - b_e \frac{(p_g - p_w)}{\sigma_e}} \quad (2.18)$$

où  $K_0^L$  est le module de compressibilité volumique en l'absence de la succion,  $a_e$  et  $b_e$  sont des constantes,  $\sigma_e$  est la pression de gonflement et  $P_{atm}$  est la pression atmosphérique.

Pour une succion nulle ( $p_g - p_w = 0$ ), en choisissant  $a_e = 1$ , on obtient la forme générale de la loi linéaire :

$$K_0 = K_0^L P_{atm} \quad (2.19)$$

Ainsi, l'expression finale de  $e$  de ce modèle non isotherme s'écrit comme suit :

$$e = \frac{(1 + e_0) \exp(-c_e(T - T_0))}{\exp\left(\frac{(\sigma - p_g) \left(a_e - \frac{b_e}{\sigma_e}(p_g - p_w)\right) + b_e(p_g - p_w)}{K_0^L P_{atm}}\right)} - 1 \quad (2.20)$$

On note que cette relation dérive des équations concernant le module d'élasticité et le module de compressibilité volumique du modèle linéaire. En considérant une succion, une température et une contrainte nulles, on observe que  $e = e_0$  (indice des vides initial).

Ainsi,  $\beta_{suc}$  et  $\beta_T$  s'écrivent :

$$\beta_{suc} = \frac{b_e}{K_0^L} \left(1 - \frac{\sigma - p_g}{\sigma_e}\right) \quad (2.21a)$$

$$\beta_T = c_e \quad (2.21b)$$

### Surface d'état du degré de saturation

La deuxième loi constitutive (relation contrainte-succion-degré de saturation) a été généralement décrite en fonction de la succion, de la contrainte nette et de la température telle que :

$$S_r = f(\sigma - p_g, p_g - p_w, T) \quad (2.22)$$

Cependant, une variation de la succion peut produire un changement plus important dans le degré de saturation ou de la teneur en eau que celui produit par un changement de contrainte normale nette [133]. Pour cette raison et pour simplifier les équations, le degré de saturation s'écrit en fonction de la succion et de la température.

De nombreuses relations ont été utilisées pour définir le degré de saturation des sols non saturés, mais la forme exponentielle basée sur des variations de succion et de température est la plus commune et la plus fiable. Le degré de saturation s'écrit [143] :

$$S_r = 1 - (1 - \exp(a_s(p_g - p_w))) (\exp(b_s(T - T_0))) \quad (2.23)$$

dans laquelle  $a_s$  et  $b_s$  sont des constantes.

À noter que la contrainte nette ( $\sigma - p_g$ ) a été négligée pour simplifier l'équation. Alors, on revient sur la notion classique de la courbe de rétention de l'eau qui varie cependant avec la température.

## 2.2.2 Eau (liquide et vapeur)

Comme cela a été décrit, après avoir abordé les aspects mécaniques du comportement dans la partie précédente, on étudiera le transfert de l'humidité (liquide et vapeur) se produisant au sein d'un milieu non saturé dans des conditions non isothermes, ainsi que la conservation de la masse de ce constituant.

### 2.2.2.1 Transfert en phase liquide

Plusieurs mécanismes ont été utilisés pour expliquer l'écoulement de l'eau liquide à travers un sol non saturé. Par exemple, un gradient de la teneur en eau, ou de la succion, ou du charge hydraulique ont tous été considérés comme des potentiels porteurs (*driving potentials*). Il est important d'utiliser la forme de la loi d'écoulement qui régit proprement le mouvement de l'eau.

Bien que le changement de volume du sol se produit à la suite d'un changement de la teneur en eau dans le sol, il n'est pas correct de supposer que l'eau s'écoule d'un point ayant la plus forte teneur en eau vers un point ayant une teneur en eau inférieure. Ce type de loi d'écoulement n'a pas une base fondamentale, car l'eau peut aussi s'écouler inversement, d'un endroit ayant la plus basse teneur en eau à un endroit ayant une teneur en eau supérieure. Cela est possible sous l'influence des facteurs tels que la différence de pression de l'air, les effets d'hystérésis, les différences de concentration chimique ou thermique. Par conséquent, un gradient de teneur en eau ne doit pas être utilisé comme un potentiel d'écoulement de l'eau [133].

Dakshanamurthy et Fredlund [99] ont supposé que l'écoulement est défini de façon plus convenable en terme d'un gradient de charge hydraulique pour chacun des fluides (air et eau). Ainsi, ce n'est pas le gradient de succion qui produit l'écoulement en phase liquide dans le sol non saturé. Dans le cas particulier où le gradient de pression de l'air est nul, le gradient de la succion sera numériquement égal au gradient de pression de l'eau. C'est la situation courante dans la nature.

Richards [284] a supposé que la différence essentielle entre l'écoulement dans un milieu poreux saturé et non saturé réside dans le fait que sous cette dernière condition, la pression est déterminée par les forces capillaires. Différents auteurs [142, 143, 144, 274] ont confirmé cette hypothèse.

Plusieurs chercheurs ont proposé la généralisation de la loi de Darcy pour le transfert de l'eau dans le sol non saturé [60, 81, 284]. La loi de Darcy généralisée reste la plus utilisée dans les modélisations théoriques et numériques des écoulements dans les milieux poreux, bien qu'une justification expérimentale rigoureuse de la généralisation de ce modèle aux conditions non saturées semble indispensable [187].

En utilisant cette loi et selon l'hypothèse de Richards [284], l'équation de transfert de l'eau dans

les sols non saturés s'écrit comme suit :

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{q}_w}{\rho_w} = -\mathbf{K}_w \nabla(\Psi + z) \quad (2.24)$$

avec

$\mathbf{U}$  : vitesse d'écoulement de l'eau  $m/s$ ,

$\mathbf{q}_w$  : vecteur de flux de densité du liquide en  $kg/m^2s$ ,

$\rho_w$  : poids spécifique du fluide en  $kg/m^3$ ,

$\mathbf{K}_w$  : tenseur de perméabilité à l'eau du milieu en  $m/s$ ,

$\Psi$  : potentiel capillaire en  $m$ ,

$z$  : cote du point considéré ou le terme de gravitation en  $m$ .

Dans un problème non isotherme, le potentiel capillaire  $\Psi$  varie en fonction de la teneur en humidité et de la température. Celui pour une température de référence  $\Psi_r$ , en termes de succion, prendra la forme suivante :

$$\Psi_r(p_g - p_w) = \frac{p_g - p_w}{\gamma_w} \quad (2.25)$$

Ewen et Thomas [124] ont également écrit le potentiel capillaire dans une température de référence en terme de teneur en eau :

$$\Psi_r(\theta_w) = \frac{-2,41 - 0,002\theta_w}{g} \quad (2.26)$$

La variation du potentiel capillaire en fonction de la température est considérée par l'introduction de la tension superficielle de l'eau,  $\sigma(T)$  [143] :

$$\Psi(\theta_w, T) = \frac{\sigma(T)}{\sigma_r} \Psi_r(\theta_w) \quad (2.27)$$

où  $\sigma_r$  est la tension superficielle de l'eau dans une température de référence.

Par conséquent, le paramètre  $\nabla(\Psi)$  dans l'équation (2.24) s'écrit comme :

$$\nabla\Psi(\theta_w, T) = \frac{\partial\Psi}{\partial T} \nabla T + \frac{\partial\Psi}{\partial\theta_w} \nabla\theta_w \quad (2.28)$$

où

$$\frac{\partial\Psi}{\partial T} = \frac{\Psi_r(\theta_w)}{\sigma_r} \frac{d\sigma(T)}{dT} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\theta_w} = \frac{\sigma(T)}{\sigma_r} \frac{d\Psi_r(\theta_w)}{d\theta_w} \quad (2.30)$$

Donc, le terme  $\frac{\partial\Psi}{\partial\theta_w} \nabla\theta_w$  dans l'équation (2.28) peut s'écrire comme :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\theta_w} \nabla\theta_w = \frac{\sigma(T)}{\sigma_r} \nabla\Psi_r = \frac{\sigma(T)}{\sigma_r \gamma_w} \nabla(p_g - p_w) \quad (2.31)$$

| $T(^{\circ}C)$ | $T(^{\circ}K)$ | $\sigma(T)$ |
|----------------|----------------|-------------|
| 0              | 273            | 0,0757      |
| 10             | 283            | 0,0742      |
| 20             | 293            | 0,07275     |
| 30             | 303            | 0,0712      |
| 40             | 313            | 0,0696      |
| 50             | 323            | 0,0679      |
| 60             | 333            | 0,0662      |
| 70             | 343            | 0,0644      |
| 80             | 353            | 0,0626      |
| 100            | 373            | 0,0588      |

**Tableau 2.1** — Tension superficielle de l'eau, d'après Fredlund et Rahadjo [133]

En substituant les relations (2.29) et (2.31) dans l'équation (2.24), la vitesse de l'eau en terme de succion sera représentée par :

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{q}_w}{\rho_w} = -D_{T_w} \nabla T - D_{P_w} \nabla(p_g - p_w) - D_w \nabla z \quad (2.32)$$

où

$D_{T_w}$  : diffusivité thermique de l'eau,  $\mathbf{K}_w \frac{\Psi_r(\theta_w)}{\sigma_r} \frac{d\sigma(T)}{dT}$ ,

$D_{P_w}$  : diffusivité isotherme de l'eau,  $\mathbf{K}_w \frac{\sigma(T)}{\sigma_r \gamma_w}$ ,

$D_w$  : diffusivité due à la pesanteur,  $\mathbf{K}_w$ .

### Tension superficielle de l'eau

On sait que la tension superficielle de l'eau dans le sol non saturé diminue avec l'augmentation de la température. Mohamed et al. [254], d'après le manuel *CRC de chimie et de physique* [332] (Tab. 2.1), ont formulé la relation entre la tension superficielle  $\sigma_T$  et la température comme suit :

$$\sigma(T) = (75.882 - 0.165 T) \times 10^{-3} \quad (2.33)$$

où  $\sigma(T)$  est en  $N/m$  et  $T$  est en  $^{\circ}C$ .

L'autre formulation est présentée par Thomas et Li [320] :

$$\sigma(T) = 0.1171 - 0.0001516 T \quad (2.34)$$

où  $T$  est en  $^{\circ}K$ .

Les variations de  $\sigma(T)$  en fonction de la température entre 0 et 100  $^{\circ}C$  sont présentées dans la figure (2.1).

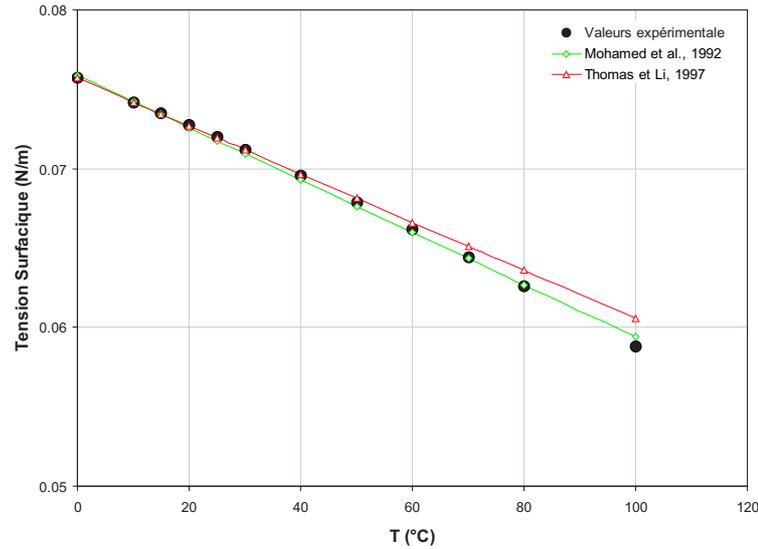


Figure 2.1 — Tension superficielle de l'eau (N/m) en fonction de la température (°C)

### Coefficient de perméabilité à l'eau du milieu

Le coefficient de perméabilité à l'eau d'un sol  $K_w$  est une mesure de l'espace disponible pour l'écoulement de l'eau dans le sol. L'eau liquide dans un sol non saturé, peut seulement s'écouler à travers les espaces poreux remplis par l'eau. Les pores remplis d'air sont des canaux isolants de l'écoulement de l'eau. Le coefficient de perméabilité dépend des propriétés du fluide et des propriétés du milieu poreux. Différents types de fluides (par exemple, eau et huile) ou différents types de sol (par exemple, sable et argile) produisent des valeurs différentes pour le coefficient de perméabilité [133].

En outre, il est évident que selon la façon dont sont déposés les sédiments dans la nature, la perméabilité à l'eau horizontale est normalement plus significative dans l'écoulement de l'eau. Le rapport de la perméabilité horizontale à la perméabilité verticale est compris entre 1 et 100. Mais, dans cette étude, l'écoulement de l'eau est considéré comme étant isotrope.

Le coefficient de perméabilité à l'eau du milieu s'écrit sous la forme générale suivante :

$$K_w = \frac{\rho_w g}{\mu_w} K_{int} \quad (2.35)$$

avec

$\mu_w$  : viscosité de l'eau  $Ns/m^2$ ,

$K_{int}$  : perméabilité dite géométrique ou intrinsèque du milieu  $m^2$ .

Cette équation montre l'influence de la densité  $\rho_w$  et de la viscosité de l'eau  $\mu_w$  sur le coefficient de perméabilité.

La perméabilité intrinsèque d'un sol  $K_{int}$  représente les caractéristiques du milieu poreux et est indépendante des propriétés du fluide. Les caractéristiques du milieu poreux sont fonctions des propriétés du *volume-masse* du sol. Pour cette raison,  $K_w$  s'écrit en fonction de n'importe quel

couple de trois propriétés possibles de volume-masse  $(S_r, e, \theta_w)$  [133, 220].

Dans un sol non saturé, le coefficient de perméabilité dépend considérablement de la gradation du sol et de la composition, l'indice des vides, le tissu et le degré de saturation [211]. Pour un sol donné, si le tissu ne change pas significativement au cours du processus de consolidation, l'indice des vides et le degré de saturation sont les principaux facteurs contrôlant la perméabilité. Mais, en général, le changement de l'indice des vides dans un sol non saturé est faible et son effet sur le coefficient de perméabilité est secondaire. Cependant, l'effet d'un changement du degré de saturation peut être très important. Par conséquent, le coefficient de perméabilité est souvent décrit comme une fonction singulière du degré de saturation  $S_r$  ou de la teneur en eau  $\theta_w$ .

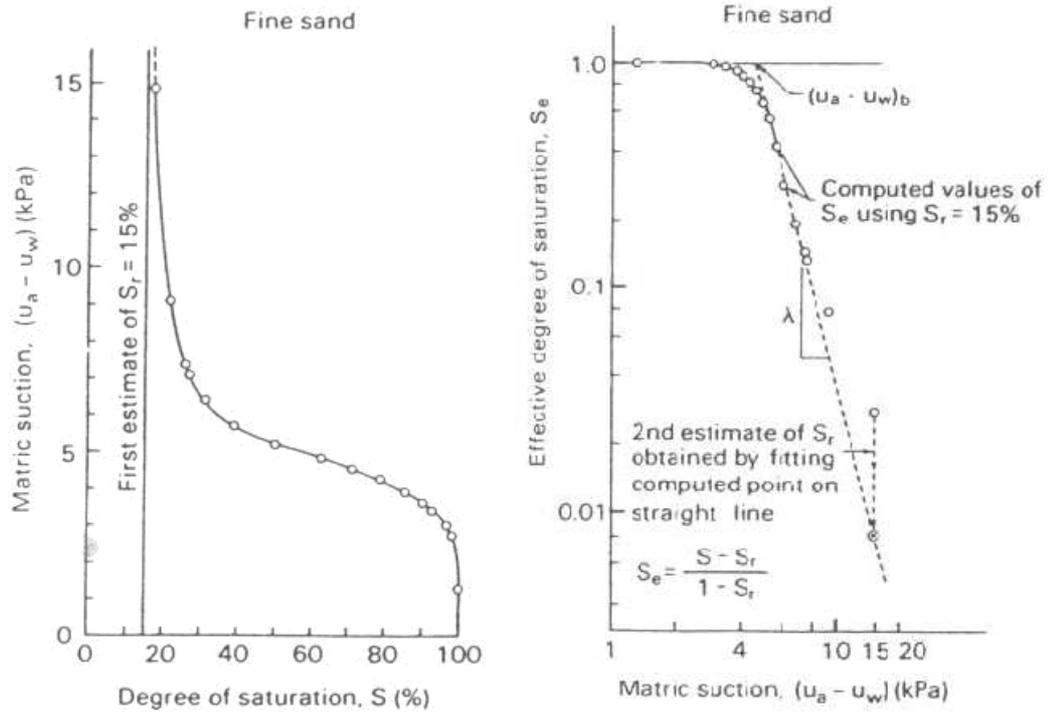
Comme déjà mentionné auparavant, l'eau s'écoule à travers les espaces poreux remplis par l'eau. Donc le pourcentage des vides remplis d'eau est un facteur important. Lorsqu'un sol devient non saturé, l'air remplace d'abord une partie de l'eau dans les grands pores. Cela produit l'écoulement de l'eau à travers les plus petits pores avec une tortuosité accrue au chemin d'écoulement. Une nouvelle augmentation de la succion du sol aboutit à une nouvelle diminution du volume de pores occupés par l'eau. Autrement dit, le coefficient de perméabilité à l'eau diminue rapidement au moment où l'espace disponible pour l'écoulement de l'eau se réduit.

### Relations entre le coefficient de perméabilité à l'eau et le degré de saturation

Brooks et Corey [58] ont été les premiers à proposer l'obtention du coefficient de perméabilité à partir de la courbe de succion et de degré de saturation  $(p_g - p_w, S_r)$  (Fig. 2.2). Trois paramètres du sol peuvent être identifiés à partir de cette courbe : la valeur du point d'entrée d'air  $(p_g - p_w)_b$ , le degré de saturation résiduel  $S_{ru}$ , et l'indice de distribution de taille des pores  $I_d$ . Ces paramètres sont facilement visualisés si l'état de saturation s'exprime en termes de degré de saturation effectif  $S_{re}$  [87] :

$$S_{re} = \frac{S_r - S_{ru}}{1 - S_{ru}} \quad (2.36)$$

Le degré de saturation résiduel  $S_{ru}$ , est défini comme étant le degré de saturation auquel une augmentation de la succion ne produit pas un changement significatif dans le degré de saturation (Fig. 2.2(a)). Le degré de saturation effectif  $S_{re}$ , peut être calculé en estimant d'abord le degré de saturation résiduel. Le degré de saturation effectif est alors tracé en fonction de la succion comme illustré dans la Fig. 2.2(b). Deux lignes horizontale et inclinée peuvent être tracées par les points. Cependant, les points ayant des valeurs élevées de la succion peuvent ne pas se trouver sur la ligne droite utilisée pour la première estimation du degré de saturation résiduel. Par conséquent, le point ayant la succion la plus élevée doit être forcé à passer par la ligne droite en estimant une nouvelle valeur de  $S_{ru}$  (voir Fig. 2.2(b)). Une deuxième estimation du degré de saturation résiduel est ensuite effectuée pour recalculer les valeurs pour le degré de saturation effectif. Une nouvelle courbe de succion et de degré de saturation effectif peut alors



(a) Courbe de succion et de degré de saturation (b) Courbe de degré de saturation effectif et de succion

**Figure 2.2** — Détermination de la valeur du point d’entrée d’air  $(p_g - p_w)_b$ , degré de saturation résiduel  $S_{ru}$  et indice de distribution de taille des pores  $I_d$  (d’après Brooks et Corey, 1964).

être obtenue. La procédure ci-dessus est répétée jusqu’à ce que tous les points sur la ligne inclinée constituent une ligne droite. Cela se produit généralement par la deuxième estimation du degré de saturation résiduel.

La valeur du point d’entrée d’air du sol  $(p_g - p_w)_b$ , est la valeur de succion qui doit être dépassée avant que l’air recule dans les pores de sol. Le point d’intersection entre la ligne en pente droite et l’ordonnée de saturation ( $S_{re} = 1$ ) dans la Fig. 2.2(b) définit la valeur du point d’entrée d’air du sol. La ligne inclinée pour les points ayant des succions plus grandes que la valeur du point d’entrée d’air peut être décrite par l’équation suivante :

$$S_{re} = \left( \frac{(p_g - p_w)_b}{(p_g - p_w)} \right)^{I_d} \quad \text{pour } (p_g - p_w) \succ (p_g - p_w)_b \quad (2.37)$$

avec

$I_d$  : indice de distribution de taille des pores défini comme étant la pente négative de la courbe de degré de saturation effectif et de succion.

Le coefficient de perméabilité à l’eau d’après Brooks et Corey [58] s’écrit comme suit :

$$\begin{cases} K_w = K_s & \text{pour } (p_g - p_w) \preceq (p_g - p_w)_b \\ K_w = K_s S_{re}^\delta & \text{pour } (p_g - p_w) \succ (p_g - p_w)_b \end{cases} \quad (2.38)$$

avec

$K_s$  : coefficient de perméabilité à l'eau pour le sol dans le cas saturé (c-à-d,  $S_r = 100\%$ ),  
 $\delta$  : constante empirique qui vaut  $\left( = \frac{2 + 3I_d}{I_d} \right)$ .

Tab. (2.2) présente les valeurs de  $\delta$  et leurs  $I_d$  correspondants pour différents types de sol.

| Sol                     | $\delta$ | $I_d$    | Référence      |
|-------------------------|----------|----------|----------------|
| sable uniforme          | 3,0      | $\infty$ | Irmay [185]    |
| sol et roches poreux    | 4,0      | 2,0      | Corey [86]     |
| dépôts de sable naturel | 3,5      | 4,0      | Averjanov [17] |

**Tableau 2.2** — valeurs de  $\delta$  et de  $I_d$

### Relations entre le coefficient de perméabilité à l'eau et la succion

Le coefficient de perméabilité à l'eau  $K_w$  peut également être exprimé en fonction de la succion en substituant le degré de saturation effectif (2.37), dans la fonction de perméabilité (2.38) [58]. Le facteur le plus important contrôlant la valeur de la perméabilité est le degré de saturation (ou la succion). Les changements de la perméabilité de trois ou de plusieurs ordres de grandeur en variant le degré de saturation, sont connus. Les résultats typiques concernant la variation de la perméabilité à l'eau avec la succion du sol et le degré de saturation sont présentés dans la Fig. (2.3). Ils correspondent aux essais sur des échantillons de billes de verre réalisés par Topp et Miller [321] et signalés par Mualem [256]. Il s'avère que la relation entre  $K_w$  et  $S_r$  est susceptible d'être plus utile puisque les effets d'hystérésis sont beaucoup plus petits. Cependant, les relations entre  $K_w$  et  $\Psi$  sont souvent utilisées dans des analyses d'écoulement de l'eau, généralement sans tenir compte d'hystérésis.

Plusieurs expressions empiriques ont été données pour la relation  $K_w - S_r$  et  $K_w - \Psi$ . Certaines d'entre eux sont présentées ci-dessous :

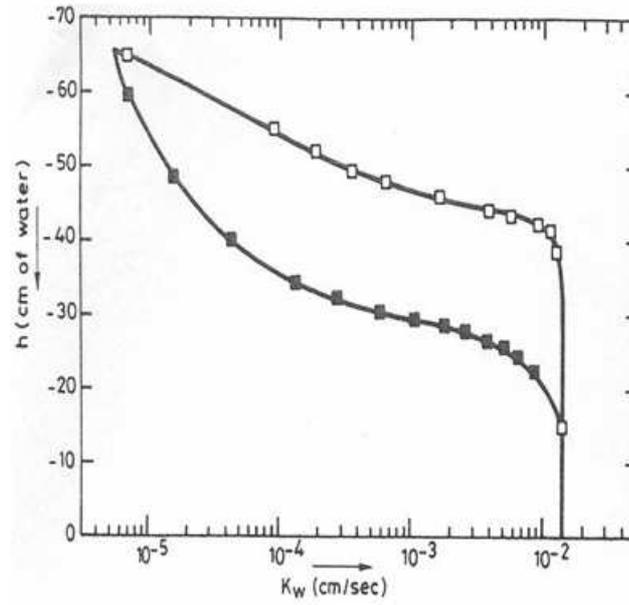
– Irmay (1954), Corey (1957) :

$$K_w = K_s \left( \frac{S_r - S_{ru}}{1 - S_{ru}} \right)^d, \quad d = \begin{cases} 3 & \text{(Irmay [185])} \\ 4 & \text{(Corey [86])} \\ 3, 5 & \text{(Kovacs [205])} \end{cases} \quad (2.39)$$

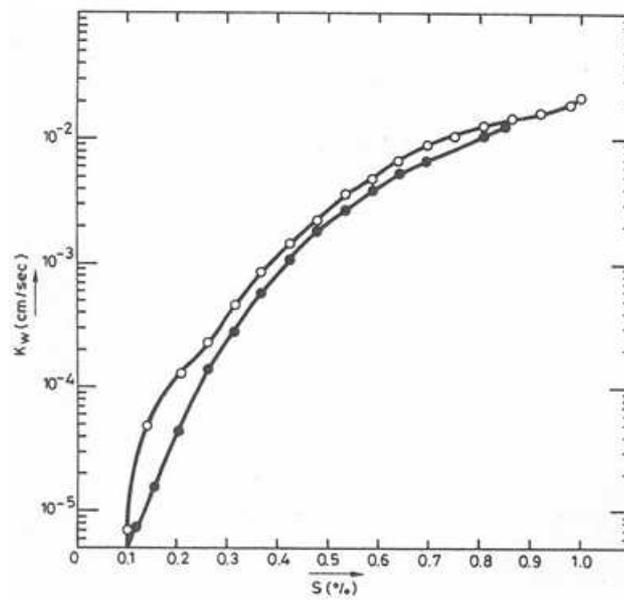
– Gardner (1958) [135] :

$$K_w = \frac{K_s}{1 + a \left( \frac{p_g - p_w}{\rho_w g} \right)^n} \quad (2.40a)$$

$$K_w = K_s \exp \left( -n \frac{p_g - p_w}{\rho_w g} \right) \quad (2.40b)$$



(a)



(b)

**Figure 2.3** — Variation de la perméabilité à l'eau d'un échantillon de billes de verre avec (a) succion du sol et (b) degré de saturation (d'après Topp et Miller, 1966).

– Gardner (1960) [136] :

$$K_w = \frac{a}{b + (p_g - p_w)^n} \quad (2.41)$$

– Scott (1963) [303] :

$$K_w = K_s(1 - n(1 - S_r)) \quad (2.42)$$

– Brutsaert (1968) [59] :

$$K_w = K_s S_r^n \quad (2.43)$$

– Arbhahirama et Kndakorn (1968) [13] :

$$K_w = \frac{K_s}{1 + \left( \frac{p_g - p_w}{(p_g - p_w)_b} \right)^n} \quad (2.44)$$

– Richards et Chan (1969) [283] :

$$K_w = E + \frac{D}{A + B S_r^m + C S_r^n} \quad (2.45)$$

– Nielsen et al. (1986) [265] :

$$K_w = K_s S_{re}^n \left( 1 - (1 - S_{re}^{1/m})^m \right)^2 \quad (2.46)$$

$a, b, n, m, A, B, C, D, E$  sont des paramètres liés au type du sol considéré.

Par exemple, l'équation proposée par Gardner [135] (équation. 2.40) est illustrée sur la Fig. (2.4). Cette équation fournit une fonction de perméabilité flexible définie par deux constantes,  $a$  et  $n$ . La constante  $n$  désigne la pente de la fonction, et la constante  $a$  est liée au point d'arrêt de la fonction. Quatre fonctions typiques avec les différentes valeurs de  $a$  et de  $n$  sont illustrées dans la Fig. (2.4).

Afin de combiner les effets de l'indice des vides et de la saturation, il est proposé d'utiliser un modèle de produit comme suit :

$$K_w(S_r, e) = f_1(S_r) f_2(e) = K_w(S_r, e_0) 10^{(e-e_0)/\alpha} \quad (2.47)$$

où  $e_0$  est l'indice des vides initial (ou référence) et  $\alpha$  est la pente de la relation linéaire  $\log_{10} K_w$  en fonction de  $e$  pour un  $S_r$  constant.

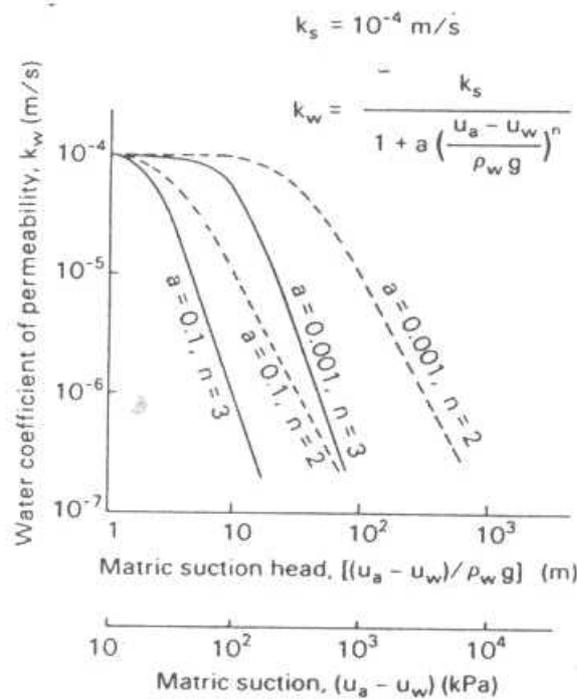
La relation suivante est proposée par Alonso et al. [6] :

$$K_w(S_r, e) = A \left( \frac{S_r - S_{ru}}{1 - S_{ru}} \right)^3 10^{e\alpha} \quad (2.48)$$

où  $A$  et  $\alpha$  sont des constantes.

En se basant sur des données expérimentales effectuées par Villar et al. [329], l'expression de la conductivité hydraulique du sol non saturé a été adaptée comme :

$$K_w(S_r, e) = 1.2 e^{-16} \left( \frac{S_r - 0.05}{1 - 0.05} \right)^3 10^{5e} \quad (2.49)$$



**Figure 2.4** — Modèle de Gardner pour le coefficient de perméabilité à l'eau en fonction de la succion.

Aussi, Thomas et Li [320] ont proposé la forme suivante :

$$K_w(\theta, n) = \begin{cases} 1.9 \times 10^{-13} \exp\left(76.56 \frac{\theta}{n}\right); & \theta < 0.052 \\ 1.5 \times 10^{-10} \exp\left(28.06 \frac{\theta}{n} - 12.23 \left(\frac{\theta}{n}\right)^2\right); & 0.052 < \theta \leq n \end{cases} \quad (2.50)$$

### Relations entre le coefficient de perméabilité à l'eau et la température

L'effet du changement de volume du squelette et l'effet de la teneur en eau sur la perméabilité sont respectivement, présenté par l'intermédiaire des surfaces d'état en indice des vides et en degré de saturation qui sont, toutes les deux, dépendantes de la température.

De plus, les travaux expérimentaux de Habibagahi [175] mettent en évidence une variation de la perméabilité à l'eau lors de l'échauffement. Sur la Fig. (2.5), on observe les résultats de la variation de la perméabilité en fonction de la température et de l'indice des vides. On constate que pour le même indice des vides, la perméabilité augmente avec l'augmentation de la température.

Afin d'intégrer les phénomènes liés à la variation de la température dans la formulation, les effets thermiques sont souvent pris en considération à travers la variation de viscosité de l'eau en fonction de la température. L'augmentation de la perméabilité à l'eau avec la température peut être due au fait qu'en chauffant, la viscosité de l'eau diminue, en induisant une diminution

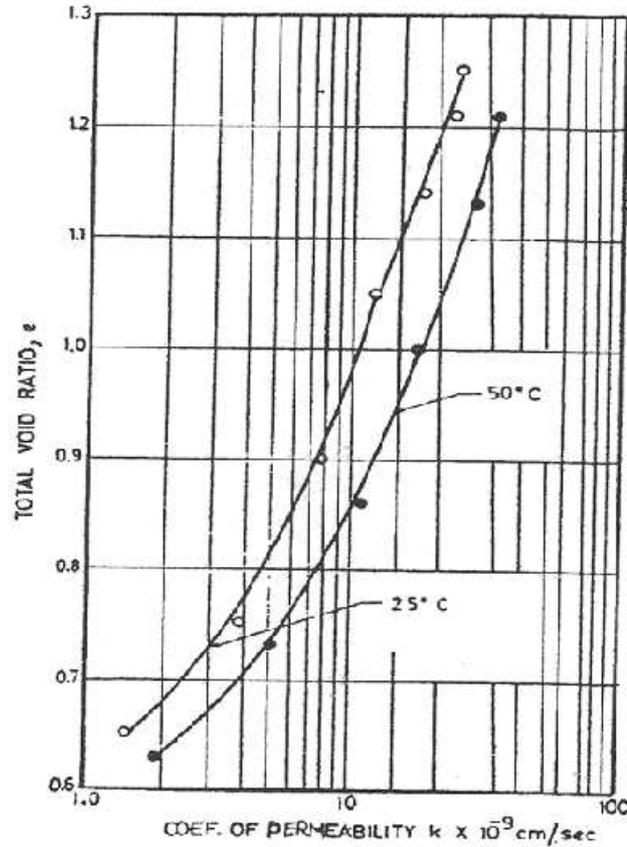


Figure 2.5 — perméabilité à l'eau-influence de la température (d'après Habibagahi, 1977).

des frottements intervenant lors de l'écoulement de l'eau dans le matériau.

Donc, pour des problèmes non-isothermes, la dépendance de la perméabilité hydraulique à l'égard de l'indice des vides, du degré de saturation et de la température du sol doit être adaptée dans la formulation en utilisant la relation entre  $K_w$  et la viscosité dynamique de l'eau  $\mu_w$  :

$$K_w(S_r, e, T) = \frac{\mu_w(T_r)}{\mu_w(T)} K_{wr}(S_r, e) \quad (2.51)$$

avec

$T$  : température où l'indice inférieur  $r$  désigne la température de référence, qui est  $20^\circ\text{C}$ ,

$K_{wr}$  : coefficient de perméabilité à l'eau à la température de référence absolue ( $m.s^{-1}$ ), qui est défini dans la partie précédente.

La même notion a été considérée par Gatmiri [143]. Elle s'exprime par :

$$K_w(S_r, e, T) = a 10^{e\alpha} \left( \frac{S_r - S_{ru}}{1 - S_{ru}} \right)^d \frac{\mu_w(T_r)}{\mu_w(T)} \quad (2.52)$$

où  $a$ ,  $\alpha$  et  $d$  sont des constantes.

Un exemple de la perméabilité relative à l'eau pour modéliser le comportement d'une montmorillonite [329] à une température donnée, est présenté sur la figure (2.6).

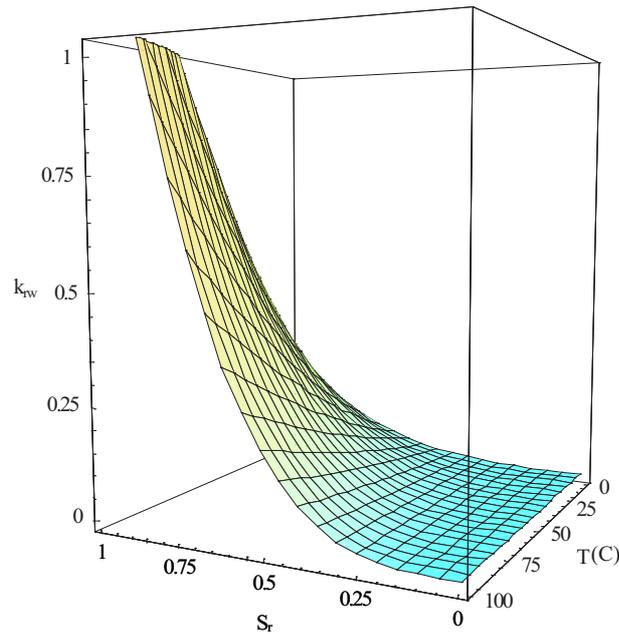


Figure 2.6 — Perméabilité relative à l'eau

### Variation de la viscosité de l'eau en fonction de la température

Les valeurs expérimentales de  $\mu_w$  en fonction de la température sont présentées dans le Tab. (2.3).

Plusieurs équations ont été proposées pour déterminer la variation de  $\mu_w (Ns/m^2)$  en fonction de la température comme suit :

- Kaye et Laby (1973) [199] :

$$\mu_w = 0.6612 (T - 229)^{-1.562} \quad (2.53)$$

où  $T$  est la température absolue en  $^{\circ}K$ .

- Mohamed et al. (1992) [254] :

$$\mu_w = 10^{-3} (1.74 - 0.05 T + 0.001 T^2 - 0.0000175 T^3) \quad (2.54)$$

où  $T$  est la température en  $^{\circ}C$ .

- Gatmiri et al. (1997) [?] :

$$\mu_w = 1.54158 \times 10^{-3} \exp(-0.018218(T - 273)) \quad (2.55)$$

| $T(^{\circ}C)$ | $\mu_w(Ns/m^2) (\times 10^{-3})$ |
|----------------|----------------------------------|
| 0              | 1.794                            |
| 5              | 1.519                            |
| 10             | 1.310                            |
| 15             | 1.144                            |
| 20             | 1.009                            |
| 25             | 0.895                            |
| 30             | 0.800                            |
| 35             | 0.731                            |
| 40             | 0.654                            |
| 45             | 0.597                            |
| 50             | 0.548                            |
| 55             | 0.507                            |
| 60             | 0.470                            |
| 65             | 0.437                            |
| 70             | 0.407                            |
| 75             | 0.381                            |
| 80             | 0.357                            |
| 85             | 0.336                            |
| 90             | 0.317                            |
| 95             | 0.299                            |
| 100            | 0.284                            |

**Tableau 2.3** — Variation de la viscosité de l'eau avec la température (d'après Fredlund et Rahadjo, 1993)

où  $T$  est la température absolue en  $^{\circ}K$ .

Dans la Fig. (2.7), on présente les variations de  $\mu_w$  en fonction de la température entre  $0^{\circ}C$  et  $100^{\circ}C$ . Comme on peut le constater, les chargements thermiques font varier la viscosité de l'eau qui à son tour va entraîner la variation de la perméabilité à l'eau du milieu poreux.

### 2.2.2.2 Transfert de vapeur

Rollins et al. [286] ont décrit un modèle capillaire soumis à un gradient thermique pour mesurer la quantité d'humidité se déplaçant dans la phase vapeur. Ils ont écrit le flux de densité de la vapeur comme étant :

$$\mathbf{q}_{vap} = -\frac{D_{atm} \omega}{RT} \frac{p_g}{p_g - p_{vap}} \nabla p_{vap} \quad (2.56)$$

avec

$q_{vap}$  : flux de densité de la vapeur en  $kg/m^2s$ ,

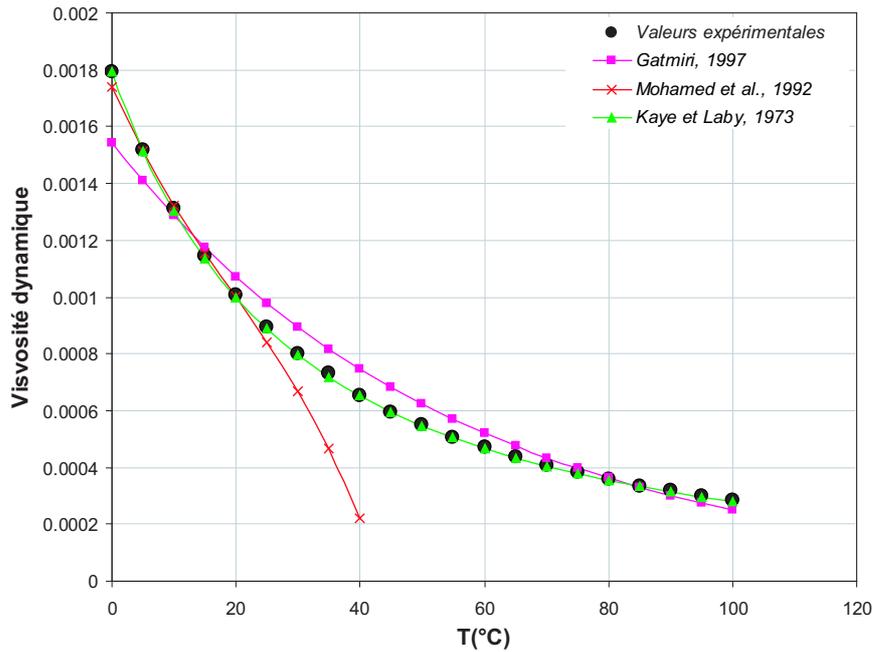


Figure 2.7 — perméabilité à l'eau en fonction de la température.

$D_{atm}$  : diffusivité moléculaire de la vapeur d'eau dans l'air en  $m^2/s$ ,

$\omega$  : masse molaire du fluide,

$R$  : constante universelle des gaz de  $8.314472 \text{ J/mol/K}$ ,

$T$  : température absolue en  $^{\circ}K$ ,

$p_g$  : pression de gaz en  $bar$ ,

$p_{vap}$  : pression partielle de la vapeur d'eau en  $bar$ .

Dans les sols non saturés, seulement les vides remplis par l'air sont disponibles pour la diffusion, ainsi l'équation (2.56) doit être modifiée dans une certaine mesure. Puisque la diffusion des molécules de vapeur dans les sols suit un chemin plus tortueux à travers les vides, un paramètre ( $\alpha\theta_g$ ) est inclu. Donc, l'équation (2.56) devient :

$$\mathbf{q}_{vap} = -\alpha\theta_g \frac{D_{atm}\omega}{RT} \frac{p_g}{p_g - p_{vap}} \nabla p_{vap} \quad (2.57)$$

où

$\alpha$  : facteur de tortuosité ajouté pour faire intervenir l'effet du ralentissement du flux de vapeur passant au travers du réseau capillaire qui se forme entre les grains du sol dans le milieu poreux non saturé,

$\theta_g$  : teneur en air volumique du sol  $\theta_g = n(1 - S_r)$ , où  $n$  est la porosité du milieu et  $S_r$  est le degré de saturation en eau.

Si on suppose que la vapeur d'eau est conforme à la loi des gaz parfaits ( $p_{vap} = \rho_{vap} RT/\omega$ ), l'équation (2.57) devient :

$$\mathbf{q}_{vap} = -D_{atm}\nu\alpha\theta_g \nabla \rho_{vap} \quad (2.58)$$

où

$\nu : p_g / (p_g - p_{vap})$ . Dans des conditions thermiques normales des sols, cette valeur est souvent proche de l'unité,

$\rho_{vap}$  : poids spécifique de la vapeur d'eau en  $kg/m^3$ .

Cette équation simple modifiée est supposée être valide pour la diffusion de la vapeur d'eau dans le sol par plusieurs chercheurs [206, 273, 327]. Mais, cette théorie néglige l'interaction des phases vapeur, liquide et solide et aussi la différence entre le gradient de température dans des pores remplis par l'air et le gradient thermique à l'échelle de l'échantillon lui-même. Philip et De Vries [274] ont montré comment l'équation modifiée (2.58) peut être étendue pour prendre en compte :

- une séparation des composants isothermes et non isothermes du transfert de vapeur,
- effet de l'humidité relative sur le transfert.

Afin de retrouver l'expression de la densité de vapeur d'eau  $\rho_{vap}$  en fonction de la température et de la teneur en eau, l'équilibre thermodynamique locale entre l'énergie libre de l'eau et l'énergie libre de la vapeur s'écrit :

$$g\psi = RT \ln \left( \frac{p_{vap}}{p_{vsat}} \right) \quad (2.59)$$

où  $p_{vsat}$  est la pression de vapeur saturante,  $g$  est l'accélération de la pesanteur et  $\psi$  est le potentiel capillaire du milieu.

Par conséquent, l'humidité relative du milieu  $h$  peut s'exprimer en fonction du potentiel capillaire du milieu par la relation suivante :

$$h = \frac{p_{vap}}{p_{vsat}} = \exp(g\psi/RT) \quad (2.60)$$

En utilisant la loi des gaz parfaits pour une température constante à l'interface de liquide-vapeur,  $p/\rho = cte.$ , le rapport devient [121] :

$$h = \frac{\rho_{vap}}{\rho_{vsat}} = \exp(g\psi/RT) \quad (2.61)$$

Alors :

$$\rho_{vap} = \rho_{vsat}(T)h = \rho_{vsat}(T) \exp(g\psi/RT) \quad (2.62)$$

avec

$\rho_{vsat}$  : la densité de vapeur d'eau saturée en  $kg/m^3$ ,

$h$  : humidité relative du milieu.

Par conséquent, on aura :

$$\nabla \rho_{vap} = h \nabla \rho_{vsat} + \rho_{vsat} \nabla h \quad (2.63)$$

Philip et De Vries [274] ont étudié l'influence de la température sur  $h$  pour une valeur constante de  $\theta_w$ . Ils ont constaté que l'effet de la température sur toute la gamme de  $h$  est si petite que

nous pouvons considérer  $\partial h/\partial T = 0$ . Pour vérifier cette hypothèse en injectant les équations (2.26), (2.28) et (2.33) dans l'équation (2.60), l'humidité relative peut être réécrite comme suit :

$$h = \exp \left( \frac{(-2.41 - 0.002 \theta_w^{-1.75}) \left( \frac{75.882 - 0.165T}{72.582} \right)}{R(T + 273)} \right) \quad (2.64)$$

où  $T_r$  est supposée égale à  $20^\circ C$ .

L'autre expression pour l'humidité relative est proposée par Geraminegad et Saxena [169] :

$$h = \left( 1 + \left( \frac{\theta_w}{0.04 \rho_{vsat}} \right)^{-4.27} \right)^{-0.42} \quad (2.65)$$

avec :

$$\rho_{vsat} = 10^{-6} \exp \left( 19.819 - \frac{4975.9}{T + 273} \right) \quad (2.66)$$

Dans la figure (2.8), on peut constater que pour les valeurs de teneur en eau inférieure à 0.05, il y a une différence entre les expressions (2.64) et (2.65). Mais en raison des faibles valeurs de la teneur en eau qui font cette différence et pour simplifier le modèle présenté, l'influence de la température sur l'humidité relative devient négligeable et l'hypothèse de Philip et De Vries [274] sera acceptable.

Comme  $\rho_{vsat}$  et  $h$  sont fonctions de  $T$  et  $\theta_w$  respectivement, l'équation (2.63) s'écrit :

$$\nabla \rho_{vap} = h \frac{d\rho_{vsat}}{dT} \nabla T + \rho_{vsat} \frac{dh}{d\theta_w} \nabla \theta_w \quad (2.67)$$

En utilisant l'équation (2.61) pour évaluer  $dh/d\theta_w$ , on obtient :

$$\nabla \rho_{vap} = h \frac{d\rho_{vsat}}{dT} \nabla T + \frac{g\rho_{vap}}{RT} \frac{\partial \psi}{\partial \theta_w} \nabla \theta_w \quad (2.68)$$

En introduisant (2.68) dans (2.58), nous obtenons une équation de la forme suivante :

$$\frac{\mathbf{q}_{vap}}{\rho_w} = -D_{\theta vap} \nabla \theta_w - D_{T vap} \nabla T \quad (2.69)$$

où  $D_{\theta vap}$  et  $D_{T vap}$  sont respectivement, les diffusivités isotherme et thermique de la vapeur dans le milieu :

$$D_{\theta vap} = \frac{D_{atm}}{\rho_w} \nu \alpha \theta_g \frac{\rho_{vap} g}{RT} \frac{\partial \psi}{\partial \theta_w} \quad (2.70)$$

$$D_{T vap} = \frac{D_{atm}}{\rho_w} \nu \alpha \theta_g \frac{d\rho_{vsat}}{dT} h \quad (2.71)$$

Cependant, Philip et De Vries [274] ont modifié l'équation de la diffusivité thermique de la vapeur  $D_{T vap}$ , parce qu'elle sous-estime le transport de vapeur d'eau par un facteur de 3 à 10.

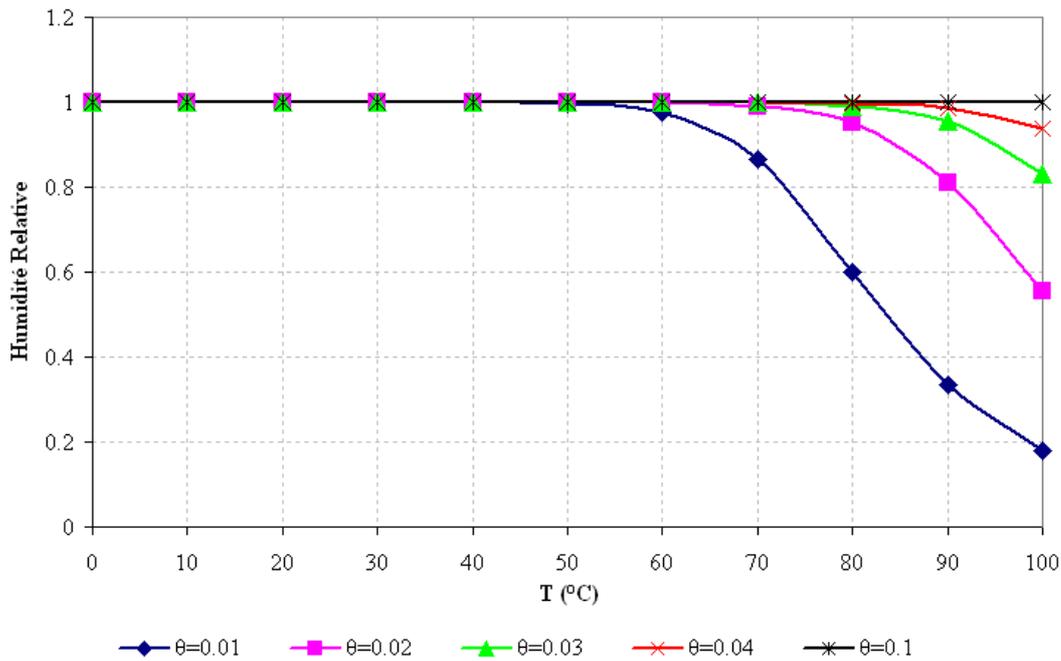


Figure 2.8 — Influence de la température sur l'humidité relative dans l'équation (2.65)

Ils ont constaté que le flux de vapeur décroît avec la diminution de la section dite *effective* existante au sein du matériau non saturé, car la vapeur ne traverse que les pores remplis d'air. Cette section semble dépendre de la quantité d'air qui se trouve à l'intérieur du sol. Elle diminue avec l'augmentation de la teneur en eau. Autrement dit, au-dessous d'une certaine teneur en eau (*critique*), la vapeur peut traverser tout l'espace poreux rempli d'air, alors qu'en se rapprochant d'une teneur en eau du même ordre de grandeur que la porosité ( $n$ ) du sol, cet espace tend vers zéro [187]. Ce concept est pris en compte dans l'expression de  $D_{T_{vap}}$  par le facteur  $(\theta_g + f(\theta_g)\theta_w)$  dans lequel :

$$f(\theta_g) = \begin{cases} \theta_g/\theta_g^k & \text{pour } 0 < \theta_g < \theta_g^k \\ 1 & \text{pour } \theta_g \geq \theta_g^k \end{cases} \quad (2.72)$$

où  $\theta_g^k$  est la teneur en air pour laquelle la continuité liquide dans les pores n'existe plus. Cette valeur est en relation directe avec la teneur en eau critique.

Aussi, afin d'introduire les aspects microscopiques du flux de chaleur, ils ont proposé de tenir compte d'un facteur nommé  $(\nabla T)_a$ . Ils ont considéré qu'au niveau des petits chemins de passage de ce flux formé à l'intérieur du sol, les gradients de température sont plus importants par rapport aux gradients thermiques à l'échelle de l'échantillon lui-même [187].

Cette équation a été retrouvée en bon accord avec les observations expérimentales :

$$D_{T_{vap}} = \left( \frac{D_{atm}}{\rho_w} \right) \nu (\theta_g + f(\theta_g)\theta_w) h \frac{(\nabla T)_a}{\nabla T} \frac{d\rho_{vsat}}{dT} \quad (2.73)$$

avec

$(\nabla T)_a$  : gradient moyen de la température dans les pores remplis par l'air,

$\nabla T$  : gradient thermique à l'échelle de l'échantillon.

En se basant sur la méthode de calcul de Preece [278], qui a été liée au travail de De Vries [108], on a :

$$\frac{(\nabla T)_a}{\nabla T} = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{1 + BG} + \frac{1}{1 + B(1 - 2G)} \right) \quad (2.74)$$

avec

$$B = \frac{\lambda_g + \lambda_v}{\lambda_w - 1} \quad (2.75)$$

$$G = \begin{cases} 0.3333 - 0.325 \frac{n - \theta_w}{n}, & 0.09 < \theta_w < n \\ 0.0033 + 11.11 \left( 0.33 - 0.325 \frac{n - 0.09}{n} \right) \theta_w, & 0 < \theta_w < 0.09 \end{cases} \quad (2.76)$$

où  $\lambda_g$  est la conductivité thermique de l'air ( $0.0258W/mK$ ),  $\lambda_w$  est la conductivité thermique de l'eau ( $0.6W/mK$ ) et  $\lambda_v$  la conductivité thermique de la vapeur représentée par :

$$\lambda_v = D_{atm} \nu h L \frac{d\rho_{vsat}}{dT} \quad (2.77)$$

$L$  introduit la notion de chaleur latente de l'évaporation.

L'équation de Philip et De Vries est modifiée par Ewen et Thomas [124] en considérant le facteur du chemin de flux de la vapeur  $f$  dans les deux termes du gradient de la température et de l'humidité. Ils ont constaté que si la vitesse de la vapeur est proportionnelle au gradient de la densité de la vapeur,  $f$  apparaît dans les deux termes du gradient. Philip et De Vries ont élaboré les termes séparément et n'ont pas concilié le développement du terme de gradient de la température avec le terme du gradient de l'humidité.

Enfin, la formulation finale de l'équation du flux de la vapeur s'écrit en fonction de la variable indépendante de la succion ( $p_g - p_w$ ) comme suit [143] :

$$\frac{\mathbf{q}_{vap}}{\rho_w} = \mathbf{V} = -D_{Tv} \nabla T - D_{Pv} \nabla (p_g - p_w) \quad (2.78)$$

où

$$D_{Tv} = \begin{cases} \frac{D_{atm}}{\rho_w} \nu n \frac{(\nabla T)_a}{\nabla T} \left( h \frac{d\rho_{vsat}}{dT} \right), & \theta_w < n \\ 0, & \theta_w = n \end{cases} \quad (2.79)$$

$$D_{Pv} = \begin{cases} \frac{D_{atm}}{\rho_w} \nu n \rho_{vap} \frac{g}{RT} \frac{\sigma(T)}{\sigma_r \gamma_w}, & \theta_w < n \\ 0, & \theta_w = n \end{cases} \quad (2.80)$$

### 2.2.2.3 Transfert total de l'humidité

Le mouvement total de l'humidité dans le sol non saturé du aux gradients de température et de teneur en eau (ou de succion) est égal à la somme des écoulements qui ont lieu en phases gazeuse et liquide. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{q}}{\rho_w} &= \frac{\mathbf{q}_{vap}}{\rho_w} + \frac{\mathbf{q}_w}{\rho_w} = \mathbf{V} + \mathbf{U} \\ &= -D_T \nabla T - D_P \nabla(p_g - p_w) - D_w \nabla z \end{aligned} \quad (2.81)$$

avec

$D_T$  : diffusivité thermique de l'humidité égale à :

$$D_T = D_{Tv} + D_{Tw} = \begin{cases} \frac{D_{atm} \nu n (\nabla T)_a}{\rho_w \nabla T} h \frac{d\rho_{vsat}}{dT} + \mathbf{K}_w \frac{\Psi_r(\theta_w)}{\sigma_r} \frac{d\sigma(T)}{dT}, & \theta_w < n \\ \mathbf{K}_w \frac{\Psi_r(\theta_w)}{\sigma_r} \frac{d\sigma(T)}{dT}, & \theta_w = n \end{cases} \quad (2.82)$$

$D_P$  : diffusivité isotherme de l'humidité égale à :

$$D_P = D_{Pv} + D_{Pw} = \begin{cases} \frac{\sigma(T)}{\sigma_r \gamma_w} \left( \frac{D_{atm} \nu n \rho_{vap} g}{\rho_w RT} + \mathbf{K}_w \right), & \theta_w < n \\ \mathbf{K}_w \frac{\sigma(T)}{\sigma_r \gamma_w}, & \theta_w = n \end{cases} \quad (2.83)$$

$D_w$  : diffusivité due à la pesanteur égale à :

$$D_w = \mathbf{K}_w \quad (2.84)$$

### 2.2.2.4 Conservation de la masse d'humidité

L'équation de conservation de la masse d'humidité exprime l'équilibre entre les flux d'entrées/sorties et la variation instantanée de l'espace poreux disponible dans un volume élémentaire de contrôle :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \text{div}(\rho_m (\mathbf{V} + \mathbf{U})) = 0 \quad (2.85)$$

La densité homogénéisée de l'humidité, une quantité caractéristique du constituant eau, est définie par,

$$\rho_m = \frac{M_w + M_{vap}}{V} = \rho_w \theta_w + \rho_{vap} \theta_g = \rho_w n S_r + \rho_{vap} n (1 - S_r) \quad (2.86)$$

En considérant que la variation de  $\rho_w$  et de  $\rho_{vap}$  avec le temps est négligeable, nous obtenons :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = (\rho_w S_r + \rho_{vap} (1 - S_r)) \frac{\partial n}{\partial t} + (\rho_w n - \rho_{vap} n) \frac{\partial S_r}{\partial t} \quad (2.87)$$

En injectant l'équation (2.87) dans l'équation (2.85) et en supposant que la valeur de  $\rho_w$  dans le milieu est constante, nous aurions :

$$\begin{aligned} (\rho_w S_r + \rho_{vap}(1 - S_r)) \frac{\partial n}{\partial t} + (\rho_w n - \rho_{vap} n) \frac{\partial S_r}{\partial t} = \\ \rho_w \operatorname{div}(D_T \nabla T + D_p \nabla(p_g - p_w) + D_w \nabla z) \end{aligned} \quad (2.88)$$

En supposant que les coefficients du premier membre de l'équation (2.88) sont constants :

$$\begin{aligned} (\rho_w S_r + \rho_{vap}(1 - S_r)) \frac{\partial n}{\partial t} + (\rho_w n - \rho_{vap} n) \frac{\partial S_r}{\partial t} = \\ \rho_w (-D_p \nabla^2 p_w + D_p \nabla^2 p_g + D_T \nabla^2 T) \end{aligned} \quad (2.89)$$

Toutefois, il est nécessaire de trouver les deux termes qui apparaissent dans cette équation  $\partial n / \partial t$  et  $\partial S_r / \partial t$  selon les variables d'état du problème.

La variation de la porosité du milieu avec le temps s'écrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial u_{k,k}}{\partial t} \quad (2.90)$$

où  $\varepsilon_v$  est la déformation volumique du milieu poreux.

L'évolution de  $S_r$  avec le temps s'écrit :

$$\frac{\partial S_r}{\partial t} = g_1 \frac{\partial(p_g - p_w)}{\partial t} + g_2 \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.91)$$

avec

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\partial S_r}{\partial(p_g - p_w)}, \\ g_2 &= \frac{\partial S_r}{\partial T}. \end{aligned}$$

Les équations (2.90) et (2.91) sont identifiées dans la relation (2.88). Cela nous fournit l'équation différentielle finale de la conservation de masse de l'humidité du milieu comme suit :

$$\begin{aligned} (\rho_w S_r + \rho_{vap}(1 - S_r)) \frac{\partial u_{k,k}}{\partial t} + n(\rho_w - \rho_{vap}) g_1 \frac{\partial(p_g - p_w)}{\partial t} + \\ n(\rho_w - \rho_{vap}) g_2 \frac{\partial T}{\partial t} = \rho_w (D_T \nabla^2 T + D_p \nabla^2 p_g - D_p \nabla^2 p_w) \end{aligned} \quad (2.92)$$

## 2.2.3 Air

### 2.2.3.1 Transfert de l'air

En général, quand le degré de saturation du milieu diminue à environ 85% ou moins [87], l'écoulement d'air peut se produire parce que dans ces conditions, l'air interstitiel se présente sous forme continue. Ainsi, pour les degrés de saturation plus grand que 90%, l'écoulement de l'air est limité à la diffusion dans l'eau interstitielle [248].

L'écoulement du gaz dans le sol peut se produire à l'intermédiaire de deux mécanismes différents : la *convection* et la *diffusion*.

Dans le cas de la convection, aussi appelée l'écoulement de la masse, la force motrice se compose d'un gradient de *pression totale de gaz*, et il en résulte dans la masse entière de l'air une ruissellement à partir d'une zone de haute pression à l'une de plus basse pression.

Dans le cas de la diffusion, la force motrice est un gradient de pression partielle (ou de concentration) de n'importe quel membre constitutif du mélange variable de gaz que nous appelons l'air. Il provoque la migration des molécules du constituant inégalement distribué à partir d'une zone de haute concentration vers celle de basse concentration alors que le gaz dans son ensemble peut demeurer isobare et stationnaire.

Dans la suite, pour simplifier les équations, nous ne considérons pas la diffusion de l'air sec dans le sol. Nous prenons en compte seulement la convection de l'air du sol.

Le flux d'air en convection dans le sol est similaire à certains égards à l'écoulement de l'eau, et différent d'autres manières. La similitude est dans le fait que l'écoulement des deux fluides est poussé par, et proportionnel à, un gradient de pression. La dissimilitude résulte de l'incompressibilité relative de l'eau en comparaison de l'air qui est fortement compressible de sorte que sa densité et sa viscosité sont fortement dépendantes de la pression.

Malgré les différences entre les flux d'eau et d'air, il est possible de formuler l'écoulement de l'air dans le sol comme une équation analogue à la loi de Darcy pour l'écoulement de l'eau. La loi de Darcy a été utilisée en Géotechnique par plusieurs auteurs [25, 27, 248] afin d'examiner l'écoulement de l'air à travers le sol.

Schneebeli [300] a affirmé, à partir de considérations théoriques, que la loi de Darcy peut s'appliquer de manière satisfaisante à l'étude de l'écoulement des gaz.

En se fondant sur la loi de Darcy pour décrire l'écoulement de l'air dans le problème thermo-hydro-mécanique, la vitesse de l'air dans le sol non saturé en eau prend la forme suivante :

$$\mathbf{V}_g = \frac{\mathbf{q}_g}{\rho_g} = -\mathbf{K}_g \left( \nabla \left( \frac{p_g}{\gamma_g} \right) + \nabla z \right) \quad (2.93)$$

avec

$\mathbf{q}_g$  : vecteur de flux de l'air,

$\rho_g$  : poids spécifique du gaz,

$K_g$  : perméabilité à l'air du milieu,

$p_g$  : pression de l'air,

$z$  : cote du point considéré.

En considérant que la pression du gaz dépend de la température, cette équation s'écrit :

$$\mathbf{V}_g = \frac{\mathbf{q}_g}{\rho_g} = -\frac{\mathbf{K}_g}{\gamma_g} \frac{\partial p_g}{\partial T} \nabla T - \mathbf{K}_g \left( \nabla \left( \frac{p_g}{\gamma_g} \right) + \nabla z \right) \quad (2.94)$$

En utilisant l'équation d'état thermodynamique du gaz,  $\frac{1}{\gamma_g} \frac{\partial p_g}{\partial T}$  peut être remplacé par :

$$\frac{1}{\gamma_g} \frac{\partial p_g}{\partial T} = \frac{p_g + p_{atm}}{(T + 273)\gamma_g} = \beta_{pg} \quad (2.95)$$

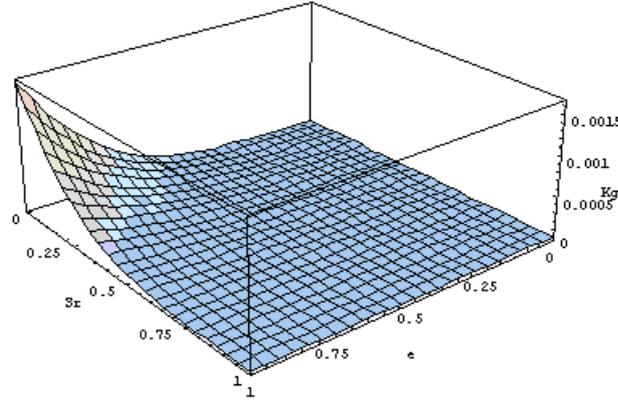


Figure 2.9 — Perméabilité à l'air

Donc,

$$\mathbf{V}_g = -\mathbf{K}_g \beta_{pg} \nabla T - \mathbf{K}_g \left( \nabla \left( \frac{p_g}{\gamma_g} \right) + \nabla z \right) \quad (2.96)$$

Généralement, la perméabilité à l'air d'un milieu poreux, comme la perméabilité à l'eau, dépend de la granulométrie, de l'indice des vides, de la distribution des dimensions des pores dans le milieu, du type du sol et du degré de saturation [187].

Plusieurs chercheurs [6, 143, 187, 220, 320], en se basant sur la relation présentée par Yoshimi et Osterberg [344], ont exprimé une relation linéaire entre le logarithme du coefficient de perméabilité à l'air et l'indice des vides, comme suit :

$$\mathbf{K}_g = c \frac{\rho_g g}{\mu_g} (e(1 - S_r))^d \quad (2.97)$$

avec

$\rho_g$  : masse spécifique du gaz  $1 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,

$\mu_g$  : viscosité du gaz égale à  $1.846 \times 10^{-5} \text{ N.s}/\text{m}^2$ ,

$e$  : indice des vides,

$S_r$  : degré de saturation,

$c$  et  $d$  : constantes dépendant du sol étudié.

Dans l'équation (2.97), la perméabilité à l'air dépend d'une manière implicite de la température, elle est une fonction de la porosité et du degré de saturation du milieu [143]. Cette expression est utilisée dans ce travail, pour lequel la variation schématisée de la perméabilité à l'air en fonction de  $e$  et de  $S_r$  est présentée dans la Fig. (2.9).

### 2.2.3.2 Conservation de la masse d'air

L'équation de conservation de la masse d'air comprend les contributions de l'air sec et de l'air dissous dans l'eau. Comme mentionné auparavant, la circulation d'air sec a deux contributions :

un *flux advectif* lié au mouvement en phase gazeuse conduit par un gradient de pression totale de gaz et un *flux non-advectif* correspondant à la diffusion de l'air dans le mélange gazeux qui est négligé dans ce travail. Cependant, la diffusion de l'air dissous dans l'eau est considérée. Donc, l'équation de conservation de la masse d'air s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(\rho_g n(1 - S_r + HS_r))}{\partial t} + \text{div}(\rho_g \mathbf{V}_g) + \text{div}(\rho_g H \mathbf{U}) = 0 \quad (2.98)$$

où  $H$  est le coefficient de solubilité du gaz dans l'eau ou coefficient d'*Henry*. La masse d'air dissous est censée être suffisamment faible pour que les propriétés de l'eau ne soient pas influencées.

Avec la même approche présentée pour le développement de l'équation de la conservation de l'humidité, l'équation de conservation de masse d'air peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} & \rho_g (1 + (H - 1)S_r) \frac{\partial u_{k,k}}{\partial t} + \rho_g n(H - 1)g_1 \frac{\partial(p_g - p_w)}{\partial t} + \\ & \rho_g n(H - 1)g_2 \frac{\partial T}{\partial t} = \\ & - \rho_g (HD_{pw} \nabla^2 p_w + \left( \frac{\mathbf{K}_g}{\gamma_g} + HD_{pw} \right) \nabla^2 p_g + (\mathbf{K}_g \beta_{pg} + HD_{Tw}) \nabla^2 T) \end{aligned} \quad (2.99)$$

## 2.2.4 Chaleur

### 2.2.4.1 Transfert de la chaleur

En général, il existe trois principaux modes de transfert d'énergie : *conduction*, *convection* et *rayonnement*.

La conduction thermique, le premier mode de transfert d'énergie, est la propagation de la chaleur dans un milieu par mouvement des molécules internes. Puisque la température est une expression de l'énergie cinétique des molécules d'un milieu, l'existence d'une différence de température dans un milieu causera normalement la transmission de l'énergie cinétique par les nombreuses collisions des molécules rapidement en mouvement dans la région la plus chaude du milieu avec leurs voisines dans la région la plus froide. Donc, le processus de conduction thermique est analogue à celui de diffusion. Autrement dit, la diffusion a tendance à équilibrer la composition d'un mélange dans le temps, la conduction thermique tend à équilibrer la distribution interne de l'énergie cinétique moléculaire d'un milieu [181].

La conductivité thermique contrôle les taux de flux de chaleur par conduction. Comme les valeurs de la conductivité thermique pour des minéraux du sol sont beaucoup plus élevées que celles de l'air et de l'eau, il est évident que l'écoulement de la chaleur par conduction se fait principalement à travers le squelette solide. Plus un sol est dense, plus sa conductivité thermique composée est élevée. En outre, puisque l'eau a une conductivité thermique plus élevée que l'air, un sol humide a une conductivité thermique plus élevée qu'un sol sec.

La convection, le deuxième mode de transfert d'énergie, implique un déplacement d'une masse

transportant la chaleur dans le milieu. Un exemple plus pertinent au regard de la physique de ce phénomène dans le sol serait l'infiltration des eaux usées chaudes dans un sol initialement froid [181]. Le transfert par convection est important s'il y a un débit élevé d'eau ou d'air dans le sol [252].

Par rayonnement, nous nous référons à l'émission de l'énergie sous forme d'ondes électromagnétiques à partir de tous les corps au-dessus de  $0^\circ K$ . Selon la loi de *Stephan-Boltzmann*, toute l'énergie émise par un corps  $J_t$  intégrée sur toutes les longueurs d'onde, est proportionnelle à la puissance quatre de la température absolue  $T$  de la *surface du corps*.

En plus des trois modes de transfert d'énergie décrits, il y a un phénomène composé qui peut se reconnaître comme quatrième mode, à savoir le *transfert de chaleur latente*. Un exemple typique est le processus de la distillation, qui comprend l'étape d'absorption de la chaleur d'évaporation. Celle-ci est suivie par la convection ou la diffusion de la vapeur, et est terminée par la phase de libération de la chaleur de condensation. Un processus similaire peut également se produire dans la transition aller-retour de la glace et de l'eau liquide.

### Transfert de chaleur par conduction dans le sol non saturé

Le transfert de la chaleur par conduction s'exprime par la loi de *Fourier*. Cette loi indique que le flux de chaleur dans un milieu homogène est proportionnel au gradient de température :

$$h = -\lambda_T \nabla T \quad (2.100)$$

où

$h$  : flux de chaleur par conduction par unité de section perpendiculaire à la direction de l'écoulement et par unité de temps,

$\lambda_T$  : conductivité thermique.

#### conductivité thermique du sol

La conductivité thermique  $\lambda_T$  est une grandeur physique représentant la quantité de chaleur transférée par unité de surface et par unité de temps sous un gradient de température de 1 degré par mètre. Comme montré dans le Tab. (2.4), les conductivités thermiques des constituants du sol diffèrent très nettement. Par conséquent, la conductivité thermique moyenne d'un sol (au niveau macroscopique) dépend de sa composition minérale et de sa teneur en matière organique, ainsi que des fractions de volume d'eau et d'air. Puisque la conductivité thermique de l'air est beaucoup plus petite que celle de l'eau ou de la matière solide, une teneur élevée en air (ou teneur basse en eau) apporte une basse conductivité thermique. En outre, puisque les proportions d'eau et d'air varient de façon continue,  $\lambda_T$  est également une variable de temps [181]. La conductivité thermique est sensible non seulement à la composition du volume d'un sol mais aussi aux tailles, aux formes, et aux dispositions spatiales des particules du sol.

| constituant             | densité            | capacité thermique | conductivité thermique |
|-------------------------|--------------------|--------------------|------------------------|
| quartz                  | $2,66 \times 10^3$ | $2,0 \times 10^6$  | 8,8                    |
| autres minéraux (moyen) | $2,65 \times 10^3$ | $2,0 \times 10^6$  | 2,9                    |
| matière organique       | $1,3 \times 10^3$  | $2,5 \times 10^6$  | 0,25                   |
| eau (liquide)           | $1,0 \times 10^3$  | $4,2 \times 10^6$  | 0,57                   |
| glace                   | $0,92 \times 10^3$ | $1,9 \times 10^6$  | 2,2                    |
| air                     | 1,25               | $1,25 \times 10^3$ | 0,025                  |

**Tableau 2.4** — Densité, capacité thermique volumique et conductivité thermique des constituants de sol (à  $10^\circ C$ ) et de glace (à  $0^\circ C$ )

De Vries [108] a présenté son modèle théorique pour la conductivité thermique en 1963. Dans ce modèle, l'un des trois constituants du sol non saturé (eau, air ou squelette solide) peut être considéré comme un milieu continu dans le sol, dans lequel les deux autres composants sont dispersés. Une conductivité thermique composée pour le milieu en entier peut être définie comme suit :

$$\lambda_T = \frac{f_w \theta_w \lambda_{Tw} + f_g \theta_g \lambda_{Tg} + f_s \theta_s \lambda_{Ts}}{f_w \theta_w + f_g \theta_g + f_s \theta_s} \quad (2.101)$$

avec

$f_s, f_w, f_g$  : facteurs de pondération pour le solide, l'eau et l'air, respectivement,

$\lambda_{Ts}, \lambda_{Tw}, \lambda_{Tg}$  : conductivité thermique du solide, de l'eau et de l'air, respectivement.

En outre, les facteurs de pondération sont calculés en utilisant l'hypothèse que les particules du sol sont de forme ellipsoïdale. Le facteur de pondération pour le milieu continu (solide, eau ou air) est égal à l'unité.

Pour un sol non saturé, l'eau peut être considérée comme un milieu continu dans lequel l'air et des particules du sol sont dispersés ( $f_w = 1$ ). Cette hypothèse s'applique tant que la teneur en eau est au-dessus d'un certain minimum de sorte que l'eau soit toujours considérée continue. Les facteurs de pondération pour les phases solide et l'air peuvent alors être calculés conformément à la relation suivante :

$$f_g = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_g}{\lambda_w} - 1 \right) g_i \right]^{-1} \quad (2.102)$$

$$f_s = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_s}{\lambda_w} - 1 \right) g_i \right]^{-1} \quad (2.103)$$

où  $g_i$  sont les facteurs de dépolariation pour l'ellipsoïde ( $g_1 + g_2 + g_3 = 1$ ). Les valeurs de  $g_i$  sont indépendantes de la taille des particules et ne dépendent que du rapport de la longueur des axes de l'ellipsoïde.

Quelque soit l'équation utilisée pour calculer la conductivité thermique d'un sol, cela doit donner un résultat se trouvant entre la limite supérieure, obtenue à partir du modèle de flux en parallèle et la limite inférieure donnée par le modèle de flux en série (Fig. 2.10). Dans ces modèles, les particules solides sont toutes censées être groupées sans résistance de contact entre

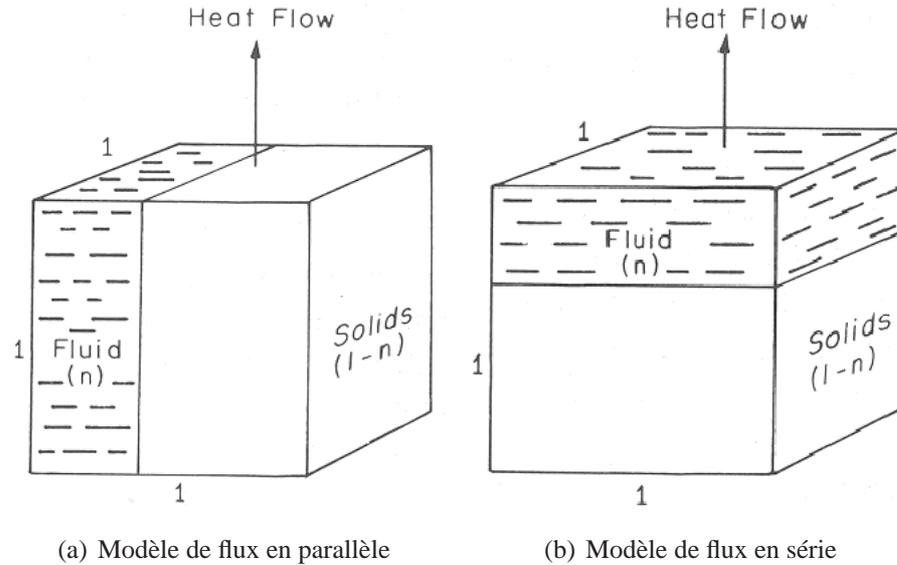


Figure 2.10 — Modèles idéalisés pour le flux de chaleur à travers l'unité de volume du sol

elles.

En supposant que la chaleur s'écoule en parallèle à travers des sols non saturés, l'équation de la conductivité thermique du sol est [143] :

$$\lambda_T = (1 - n)\lambda_{Ts} + \theta_w\lambda_{Tw} + \theta_g\lambda_{Tg} \quad (2.104)$$

Le modèle de flux en série signifie que les résistances thermiques (c.-à-d, l'inverse des conductivités) sont additionnées, ce qui donne [126] :

$$\frac{1}{\lambda_T} = (1 - n)\frac{1}{\lambda_{Ts}} + \theta_w\frac{1}{\lambda_{Tw}} + \theta_g\frac{1}{\lambda_{Tg}} \quad (2.105)$$

Dans la suite, l'équation (2.104) sera prise en compte afin d'examiner la conductivité thermique. Les valeurs de  $\lambda_{Ts}$ ,  $\lambda_{Tw}$  et  $\lambda_{Tg}$  seront considérées constantes afin de simplifier les équations.

### Transfert de chaleur par convection dans un sol non saturé

Lorsqu'un corps solide est exposé à un fluide en mouvement ayant une température différente de celle du corps, l'énergie est transportée par le fluide [275]. Dans le sol non saturé, les fluides qui convectent sont : l'air sec, l'eau et la vapeur d'eau. La valeur de transmission de chaleur pour chaque fluide par unité de gradient de la température est :

$$V_T = c_T U \quad (2.106)$$

avec

$c_T$  : capacité thermique volumique de fluide  $\alpha$  ( $= C_m \rho$ ),

$C_m$  : capacité thermique massique de fluide  $\alpha$ ,

$U$  : vitesse du flux de fluide  $\alpha$ .

### Capacité thermique volumique de sol non saturé

La capacité thermique volumique d'un sol  $c_T$  est sa capacité à stocker de la chaleur rapportée à son volume. C'est la quantité de chaleur stockée par un  $m^3$  de sol lorsqu'on le chauffe pour élever sa température d'un degré.  $c_T$  dépend de la composition de la phase solide du sol (les constituants minéraux et organiques), la densité volumique et l'humidité du sol. La valeur de la capacité thermique volumique de sol non saturé peut être calculée par l'addition des capacités thermiques des différents constituants, pondérés selon leurs fractions de volume :

$$c_T = (1 - n)\rho_s C_{ms} + \theta_w \rho_w C_{mw} + (n - \theta_w)\rho_{vap} C_{mv} + (n - \theta_w)\rho_g C_{mg} \quad (2.107)$$

où  $C_{ms}$ ,  $C_{mw}$ ,  $C_{mv}$  et  $C_{mg}$  sont respectivement, les capacités thermiques massiques du solide, de l'eau, de la vapeur et de l'air.

La plupart des sols ont presque les mêmes valeurs de la densité ( $\cong 2.65 \times 10^3 kg/m^3$ ) et de la capacité thermique ( $\cong 2.0 \times 10^6 J/m^3 K$ ). La densité de l'eau est moins que la moitié de celle des particules du sol ( $\cong 1.0 \times 10^3 kg/m^3$ ) mais la chaleur thermique de l'eau est le double de celle du sol ( $\cong 4.2 \times 10^6 J/m^3 K$ ). Enfin, la densité de l'air est d'environ 0.001 de celle de l'eau, et la chaleur thermique de l'air et de la vapeur sont respectivement,  $C_{mg} = 1000 J/kg K$  et  $C_{mv} = 1870 J/kg K$ .

### Transfert de chaleur latente dans le sol non saturé

La chaleur latente de vaporisation est la quantité d'énergie qu'il faut fournir à  $1kg$  d'eau (à pression et température constantes) pour obtenir  $1kg$  de vapeur saturée. Donc, la transmission de chaleur latente est égale à  $\rho_{vap} \mathbf{V} h_{fg}$  où  $h_{fg}$  est la chaleur latente de vaporisation de l'eau du sol.  $h_{fg}$  est considérée égale à  $2.4 \times 10^6 J/kg$  ou  $584.94 cal/g$ .

### Transfert total de chaleur dans le sol non saturé

Puisque le terme de rayonnement est traité comme une condition aux limites [226], il sera éliminé dans l'équation de transfert total de la chaleur. Par conséquent, le flux total de la chaleur latente et sensible dans un milieu poreux non saturé s'écrit en se basant sur la théorie de Philip et De Vries comme :

$$\mathbf{Q} = -\lambda_T \nabla T + (C_{mw} \rho_w \mathbf{U} + C_{mv} \rho_{vap} \mathbf{V} + C_{mg} \rho_g \mathbf{V}_g)(T - T_0) + h_{fg}(\rho_w \mathbf{V} + \rho_{vap} \mathbf{V}_g) \quad (2.108)$$

### Conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie dans un milieu poreux peut être exprimée par :

$$\frac{\partial \varphi_T}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{Q}) = 0 \quad (2.109)$$

où  $\mathbf{Q}$  est le flux de chaleur et  $\varphi_T$  décrit la quantité volumique de chaleur du sol exprimée par :

$$\varphi_T = c_T(T - T_0) + (n - \theta_w)\rho_{vap}h_{fg} \quad (2.110)$$

En introduisant les équations (2.107), (2.108) et (2.110) dans (2.109), l'expression de la conservation d'énergie prendra la forme suivante :

$$\begin{aligned} \chi_1 \frac{\partial u_{k,k}}{\partial t} - \chi_2 g_1 \frac{\partial p_w}{\partial t} + \chi_2 g_1 \frac{\partial p_g}{\partial t} + (\chi_2 g_2 + \chi_3) \frac{\partial T}{\partial t} = \\ \chi_6 \nabla^2 p_w + \chi_5 \nabla^2 p_g + \chi_4 \nabla^2 T \end{aligned} \quad (2.111)$$

avec

$$\begin{aligned} \chi_1 &= (-C_{ms}\rho_s + C_{mw}S_r\rho_w + C_{mv}(1 - S_r)\rho_{vap} + C_{mg}(1 - S_r)\rho_g)(T - T_0) + \rho_{vap}h_{fg}(1 - S_r), \\ \chi_2 &= n(C_{mw}\rho_w - C_{mv}\rho_{vap} - C_{mg}\rho_g)(T - T_0) - \rho_{vap}h_{fg}n, \\ \chi_3 &= (C_{ms}\rho_s(1 - n) + C_{mw}S_r\rho_w + C_{mv}(1 - S_r)\rho_{vap} + C_{mg}n(1 - S_r)\rho_g), \\ \chi_4 &= \lambda_T + (C_{mw}\rho_w D_{Tw} + C_{mv}\rho_w D_{Tv} + C_{mg}K_g\beta_{Pg}\rho_g)(T - T_0) + h_{fg}(\rho_w D_{Tv} + \rho_{vap}K_g\beta_{Pg}), \\ \chi_5 &= (C_{mw}\rho_w D_{Pw} + C_{mv}\rho_w D_{Pv} + C_{mg}K_g\rho_g)(T - T_0) + h_{fg}(\rho_w D_{Pv} + \rho_{vap}h_{fg}\frac{K_g}{\gamma_g}), \\ \chi_6 &= (-C_{mv}\rho_w D_{Pw} - C_{mv}\rho_w D_{Pv})(T - T_0) - \rho_w h_{fg} D_{Pv}. \end{aligned}$$



# CHAPITRE 3

---

## Modélisation du comportement dynamique des sols non-saturés

LE comportement dynamique des sols saturés a été largement étudié, voir par exemple [36, 39, 279, 280, 355]. Dans l'état de l'art actuel, on peut prétendre que le comportement des milieux poreux saturés a été bien compris. Au contraire, l'étude du comportement dynamique des milieux poreux non saturés est un champ relativement nouveau dans le domaine du génie parasismique. La mesure précise de diverses quantités telles que les pressions dynamiques de l'eau et de l'air, et le degré de saturation dans les sols partiellement saturés est une tâche difficile au cours des chargements dynamiques [282].

La propagation des ondes dans les sols non saturés dans les régions arides et la réponse dynamique de tels milieux sont de grand intérêt dans la géophysique. Cependant, il est bien reconnu dans la géomécanique que le comportement d'un milieu comprenant plus de deux phases n'est pas compatible avec les principes et les concepts de la mécanique des sols classique. Cette lacune provient de grandes difficultés associées à l'évaluation des effets d'interface dans de tels milieux. Par conséquent, la prédiction et la simulation du comportement des sols non saturés sont de grande importance dans la prise de décisions critiques qui affectent beaucoup de facettes de l'ingénierie de la conception et de la construction.

Zienkiewicz et al. [359] semblent être les premiers à développer un système d'équations pour l'analyse dynamique des sols partiellement saturés. Ils l'ont obtenu en se basant sur les principes de la moyenne volumique locale dans le cadre de la théorie de fraction volumique. La contrainte effective utilisée par Zienkiewicz et al. est fondamentalement la même que celle proposée par Bishop [43] avec  $\chi = S_r$ , où  $S_r$  est le degré de saturation en eau et  $\chi$  est le seul paramètre inconnu dans la formulation de Bishop. En outre, la courbe de rétention de l'eau par le sol a été incorporée dans ces analyses [216, 358, 359]. Mais comme expliqué dans le chapitre 1, l'hypothèse d'une seule variable d'état (nommée contrainte effective) dans le sol non saturé n'est plus valable et donc, la logique mécanique derrière l'utilisation de ce type d'analyse n'est pas satisfaisante.

Muraleetharan et Wei [257] ont utilisé la *théorie des mélanges avec des interfaces* (TMI) pour

développer des équations de champ régissant le comportement des milieux poreux non saturés dans des conditions de chargement dynamique. Cette théorie est une extension de la théorie des mélanges introduite par Trusdell et Touppin [325] en incluant des effets d'interface pour décrire le comportement des milieux poreux non saturés [171, 177, 179].

Dans ce modèle, les fractions volumiques et les densités des aires (*area densities*) sont considérées comme étant les variables constitutives indépendantes. Une nouvelle définition pour la contrainte totale qui inclue explicitement les effets d'interface est déduite. Les restrictions thermodynamiques sont utilisées pour établir les relations constitutives. Ils ont trouvé qu'il existe un potentiel thermodynamique de *Gibbs* qui induit l'écoulement des fluides. La base théorique pour l'utilisation de deux variables d'état de contrainte, soient la contrainte nette et la succion, au lieu d'une seule contrainte effective est fournie. Aussi, la variation de la succion due à la déformation du squelette solide est prise en compte.

Dans ce modèle basé sur la théorie des mélanges avec des interfaces, il y a un grand nombre de paramètres constitutifs inconnus qui sont extrêmement difficiles à évaluer. Ces paramètres matériels, parfois au niveau microscopique, peuvent ne pas être accessibles par les expérimentations.

En revanche, une théorie à l'échelle macroscopique suppose que les principes standard de la mécanique des milieux continus sont appropriés aux milieux poreux. Dans ce contexte, le comportement des milieux poreux est décrit en se basant sur les variables mesurées directement dans le laboratoire à l'échelle macroscopique. Il est généralement plus concluant d'appliquer une théorie macro-échelle qu'une théorie des mélanges. Cependant, la théorie de macro-échelle généralement ne représente pas les détails microscopiques importants des milieux poreux.

Dans ce chapitre, un système d'équations aux dérivées partielles complètement couplées, gouvernant le comportement d'un milieu poreux rempli par deux fluides compressibles (eau et air) soumis aux chargements dynamiques, est obtenu. Ce modèle ne contient pas les actions mécaniques au niveau microscopique. Par conséquent, seule la partie capillaire de la succion au niveau du Volume Élémentaire de Référence (VER) a été prise en compte. De plus, tous les constituants sont à la même température, qui est supposée constante dans le temps et dans l'espace. Ces équations sont obtenues en utilisant les lois physiques telles que la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et la première et deuxième loi de la thermodynamique.

Ces formulations phénoménologiques sont présentées en se basant sur les observations expérimentales et la théorie de la poromécanique. Cela est obtenu dans le cadre du modèle mathématique présenté par Gatmiri [143] et Gatmiri et al. [150] en utilisant la succion comme une variable indépendante. Dans ce modèle, l'effet de déformation sur la distribution de succion dans le squelette solide et l'effet inverse sont inclus via des surfaces d'état en indice des vides «  $e$  » et en degré de saturation «  $S_r$  ». Le milieu poroélastique du squelette est supposé être isotrope et linéaire. Les propriétés mécaniques et hydrauliques du sol sont supposées être dépendantes de la succion.

Dans le cas d'une modélisation numérique par la méthode des éléments finis pour les sols non saturés, les accélérations relatives de l'eau et de l'air par rapport au squelette solide sont négligées dans la procédure de résolution [258, 302, 334] et les équations sont résolues en considérant le déplacement du squelette solide «  $u_i$  », la pression de l'eau «  $p_w$  » et la pression de l'air «  $p_a$  » comme les inconnues nodales. Malheureusement, il n'y a pas d'étude systématique pour estimer l'influence de cette hypothèse sur le comportement prévu des sols non saturés particulièrement dans des conditions de chargement dynamique.

Également, dans cette étude, on utilise la même notion «  $\mathbf{u} - p_w - p_a$  » pour dériver les équations concernant le comportement dynamique des sols non saturés.

### 3.1 Concepts basiques et la cinématique

La notion de fraction volumique est formulée pour le solide poreux, l'eau et l'air. Le volume total  $V$  d'un VER est égal à la somme des volumes partiels des phases constituants du milieu  $V_\beta$  :

$$V = \sum_{\beta} V_{\beta} \quad (3.1)$$

où  $\beta = s, w, a$ .

La fraction volumique de phase  $\beta$ ,  $n_\beta$ , est définie par :

$$n_\beta(\mathbf{x}, t) = V_\beta/V \quad (3.2)$$

$n_\beta$  est une propriété moyenne qui est affectée au centre du VER et est donc une fonction continue de la localisation spatiale  $\mathbf{x}$  et du temps  $t$ . De (3.1) et (3.2), il peut être démontré que  $n_\beta$  est limitée par

$$\sum_{\beta} n_\beta(\mathbf{x}, t) = 1 \quad (3.3a)$$

$$0 \leq n_\beta(\mathbf{x}, t) \leq 1 \quad (3.3b)$$

Aussi, la masse de la phase  $\beta$ ,  $M_\beta$ , dans le VER est définie par :

$$M_\beta = \rho_\beta V_\beta = \rho_\beta n_\beta V \quad (3.4)$$

où  $\rho_\beta$  est la masse volumique de la phase  $\beta$ .

Donc, la densité globale du mélange s'obtient par :

$$\rho = \sum_{\beta} \rho_\beta n_\beta = \rho_s(1 - n) + \rho_w n_w + \rho_a n_a \quad (3.5)$$

Soit  $\mathbb{N}^\beta \subset \mathbb{R}^3$  une configuration de référence fixe, mais autrement arbitraire de phase  $\beta$ . Chaque composant individuel est affecté d'un mouvement indépendant défini par :

$$x_t^\beta : \mathbb{N}^\beta \mapsto \mathfrak{S}_t \subset \mathbb{R}^3, \text{ i.e. } \mathbf{x} = x_t^\beta(\mathbf{X}^\beta) = x^\beta(\mathbf{X}^\beta, t) \quad (3.6)$$

où  $\mathfrak{S}_t \subset \mathfrak{R}^3$  est la configuration actuelle, et  $t \in [0, T]$  est le temps passé.  $\mathbf{X}^\beta$  représente la coordonnée d'une particule de phase  $\beta$  dans sa configuration de référence.  $\mathbf{x}$  est la position spatiale de la même particule au temps  $t$  [333]. La fonction  $x^\beta(\mathbf{X}^\beta, t)$  est supposée être inversible et dérivable autant de fois que nécessaire. Les vecteurs de la vitesse et de l'accélération de la phase  $\beta$  sont respectivement définis par :

$$\mathbf{v}^\beta = \dot{x}^\beta = \frac{D^\beta x^\beta}{Dt} \quad (3.7a)$$

$$\mathbf{a}^\beta = \ddot{x}^\beta = \frac{D^{\beta 2} x^\beta}{Dt^2} \quad (3.7b)$$

$D^\beta(\star)/Dt$  est la dérivée particulaire d'un champ  $(\star)$  par rapport à une particule dans la phase  $\beta$  :

$$\frac{D^\beta}{Dt}(\star) = \frac{\partial}{\partial t}(\star) + \mathbf{v}^\beta \cdot \nabla(\star) = \frac{D^\lambda}{Dt}(\star) + \mathbf{v}^{\beta, \lambda} \cdot \nabla(\star) \quad (3.8)$$

où

$$\mathbf{v}^{\beta, \lambda} = \mathbf{v}^\beta - \mathbf{v}^\lambda \quad (3.9)$$

est la vitesse relative de la phase  $\beta$  par rapport à la phase  $\lambda (= s, w, a)$ . En écrivant les équations d'équilibre pour un mélange triphasique, nous nous concentrons sur la configuration actuelle du mélange. Donc, le symbole  $\nabla (= \partial/\partial \mathbf{x})$  représente toujours le gradient par rapport à  $\mathbf{x}$ , dans ce chapitre.

Le mouvement des fluides ( $\alpha = w, a$ ) doit être décrit par rapport au squelette solide ( $s$ ). Par conséquent, les dérivées particulières par rapport aux fluides ( $D^\alpha/Dt$ ) doivent également être prises par rapport au squelette solide.

Soient respectivement  $\mathbf{v}^s$ ,  $\mathbf{v}^w$  et  $\mathbf{v}^a$  les vitesses absolues du squelette solide, de l'eau et de l'air écrites en variables d'Euler. Donc, d'après (3.8), les dérivées particulières par rapport aux trois phases solide ( $s$ ), liquide ( $w$ ) et gazeuse ( $a$ ) s'écrivent comme suit :

$$\frac{D^s}{Dt}(\star) = \frac{\partial}{\partial t}(\star) + \mathbf{v}^s \cdot \nabla(\star) \quad (3.10a)$$

$$\frac{D^w}{Dt}(\star) = \frac{D^s}{Dt}(\star) + \mathbf{v}^{w, s} \cdot \nabla(\star) \quad (3.10b)$$

$$\frac{D^a}{Dt}(\star) = \frac{D^s}{Dt}(\star) + \mathbf{v}^{a, s} \cdot \nabla(\star) \quad (3.10c)$$

où

$\mathbf{v}^{w, s} = \mathbf{v}^w - \mathbf{v}^s$  : vitesse relative de l'eau par rapport au squelette solide.

$\mathbf{v}^{a, s} = \mathbf{v}^a - \mathbf{v}^s$  : vitesse relative de l'air par rapport au squelette solide.

Aussi, la dérivée particulaire peut s'appliquer à une intégrale volumique de n'importe quelle quantité physique  $\varpi$  selon :

$$\frac{D^\beta}{Dt} \int_{\Omega_t} \varpi d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{D^\beta}{Dt} (\varpi d\Omega_t) \quad (3.11)$$

Sachant que

$$\frac{D^\beta}{Dt}(d\Omega_t) = (\nabla \cdot \mathbf{v}^\beta) d\Omega_t \quad (3.12)$$

et en utilisant (3.8), on peut réécrire (3.11) sous la forme suivante :

$$\frac{D^\beta}{Dt} \int_{\Omega_t} \varpi d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial \varpi}{\partial t} + \nabla \cdot (\varpi \mathbf{v}^\beta) \right) d\Omega_t \quad (3.13a)$$

$$\frac{D^\beta}{Dt} \int_{\Omega_t} \varpi d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial \varpi}{\partial t} + \nabla \cdot (\varpi \otimes \mathbf{v}^\beta) \right) d\Omega_t \quad (3.13b)$$

où  $\nabla \cdot (\varpi \otimes \mathbf{v}^\beta) = \varpi \nabla \cdot \mathbf{v}^\beta + \mathbf{v}^\beta \nabla \varpi$ .

L'utilisant du théorème de la divergence donne enfin l'expression finale comme :

$$\frac{D^\beta}{Dt} \int_{\Omega_t} \varpi d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial \varpi}{\partial t} + \int_{\Gamma_t} \varpi \mathbf{v}^\beta \cdot \mathbf{n} d\Gamma_t \quad (3.14)$$

où  $\Gamma_t$  représente la frontière du volume  $\Omega_t$ , tandis que  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface  $d\Gamma_t$ .

Le champ de déplacement est défini par le déplacement du squelette solide  $\mathbf{u}$  (ou  $u_i$ ) et les déplacements des fluides par rapport au squelette solide  $\mathbf{w}^\alpha$  (ou  $w_i^\alpha$ ). Ici,  $\alpha$  représente l'eau  $w$  et l'air  $a$ .

Le déplacement absolu de fluide  $\alpha$ ,  $\mathbf{U}^\alpha$  (ou  $U_i^\alpha$ ) est défini de telle sorte que le volume de fluide  $\alpha$  déplacé par unité de section perpendiculaire à la direction de l'écoulement soit égal à «  $n S_\alpha U_i^\alpha$  », où  $n$  est la porosité et  $S_\alpha$  est le degré de saturation par rapport au fluide  $\alpha$ .

### 3.1.1 Déformation du squelette solide

Dans la configuration de référence, on considère un vecteur matériel infinitésimal  $d\mathbf{X}^s$  joignant la particule du squelette située à  $\mathbf{X}^s$  à la particule juxtaposée située à  $\mathbf{X}^s + d\mathbf{X}^s$ . Après la déformation,  $d\mathbf{X}^s$  devient  $d\mathbf{x}$  joignant les mêmes particules du squelette dans leurs nouvelles positions,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  (Fig. 3.1) [89]. Le vecteur  $d\mathbf{x}$  peut être obtenu à partir de celui de  $d\mathbf{X}^s$  par différenciation :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^s \quad (3.15)$$

où :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x^s(\mathbf{X}^s, t)}{\partial \mathbf{X}^s} = \nabla_{\mathbf{X}^s} \mathbf{x}; \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j^s} \quad (3.16)$$

Dans (3.16),  $\nabla_{\mathbf{X}}$  représente l'opérateur nabla par rapport à la configuration initiale.  $\mathbf{F}$  s'appelle le *gradient de la déformation*. Il transporte n'importe quel vecteur matériel  $d\mathbf{X}^s$  à son cas déformé  $d\mathbf{x}$ .

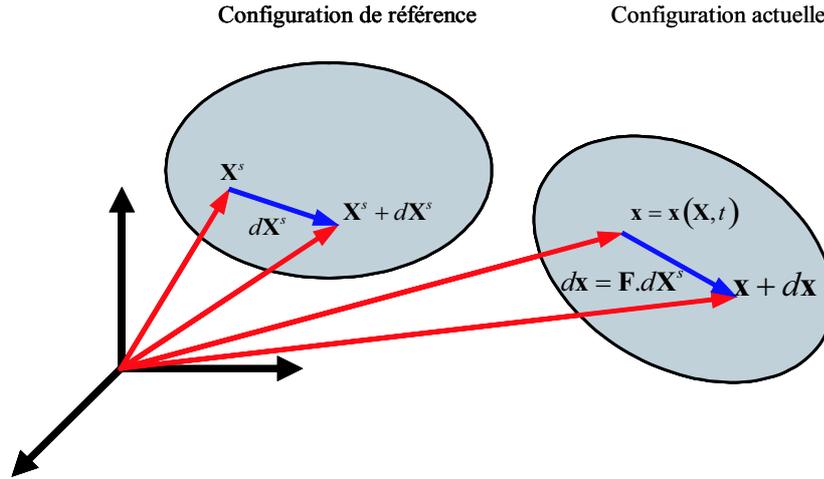


Figure 3.1 — Gradient de la déformation

Soit  $\mathbf{u}(\mathbf{X}^s, t)$  le vecteur de déplacement de la particule dont les positions initiale et actuelle sont  $\mathbf{X}^s$  et  $\mathbf{x}$  :

$$\mathbf{u} = x^s(\mathbf{X}^s, t) - \mathbf{X}^s = \mathbf{x} - \mathbf{X}^s \quad (3.17)$$

À partir des définitions (3.16) et (3.17), le gradient de la déformation peut être exprimé comme une fonction du vecteur de déplacement comme suit :

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}^s} \quad (3.18)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur isotrope du second ordre. Dans la suite, nous supposons que la transformation entre les configurations préserve l'orientation, et donc  $J = \det \mathbf{F} > 0$ .

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange qui mesure les variations de déformation en fonction du gradient de déformation  $\mathbf{F}$  est :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (3.19)$$

Dans la limite de la transformation infinitésimale  $\|\nabla \mathbf{u}\| \ll 1$ , le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  se réduit à celui linéarisé  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) ; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.20)$$

Dans la transformation infinitésimale, la dilatation volumique linéarisé du squelette s'écrit :

$$\epsilon = \varepsilon_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.21)$$

La dilatation volumique observable du squelette est due à la variation de l'espace poreux connecté (par exemple, causée par la suction) et à la dilatation volumique de la matrice solide. Cette dernière sera notée  $\epsilon_m$ , où l'indice  $m$  représente la matrice solide. Si  $d\Omega^m$  et  $d\Omega_t^m$

désignent respectivement le volume occupé par la matrice, dans la configuration de référence et actuelle, la dilatation volumique de la matrice s'écrit :

$$\epsilon_m = \frac{d\Omega_t^m - d\Omega^m}{d\Omega^m} \quad (3.22)$$

Dans ce chapitre, l'hypothèse de l'incompressibilité des grains solides est considérée. Par conséquent,  $d\Omega_t^m = d\Omega^m$  et  $\epsilon_m = 0$ . Donc, la dilatation volumique du squelette est égale à la variation de l'espace poreux connecté désigné par  $n$ .

### 3.1.2 Vecteur courant relatif de volume des fluides

Pour décrire le mouvement matériel d'un milieu poreux non saturé, le mouvement des particules du fluide  $\alpha (= w, a)$  par rapport à la configuration initiale du squelette doit maintenant être précisé. Soit  $d\Gamma$  une surface infinitésimale du squelette orientée par le vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}$  ( $d\Gamma = \mathbf{n}d\Gamma$ ). A l'instant  $t$  et par unité de temps, un volume de fluide  $\alpha$  écrit comme

$$q_\alpha d\Gamma = \dot{\mathbf{w}}^\alpha \cdot \mathbf{n}d\Gamma \quad (3.23)$$

s'écoule à travers la surface  $d\Gamma$  qui est suivi du mouvement des particules du squelette. Le terme  $q_\alpha$  représente le flux volumique relatif du fluide  $\alpha$  par unité de surface [ $L^3 \cdot L^{-2} \cdot T^{-1}$ ]. Puisque  $\mathbf{w}^\alpha$  (ou  $w_i^\alpha$ ) est le vecteur de déplacement du fluide  $\alpha$  par rapport au squelette solide,  $\dot{\mathbf{w}}^\alpha$  est la vitesse de Darcy ou le vecteur courant relatif (par rapport au squelette) de volume de fluide, écrit en variables d'Euler.

Le vecteur courant relatif de volume de fluide  $\dot{\mathbf{w}}^\alpha$  peut être défini à partir de la vitesse relative  $\mathbf{v}^{\alpha,s}$  comme suit :

$$\dot{\mathbf{w}}^\alpha = nS_\alpha \mathbf{v}^{\alpha,s} = nS_\alpha (\mathbf{v}^\alpha - \mathbf{v}^s) = nS_\alpha (\dot{\mathbf{U}}^\alpha - \dot{\mathbf{u}}) \quad (3.24)$$

## 3.2 Formulation eulérienne de la conservation de la masse

### 3.2.1 Conservation de la masse de squelette solide

La masse du squelette solide dans un volume élémentaire représentatif peut s'écrire comme :

$$M_s = \int_{\Omega_t} (1 - n)\rho_s d\Omega_t \quad (3.25)$$

où  $(1 - n)\rho_s$  représente la densité du squelette solide dans la configuration actuelle.

La conservation de la masse exige que :

$$\frac{D^s M_s}{Dt} = \frac{D^s}{Dt} \int_{\Omega_t} (1 - n)\rho_s d\Omega_t = 0 \quad (3.26)$$

En remplaçant  $\varpi = (1 - n)\rho_s$  dans (3.13), on aura :

$$\frac{D^s M_s}{Dt} = \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial((1 - n)\rho_s)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1 - n)\rho_s \otimes \mathbf{v}^s) \right) d\Omega_t = 0 \quad (3.27)$$

L'équation (3.27) doit être vérifiée pour tout volume  $\Omega_t$ . Par conséquent :

$$\frac{\partial((1 - n)\rho_s)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1 - n)\rho_s \otimes \mathbf{v}^s) = 0 \quad (3.28a)$$

$$(1 - n) \frac{\partial \rho_s}{\partial t} - \rho_s \frac{\partial n}{\partial t} + (1 - n)\rho_s \nabla \cdot \mathbf{v}^s + \mathbf{v}^s \nabla \cdot ((1 - n)\rho_s) = 0 \quad (3.28b)$$

$$\underbrace{(1 - n) \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \mathbf{v}^s (1 - n) \nabla \rho_s}_{I} - \underbrace{\rho_s \frac{\partial n}{\partial t} - \rho_s \mathbf{v}^s \nabla n}_{II} + (1 - n)\rho_s \nabla \cdot \mathbf{v}^s = 0 \quad (3.28c)$$

En remplaçant respectivement  $\star = \rho_s$  et  $\star = n$  dans (3.10a), les parties  $I$  et  $II$  dans l'équation (3.28c) sont égales respectivement aux dérivées particulières de  $\rho_s$  et de  $n$  par rapport au squelette solide. Par conséquent, on en déduit l'équation de continuité par rapport au squelette solide :

$$(1 - n) \frac{D^s \rho_s}{Dt} - \rho_s \frac{D^s n}{Dt} + (1 - n)\rho_s \nabla \cdot \mathbf{v}^s = 0 \quad (3.29)$$

Par l'hypothèse de l'incompressibilité des grains du sol ( $D^s \rho_s / Dt = 0$ ), nous obtenons

$$\frac{D^s n}{Dt} = (1 - n) \nabla \cdot \mathbf{v}^s = (1 - n) \dot{u}_{i,i} \quad (3.30)$$

Cette équation exprime que la déformation du squelette solide consiste seulement en un réarrangement des grains.

### 3.2.2 Conservation de la masse d'eau

La masse de l'eau dans un volume élémentaire représentatif peut s'écrire comme :

$$M_w = \int_{\Omega_t} n_w \rho_w d\Omega_t = \int_{\Omega_t} n S_w \rho_w d\Omega_t \quad (3.31)$$

où  $n_w \rho_w$  représente la densité de l'eau dans la configuration actuelle. La conservation de la masse exige que :

$$\frac{D^w M_w}{Dt} = \frac{D^w}{Dt} \int_{\Omega_t} n S_w \rho_w d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial(n S_w \rho_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (n S_w \rho_w \otimes \mathbf{v}^w) \right) d\Omega_t = 0 \quad (3.32)$$

En introduisant les équations (3.9) et (3.24) dans (3.32), on aura :

$$\frac{D^w M_w}{Dt} = \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial(n S_w \rho_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (n S_w \rho_w \otimes \mathbf{v}^s + \rho_w \otimes \dot{\mathbf{w}}^w) \right) d\Omega_t = 0 \quad (3.33)$$

Puisque l'équation (3.33) doit être vérifiée pour n'importe quel volume  $\Omega_t$ , l'intégrand doit être égal à zéro. Cela donne l'équation de conservation locale de la masse d'eau communément appelée l'équation de continuité relative à l'eau :

$$\frac{\partial(nS_w\rho_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (nS_w\rho_w \otimes \mathbf{v}^w) = \frac{\partial(nS_w\rho_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (nS_w\rho_w \otimes \mathbf{v}^s + \rho_w \otimes \dot{\mathbf{w}}^w) = 0 \quad (3.34)$$

Alors, on aura :

$$\frac{\partial(nS_w\rho_w)}{\partial t} + nS_w\rho_w \nabla \cdot (\mathbf{v}^s) + \mathbf{v}^s \nabla (nS_w\rho_w) + \rho_w \nabla \cdot \dot{\mathbf{w}}^w + \dot{\mathbf{w}}^w \nabla \rho_w = 0 \quad (3.35a)$$

$$\frac{D^s(nS_w\rho_w)}{Dt} + nS_w\rho_w \nabla \cdot (\mathbf{v}^s) + \rho_w \nabla \cdot \dot{\mathbf{w}}^w + \dot{\mathbf{w}}^w \nabla \rho_w = 0 \quad (3.35b)$$

En supposant un milieu homogène qui satisfait  $\nabla \rho_w = 0$ , on a :

$$nS_w \frac{D^s \rho_w}{Dt} + n\rho_w \frac{D^s S_w}{Dt} + S_w \rho_w \frac{D^s n}{Dt} + nS_w \rho_w \dot{u}_{i,i} + \rho_w \dot{w}_{i,i}^w = 0 \quad (3.36)$$

En considérant l'hypothèse de l'incompressibilité des grains du sol (3.30) :

$$\frac{nS_w}{\rho_w} \frac{D^s \rho_w}{Dt} + n \frac{D^s S_w}{Dt} + S_w \dot{u}_{i,i} + \dot{w}_{i,i}^w = 0 \quad (3.37)$$

La première expression dans le premier membre de l'équation (3.37) peut être écrite comme :

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{D^s \rho_w}{Dt} = \frac{1}{\rho_w} \frac{D^s \rho_w}{Dp_w} \frac{D^s p_w}{Dt} = C_w \frac{D^s p_w}{Dt} \quad (3.38)$$

où  $C_w = \frac{(D^s \rho_w / \rho_w)}{Dp_w}$  est la compressibilité de l'eau. Par conséquent,

$$C_w n S_w \frac{D^s p_w}{Dt} + n \frac{D^s S_w}{Dt} + S_w \dot{u}_{i,i} + \dot{w}_{i,i}^w = 0 \quad (3.39)$$

Comme montré auparavant, la surface d'état en degré de saturation  $S_w$  dans un problème isotherme dépend de la succion ( $p_a - p_w$ ) et de la contrainte nette ( $\sigma - p_a$ ) :

$$S_w = f(\sigma - p_a, p_a - p_w) \quad (3.40)$$

Pendant, une variation de la succion peut produire un changement plus important dans le degré de saturation ou de la teneur en eau que celui produit par un changement de contrainte normale nette [133]. Pour cette raison et pour simplifier les équations, le degré de saturation s'écrit seulement en fonction de la succion. Donc,  $D^s S_w / Dt$  s'écrit comme :

$$\frac{D^s S_w}{Dt} = g_1 \frac{D^s (p_a - p_w)}{Dt} \quad (3.41)$$

où  $g_1 = \frac{D^s S_w}{D(p_a - p_w)}$ .

Alors l'équation finale de la conservation de la masse d'eau prend cette forme :

$$C_w n S_w \frac{D^s p_w}{Dt} + n g_1 \frac{D^s (p_a - p_w)}{Dt} + S_w \dot{u}_{i,i} + \dot{w}_{i,i}^w = 0 \quad (3.42)$$

$$\dot{w}_{i,i}^w = -S_w \dot{\epsilon}_{ii} + C_{ww} \dot{p}_w + C_{wa} \dot{p}_a \quad (3.43)$$

où  $C_{ww} = (n g_1 - C_w n S_w)$  et  $C_{wa} = C_{aw} = -n g_1$ .

### 3.2.3 Conservation de la masse d'air

Avec la même approche que celle présentée pour la conservation de la masse d'eau, l'équation de conservation de la masse d'air dans un volume élémentaire représentatif peut être écrite comme :

$$\frac{\partial(nS_a\rho_a)}{\partial t} + \nabla \cdot (nS_a\rho_a \otimes \mathbf{v}^a) = \frac{\partial(nS_a\rho_a)}{\partial t} + \nabla \cdot (nS_a\rho_a \otimes \mathbf{v}^s + \rho_a \otimes \dot{\mathbf{w}}^a) = 0 \quad (3.44a)$$

$$\frac{D^s(nS_a\rho_a)}{Dt} + nS_a\rho_a \nabla \cdot (\mathbf{v}^s) + \rho_a \nabla \cdot \dot{\mathbf{w}}^a + \dot{\mathbf{w}}^a \nabla \rho_a = 0 \quad (3.44b)$$

En supposant un milieu homogène qui satisfait  $\nabla \rho_a = 0$  et en considérant l'hypothèse de l'incompressibilité des grains du sol (3.30), on aura :

$$C_a n S_a \frac{D^s p_a}{Dt} + n \frac{D^s S_a}{Dt} + S_a \dot{w}_{i,i} + \dot{w}_{i,i}^a = 0 \quad (3.45)$$

où  $C_a = \frac{(D^s \rho_a / \rho_a)}{D p_a}$  est la compressibilité de l'air.

Sachant que  $S_w + S_a = 1$ , on aura :

$$\frac{D^s S_a}{Dt} = -\frac{D^s S_w}{Dt} = -g_1 \frac{D^s (p_a - p_w)}{Dt} \quad (3.46)$$

Alors, l'équation finale de la conservation de la masse d'air peut être écrite comme :

$$C_a n S_a \frac{D^s p_a}{Dt} - n g_1 \frac{D^s (p_a - p_w)}{Dt} + S_a \dot{w}_{i,i} + \dot{w}_{i,i}^a = 0 \quad (3.47)$$

$$\dot{w}_{i,i}^a = -S_a \dot{\varepsilon}_{ii} + C_{wa} \dot{p}_w + C_{aa} \dot{p}_a \quad (3.48)$$

où  $C_{aa} = (n g_1 - C_a n S_a)$  et  $C_{wa} = C_{aw} = -n g_1$ .

## 3.3 Conservation de la quantité de mouvement

En mécanique des milieux continus, on considère que tout sous domaine matériel  $\Omega_t$  d'un milieu continu  $S$  est soumis à deux types d'efforts extérieurs (Fig. 3.2) :

- des forces de volume définies par une densité massique de force de volume (pesanteur)  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ , la force de volume infinitésimal par unité de volume  $\mathbf{f}$  agissant sur le volume élémentaire matériel  $d\Omega_t$  étant donc

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (3.49)$$

où  $\rho$  désigne la densité massique de volume élémentaire matériel  $d\Omega_t$ , ici y compris le squelette et les fluides (eau et air) définis dans (3.5).

On suppose que la densité massique de force de volume (pesanteur)  $\mathbf{g}$  ne dépend que du vecteur position  $\mathbf{x}$  et du temps  $t$ .

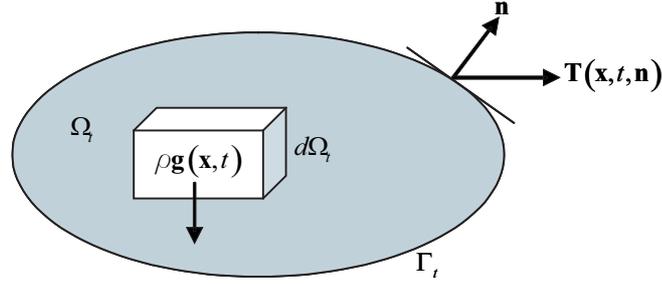


Figure 3.2 — Définition des efforts extérieurs

- des forces s'exerçant sur la frontière  $\Gamma_t$  qui enferme le domaine  $\Omega_t$ . Ces forces sont représentées à chaque instant par une densité surfacique  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ , où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à la frontière  $\Gamma_t$  au point  $\mathbf{x}$  considéré. La force de surface infinitésimale  $\delta\mathbf{T}$  agissant sur un élément infinitésimal de surface  $d\Gamma_t$  est donc définie comme :

$$\delta\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})d\Gamma_t \quad (3.50)$$

Comme la densité massique de force de volume, on suppose que la densité surfacique  $\mathbf{T}$  ne dépend que de  $\mathbf{x}$ , de  $\mathbf{n}$  et du temps  $t$ .

Les forces extérieures, la densité de force de surface  $\mathbf{T}$  aussi bien que la densité massique de force de volume  $\mathbf{g}$ , se rapportent à tout le mélange, sans qu'une distinction soit faite entre les forces agissant sur le squelette et celles qui agissent sur les fluides.

La quantité de mouvement linéaire des particules du squelette et des fluides contenus dans le domaine poreux élémentaire à l'instant  $t$  et pour tout sous domaine matériel  $\Omega_t$  est écrite comme suit :

$$\mathbf{P}(t) = \int_{\Omega_t} (\rho_s(1-n)\mathbf{v}^s + \rho_w n S_w \mathbf{v}^w + \rho_a n S_a \mathbf{v}^a) d\Omega_t \quad (3.51)$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement linéaire exprime que le taux de variation de la quantité de mouvement linéaire de toute la matière contenue dans  $\Omega_t$  par rapport au temps doit être égal à la somme des forces de surface et celles de volume agissant sur le volume de contrôle :

$$\begin{aligned} \frac{D^s}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho_s(1-n)\mathbf{v}^s d\Omega_t + \frac{D^w}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho_w n S_w \mathbf{v}^w d\Omega_t + \frac{D^a}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho_a n S_a \mathbf{v}^a d\Omega_t = \\ \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\Gamma_t} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\Gamma_t \end{aligned} \quad (3.52)$$

L'existence d'un champ de tenseur de contrainte  $\sigma$ , le tenseur de contrainte de Cauchy, est dérivé de telle sorte qu'à chaque point :

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T} \quad (3.53)$$

Ici, la définition du tenseur de contrainte  $\sigma$  ne diffère en rien de celle du tenseur de contrainte pour un milieu continu monophasique. Il est intéressant de noter que ce tenseur ne prend pas en

considération séparément la contrainte lié au squelette et la contrainte lié à la succion ayant lieu dans l'espace poreux connecté. En introduisant (3.53) dans (3.52) et à l'aide du théorème de la divergence, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{D^s}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho_s(1-n)\mathbf{v}^s d\Omega_t + \frac{D^w}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho_w n S_w \mathbf{v}^w d\Omega_t + \frac{D^a}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho_a n S_a \mathbf{v}^a d\Omega_t = \\ \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega_t \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \frac{D^s}{Dt} (\rho_s(1-n)\mathbf{v}^s d\Omega_t) + \int_{\Omega_t} \frac{D^w}{Dt} (\rho_w n S_w \mathbf{v}^w d\Omega_t) + \int_{\Omega_t} \frac{D^a}{Dt} (\rho_a n S_a \mathbf{v}^a d\Omega_t) = \\ \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega_t \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial(\rho_s(1-n)\mathbf{v}^s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s(1-n)\mathbf{v}^s \otimes \mathbf{v}^s) \right] d\Omega_t + \\ \int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial(\rho_w n S_w \mathbf{v}^w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w n S_w \mathbf{v}^w \otimes \mathbf{v}^w) \right] d\Omega_t + \\ \int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial(\rho_a n S_a \mathbf{v}^a)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a n S_a \mathbf{v}^a \otimes \mathbf{v}^a) \right] d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega_t \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \left[ \rho_s(1-n) \frac{\partial \mathbf{v}^s}{\partial t} + \mathbf{v}^s \frac{\partial(\rho_s(1-n))}{\partial t} + \mathbf{v}^s \nabla \cdot (\rho_s(1-n) \otimes \mathbf{v}^s) + \rho_s(1-n) \mathbf{v}^s \nabla \cdot \mathbf{v}^s \right] d\Omega_t + \\ \int_{\Omega_t} \left[ \rho_w n S_w \frac{\partial \mathbf{v}^w}{\partial t} + \mathbf{v}^w \frac{\partial(\rho_w n S_w)}{\partial t} + \mathbf{v}^w \nabla \cdot (\rho_w n S_w \otimes \mathbf{v}^w) + \rho_w n S_w \mathbf{v}^w \nabla \cdot \mathbf{v}^w \right] d\Omega_t + \\ \int_{\Omega_t} \left[ \rho_a n S_a \frac{\partial \mathbf{v}^a}{\partial t} + \mathbf{v}^a \frac{\partial(\rho_a n S_a)}{\partial t} + \mathbf{v}^a \nabla \cdot (\rho_a n S_a \otimes \mathbf{v}^a) + \rho_a n S_a \mathbf{v}^a \nabla \cdot \mathbf{v}^a \right] d\Omega_t = \\ \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega_t \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \left[ \mathbf{v}^s \left( \frac{\partial(\rho_s(1-n))}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s(1-n) \otimes \mathbf{v}^s) \right) + \rho_s(1-n) \left( \frac{\partial \mathbf{v}^s}{\partial t} + \mathbf{v}^s \nabla \cdot \mathbf{v}^s \right) \right] d\Omega_t + \\ \int_{\Omega_t} \left[ \mathbf{v}^w \left( \frac{\partial(\rho_w n S_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w n S_w \otimes \mathbf{v}^w) \right) + \rho_w n S_w \left( \frac{\partial \mathbf{v}^w}{\partial t} + \mathbf{v}^w \nabla \cdot \mathbf{v}^w \right) \right] d\Omega_t + \\ \int_{\Omega_t} \left[ \mathbf{v}^a \left( \frac{\partial(\rho_a n S_a)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a n S_a \otimes \mathbf{v}^a) \right) + \rho_a n S_a \left( \frac{\partial \mathbf{v}^a}{\partial t} + \mathbf{v}^a \nabla \cdot \mathbf{v}^a \right) \right] d\Omega_t = \\ \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega_t \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_t} \left[ \mathbf{v}^s \left( \frac{\partial(\rho_s(1-n))}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s(1-n) \otimes \mathbf{v}^s) \right) + \rho_s(1-n) \frac{D^s \mathbf{v}^s}{Dt} \right] d\Omega_t + \\
& \int_{\Omega_t} \left[ \mathbf{v}^w \left( \frac{\partial(\rho_w n S_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w n S_w \otimes \mathbf{v}^w) \right) + \rho_w n S_w \frac{D^w \mathbf{v}^w}{Dt} \right] d\Omega_t + \\
& \int_{\Omega_t} \left[ \mathbf{v}^a \left( \frac{\partial(\rho_a n S_a)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a n S_a \otimes \mathbf{v}^a) \right) + \rho_a n S_a \frac{D^a \mathbf{v}^a}{Dt} \right] d\Omega_t = \\
& \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega_t
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{v}^s \left( \frac{\partial(\rho_s(1-n))}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s(1-n) \otimes \mathbf{v}^s) \right) + \mathbf{v}^w \left( \frac{\partial(\rho_w n S_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w n S_w \otimes \mathbf{v}^w) \right) + \\
& \mathbf{v}^a \left( \frac{\partial(\rho_a n S_a)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a n S_a \otimes \mathbf{v}^a) \right) + \rho_s(1-n) \frac{D^s \mathbf{v}^s}{Dt} + \rho_w n S_w \frac{D^w \mathbf{v}^w}{Dt} + \rho_a n S_a \frac{D^a \mathbf{v}^a}{Dt} \\
& = \rho \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

En introduisant les équations (3.28a), (3.34) et (3.44a) dans l'équation (3.60) :

$$\rho_s(1-n) \frac{D^s \mathbf{v}^s}{Dt} + \rho_w n S_w \frac{D^w \mathbf{v}^w}{Dt} + \rho_a n S_a \frac{D^a \mathbf{v}^a}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{3.61}$$

L'équation (3.61) peut être écrite comme :

$$\begin{aligned}
& \rho_s(1-n) \frac{D^s \mathbf{v}^s}{Dt} + \rho_w n_w \left( \frac{D^s \mathbf{v}^{w,s}}{Dt} + \mathbf{v}^{w,s} \nabla \cdot \mathbf{v}^w \right) + \rho_a n_a \left( \frac{D^s \mathbf{v}^{a,s}}{Dt} + \mathbf{v}^{a,s} \nabla \cdot \mathbf{v}^a \right) \\
& = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\rho \frac{D^s \mathbf{v}^s}{Dt} + \rho_w n_w \left( \frac{D^s \mathbf{v}^{w,s}}{Dt} + \mathbf{v}^{w,s} \nabla \cdot \mathbf{v}^w \right) + \rho_a n_a \left( \frac{D^s \mathbf{v}^{a,s}}{Dt} + \mathbf{v}^{a,s} \nabla \cdot \mathbf{v}^a \right) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{3.63}$$

Les termes d'accélération convective dans les équations ci-dessus sont négligés en raison des difficultés numériques, mais les termes d'accélération relative sont retenus :

$$\rho \frac{D^s \mathbf{v}^s}{Dt} + \rho_w n S_w \frac{D^s \mathbf{v}^{w,s}}{Dt} + \rho_a n S_a \frac{D^s \mathbf{v}^{a,s}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{3.64}$$

$$\rho \frac{D^s \mathbf{v}^s}{Dt} + \rho_w \frac{D^s \dot{\mathbf{w}}^w}{Dt} + \rho_a \frac{D^s \dot{\mathbf{w}}^a}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{3.65}$$

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho_w \ddot{\mathbf{w}}^w + \rho_a \ddot{\mathbf{w}}^a = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{3.66}$$

En supposant que les accélérations de l'eau et de l'air par rapport au squelette solide sont négligeables,  $\ddot{\mathbf{w}}^w / \ddot{\mathbf{u}} \rightarrow 0$  et  $\ddot{\mathbf{w}}^a / \ddot{\mathbf{u}} \rightarrow 0$ , on aura :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \tag{3.67}$$

Pour avoir la variable d'état des contraintes nettes dans l'équation d'équilibre simplifiée du squelette solide, l'équation (3.67) s'écrit avec la notation indicielle sous la forme suivante :

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij} p_a)_{,j} + p_{a,i} + f_i = \rho \ddot{u}_i \tag{3.68}$$

### 3.4 Équation d'écoulement de l'eau

Il s'agit de la loi de Darcy généralisée. Cette équation décrit l'équilibre des forces agissant sur la phase liquide du volume élémentaire représentatif, à savoir le gradient de la succion, la force d'inertie et la force résistante de l'eau due à sa viscosité.

$$nS_w \mathbf{v}^{w,s} = k_w \left( -\nabla p_w + \rho_w \mathbf{g} - \rho_w \frac{D^w \mathbf{v}^w}{Dt} \right) \quad (3.69)$$

$$nS_w \mathbf{v}^{w,s} = k_w \left( -\nabla p_w + \rho_w \mathbf{g} - \rho_w \left( \frac{D^s \mathbf{v}^s}{Dt} + \frac{D^s \mathbf{v}^{w,s}}{Dt} + \mathbf{v}^{w,s} \nabla \cdot \mathbf{v}^w \right) \right) \quad (3.70)$$

dans lesquelles  $k_w$  désigne la perméabilité à l'eau dans un sol non saturé,

$$k_w = a_w 10^{e\alpha_w} \left( \frac{S_w - S_{wu}}{1 - S_{wu}} \right)^{d_w} \quad (3.71)$$

où  $e$  est l'indice des vides et  $a_w$ ,  $\alpha_w$ ,  $d_w$  et  $S_{wu}$  sont des constantes dépendant du sol étudié. Comme expliqué dans le chapitre 2, le coefficient de perméabilité à l'eau dans un sol non saturé isotherme s'écrit en fonction de n'importe quel couple de trois propriétés possibles de volume-masse ( $S_r$ ,  $e$ ,  $\theta_w$ ).

En négligeant le terme d'accélération convective dans les équations ci-dessus, on obtient :

$$\dot{\mathbf{w}}^w = k_w \left( -\nabla p_w + \rho_w \mathbf{g} - \rho_w \ddot{\mathbf{u}} - \frac{\rho_w}{nS_w} \ddot{\mathbf{w}}^w \right) \quad (3.72)$$

En omettant le terme d'accélération relative de l'eau :

$$-p_{w,i} = \rho_w \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\dot{\mathbf{w}}^w}{k_w} - \rho_w \mathbf{g} \quad (3.73)$$

### 3.5 Équation d'écoulement de l'air

Il s'agit de la loi de Darcy généralisée. Cette équation décrit l'équilibre des forces agissant sur la phase gazeuse du volume élémentaire représentatif, à savoir le gradient de la pression d'air, la force d'inertie et la force résistante de l'air due à sa viscosité.

$$nS_a \mathbf{v}^{a,s} = k_a \left( -\nabla p_a + \rho_a \mathbf{g} - \rho_a \frac{D^a \mathbf{v}^a}{Dt} \right) \quad (3.74)$$

$$nS_a \mathbf{v}^{a,s} = k_a \left( -\nabla p_a + \rho_a \mathbf{g} - \rho_a \left( \frac{D^s \mathbf{v}^s}{Dt} + \frac{D^s \mathbf{v}^{a,s}}{Dt} + \mathbf{v}^{a,s} \nabla \cdot \mathbf{v}^a \right) \right) \quad (3.75)$$

dans lesquelles  $k_a$  désigne la perméabilité à l'air dans un sol non saturé,

$$k_a = c_a \frac{\gamma_a}{\mu_a} (e(1 - S_w))^{d_a} \quad (3.76)$$

où  $e$  est l'indice des vides,  $\mu_a$  est la viscosité de l'air,  $\gamma_a$  est le poids volumique de l'air et  $c_a$  et  $d_a$  sont des constantes dépendant du sol étudié.

Comme expliqué dans le chapitre 2, la perméabilité à l'air d'un sol non saturé, comme la perméabilité à l'eau, dépend de la granulométrie, de l'indice des vides, de la distribution des dimensions des pores dans le milieu, du type du sol et du degré de saturation.

En négligeant le terme d'accélération convective dans les équations ci-dessus, on obtient :

$$\dot{\mathbf{w}}^a = k_a \left( -\nabla p_a + \rho_a \mathbf{g} - \rho_a \ddot{\mathbf{u}} - \frac{\rho_a}{nS_a} \ddot{\mathbf{w}}^a \right) \quad (3.77)$$

En omettant le terme d'accélération relative de l'air :

$$-p_{a,i} = \rho_a \ddot{u}_i + \frac{\dot{\mathbf{w}}^a}{k_a} - \rho_a \mathbf{g} \quad (3.78)$$

### 3.6 Loi de comportement du squelette solide

Pour obtenir une formulation dynamique couplée entre les trois phases dans le cas isotherme, l'effet de la succion sur la déformation et sur le degré de saturation est modélisé en écrivant deux lois de comportement. La première loi introduit la relation entre la contrainte totale nette et la déformation en tenant compte de l'effet de la succion. La deuxième loi représente l'évolution du degré de saturation en fonction du niveau de la contrainte appliquée et de la succion. La loi de comportement du squelette solide se limite au cas linéaire en simplifiant celle du cas hyperbolique paramétrée par la succion [143].

La première loi constitutive du squelette (relation contrainte-déformation) peut donc être définie incrémentalement en terme de variation de contrainte totale nette  $d(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_a)$  comme suit :

$$d(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_a) = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^\sigma \quad (3.79)$$

où  $D_{ijkl}$  est la matrice de rigidité élastique linéaire et  $d\varepsilon_{kl}^\sigma$  est l'incrément de la déformation due à la variation de contrainte totale nette dans les sols non saturés. Il est supposé que :

$$d\varepsilon_{kl}^\sigma = d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^{suc} \quad (3.80)$$

où  $d\varepsilon_{kl}$  est l'incrément de la déformation totale et  $d\varepsilon_{kl}^{suc}$  est l'incrément de la déformation volumique due à la variation de succion.

Par identification de l'équation (3.80) dans (3.79), on obtient :

$$d(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_a) = D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^{suc}) \quad (3.81)$$

Dans cette équation  $d\varepsilon_{kl}^{suc}$  s'écrit comme suit :

$$d(p_a - p_w)\delta_{kl} = D_{km}^{suc}d\varepsilon_{ml}^{suc} \Rightarrow d\varepsilon_{kl}^{suc} = (D_{mk}^{suc})^{-1}d(p_a - p_w)\delta_{ml} \quad (3.82)$$

où  $d(p_g - p_w)$  est l'incrément de la succion.  $D_{km}^{suc} = \beta_{suc}[1, 1, 0]^T$  dans laquelle  $\beta_{suc}$  s'obtient à partir de la surface d'état de l'indice des vides «  $e$  ».

En substituant l'équation (3.82) dans (3.81), on obtient :

$$d(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_a) = D_{ijkl}d\varepsilon_{kl} - F_{ij}^{suc}d(p_a - p_w) \quad (3.83)$$

où  $F_{ij}^{suc} = D_{ijkl}(D_{lk}^{suc})^{-1}$ .

La matrice de rigidité élastique linéaire  $D_{ijkl}$  s'écrit :

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.84)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé qui dans un milieu non saturé dépendent des variables indépendantes  $(\sigma - p_a)$ ,  $(p_a - p_w)$  :

$$D_{ijkl}(\lambda, \mu) = D_{ijkl}(K_0, E_t) = D_{ijkl}(\sigma - p_a, p_a - p_w) \quad (3.85)$$

où  $E_t$  est le module tangent d'élasticité et  $K_0$  est le module de compressibilité volumique calculé à partir de la surface d'état de l'indice des vides «  $e$  ». Dans un cadre linéaire, le module tangent d'élasticité  $E_t$  est évalué comme :

$$E_t = E_l + E_{suc} \quad (3.86)$$

où  $E_l$  est le module d'élasticité en l'absence de la succion sous conditions isothermes. Il faut noter que la rigidité initiale augmente avec la succion.  $m_{suc}$  étant constant,  $E_{suc}$  présente l'effet de la succion sur le module d'élasticité :

$$E_{suc} = m_{suc}(p_a - p_w) \quad (3.87)$$

Par conséquent, en injectant (3.20) et (3.84) dans (3.83), la première loi constitutive s'obtient comme suit :

$$d(\sigma_{ij} - \delta_{ij} p_a) = (\lambda \delta_{ij} d\varepsilon_{kk} + 2\mu d\varepsilon_{ij}) - F_{ij}^{suc} d(p_a - p_w) \quad (3.88)$$

En intégrant l'équation ci-dessus, on aura :

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij} p_a) = (\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}) - F_{ij}^{suc} (p_a - p_w) \quad (3.89)$$

Dans ce qui précède, il a été mentionné que l'effet de la déformation sur la distribution de la succion dans le squelette solide et l'effet inverse doivent être pris en compte dans le modèle via des surfaces d'état en indice des vides et en degré de saturation, dépendantes de la succion.

Dans ce qui suit, on essaiera de retrouver les relations de «  $e$  » et de «  $S_r$  » afin de calculer les différents paramètres mécaniques dépendants de la succion présentés dans cette partie.

### 3.6.1 Surface d'état de l'indice des vides

Comme déjà mentionné, la surface d'état de l'indice des vides ( $e$ ) est une fonction des variables indépendantes  $(\sigma - p_a)$ ,  $(p_a - p_w)$  :

$$e = f(\sigma - p_a, p_a - p_w) \quad (3.90)$$

L'effet de la succion sur la déformation (3.88) s'exprime par  $\beta_{suc}$  :

$$\beta_{suc} = \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial(p_a - p_w)} \quad (3.91)$$

En considérant la définition du module de compressibilité volumique (variation relative de volume sous l'effet d'une pression appliquée), celui d'un sol non saturé s'écrit :

$$d\varepsilon^v = \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial(\sigma - p_a)} d(\sigma - p_a) = K_0^{-1} d(\sigma - p_a) \quad (3.92)$$

Afin d'assurer la compatibilité avec la loi linéaire, le module de compressibilité volumique doit être défini de sorte que les propriétés volumiques des sols non saturés soumis à des variations monotones croissantes du degré de saturation soient assurées. L'expression suivante du module de compressibilité volumique est simplifiée par rapport à celle proposée par Gatmiri [142] dans le cas non linéaire :

$$K_0 = \frac{K_0^L P_{atm}}{a_e - b_e \frac{(p_a - p_w)}{\sigma_e}} \quad (3.93)$$

où  $K_0^L$  est le module de compressibilité volumique en l'absence de la succion,  $a_e$  et  $b_e$  sont des constantes,  $\sigma_e$  est la pression de gonflement et  $P_{atm}$  est la pression atmosphérique. Pour une succion nulle  $(p_a - p_w) = 0$ , en choisissant  $a_e = 1$ , on obtient la forme générale de la loi linéaire :

$$K_0 = K_0^L P_{atm} \quad (3.94)$$

Ainsi, l'expression finale de  $e$  de ce modèle non isotherme s'écrit comme suit :

$$e = \frac{(1 + e_0)}{\exp\left(\frac{(\sigma - p_a) \left(a_e - \frac{b_e}{\sigma_e} (p_a - p_w)\right) + b_e (p_a - p_w)}{K_0^L P_{atm}}\right)} - 1 \quad (3.95)$$

On note que cette relation dérive des équations concernant le module d'élasticité et le module de compressibilité volumique du modèle linéaire. En considérant une succion et une contrainte nulles, on observe que  $e = e_0$  (indice des vides initial).

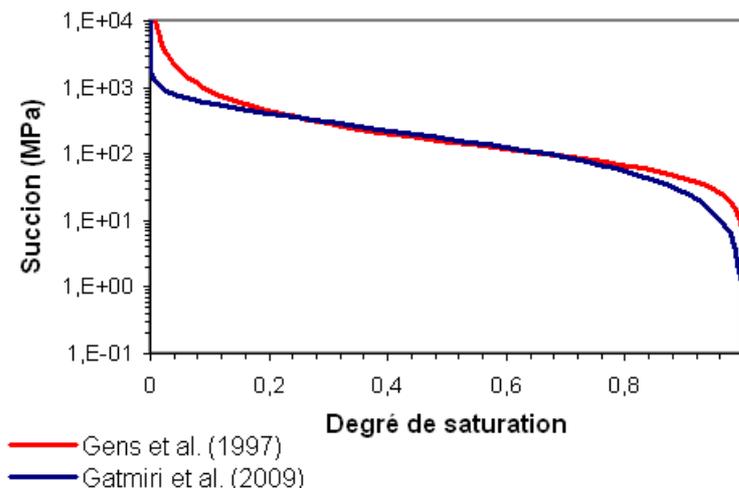
Ainsi,  $\beta_{suc}$  s'écrit :

$$\beta_{suc} = \frac{b_e}{K_0^L} \left(1 - \frac{\sigma - p_a}{\sigma_e}\right) \quad (3.96)$$

### 3.6.2 Surface d'état du degré de saturation

La deuxième loi constitutive (relation contrainte-suction-degré de saturation) a été généralement décrite en fonction de la succion et de la contrainte nette :

$$S_w = f(\sigma - p_a, p_a - p_w) \quad (3.97)$$



**Figure 3.3** — Comparaison entre la surface d'état en degré de saturation proposée par Gatmiri (1997) et Gens et al. (1997)

Cependant, une variation de la succion peut produire un changement plus important dans le degré de saturation ou de la teneur en eau que celui produit par un changement de contrainte normale nette [133]. Pour cette raison et pour simplifier les équations, le degré de saturation s'écrit en fonction de la succion.

De nombreuses relations ont été utilisées pour définir le degré de saturation des sols non saturés, mais la forme exponentielle basée sur des variations de succion est la plus commune et la plus fiable. Le degré de saturation s'écrit [143] :

$$S_w = 1 - (1 - \exp(a_s(p_a - p_w))) \quad (3.98)$$

dans laquelle  $a_s$  est une constante. En supposant une valeur négative de  $a_s$ , on peut remarquer que n'importe quelle augmentation dans la succion provoque une diminution dans  $S_w$  et n'importe quelle diminution dans la succion résulte que  $S_w$  approche l'unité, ce qui est le cas d'un sol saturé. Comme illustrée dans la Fig. (3.3), cette relation semble en bon accord avec l'expression de la surface d'état en degré de saturation proposée par Gens et al. [168]. Cette expression est basée sur les études expérimentales faites par Villar et Martin [330] et est obtenue en adoptant le modèle de Van Genuchten.

### 3.7 Résumé des équations

Brièvement, en négligeant les forces de volume des fluides, les équations de champ régissant le comportement des milieux poreux non-saturés dans des conditions de chargement dynamique sont écrites comme ci-dessous :

– *conservation de la quantité de mouvement* :

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_a)_{,j} + p_{a,i} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.99)$$

– *loi de comportement du squelette solide* :

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_a) = (\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}) - F_{ij}^{suc}(p_a - p_w) \quad (3.100)$$

– *conservation de la masse d'eau* :

$$\dot{w}_{i,i}^w = -S_w \dot{\varepsilon}_{ii} + C_{ww} \dot{p}_w + C_{wa} \dot{p}_a \quad (3.101)$$

– *équation d'écoulement de l'eau* :

$$-p_{w,i} = \rho_w \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\dot{\mathbf{w}}^w}{k_w} \quad (3.102)$$

– *conservation de la masse d'air* :

$$\dot{w}_{i,i}^a = -S_a \dot{\varepsilon}_{ii} + C_{wa} \dot{p}_w + C_{aa} \dot{p}_a \quad (3.103)$$

– *équation d'écoulement de l'air* :

$$-p_{a,i} = \rho_a \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\dot{\mathbf{w}}^a}{k_a} \quad (3.104)$$

En introduisant (6.2) dans (6.1), (6.4) dans (6.3) et (6.6) dans (6.5), on trouve le système final des équations de champs régissant le comportement dynamique des milieux poreux non-saturés :

$$(\lambda + \mu)u_{\beta,\alpha\beta} + \mu u_{\alpha,\beta\beta} + F^{suc} p_{w,\alpha} + (1 - F^{suc})p_{a,\alpha} - \rho \ddot{u}_\alpha + f_\alpha = 0 \quad (3.105)$$

$$-S_w \dot{u}_{\alpha,\alpha} + \rho_w k_w \ddot{u}_{\alpha,\alpha} + k_w p_{w,\alpha\alpha} + C_{ww} \dot{p}_w + C_{wa} \dot{p}_a = 0 \quad (3.106)$$

$$-S_a \dot{u}_{\alpha,\alpha} + \rho_a k_a \ddot{u}_{\alpha,\alpha} + k_a p_{a,\alpha\alpha} + C_{wa} \dot{p}_w + C_{aa} \dot{p}_a = 0 \quad (3.107)$$

### 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, le modèle de couplage hydro-mécanique dans les milieux poreux non saturés soumis aux chargements dynamiques a été obtenu. Ce modèle phénoménologique est présenté en se basant sur les observations expérimentales et la théorie de la poromécanique. Cela est obtenu dans le cadre du modèle mathématique présenté par Gatmiri [143] et Gatmiri et al. [150] en utilisant la succion comme une variable indépendante.

Les équations de la conservation de la masse pour tous les constituants et l'équation de la conservation de la quantité de mouvement ont été utilisées pour dériver les équations de champs. Dans ce modèle, l'effet de déformation sur la distribution de succion dans le squelette solide et l'effet inverse sont inclus via des surfaces d'état en indice des vides «  $e$  » et en degré de saturation «  $S_r$  ».

La loi de Darcy généralisée a été utilisée pour décrire l'écoulement de l'eau et de l'air dans le milieu poreux non-saturé.

Quant à la modélisation du comportement dynamique des sols non saturés, deux variables d'état indépendantes, la contrainte nette et la succion, ont été considérées. Aussi, on a utilisé la notion «  $\mathbf{u} - p_w - p_a$  » pour dériver les équations concernant le comportement dynamique des sols non saturés.

Le système final des équations de champs, fondé sur des hypothèses simplificatrices, peut être facilement implémenté dans les techniques numériques comme la méthode des élément de frontière ou la méthode des éléments finis pour l'analyse des problèmes dynamiques et sismiques.

## **Deuxième partie**

# **Méthode des Éléments de Frontière en Milieu Poreux**



# CHAPITRE 4

---

## Bibliographie

La complexité du système d'équations, gouvernant le comportement couplé entre le champ de déplacement et le champ scalaire de pression (ou de température) dans un milieu poreux (qu'il soit saturé ou pas), exclut la dérivation de solutions analytiques (sauf dans les cas les plus simples). Plus généralement, l'utilisation des méthodes numériques est incontournable.

La méthode numérique la plus populaire appliquée aux problèmes de l'ingénierie est la méthode des éléments finis (FEM). Cette méthode bien établie est documentée dans plusieurs monographies, voir [28, 356]. La FEM s'est avérée être souvent nécessaire, parfois indispensable, pour modéliser le comportement hétérogène, non-élastique et non-linéaire des domaines bornés ou à géométrie complexe. Alors, concernant sa vaste capacité en géomécanique, la méthode des éléments finis a été utilisée dans de nombreux codes de calcul. L'un des codes qui a été développé afin de modéliser les différents aspects des sols dans le cas sec, saturé ou non saturé sous chargement thermique et quasi-statique est le code  $\Theta$ -STOCK écrit par Gatmiri [143]. Ce code a été validé par plusieurs applications. Pour la brièveté du texte, l'étude bibliographique a été omise. Une étude bibliographique exhaustive a été donnée dans [146, 151, 156, 180].

Les formulations dynamiques des éléments finis pour les milieux poreux saturés ont été publiées par [114, 137, 138, 140, 355, 354]. Cependant, les phénomènes de propagation d'ondes en géotechnique sont souvent observés dans les milieux infinis ou semi-infinis, par exemple, le mouvement de tremblement de terre ou la propagation des excitations des machines de fondation dans un demi-espace. Dans un domaine semi-infini seulement la propagation des ondes vers l'extérieur apparaît et, puisque à l'infini il n'y a aucune interaction avec les frontières, aucune propagation vers l'intérieur n'est possible. En outre, on sait que leur amplitude diminue avec la distance du point d'excitation. Ces observations physiques sont mathématiquement formulées dans la *condition de rayonnement de Sommerfeld* [309]. Une méthode numérique appropriée pour calculer la propagation d'ondes dans les milieux infinis ou semi-infinis doit s'assurer que cette condition n'est pas violée [292].

Toutefois, pour modéliser ces problèmes par la méthode des éléments finis, on est contraint de faire appel à une troncature artificielle, qui provoque des réflexions des ondes sur les bords du maillage FE (réflexions parasites) pouvant compromettre gravement la précision du résultat. En régime transitoire, le maillage doit s'élargir suffisamment pour éviter ces ondes parasites, ce qui augmente considérablement la taille du modèle et rend le coût des calculs prohibitifs. En régime stationnaire, l'extension du maillage n'est même pas applicable ; la totalité du domaine

d'étude est affectée par des ondes parasites [262].

Pour résoudre ce problème, des techniques spéciales telles que les frontières absorbantes peuvent être appliquées [229, 338]. D'autres techniques, telle que la méthode nommée « *cellule EF infiniment cohérente* » ne peuvent pas être utilisées pour l'analyse dynamique non-linéaire en raison de leur inconvénient majeur d'être formulées dans les domaines transformés.

Après plusieurs décennies de développement, la méthode des éléments de frontière (BEM) possède une assise solide dans le domaine des méthodes numériques pour résoudre les équations aux dérivées partielles. L'idée de base de cette méthode consiste en la transformation des équations aux dérivées partielles en un ensemble d'équations intégrales de frontière et à obtenir des solutions fondamentales pour le système adjoint aux équations aux dérivées partielles correspondantes (*adjoint partial differential equations*). La solution fondamentale est la solution d'une équation aux dérivées partielles inhomogène avec une distribution de Dirac. Physiquement parlant, la réponse est celle d'un milieu infini soumis à une force ponctuelle, unitaire et impulsionnelle, exercée en un point dans le milieu. Ensuite, un système d'équations algébriques doit être constitué en faisant la discrétisation de la surface et en prenant l'intégration numérique sur chaque élément de la surface.

En comparaison avec les méthodes numériques les plus populaires, telles que la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des différences finies (FDM), qui peuvent être classifiées comme des *méthodes de domaines*, la BEM se distingue en tant qu'une *méthode de frontière*. Cela signifie que la discrétisation numérique est effectuée avec une dimension spatiale réduite. Par exemple, pour des problèmes en trois dimensions spatiales, la discrétisation est seulement effectuée sur la surface de la frontière ; tandis que pour des problèmes en deux dimensions spatiales, elle se fait seulement sur le contour de la frontière. Cette dimension réduite mène à de petits systèmes linéaires, à de moindres exigences de mémoire d'ordinateur, et à un calcul plus efficace. Cet effet est plus prononcé lorsque le domaine est non borné. Cette méthode est particulièrement performante, par rapport à la méthode des éléments finis, pour traiter des problèmes extérieurs (infinis ou semi-infinis) et des domaines variables ou inconnus (propagations de fissures). Son champ d'application est donc très étendu [262].

En utilisant les méthodes de domaines pour modéliser un milieu non borné, celui-ci doit être tronqué, tandis que la BEM modèle automatiquement le comportement à l'infini sans qu'il soit nécessaire de déployer un maillage. Autrement dit, la condition de rayonnement de Sommerfeld, en utilisant la méthode des éléments de frontière, sera implicitement satisfaite.

Les méthodes des éléments de frontière peuvent être globalement classées en trois catégories : méthodes directes, méthodes indirectes et méthodes variationnelles. Les méthodes *directes* semblent actuellement être les plus utilisées grâce à leur robustesse et à leur souplesse. Le principe de ces méthodes est d'abord d'établir une équation intégrale de frontière, en termes de déplacements et de contraintes, ensuite de discrétiser cette équation par la *méthode de points de collocation*. La recherche actuelle se concentre dans le traitement des problèmes numériques associés. Il s'agit de l'évaluation des intégrales fortement singulières ou hyper-singulières, la

stabilité des schémas temporels, le traitement des coins, l'effet de la troncature des domaines semi-infinis, la présence des fréquences propres fictives par la résolution en domaine fréquentiel, etc. Les méthodes *indirectes*, quant à elles, consistent à résoudre numériquement l'équation intégrale indirecte exprimée en termes des variables intermédiaires (densités des potentiels de simple couche ou double couche), d'où le nom 'indirect' ; les quantités physiques, déplacements et tractions, sont ensuite déduites de ces variables. La méthode de discontinuité des déplacements est aussi une méthode indirecte spéciale. Ces méthodes trouvent leur avantage dans les calculs de diffraction d'ondes (e.g. problèmes des effets de site) où elles peuvent donner une compréhension claire sur la naissance et la nature des ondes diffractées. Toutes les méthodes appartenant aux deux premières catégories sont caractérisées par leurs matrices résolvantes asymétriques et pleines, ce qui conduit à une augmentation significative du temps de calcul et de l'espace de stockage en mémoire de l'ordinateur. Les méthodes du troisième groupe, dans le but d'éviter ces inconvénients, discrétisent l'équation intégrale (directe ou indirecte) par une approche *variationnelle*. Le système d'équations est donc symétrique, mais ces méthodes font intervenir des intégrales doubles dans les équations intégrales discrétisées au lieu des intégrales simples dans les méthodes usuelles, ce qui nécessitent plus d'opérations pour les évaluer [262].

## 4.1 BEM pour l'élastodynamique

La première formulation intégrale de frontière pour l'élastodynamique a été publiée par Cruse et Rizzo [94, 95]. Cette formulation a été effectuée dans le domaine de Laplace avec une transformation inverse ultérieure au domaine temporel pour obtenir des résultats concernant le comportement transitoire. La formulation correspondante dans le domaine de Fourier, c.-à-d. le domaine fréquentiel, a été présentée par Domínguez [116, 117]. La première formulation éléments de frontière directement dans le domaine temporel a été développée par Mansur pour l'équation d'onde scalaire et pour l'élastodynamique en considérant les conditions initiales nulles [244, 245]. L'extension de cette formulation aux conditions initiales non-nulles a été présentée par Antes [9]. Une approche complètement différente pour traiter les problèmes dynamiques utilisant les solutions fondamentales statiques est une évolution de la méthode des éléments de frontière, dite DRBEM (*Dual Reciprocity Boundary Element Method*). Cette méthode a été présentée par Nardini et Brebbia [261] et les détails peuvent être trouvés dans la monographie de Partridge et al. [270]. Une synthèse bibliographique approfondie sur la méthode des éléments de frontière appliquée au problème élastodynamique et une liste détaillée des applications telles que, l'interaction sol-structure [20], l'analyse dynamique des fondations 3D [197] ou les problèmes de contact [11] peuvent être consultées dans les deux articles de Beskos : [32] (période avant 1986) et [33] (période 1986-1996).

Les méthodologies mentionnées ci-dessus pour traiter les problèmes élastodynamiques par la BEM montrent principalement deux approches : directement dans le domaine temporel ou via une transformation inverse du domaine de Laplace. La plupart du temps, ce dernier a été utilisé.

Puisque toutes les formules d'inversion numériques dépendent d'un choix approprié de leurs paramètres [80, 260], une évaluation directe dans le domaine temporel semble être préférable. En outre, il est plus normal de travailler dans le domaine en temps réel et d'observer les phénomènes à mesure qu'ils évoluent.

La méthode classique des éléments de frontière (BEM) dans le domaine temporel contient une *intégrale de convolution* entre les solutions fondamentales et les données de frontière qui doit être résolue sur la surface de la frontière [293]. Si la solution fondamentale est connue dans le domaine temporel, la convolution temporelle peut être effectuée analytiquement. Alors, la discrétisation en temps peut être traitée en utilisant des *fonctions ansatz* par rapport au temps. Ceci fournit une procédure d'avancement pas-à-pas dans le temps dans laquelle les données de frontière sont approximées par des fonctions de forme polynomiale dans les éléments de frontière. Cette technique a été proposée par Mansur [245] et est dénoté dans la suite comme la formulation classique de BE dans le domaine temporel.

Mais, comme toutes les procédures d'avancement pas-à-pas dans le temps (*time-stepping*), une telle formulation exige un choix correct de la taille du pas de temps. Un choix impropre de la taille du pas de temps mène à l'instabilité ou à l'amortissement numérique [292]. Quatre procédures pour améliorer la stabilité de la formulation dynamique classique peuvent être citées : la première emploie une méthode dite « *modified numerical time marching procedure* », par exemple, Antes et Jäger [10], Yu et al. [345] pour l'acoustique, Peirce et Siebrits [272] et Yu et al. [348] pour l'élastodynamique ; la deuxième emploie une solution fondamentale modifiée, par exemple, Rizos et Karabalis [285], Coda et Venturini [83] pour l'élastodynamique ; la troisième emploie une équation intégrale supplémentaire pour les vitesses [246] ; et la dernière utilise les méthodes pondérées, par exemple, Yu et al. [346] pour l'élastodynamique et Yu et al. [347] pour l'acoustique.

Cependant, aucune des formulations ci-dessus directement écrites dans le domaine temporel ne peut s'étendre aux cas dans lesquels aucune solution fondamentale de forme analytique (*closed-form fundamental solution*) n'existe (problème non linéaire, milieux poreux, etc.).

Dans le cas où les solutions fondamentales sont seulement connues dans le domaine fréquentiel et où il est impossible de les obtenir explicitement dans le temps sous une forme analytique, une approche nommée « *Méthode Quadrature de Convolution (MQC)* » développée par Lubich [222, 223] peut être utilisée pour évaluer les intégrales de convolution. Les formulations des éléments de frontière (BE) basées sur la MQC sont d'abord publiées par Schanz et Antes [293, 294] avec des applications en élastodynamique et en viscoélastodynamique.

Dans cette formulation, l'intégrale de convolution est numériquement approximée par une formule de quadrature dont les pondérations sont déterminées par la transformée de Laplace de la solution fondamentale et une méthode multipas linéaire.

En bref, il y a principalement deux raisons pour utiliser la méthode des éléments de frontière basée sur la MQC au lieu des procédures habituelles d'avancement pas-à-pas dans le temps [297]. Une des raisons est d'améliorer la stabilité du procédé d'avancement pas-à-pas dans le

temps. L'autre raison est d'attaquer aux problèmes dans lesquels aucune solution fondamentale dans le domaine temporel n'est disponible, par exemple, pour le comportement non-élastique des matériaux dans le cas de la viscoélastodynamique [290], en poroélastodynamique [291] ou pour les matériaux à gradient fonctionnel [350]. En outre, cette méthode est utilisée pour éviter les solutions fondamentales fortement compliquées dans le domaine temporel [12, 349].

## 4.2 BEM pour la poroélasticité

L'application de la méthode des éléments de frontière aux problèmes poroélastiques a été initialement limitée aux problèmes *quasi-statiques*. Une formulation BE pour les cas 2D a été développée par Cheng et Liggett pour les problèmes de consolidation [78] et pour les problèmes de fracture [77]. Plus tard, une formulation pour les cas 3D a été publiée par Badmus et al. [18]. Une synthèse bibliographique complète sur les différentes formulations d'équations intégrales disponibles pour les problèmes quasi-statiques peut être consultée dans [76]. Il faut mentionner que toutes ces formulations et également celles qui se présenteront dans la suite se basent sur la théorie de Biot.

Pour des problèmes *dynamiques*, les premières formulations BE ont été établies dans les domaines transformés (Laplace ou Fourier), car une expression explicite de la solution fondamentale en domaine temporel est mathématiquement difficile à trouver. La première formulation, exprimée en termes de déplacements du squelette solide et du fluide ( $u_i - U_i$ ), a été publiée dans le domaine de Laplace par Manolis et Beskos [242]. Cependant, on peut montrer que dans les domaines transformés, seulement 4 variables, 3 composantes de déplacement du squelette solide  $u_i$  et la pression du fluide  $p$ , sont indépendantes [49]. Basés sur ces 4 variables (3 variables en 2D), plusieurs formulations ont été publiées par Cheng et al. [74] et Domínguez [118] dans le domaine fréquentiel. Dans ces formulations, la réponse transitoire d'un milieu poroélastique a été déterminée avec une transformation inverse.

Comme discuté auparavant, il est préférable, aussi dans le cas de la poroélasticité, qu'on travaille dans le domaine temporel. Une telle formulation a été développée par Wiebe et Antes [339], en termes de  $(u_i - U_i)$ , mais avec la restriction de l'*amortissement faible* entre le squelette solide et le fluide. Ils ont utilisé des solutions fondamentales temporelles.

Une autre formulation en domaine temporel a été proposée par Chen et Dargush [73] en se basant sur la transformation inverse analytique des solutions fondamentales obtenues dans le domaine de Laplace. Mais, d'après Schanz [292], cette formulation est fortement exigeante en CPU. Gatmiri et Kamalian [157, 158] ont continué cette série du développement en proposant des solutions fondamentales pour la formulation  $u_i - p$  des équations porodynamiques 2D dans les domaines fréquentiel et temporel. Récemment, Nguyen et Gatmiri [264] ont développé une formulation BE dans le domaine temporel, en termes de  $(u_i - p)$ , en négligeant l'accélération du fluide interstitiel et en utilisant l'hypothèse simplificatrice de l'incompressibilité des consti-

tuants du milieu (les grains solides et le fluide). Utilisant la méthode des éléments de frontière basée sur la MQC, Schanz [291, 298] a proposé une procédure d'avancement pas-à-pas dans le temps, en termes de  $(u_i - p)$ . Celle-ci utilise les solutions fondamentales transformées du domaine de Laplace.

### 4.3 Solution fondamentale

Afin de modéliser un problème mécanique par la méthode des éléments de frontière, au cours de la formulation des équations intégrales, les solutions fondamentales pour les équations aux dérivées partielles gouvernant le comportement du milieu, doivent premièrement être obtenues. Autrement dit, tenter de résoudre numériquement les problèmes aux valeurs limites en utilisant la méthode des éléments de frontière mène à chercher des solutions fondamentales associées.

Les solutions fondamentales pour les équations aux dérivées partielles gouvernant le comportement des *sols saturés* ont été un sujet intéressant pendant les dernières décennies. Cleary [82] a obtenu des solutions fondamentales pour le problème *quasi-statique* suivant les travaux antérieurs de Nowacki [267]. Cheng et Liggett [77, 78] ont présenté une solution temporelle exacte pour un problème poroélastique quasi-statique.

La première tentative pour obtenir les solutions fondamentales pour la poroélasticité *dynamique* a été effectuée par Burridge et Vargas [64] pour la formulation  $(u_i - U_i)$ . Ils ont présenté une procédure de solution semblable à celle de Deresiewicz [112]. Comme inhomogénéité, ils ont choisi seulement une force ponctuelle dans le solide qui n'est pas suffisante pour l'utilisation d'une telle solution fondamentale dans une formulation BE. Plus tard, Norris [266] a dérivé la solution fondamentale harmonique dans le temps pour la même formulation en utilisant une force ponctuelle dans le solide ainsi qu'une force ponctuelle dans le fluide. Il a également obtenu des approximations asymptotiques explicites pour des déplacements en champ lointain, aussi bien que ceux pour des réponses à basse et à haute fréquence. Pour le même ensemble d'inconnues, mais dans le domaine de Laplace, Manolis et Beskos [242] ont publié des solutions fondamentales (voir également les modifications dans [243]). En plus de la dérivation de ces solutions, ils ont souligné l'analogie entre la poroélasticité et la thermoélasticité. Cependant, cette analogie n'est possible que pour la formulation  $(u_i - p)$ . Ceci a été également montré par Bonnet [49] quand il a présenté la solution fondamentale pour la formulation  $(u_i - p)$  dans le domaine fréquentiel. En plus des solutions 3D qu'il a converti des solutions *thermoélastiques* de Kupradze [207], il a présenté les solutions 2D. Ensuite, Kaynia et Banerjee [200] ont utilisé un schéma de solution semblable à celui de Norris [266] et ont dérivé la solution fondamentale dans le domaine transformé de Laplace aussi bien que la solution transitoire à court terme ( $t$  petit).

La solution de Burridge et Vargas [64] a été obtenue pour trois forces, tandis que dans celles de Norris [266] et Kaynia et Banerjee [200] six variables ont été utilisées (déplacements du squelette solide et déplacements moyens du fluide). En réalité, toutes les deux semblent être tout à

fait insuffisantes. La première approche n'a pas assez de variables, alors que la seconde en a trop. Bonnet [49] a conclu que la formulation  $(u_i - p)$  est suffisante tandis que la formulation  $(u_i - U_i)$  est surdéterminée.

Les solutions fondamentales bien connues pour la poroélasticité dynamique ont été présentées par Bonnet [49] et Boutin et al. [52].

Avec une exception dans tous les articles mentionnés ci-dessus, les solutions fondamentales sont présentées dans les domaines transformés. Une solution fondamentale dans le domaine temporel a été présentée par Weibe et Antes [339] pour la théorie de poroélasticité dynamique de Biot [41, 38, 39], en termes de  $(u_i - U_i)$ . Cependant, dans ces solutions le couplage visqueux entre le squelette solide et le fluide a été négligé.

Sans cette restriction et en termes de  $(u_i - p)$ , Chen a proposé dans deux articles des approximations pour les solutions fondamentales 2D et 3D dans le domaine temporel [70, 71]. Ces solutions sont atteintes à partir des solutions modifiées de Bonnet [49] dans le domaine de Laplace en faisant la transformation inverse. Ceci conduit en partie à une intégrale qui doit être calculée numériquement.

À ce sujet, Gatmiri et Kamalian [157, 158] ont modifié la solution 2D de Chen [70] par une approximation à long terme ( $t$  grand) et la formulation des intégrales de frontière pour mener à des résultats plus précis. Également, Gatmiri et Nguyen [162] ont dérivé les solutions fondamentales analytiques 2D, en termes de  $(u_i - p)$  et en tenant compte de l'hypothèse simplificatrice de l'incompressibilité des constituants du milieu. Ils ont montré que leur solution est une bonne approximation de la solution exacte, surtout à long terme.

Plus récemment, Schanz et Pryl [296] ont obtenu, dans le domaine transformé de Laplace, les solutions fondamentales dynamiques pour le squelette solide déformable du sol avec les deux hypothèses de la compressibilité et de l'incompressibilité du fluide. En comparaison les deux ensembles des solutions dérivées, ils ont conclu qu'un modèle incompressible peut seulement être utilisé dans les problèmes de propagation des ondes si on considère pas le comportement à court terme et aussi, si les rapports des modules de compression sont très faibles.

Pour les *sols non saturés*, Gatmiri et Jabbari [152, 153, 154, 155] ont dérivé les premières solutions fondamentales 2D et 3D dans les deux cas statique et quasi-statique en prenant des hypothèses simplificatrices. Aussi, Jabbari et Gatmiri [186] ont obtenu les solutions fondamentales 2D et 3D pour les équations gouvernant le comportement thermo-hydro-mécanique des sols non saturés sous chargement statique.

Les solutions fondamentales citées ci-dessus sont principalement dérivées par deux méthodes : d'abord, il y a la possibilité de fractionner les opérateurs en introduisant trois potentiels ou, d'autre part, de réduire la matrice des opérateurs différentiels, qui est fortement compliquée, à un opérateur scalaire simple en utilisant la méthode de Hörmander [182].

Cette partie vise à développer la méthode des éléments de frontière (BEM) pour les milieux poreux, qu'ils soient saturés ou non saturés.

À l'heure actuelle, l'application de la BEM aux problèmes des milieux poreux non saturés

est encore limitée, car l'expression analytique exacte de la solution fondamentale n'a pas été publiée, ni dans le domaine fréquentiel ni dans le domaine temporel. Ceci provient de la complexité du système d'équations régissant le comportement des milieux poreux non saturés. Les solutions fondamentales obtenues par Gatmiri et Jabbari [152, 153, 154, 155] sont basées sur les hypothèses simplificatrices. Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons à obtenir les solutions fondamentales pour les milieux poreux non saturés en considérant des hypothèses plus réalistes.

Tandis que la succion dans les sols non saturés provoque des comportements physiques non linéaires, ceci nécessite un développement de la méthode des éléments de frontière (BEM) dans le domaine temporel. Comme l'obtention des solutions fondamentales dans le domaine temporel paraît difficile, on développe les formulations de la BEM en se basant sur la *méthode quadrature de convolution* (MQC). On évalue les intégrales de convolution en utilisant les solutions fondamentales dans le domaine de Laplace.

De plus, les formulations de la BEM développées par Nguyen et Gatmiri [262, 264] dans le domaine temporel pour la poroélastodynamique, sauf pour les cas simples, provoquent des instabilités numériques. Cela est dû au fait que les solutions fondamentales obtenues sont compliquées, ce qui rend les algorithmes très sensibles aux erreurs. Ceci nous encourage à utiliser la méthode des éléments de frontière basée sur la MQC.

Le chapitre 5 aborde les équations intégrales de frontière ainsi que les solutions fondamentales pour les sols saturés sous chargements quasi-statique et dynamique. Les expressions explicites des solutions fondamentales dans le domaine de Laplace concernant les deux problèmes quasi-statique et dynamique sont développées respectivement par Cheng et Detournay [75] et Schanz et Struckmeier [298].

Dans le chapitre 6, pour la première fois, on a établi les équations intégrales de frontière et les solutions fondamentales associées pour un milieu poreux non saturé sous chargement quasi-statique pour les deux cas isotherme (dans le domaine de Laplace) et non-isotherme (dans le domaine de Laplace et temporel) [161, 231, 232, 235, 237, 239]. Aussi, la deuxième section de ce chapitre contient les équations intégrales de frontière ainsi que les solutions fondamentales (dans le domaine de Laplace) pour le modèle dynamique couplé des sols non saturés, décrit au chapitre 3, en termes de déplacement et de pressions interstitielles de l'eau et de l'air ( $u_i - p_w - p_a$ ).

Les équations intégrales de frontière ont été obtenues via l'utilisation de la méthode des résidus pondérés d'une manière qui permet une discrétisation et une mise en œuvre facile dans un code d'éléments de frontière.

Le dernier chapitre de cette partie (chapitre 7) est consacré à décrire la technique de la régularisation des équations intégrales singulières, dite la technique de « *translation du corps rigide* », ainsi qu'à expliquer la discrétisation des équations intégrales dans l'espace et dans le temps par la méthode de convolution quadrature (MQC). Aussi, la mise en œuvre des équations algébriques obtenues sera présentée dans ce chapitre.

# Équations intégrales de frontière et solutions fondamentales pour les sols saturés

## 5.1 Théorie des milieux poreux saturés

UNE étude bibliographique sur le sujet de la mécanique des milieux poreux saturés identifie deux théories de la poromécanique, à savoir la *théorie de Biot* [41, 36, 39] et la *théorie des milieux poreux fondée sur la théorie des mélanges* [103, 104, 105].

En se basant sur le travail de *von Terzaghi*, une description théorique pour des problèmes quasi-statiques des matériaux isotropes élastiques linéaires infiltrés de fluide visqueux a été présentée par Biot [36]. L'extension de cette théorie aux problèmes dynamiques a été réalisée par Biot dans deux articles, l'un pour la gamme des basses fréquences [39] et l'autre pour la gamme des hautes fréquences [41]. Parmi les résultats importants de la théorie de Biot se situe l'identification de trois types d'ondes de volume : l'onde de compression de première espèce ( $P_1$ ), l'onde de compression de seconde espèce ( $P_2$ ) et l'onde de cisaillement  $S$ . L'existence de la seconde onde de compression ( $P_2$ ), connue sous le nom d'onde lente, a été expérimentalement confirmée [276]. L'onde de compression de première espèce correspond au mouvement des particules du squelette et des particules de la phase liquide dans la même direction (*in-phase*), tandis que l'onde de compression de seconde espèce correspond au mouvement de ces particules à contre-sens (Fig. 5.1). Dans les travaux initiaux de Biot, le squelette est supposé élastique linéaire et subit de petites déformations (hypothèse de petites perturbations). L'extension de sa théorie pour prendre en compte des transformations finies et le comportement inélastique non-linéaire du squelette a été menée par Zienkiewicz et Bettles [357], Zienkiewicz et al. [359], Prévost [279] et d'autres. Cette extension a acquis une importance considérable ces dernières années, due au souci accru avec le phénomène de liquéfaction des dépôts de sable saturé sous chargement sis-

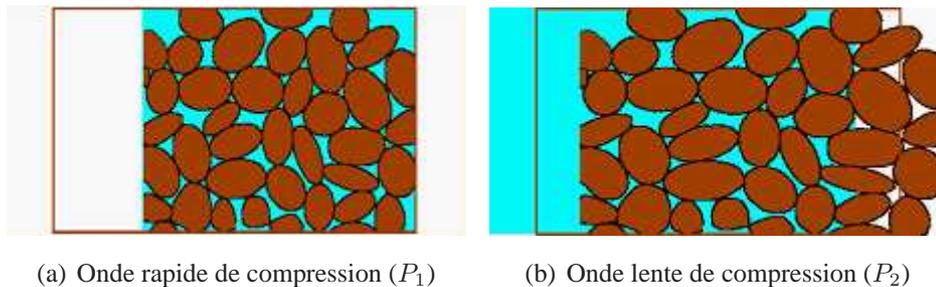


Figure 5.1 — Ondes de compression <sup>1</sup>

mique [262].

En se basant sur le travail de *Fillunger*, la théorie des milieux poreux a été développée. Cette théorie est basée sur les axiomes des théories des mélanges [54, 325] et est étendue en utilisant le concept de fractions de volume par Bowen [56, 55] et Ehlers [122].

Les remarques sur l'équivalence des deux théories, qui modélisent le même phénomène physique, se trouvent dans les travaux de Bowen [56], Ehlers et Kubik [123], et Schanz et Diebels [295]. Dans toutes ces publications, les versions linéaires de ces deux théories sont comparées. Récapitulant les résultats, il est constaté que pour les constituants incompressibles les deux théories sont identiques si la densité de masse apparente de la théorie de Biot  $\rho_a$  est mise à zéro [298]. En outre, dans le cas des constituants compressibles, l'opérateur mathématique est identique mais il y a une différence au niveau des coefficients constants, c.-à-d. les constantes physiques utilisées sont différentes.

Cependant, pour plusieurs variables et constantes matérielles résultant de la théorie des milieux poreux, il est très difficile de trouver la signification physique correspondante. Ainsi, l'utilisation de cette théorie par l'ingénieur est très restreinte. En pratique, la théorie de Biot est la plus connue et admise par les ingénieurs ainsi que les scientifiques, surtout dans les domaines de géomécanique et géophysique. Dans cette étude, la théorie de Biot est utilisée mais pour le cas dynamique les résultats peuvent être simplement transférés à la théorie des milieux poreux. Parce que dans la suite, la densité de masse apparente sera négligée et l'équivalence de l'opérateur mathématique dans le cas des constituants compressibles assure d'avoir les mêmes solutions fondamentales cependant avec des constantes matérielles différentes.

### Choix des variables d'état

Dans les deux théories de la poromécanique mentionnées ci-dessus, la question se pose de savoir quelles variables d'état doivent être utilisées pour l'écriture des équations régissant le comportement des milieux poreux saturés.

Dans le cas le plus général, le vecteur de déplacement du squelette solide  $u_i$ , le vecteur de vitesse de filtration  $w_i$ , et la pression interstitielle  $p$  sont utilisés pour établir les équations.

<sup>1</sup>Cours de « Linear Poroelastic Theories and a Poroelastic Boundary Element Formulation », M. Schanz, Mars 2002, Institute of Applied Mechanics, TU Braunschweig

Clairement, la vitesse de filtration peut être remplacée soit par le vecteur de déplacement relatif fluide/squelette soit par le vecteur de déplacement absolu du fluide. Mais, ceci ne change pas la quantité de degrés de liberté (ddl). Au total, il y a sept ddl dans une formulation tridimensionnelle (3D) et cinq ddl dans une formulation bi-dimensionnelle (2D).

D'un point de vue physique ainsi que d'un point de vue numérique, une réduction des degrés de liberté est préférable. Normalement, le fluide et le solide sont décrits respectivement par une valeur scalaire comme la pression  $p$  et par une quantité vectorielle comme le vecteur de déplacement  $u_i$ . Ceci mène à un nombre suffisant de variables d'état [49]. Cependant, ceci exige l'élimination de la vitesse de filtration. Parce que la vitesse de filtration est donnée dans une équation aux dérivées partielles par rapport au temps obtenue en utilisant la loi d'écoulement du fluide (loi de Darcy), son élimination n'est possible que dans un domaine transformé, par exemple, le domaine de Laplace ou de Fourier [39]. Dans un modèle quasi-statique appliqué aux problèmes de la consolidation, les effets d'inertie sont négligés, et par conséquent, cette élimination est même possible dans le domaine temporel. Cependant, pour les problèmes dynamiques une telle simplification n'est pas possible.

Pour éviter ces difficultés dans la modélisation numérique de la propagation d'ondes dans les milieux poroélastiques par la méthode des éléments finis (FEM), un modèle simplifié est introduit par Zienkiewicz et al. [352]. Ceci est effectué pour être en mesure de formuler et de résoudre le système des équations de champs directement dans le domaine temporel. Cette simplification est basée sur l'omission de l'accélération du fluide par rapport au squelette solide. Zienkiewicz et Bettess [357] ont montré théoriquement que cette hypothèse est valable pour des chargements de basse fréquence (par exemple, des sollicitations sismiques) ou des phénomènes de vitesse moyenne.

Dans ce chapitre, les équations régissant le comportement dynamique des milieux poreux saturés seront obtenues en prenant en compte cette hypothèse simplificatrice et en termes de ces variables ( $u_i - p$ ).

## 5.2 Problèmes dynamiques

### 5.2.1 Théorie de Biot : Système d'équations

Selon l'approche de Biot pour modéliser le comportement des milieux poreux, un squelette élastique avec une distribution statistique des pores interconnectés est considéré. Cette porosité est désignée par :

$$n = V^f/V \quad (5.1)$$

où  $V^f$  est le volume des pores interconnectés contenus dans un échantillon de sol. Au contraire à cet espace, les pores occlus déconnectés seront considérés comme faisant partie du solide.

Lorsque la saturation complète est supposée, on a

$$V = V^f + V^s \quad (5.2)$$

$V^s$  étant le volume du solide.

**Équations constitutives :** Si les équations constitutives sont formulées pour le solide élastique et le fluide interstitiel visqueux désignés respectivement par  $s$  et  $f$ , les formulations suivantes pour les contraintes partielles  $\sigma_{ij}^s, \sigma^f$  s'obtiennent :

$$\sigma_{ij}^s = 2G\varepsilon_{ij}^s + \left( K - \frac{2}{3}G + \frac{Q^2}{R} \right) \varepsilon_{kk}^s \delta_{ij} + Q\varepsilon_{kk}^f \delta_{ij} \quad (5.3)$$

$$\sigma^f = -n p = Q\varepsilon_{kk}^s + R\varepsilon_{kk}^f \quad (5.4)$$

$\varepsilon_{ij}^s$  et  $\varepsilon_{kk}^f$  étant respectivement la déformation du solide et la déformation volumique du fluide. Le squelette élastique est supposé être isotrope et homogène. Son comportement élastique est régi par deux constantes matérielles : le module de compression  $K$  et le module de cisaillement  $G$ . Le couplage entre le solide et le fluide est caractérisé par deux paramètres supplémentaires  $Q$  et  $R$ . Dans ces équations, les conventions de signe pour la contrainte et la déformation suivent celle de l'élasticité, à savoir, la contrainte et la déformation sont positives en traction. Par conséquent, dans l'équation (5.4) la pression interstitielle  $p$  est la contrainte hydrostatique négative dans le fluide  $\sigma^f$ .

Une représentation alternative des équations constitutives (5.3, 5.4) est utilisée dans les travaux antérieurs de Biot [36]. Il a proposé la contrainte totale de cette façon :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^f \delta_{ij}$ . En outre, en introduisant le coefficient de la contrainte effective de Biot  $\alpha = n(1 + Q/R)$ , l'équation constitutive en termes de la déformation du solide  $\varepsilon_{ij}^s$  et la pression interstitielle  $p$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \left( \left( K - \frac{2}{3}G \right) u_{k,k} - \alpha p \right) \delta_{ij} \quad (5.5)$$

Dans cette équation, la déformation du solide est remplacée par la relation linéaire déformation/déplacement  $\varepsilon_{ij}^s = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$  dans laquelle  $u_i$  est le déplacement du squelette solide. En plus de la contrainte totale  $\sigma_{ij}$ , la variation du volume du fluide  $\zeta$  par unité de volume de référence est présenté comme une *second equation constitutive* :

$$\zeta = \alpha u_{i,i} + \frac{n^2}{R} p \quad (5.6)$$

Dans un sol saturé, non seulement chaque constituant (les grains solides et le fluide) peut être compressible à un niveau microscopique, mais aussi le système squelette/fluide lui-même possède une compressibilité structurelle. Si le module de compressibilité d'un constituant est beaucoup plus grand (au niveau microscopique) que celui du système squelette/fluide, ce constituant

est supposé être matériellement incompressible. Un exemple courant d'un constituant incompressible est les grains solides du sol. Dans ce cas, les grains sont beaucoup plus rigides que le squelette. Les conditions de telles incompressibilités pour les constituants du sol saturé sont respectivement [113] :

$$\frac{K}{K_s} \ll 1 \quad : \text{solide incompressible}; \quad \frac{K}{K_f} \ll 1 \quad : \text{fluide incompressible} \quad (5.7)$$

où  $K_s$ ,  $K_f$  et  $K$  indiquent les modules de compressibilité du grain solide, du fluide et du système squelette/fluide.

Dans la plupart des sols  $K \ll K_s$ . Cela signifie que la déformation volumique moyenne des grains solides est très petite par rapport à la variation de la porosité.

La considération des relations constitutives au niveau micromécanique, comme montré par Detournay et Cheng [113], mène à une définition raisonnable des paramètres matériaux  $\alpha$ ,  $R$  et  $Q$  comme suit :

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K_s} \quad (5.8)$$

$$R = \frac{n^2 K_f K_s^2}{K_f (K_s - K) + n K_s (K_s - K_f)} \quad (5.9)$$

$$Q = \frac{n(\alpha - n) K_f K_s^2}{K_f (K_s - K) + n K_s (K_s - K_f)} \quad (5.10)$$

Pour des roches,  $\alpha$  prend des valeurs de 0.5 à 0.8, tandis que dans la plupart des sols  $\alpha$  est proche 1.

**Conservation de la masse du fluide (équation de continuité) :** Cette équation exprime l'équilibre dynamique entre le volume du fluide sortant et celui du fluide entrant dans un volume élémentaire représentatif :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + q_{i,i} = \gamma \quad (5.11)$$

où  $\gamma(t)$  est le taux de volume injecté par unité de volume de référence dû à une source de fluide et  $q_i$  désigne le flux de fluide :

$$q_i = n w_i = n \left( \dot{u}_i^f - \dot{u}_i \right) \quad (5.12)$$

où  $w_i$  est la vitesse de filtration (ou *vitesse de Darcy*) et  $u_i^f$  est le déplacement absolu du fluide. L'intégration de l'équation (5.11) par rapport au temps identifie  $\zeta$  comme une sorte de déformation volumique décrivant le mouvement du fluide par rapport au solide comme discuté dans [113].

**Équation d'équilibre :** Cette équation exprime l'équilibre global des forces agissant sur un volume élémentaire représentatif, à savoir le gradient de la contrainte totale, la densité de force externe volumique  $F_i$  et les forces d'inertie :

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + n \rho_f \frac{\partial w_i}{\partial t} \quad (5.13)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du système squelette/solide  $\rho = (1 - n)\rho_s + n\rho_f$  dans laquelle  $\rho_s$  et  $\rho_f$  sont respectivement les masses volumiques des grains solides et du fluide.

**Équation d'écoulement du fluide :** Le transport de fluide dans l'espace interstitiel en termes de flux  $q_i$  est modélisé en utilisant la loi de Darcy généralisée :

$$n w_i = q_i = -\kappa \left( p_{,i} + \rho_f \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\rho_a + n \rho_f}{n} \frac{\partial w_i}{\partial t} \right) \quad (5.14)$$

dans laquelle  $\kappa$  représente le coefficient de perméabilité.

Dans cette équation, un nouveau paramètre nommé la masse volumique apparente  $\rho_a$  a été introduit par Biot [39].  $\rho_a$  décrit l'interaction dynamique entre la phase de fluide et le squelette solide. Dans ce qui suit, on néglige ce paramètre-ci.

**Récapitulatif des formulations :** Les cinq équations (5.5, 5.6, 5.11, 5.13, 5.14) représentent la théorie linéaire de Biot pour un milieu poroélastique. Pour éliminer dans ces équations la vitesse de filtration  $w_i$ , la loi de Darcy doit être remaniée pour trouver une expression pour la vitesse de filtration. Évidemment, en raison des différentes dérivées de  $w_i$  par rapport au temps, ce n'est pas possible dans le domaine temporel. Cependant, si les effets d'inertie du fluide sont négligés, c.-à-d.  $\partial w_i / \partial t$  se met à zéro dans (5.13) et (5.14), l'élimination de la vitesse de filtration est possible. Par conséquent en tenant compte cette hypothèse simplificatrice, l'équation d'équilibre dynamique et l'équation d'écoulement du fluide (la loi de Darcy) s'écrivent respectivement :

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (5.15)$$

$$n w_i = q_i = -\kappa \left( p_{,i} + \rho_f \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \quad (5.16)$$

Maintenant, la loi de Darcy (5.16) peut être utilisée pour remplacer la vitesse de filtration dans les équations ci-dessus (5.6, 5.11). En substituant (5.5) dans (5.15) ; (5.6) et (5.16) dans (5.11), on trouve l'ensemble des équations aux dérivées partielles régissant le comportement dynamique des milieux poreux saturés en termes de déplacement du squelette solide  $u_i$  et la pression interstitielle  $p$  :

$$G u_{i,jj} + \left( K + \frac{1}{3} G \right) u_{j,ij} - \alpha p_{,i} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = -F_i \quad (5.17)$$

$$\kappa p_{,ii} - \frac{n^2}{R} \frac{\partial p}{\partial t} - \alpha \frac{\partial u_{i,i}}{\partial t} + \kappa \rho_f \frac{\partial^2 u_{i,i}}{\partial t^2} = -\gamma \quad (5.18)$$

Cette simplification et, par suite, la possibilité de représenter les équations de champs en termes de ce nombre réduit des variables d'état a été initialement publiée par Zienkiewicz et al. [352]. Zienkiewicz et Bettess [357] ont montré théoriquement que cette hypothèse est valable pour des chargements de basse fréquence (par exemple, des sollicitations sismiques) ou des phénomènes de vitesse moyenne.

Dans la suite, les solutions fondamentales pour les équations simplifiées de Biot sont dérivées dans le domaine de Laplace. Ces solutions seront plus tard utilisées dans une formulation de BE basée sur la méthode de la convolution quadrature. Pour ce faire, d'abord, les équations de champs (5.17, 5.18) sont transformées dans le domaine de Laplace.

La transformée de Laplace d'une fonction  $f(t)$  d'une variable réelle positive  $t$  est la fonction  $\tilde{f}(s)$  de la variable complexe  $s$ , définie par :

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (5.19)$$

En supposant des conditions initiales nulles, le système d'équations (5.17, 5.18) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \tilde{u}_j \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{F}_i \\ \tilde{\gamma} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (G \nabla^2 - \rho s^2) \delta_{ij} + \left( K + \frac{1}{3} G \right) \partial_i \partial_j & -\alpha \partial_i \\ -s (\alpha - s \kappa \rho_f) \partial_j & \kappa \nabla^2 - \frac{n^2 s}{R} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Dans l'équation (5.21),  $\partial_i$  désigne la dérivée partielle par rapport à  $x_i$  et  $\nabla^2 = \partial_i \partial_i$  est l'opérateur laplacien. Les éléments sur la diagonale secondaire indiquent que cet opérateur est *non auto-adjoint*. Ceci est causé par la dérivée partielle du premier ordre représentée par le facteur multiplicatif  $s$ . Physiquement, il représente la dissipation due au frottement entre le squelette solide et le fluide interstitiel conduisant à une perte d'énergie.

## 5.2.2 Solutions fondamentales

L'interprétation physique de la solution fondamentale ou du noyau d'une équation différentielle est une fonction de potentiel  $\Pi(x, \xi)$  ou, d'autre part, la réponse du milieu au point  $x$  à une excitation ponctuelle  $e(\xi)$  au point  $\xi$  dans un domaine infini qui peut être une distribution de Dirac dans l'espace  $\delta(\xi)$  et une distribution de Dirac ou une fonction d'étape de Heaviside dans le temps, désignées respectivement par  $\delta(t)$  et  $H(t)$ . Mathématiquement parlant, la solution fondamentale est une solution de l'équation  $\mathbf{B}\mathbf{G} + \mathbf{I}\delta(x - \xi)\delta(t - \tau) = \mathbf{0}$  où la matrice des

solutions fondamentales est dénotée par  $\mathbf{G}$ , la matrice identité par  $\mathbf{I}$  et la matrice d'opérateur différentiel par  $\mathbf{B}$ .

Pour obtenir les solutions fondamentales pour la poroélasticité, en principe, deux possibilités existent : I) l'utilisation de l'analogie entre la thermoélasticité et la poroélasticité dans les domaines de Laplace ou de Fourier pour convertir les solutions thermoélastiques à celles poroélastiques [118], ou II) la méthode d'Hörmander [182]. Dans ce travail, cette dernière sera utilisée.

### 5.2.2.1 Idée centrale dans la méthode de Hörmander

La méthode de Hörmander peut être appliquée à n'importe quel ensemble d'EDP (équations aux dérivées partielles) elliptique avec des coefficients constants. De tels systèmes peuvent être écrits comme :

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (5.22)$$

avec la matrice d'opérateur différentiel  $\mathbf{B}$  et le vecteur des inconnues  $\mathbf{u}$ . Une matrice d'opérateur différentiel est une matrice dont les éléments sont des opérateurs différentiels. La multiplication d'une telle matrice avec un vecteur ou une matrice signifie que les éléments, les opérateurs différentiels, sont appliqués sur les éléments du vecteur ou de la matrice suivant les règles de la multiplication d'une matrice normale avec un vecteur ou une matrice, par exemple

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \partial_x & \partial_y & 0 \\ \partial_t & 6 & \partial_y \\ 0 & \partial_x & 3\partial_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ w(x, y, t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} + 6v(x, y, t) + \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} + 3\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \end{matrix} \quad (5.23)$$

Les règles connues du calcul matriciel peuvent être transformées de façon similaire à une matrice d'opérateur différentiel. Dans la suite, la matrice des cofacteurs  $\mathbf{B}^{co}$  est utilisée pour calculer l'inverse de la matrice de  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}^{-1} = \frac{\mathbf{B}^{co}}{\det(\mathbf{B})} \quad (5.24)$$

$\mathbf{B}^{co}$  dénote parfois la matrice adjointe et leurs éléments sont calculés de la façon suivante : l'élément  $B_{ij}^{co}$  est le déterminant de la sous-matrice déduite de  $\mathbf{B}$  en ayant enlevé la ligne  $j$  et la colonne  $i$ , affecté du signe  $(-1)^{i+j}$ . Dans l'exemple ci-dessus, les éléments  $B_{11}^{co}$  et  $B_{12}^{co}$  sont présentés par exemple pour voir les détails de cette opération :

$$B_{11}^{co} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 6 & \partial_y \\ \partial_x & 3\partial_y \end{vmatrix} = 18\partial_y - \partial_x\partial_y \quad (5.25a)$$

$$B_{12}^{co} = (-1)^3 \begin{vmatrix} \partial_y & 0 \\ \partial_x & 3\partial_y \end{vmatrix} = -3\partial_y^2 \quad (5.25b)$$

et la forme complète de la matrice des cofacteurs :

$$\mathbf{B}^{co} = \begin{bmatrix} 18\partial_y - \partial_x\partial_y & -3\partial_y^2 & \partial_y^2 \\ -3\partial_t\partial_y & 3\partial_x\partial_y & -\partial_x\partial_y \\ \partial_t\partial_x & -\partial_x^2 & 6\partial_x - \partial_t\partial_y \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

On note que cette matrice est différente de l'opérateur adjoint.

Pour trouver la solution fondamentale  $\mathbf{G}$ , l'équation (5.22) doit être résolue avec une distribution de Dirac avec une homogénéité pour tous les degrés de liberté. Autrement dit, l'équation

$$\mathbf{B}\mathbf{G} + \mathbf{I}\delta(x - \xi) = \mathbf{0} \quad (5.27)$$

doit être satisfaite.

Pour la deuxième étape, nous supposons que  $\varphi$  est une solution scalaire à l'équation

$$\det(\mathbf{B})\mathbf{I}\varphi + \mathbf{I}\delta(x - \xi) = \mathbf{0} \quad \leftrightarrow \quad \det(\mathbf{B})\varphi + \delta(x - \xi) = 0 \quad (5.28)$$

En introduisant (5.24) dans (5.28), on aura :

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^{co}\varphi + \mathbf{I}\delta(x - \xi) = \mathbf{0} \quad (5.29)$$

Par conséquent, on obtient :

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}^{co}\varphi \quad (5.30)$$

Comme montré ci-dessus, la procédure d'obtention des solutions fondamentales est réduite à trouver la fonction scalaire  $\varphi$ . Après la détermination de  $\varphi$ , par rétro-substitution dans l'équation (5.30), la matrice de la solution fondamentale sera déterminée [292].

### 5.2.2.2 Solutions fondamentales pour la poroélastodynamique

Maintenant, après l'explication de l'idée centrale de la méthode de Hörmander, les solutions fondamentales pour la poroélastodynamique sont déduites.

Les solutions fondamentales dans le domaine de Laplace pour le système des équations (5.17)-(5.18) sont des solutions dues aux forces ponctuelles unitaires dans le solide (dans les deux directions spatiales),  $\tilde{F}_{ij} = \tilde{F}_i \mathbf{e}_j = \delta(x - \xi)\delta_{ij}$ , représentées par  $\tilde{U}_{ij}^s$  et  $\tilde{P}_j^s$  aussi due à une source d'injection du fluide  $\tilde{\gamma} = \delta(x - \xi)$  représentées par  $\tilde{U}_i^f$  et  $\tilde{P}^f$ . Autrement dit, les déplacements du squelette solide dans la direction  $i$  engendrés respectivement par une force ponctuelle unitaire dans le solide dans la direction  $j$  et une source d'injection du fluide sont désignés respectivement par  $\tilde{U}_{ij}^s$  et  $\tilde{U}_i^f$ . Également, les pressions interstitielles engendrées respectivement par une force ponctuelle unitaire dans le solide dans la direction  $j$  et une source d'injection du fluide sont désignées respectivement par  $\tilde{P}_j^s$  et  $\tilde{P}^f$ .

Comme montré auparavant, dans un problème poroélastique 2D on a 3 ddl ( $u_1$ ,  $u_2$  et  $p$ ). Par conséquent, la dimension de la matrice de la solution fondamentale est  $3 \times 3$  :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{ij}^s & \tilde{U}_i^f \\ \tilde{P}_j^s & \tilde{P}^f \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

À partir de la théorie mathématique de la formule de Green, il est bien connu que les solutions fondamentales doivent satisfaire l'opérateur adjoint [311]. Au contraire de l'élasticité, l'opérateur gouvernant la poroélasticité n'est pas auto-adjoint (5.21). Par conséquent, ici, la solution pour l'opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$  :

$$\mathbf{B}^* \mathbf{G} + \mathbf{I} \delta(x - \xi) = \mathbf{0} \quad (5.32)$$

est obtenue avec

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} (G \nabla^2 - \rho s^2) \delta_{ij} + (K + \frac{1}{3}G) \partial_i \partial_j & s(\alpha - s\kappa\rho_f) \partial_i \\ \alpha \partial_j & \kappa \nabla^2 - \frac{n^2 s}{R} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Selon le paragraphe précédent, il est évident que la fonction scalaire  $\varphi$  doit être tout d'abord déterminée. Pour cela, le déterminant de la matrice de l'opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$  est calculé :

$$\det(\mathbf{B}^*) = \kappa G \left( K + \frac{4}{3}G \right) (\nabla^2 - \lambda_3^2) (\nabla^2 - \lambda_1^2) (\nabla^2 - \lambda_2^2) \quad (5.34)$$

Ce déterminant a évidemment trois racines  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  :

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{n^2 s}{\kappa R} + \frac{\alpha s(\alpha - s\rho_f \kappa)}{(K + \frac{4}{3}G) \kappa} + \frac{\rho s^2}{(K + \frac{4}{3}G)} \right] \pm \sqrt{\left( \frac{n^2 s}{\kappa R} + \frac{\alpha s(\alpha - s\rho_f \kappa)}{(K + \frac{4}{3}G) \kappa} + \frac{\rho s^2}{(K + \frac{4}{3}G)} \right)^2 - 4 \frac{s^2 \rho n^2 s}{R (K + \frac{4}{3}G) \kappa}} \quad (5.35)$$

$$\lambda_3^2 = \frac{\rho s^2}{G} \quad (5.36)$$

Ces trois racines correspondent aux trois ondes attendues, les ondes de compression rapide ( $P_1$ ) et lente ( $P_2$ ) associées respectivement aux  $\lambda_{1,2}$  et l'onde de cisaillement ( $S$ ) à  $\lambda_3$ .

En remplaçant le déterminant de la matrice de l'opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$  (5.34), l'équation scalaire correspondant à (5.28) s'obtient comme suit :

$$(\nabla^2 - \lambda_3^2) (\nabla^2 - \lambda_1^2) (\nabla^2 - \lambda_2^2) \Phi + \delta(x - \xi) = 0 \quad (5.37)$$

avec l'abréviation

$$\Phi = \kappa G \left( K + \frac{4}{3}G \right) \varphi \quad (5.38)$$

Pour résoudre cette équation, on suppose que :

$$\varphi_1 = (\nabla^2 - \lambda_3^2) (\nabla^2 - \lambda_2^2) \Phi \quad (5.39)$$

$$\varphi_2 = (\nabla^2 - \lambda_3^2) (\nabla^2 - \lambda_1^2) \Phi \quad (5.40)$$

$$\varphi_3 = (\nabla^2 - \lambda_1^2) (\nabla^2 - \lambda_2^2) \Phi \quad (5.41)$$

En substituant les expressions ci-dessus dans l'équation (6.44), on obtient :

$$(\nabla^2 - \lambda_1^2) \varphi_1 + \delta(x - \xi) = 0 \quad (5.42)$$

$$(\nabla^2 - \lambda_2^2) \varphi_2 + \delta(x - \xi) = 0 \quad (5.43)$$

$$(\nabla^2 - \lambda_3^2) \varphi_3 + \delta(x - \xi) = 0 \quad (5.44)$$

Les équations ci-dessus ne sont autres que l'équation de Helmholtz dans  $\mathbb{R}^2$ . Les solutions fondamentales de telles équations pour un domaine bidimensionnel complètement symétrique sont :

$$\varphi_i = \frac{K_0(\lambda_i r)}{2\pi}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.45)$$

où  $r$  dénote la distance entre les deux points d'observation  $x$  et la source  $\xi$  :

$$r = \sqrt{(r_i r_j)} \quad (5.46)$$

$$r_i = x_i - \xi_i \quad (5.47)$$

Pour la suite du calcul, on a besoin d'utiliser les dérivées de  $r$  qui sont de la forme suivante :

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = r_{,i} = \frac{r_i}{r} \quad (5.48)$$

La dérivée normale de la distance  $r$  par rapport à la direction  $\mathbf{n}$  sera représentée par un produit de cette forme (Fig. 5.2) :

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,i} n_i \quad (5.49)$$

Par définition de  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , et  $\varphi_3$ , on en déduit :

$$(\nabla^2 - \lambda_1^2) \Phi = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\lambda_3^2 - \lambda_2^2} \quad (5.50)$$

$$(\nabla^2 - \lambda_3^2) \Phi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \quad (5.51)$$

La fonction  $\Phi$  est donc déterminée :

$$\Phi = \frac{1}{\lambda_3^2 - \lambda_1^2} \left( \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\lambda_3^2 - \lambda_2^2} - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \right) \quad (5.52)$$

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)} + \frac{K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \frac{K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \right] \quad (5.53)$$

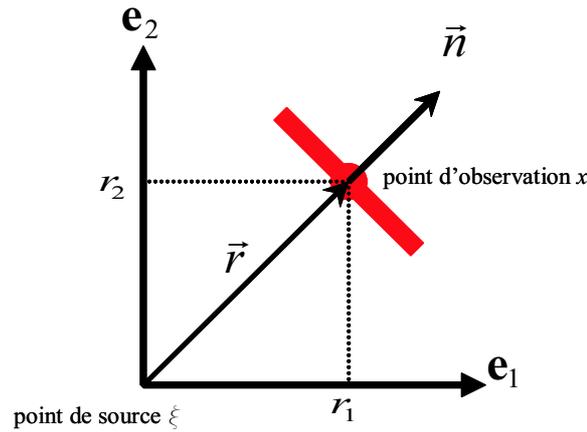


Figure 5.2 — Caractéristiques géométriques

avec la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre zéro  $K_0(\lambda_i r)$ .

Ayant en vue que la transformée de Laplace de la fonction qui décrit un front d'onde avec une constante de vitesse  $c$  est  $K_0(rs/c) = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2/c^2}} H(t - r/c)\right\}$ , il est évident que l'équation ci-dessus (5.53) représente les trois ondes de compression et de cisaillement propagées dans le milieu saturé. Comme les racines  $\lambda_i$  sont fonctions de  $s$ , les vitesses de l'onde de compression sont dépendantes du temps. Ceci représente l'atténuation dans un milieu poroélastique [298]. Au contraire de la théorie complète de Biot, la vitesse de l'onde de cisaillement n'est plus dépendante du temps. Autrement dit, elle n'est pas atténuée. Le terme  $s$  dans l'expression  $\lambda_3$  (5.36) appartient à la fonction de Bessel  $K_0(rs/c_2)$  et non pas à la vitesse de l'onde de cisaillement  $c_2$  [298].

La deuxième étape est de calculer la matrice des cofacteurs  $\mathbf{B}^{*co}$  en utilisant (5.24) :

$$\mathbf{B}^{*co} = \begin{bmatrix} F\partial_2^2 + AD & -F\partial_1\partial_2 & -AE\partial_1 \\ -F\partial_1\partial_2 & F\partial_1^2 + AD & -AE\partial_2 \\ -A\alpha\partial_1 & -A\alpha\partial_2 & A(B\nabla^2 + A) \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

avec les abréviations  $A = (G\nabla^2 - \rho s^2)$ ,  $B = (K + \frac{1}{3}G)$ ,  $D = (\kappa\nabla^2 - n^2 s/R)$ ,  $E = s(\alpha - s\kappa\rho_f)$ ,  $F = BD - \alpha E$ . Maintenant, tous les résultats partiels sont fusionnés.

En tenant compte de la relation appropriée entre  $\varphi$  et  $\Phi$  (5.38) et en appliquant ultérieurement la matrice d'opérateur  $\mathbf{B}^{*co}$  à la solution  $\varphi(r, s)$  (5.30), les solutions fondamentales de la poroélastodynamique s'obtiennent :

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{ij} & \tilde{G}_{i3} \\ \tilde{G}_{3j} & \tilde{G}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{ij}^s & \tilde{U}_i^f \\ \tilde{P}_j^s & \tilde{P}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F\nabla^2 + AD)\delta_{ij} - F\partial_i\partial_j & -AE\partial_i \\ -A\alpha\partial_j & A(B\nabla^2 + A) \end{bmatrix} \frac{\Phi}{\kappa G (K + \frac{4}{3}G)} \quad (5.55)$$

Les expressions explicites des éléments de  $\tilde{\mathbf{G}}$  sont comme suit [298] :

- déplacement du squelette solide dans la direction  $i$  dû à la force ponctuelle dans le solide dans la direction  $j$  :

$$\tilde{U}_{ij}^s = \frac{1}{2\pi s^2 \rho} \left( \frac{\lambda_4^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} R_1 - \frac{\lambda_4^2 - \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} R_2 + (\delta_{ij} \lambda_3^2 K_0(\lambda_3 r) - R_3) \right) \quad (5.56)$$

- pression interstitielle due à la force ponctuelle dans le solide dans la direction  $j$  :

$$\tilde{P}_j^s = \frac{\alpha r_{,j}}{2\pi\kappa (K + \frac{4}{3}G)} \left( \frac{\lambda_1 K_1(\lambda_1 r)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} + \frac{\lambda_2 K_1(\lambda_2 r)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \right) \quad (5.57)$$

- déplacement du squelette solide dans la direction  $i$  dû à la source ponctuelle de fluide injecté :

$$\tilde{U}_i^f = \left( 1 - \frac{s\rho_f \kappa}{\alpha} \right) s \tilde{P}_i^s \quad (5.58)$$

- pression interstitielle due à la source ponctuelle de fluide injecté :

$$\tilde{P}^f = \frac{1}{2\pi\kappa (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} (K_0(\lambda_1 r) (\lambda_1^2 - \lambda_4^2) - K_0(\lambda_2 r) (\lambda_2^2 - \lambda_4^2)) \quad (5.59)$$

avec  $R_k = (2r_{,i}r_{,j} - \delta_{ij})(\lambda_k/r)K_1(\lambda_k r) + r_{,i}r_{,j}\lambda_k^2 K_0(\lambda_k r)$  et  $\lambda_4^2 = (\rho s^2)/(K + \frac{4}{3}G)$ .  $K_0$  et  $K_1$  sont respectivement les fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce d'ordres zéro et un.

### 5.2.3 Équations intégrales de frontière pour la poroélastodynamique

L'équation intégrale de frontière pour la poroélasticité dynamique dans le domaine de Laplace peut être obtenue en utilisant soit le *théorème de réciprocité* correspondant [72] soit la *méthode des résidus pondérés* [73, 291]. Comme l'opérateur différentiel poroélastique  $\mathbf{B}$  est non auto-adjoint, les deux méthodes seront présentées dans cette section. Elles exigent différentes solutions fondamentales, cependant les deux méthodes aboutissent finalement à la même équation intégrale [292].

**Résidus pondérés :** L'équation intégrale de la poroélastodynamique peut être obtenue en utilisant la méthode de la fonction de Green, qui est essentiellement une intégration par parties [72]. Une description brève de la méthode de la fonction de Green est donnée comme suit : une équation aux dérivées partielles peut avoir cette forme

$$Lu = f \quad (5.60)$$

où  $L$  est l'opérateur différentiel d'ordre  $m$  dans  $n$  variables indépendantes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  :

$$Lu = \sum_{|k| \leq m} a_k(x) D^k u \quad (5.61)$$

dans laquelle les coefficients  $a_k(x)$  ont des dérivées partielles de tous les ordres. Son opérateur adjoint  $L^*$  est défini comme :

$$L^*G = \sum_{|k| \leq p} (-1)^k D^k(a_k, G) \quad (5.62)$$

où  $u$  et  $G$  sont des fonctions ayant des dérivées d'ordre  $m$  dans  $\mathbb{R}_n$ . Une relation intéressante impliquant les opérateurs  $L$  et  $L^*$  est

$$GLu - uL^*G = \text{div} \mathbf{J}(u, G) \quad (5.63)$$

où  $\mathbf{J}(u, G)$  est une forme bilinéaire vectorielle en  $u, G$  et leurs dérivées d'ordre  $m - 1$  ou moins. On prouve ce résultat pour  $m = 2$ . L'extension aux dimensions plus élevées peut être effectuée sans problème. Pour  $m=2$  :

$$Lu = \left( A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + B_j \frac{\partial}{\partial x_j} + c \right) u \quad (5.64)$$

où la convention de sommation est invoquée, on suppose  $A_{ij} = A_{ji}$ , donc :

$$\begin{aligned} GA_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (GA_{ij}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] - \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (GA_{ij}) \right] \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (GA_{ij}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (GA_{ij}) u \right] + \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (GA_{ij}) \right] u \end{aligned} \quad (5.65)$$

Également

$$GB_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} [GB_j u] - u \frac{\partial}{\partial x_j} (GB_j) \quad (5.66)$$

Donc,

$$\begin{aligned} GLu &= u \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} (GA_{ij}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (GB_i) + Gc \right\} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ GA_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (GA_{ij}) u + GB_i u \right\} \\ &= uL^*G + \text{div} \mathbf{J}(u, G) \end{aligned} \quad (5.67)$$

où  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(J_1, J_2, \dots, J_n)$  est

$$J_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ GA_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial}{\partial x_j} (GA_{ij}) \right\} + GB_i u \quad (5.68)$$

Finalement, on applique le théorème de la divergence et on obtient :

$$\int_{\Omega} (GLu - uL^*G) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \mathbf{J} d\Gamma \quad (5.69)$$

où  $\Omega$  est une région bornée dans  $\Omega_n$  de frontière  $\Gamma$  dont la normale unité extérieure est désignée par  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_n)$ .

Dans cette section, l'équation intégrale de la poroélastodynamique sera obtenue en utilisant la méthode de la fonction de Green présentée ci-dessus. Celle-ci peut être dérivée directement en égalisant le produit scalaire (*inner product*) des équations (5.17, 5.18), écrites sous la forme matricielle avec la matrice des opérateurs différentiels  $\mathbf{B}$  définie dans (5.21), et la matrice des solutions fondamentales adjointes  $\tilde{\mathbf{G}}$  (5.32) à un vecteur nul, c.-à-d.

$$\int_{\Omega} \mathbf{B} \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{p} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}} d\Omega = 0 \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{ij} & \tilde{G}_{i3} \\ \tilde{G}_{3j} & \tilde{G}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{ij}^s & \tilde{U}_i^f \\ \tilde{P}_j^s & \tilde{P}^f \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

où l'intégration est effectuée sur un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ .

Par le produit scalaire effectué dans (5.70), essentiellement, l'erreur en satisfaisant les équations de champs (5.17, 5.18), est forcée d'être orthogonal à  $\tilde{\mathbf{G}}$  [73, 292].

En supposant que les forces de volume  $F_i$  et les sources  $\gamma$  sont nulles, l'équation (5.70) peut s'écrire avec la notation indicielle :

$$\int_{\Omega} \left[ (\lambda + \mu) \tilde{G}_{\alpha j} \tilde{u}_{\beta, \beta \alpha} + \mu \tilde{G}_{\alpha j} \Delta \tilde{u}_{\alpha} - \rho s^2 \tilde{u}_{\alpha} \tilde{G}_{\alpha j} - \alpha \tilde{G}_{\alpha j} \tilde{p}_{, \alpha} + \kappa \tilde{G}_{3 j} \Delta \tilde{p} - s(\alpha - s\kappa\rho_f) \tilde{G}_{3 j} \tilde{u}_{\alpha, \alpha} - (n^2/R) s \tilde{G}_{3 j} \tilde{p} \right] d\Omega = 0 \quad (5.71)$$

où  $\alpha, \beta = 1, 2$  et  $i, j = 1, 2, 3$ . Il faut préciser que  $\mu = G$  et  $(\lambda + \mu) = K + \frac{1}{3}G$ .

Pour chaque terme dans (5.71), en intégrant par parties sur le domaine et en utilisant le *théorème de Green*, l'opérateur  $\mathbf{B}$  se transforme d'une action sur le vecteur des inconnues  $[\tilde{u}_i \ \tilde{p}]^T$  en une action sur la matrice des solutions fondamentales  $\tilde{\mathbf{G}}$ .

Pour montrer les procédures principales, chaque terme de l'équation intégrale (5.71) est présenté en détail comme suit :

$$\lambda \int_{\Omega} \tilde{G}_{\alpha j} \tilde{u}_{\beta, \beta \alpha} d\Omega = \lambda \int_{\Gamma} \tilde{G}_{\alpha j} \tilde{u}_{k, k} n_{\beta} \delta_{\alpha \beta} d\Gamma - \lambda \int_{\Gamma} \tilde{u}_{\alpha} \tilde{G}_{k j, k} n_{\beta} \delta_{\alpha \beta} d\Gamma + \lambda \int_{\Omega} \tilde{u}_{\alpha} \tilde{G}_{\beta j, \alpha \beta} d\Omega \quad (5.72)$$

$$\mu \int_{\Omega} \tilde{G}_{\alpha j} \tilde{u}_{\beta, \beta \alpha} d\Omega = \mu \int_{\Gamma} \tilde{G}_{\alpha j} \tilde{u}_{\beta, \alpha} n_{\beta} d\Gamma - \mu \int_{\Gamma} \tilde{u}_{\alpha} \tilde{G}_{\beta j, \alpha} n_{\beta} d\Gamma + \mu \int_{\Omega} \tilde{u}_{\alpha} \tilde{G}_{\beta j, \alpha \beta} d\Omega \quad (5.73)$$

$$\mu \int_{\Omega} \tilde{G}_{\alpha j} \Delta \tilde{u}_{\alpha} d\Omega = \mu \int_{\Gamma} (\tilde{G}_{\alpha j} \tilde{u}_{\alpha, \beta} - \tilde{u}_{\alpha} \tilde{G}_{\alpha j, \beta}) n_{\beta} d\Gamma + \mu \int_{\Omega} \Delta \tilde{G}_{\beta j} \tilde{u}_{\alpha} d\Gamma \quad (5.74)$$

$$- \alpha \int_{\Omega} \tilde{G}_{\alpha j} \tilde{p}_{, \alpha} d\Omega = - \alpha \int_{\Gamma} \tilde{G}_{\alpha j} \tilde{p} n_{\beta} \delta_{\alpha \beta} d\Gamma + \alpha \int_{\Omega} \tilde{G}_{\alpha j, \alpha} \tilde{p} d\Omega \quad (5.75)$$

$$\kappa \int_{\Omega} \tilde{G}_{3 j} \Delta \tilde{p} d\Omega = \kappa \int_{\Gamma} \tilde{G}_{3 j} \tilde{p}_{, n} d\Gamma - \kappa \int_{\Gamma} \tilde{G}_{3 j, n} \tilde{p} d\Gamma + \kappa \int_{\Omega} \Delta \tilde{G}_{3 j} \tilde{p} d\Omega \quad (5.76)$$

$$- s(\alpha - s\kappa\rho_f) \int_{\Omega} \tilde{G}_{3 j} \tilde{u}_{\alpha, \alpha} d\Omega = - s(\alpha - s\kappa\rho_f) \int_{\Gamma} \tilde{G}_{3 j} \tilde{u}_{\alpha} n_{\beta} \delta_{\alpha \beta} d\Gamma + s(\alpha - s\kappa\rho_f) \int_{\Omega} \tilde{u}_{\alpha} \tilde{G}_{3 j, \alpha} d\Omega \quad (5.77)$$

Comme montré dans les équations intégrales ci-dessus, les intégrales avec une différenciation mènent au changement du signe de l'intégrale de domaine obtenue, tandis qu'elles demeurent

sans changement dans le cas de deux intégrations par parties [291].

Ceci aboutit au système d'équations intégrales suivant écrit avec la notation indicielle :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} [(\lambda \tilde{u}_{k,k} - \alpha \tilde{p}) n_{\beta} \delta_{\alpha\beta} + \mu (\tilde{u}_{\beta,\alpha} + \tilde{u}_{\alpha,\beta}) n_{\beta}] \tilde{G}_{\alpha j} d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} \tilde{u}_{\alpha} \left[ (\lambda \tilde{G}_{kj,k} + s(\alpha - s\kappa\rho_f) \tilde{G}_{3j}) n_{\beta} \delta_{\alpha\beta} + \mu (\tilde{G}_{\alpha j,\beta} + \tilde{G}_{\beta j,\alpha}) n_{\beta} \right] d\Gamma \\
& + \kappa \int_{\Gamma} (\tilde{p}_{,n} \tilde{G}_{3j} - \tilde{p} \tilde{G}_{3j,n}) d\Gamma \\
& + \int_{\Omega} \left[ \tilde{u}_{\alpha} ((\lambda + \mu) \tilde{G}_{\beta j,\alpha\beta} + \mu \Delta \tilde{G}_{\beta j} - \rho s^2 \tilde{G}_{\alpha j} + s(\alpha - s\kappa\rho_f) \tilde{G}_{3j,\alpha}) + \right. \\
& \quad \left. \tilde{p} (\kappa \Delta \tilde{G}_{3j} + \alpha \tilde{G}_{\alpha j,\alpha} - (n^2/R) s \tilde{G}_{3j}) \right] d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{5.78}$$

ou

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} [(\lambda \tilde{u}_{k,k} - \alpha \tilde{p}) n_{\beta} \delta_{\alpha\beta} + \mu (\tilde{u}_{\beta,\alpha} + \tilde{u}_{\alpha,\beta}) n_{\beta}] \tilde{G}_{\alpha j} d\Gamma + \kappa \int_{\Gamma} \tilde{p}_{,n} \tilde{G}_{3j} d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} \tilde{u}_{\alpha} \left[ (\lambda \tilde{G}_{kj,k} + s(\alpha - s\kappa\rho_f) \tilde{G}_{3j}) n_{\beta} \delta_{\alpha\beta} + \mu (\tilde{G}_{\alpha j,\beta} + \tilde{G}_{\beta j,\alpha}) n_{\beta} \right] d\Gamma - \kappa \int_{\Gamma} \tilde{p} \tilde{G}_{3j,n} d\Gamma \\
& + \int_{\Omega} \tilde{u}_i B_{im}^* G_{mj} d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{5.79}$$

où dans la dernière phrase  $\tilde{u}_i = [\tilde{u}_{\alpha} \quad \tilde{p}]^T$  et  $\mathbf{B}^*$  est déjà présenté dans (5.33) :

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} (G \nabla^2 - \rho s^2) \delta_{ij} + (K + \frac{1}{3}G) \partial_i \partial_j & s(\alpha - s\kappa\rho_f) \partial_i \\ \alpha \partial_j & \kappa \nabla^2 - \frac{n^2 s}{R} \end{bmatrix}$$

La dernière phrase dans l'équation (5.79) montre que l'opérateur  $\mathbf{B}$  est transformée en son opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$ .

L'équation (5.79) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{U}_{\alpha\beta}^S & -\tilde{P}_{\alpha}^S \\ \tilde{U}_{\beta}^f & -\tilde{P}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_{\alpha} \\ \tilde{q} \end{bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{T}_{\alpha\beta}^S & \tilde{Q}_{\alpha}^S \\ \tilde{T}_{\beta}^f & \tilde{Q}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{\alpha} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} d\Gamma = - \int_{\Omega} (\mathbf{B}^* \tilde{\mathbf{G}})^T \begin{bmatrix} \tilde{u}_{\alpha} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} d\Omega \tag{5.80}$$

où le vecteur de contrainte  $\tilde{t}_{\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} = [(\lambda \tilde{u}_{k,k} - \alpha \tilde{p}) \delta_{\alpha\beta} + \mu (\tilde{u}_{\beta,\alpha} + \tilde{u}_{\alpha,\beta})] n_{\beta}$  et le flux normal  $\tilde{q} = -\kappa (p_{,\beta} + \rho_f s^2 \tilde{u}_{\beta}) n_{\beta}$  sont introduits.

Également, les abréviations

$$\tilde{T}_{\alpha\beta}^S = \left[ (\lambda \tilde{U}_{k\beta,k}^S + \alpha s \tilde{P}_{\beta}^S) \delta_{\alpha l} + \mu (\tilde{U}_{\alpha\beta,l}^S + \tilde{U}_{l\beta,\alpha}^S) \right] n_l \tag{5.81}$$

$$\tilde{Q}_{\alpha}^S = \kappa \tilde{P}_{\alpha,l}^S n_l \tag{5.82}$$

$$\tilde{T}_{\beta}^f = \left[ (\lambda \tilde{U}_{k\beta,k}^f + \alpha s \tilde{P}^f) \delta_{\alpha l} + \mu (\tilde{U}_{\alpha\beta,l}^f + \tilde{U}_{l\beta,\alpha}^f) \right] n_l \tag{5.83}$$

$$\tilde{Q}_\beta^f = \kappa \tilde{P}_{,\beta}^f n_l \quad (5.84)$$

sont utilisées, où  $\tilde{T}_{\alpha\beta}^S$  et  $\tilde{Q}_\alpha^S$  peuvent être interprétés comme étant les termes adjoints au vecteur de contrainte  $\tilde{t}_\alpha$  et au flux  $\tilde{q}$ , respectivement. Dans la définition du flux  $\tilde{q}$  la version simplifiée de la loi de Darcy (5.16) est utilisée. Cependant, dans son terme adjoint  $\tilde{Q}_\alpha^S$  et dans sa solution fondamentale correspondante  $\tilde{Q}^f$  seule la version quasi-statique de la loi de Darcy est trouvée. Ceci est dû à l'omission des effets d'inertie dans le fluide [298].

En introduisant (5.32) dans (5.80) et en utilisant la propriété de la distribution de Dirac  $\delta(x - \xi)$ , on aura :

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_\beta \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \int_\Gamma \begin{bmatrix} \tilde{U}_{\alpha\beta}^S & -\tilde{P}_\alpha^S \\ \tilde{U}_\beta^f & -\tilde{P}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_\alpha \\ \tilde{q} \end{bmatrix} d\Gamma - \int_\Gamma \begin{bmatrix} \tilde{T}_{\alpha\beta}^S & \tilde{Q}_\alpha^S \\ \tilde{T}_\beta^f & \tilde{Q}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_\alpha \\ \tilde{p} \end{bmatrix} d\Gamma \quad (5.85)$$

En identifiant les solutions fondamentales (5.56, 5.57, 5.58, 5.59) dans les abréviations présentées ci-dessus (5.81, 5.82, 5.83, 5.84), on trouve leurs expressions explicites comme suit ( $i, j = 1, 2$ ) :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ij}^S &= \left[ (\lambda \tilde{U}_{kj,k}^S + \alpha s \tilde{P}_j^S) \delta_{il} + \mu \left( \tilde{U}_{ij,l}^S + \tilde{U}_{lj,i}^S \right) \right] n_l \\ \tilde{U}_{kj,k}^S \delta_{il} n_l &= \frac{r_j n_i}{2\pi \rho s^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[ \lambda_1^3 K_1(\lambda_1 r) (\lambda_2^2 - \lambda_4^2) - \lambda_2^3 K_1(\lambda_2 r) (\lambda_1^2 - \lambda_4^2) \right] \end{aligned} \quad (5.86)$$

$$\begin{aligned} \mu \left( \tilde{U}_{ij,l}^S + \tilde{U}_{lj,i}^S \right) n_l &= \\ \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\lambda_4^2 - \lambda_2^2}{\lambda_3^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left( R_7 \frac{\lambda_1}{r} \left( \lambda_1 K_0(\lambda_1 r) + \frac{2K_1(\lambda_1 r)}{r} \right) - r_{,i} r_{,j} r_{,n} \lambda_1^3 K_1(\lambda_1 r) \right) \right. \\ &\quad - \frac{\lambda_4^2 - \lambda_1^2}{\lambda_3^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left( R_7 \frac{\lambda_2}{r} \left( \lambda_2 K_0(\lambda_2 r) + \frac{2K_1(\lambda_2 r)}{r} \right) - r_{,i} r_{,j} r_{,n} \lambda_2^3 K_1(\lambda_2 r) \right) \\ &\quad \left. - \frac{R_7}{\lambda_3 r} \left( \lambda_3 K_0(\lambda_3 r) + \frac{2K_1(\lambda_3 r)}{r} \right) - \frac{r_{,n} (\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) + r_{,i} n_j}{2} \lambda_3 K_1(\lambda_3 r) \right] \end{aligned} \quad (5.87)$$

avec  $R_7 = [r_{,n} (\delta_{ij} - 4r_{,i} r_{,j}) + r_{,j} n_i + r_{,i} n_j]$ .

$$\tilde{Q}_i^S = \frac{\alpha \lambda_4^2}{2\pi \rho s^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[ r_{,i} r_{,n} (\lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) - \lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r)) + \frac{2r_{,i} r_{,n} - n_i}{r} (\lambda_2 K_1(\lambda_2 r) - \lambda_1 K_1(\lambda_1 r)) \right] \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i^f &= \frac{1}{2\pi \kappa (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \left( K + \frac{4}{3} G \right)} \left[ 2r_{,i} r_{,n} s (\alpha - s \kappa \rho_f) G \right. \\ &\quad \times \left( \left( \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) + \frac{\lambda_2}{r} K_1(\lambda_2 r) \right) - \left( \lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r) + \frac{\lambda_1}{r} K_1(\lambda_1 r) \right) \right) \\ &\quad - 2(n_i - r_{,i} r_{,n}) s (\alpha - s \rho_f \kappa) G \left( \frac{\lambda_2}{r} K_1(\lambda_2 r) - \frac{\lambda_1}{r} K_1(\lambda_1 r) \right) \\ &\quad + n_i \left[ \left( K - \frac{2}{3} G \right) s (\alpha - s \rho_f \kappa) \lambda_2^2 - \alpha s \left( K + \frac{4}{3} G \right) (\lambda_2^2 - \lambda_4^2) \right] K_0(\lambda_2 r) \\ &\quad \left. - n_i \left[ \left( K - \frac{2}{3} G \right) s (\alpha - s \rho_f \kappa) \lambda_1^2 - \alpha s \left( K + \frac{4}{3} G \right) (\lambda_1^2 - \lambda_4^2) \right] K_0(\lambda_1 r) \right] \end{aligned} \quad (5.89)$$

$$\tilde{Q}^f = \frac{r,n}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} [(\lambda_2^2 - \lambda_4^2) \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) - (\lambda_1^2 - \lambda_4^2) \lambda_1 K_1(\lambda_1 r)] \quad (5.90)$$

**Théorème de réciprocité :** considérons deux états poroélastiques différents  $(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, p, \zeta)$  et  $(\sigma_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^*, p^*, \zeta^*)$ , associés aux conditions initiales nulles. La relation de réciprocité en domaine de Laplace peut s'exprimer sous la forme locale [79] :

$$\tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij}^* + \tilde{p} \tilde{\zeta}^* = \tilde{\sigma}_{ij}^* \tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{p}^* \tilde{\zeta} \quad (5.91)$$

En fait, cette relation est établie en utilisant l'hypothèse du comportement isotrope élastique linéaire et la propriété symétrique du tenseur d'élasticité  $D_{ijkl} = D_{klij}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij}^* + \tilde{p} \tilde{\zeta}^* &= (D_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} - \alpha \tilde{p} \delta_{ij}) \tilde{\varepsilon}_{ij}^* + \tilde{p} \tilde{\zeta}^* = D_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} \tilde{\varepsilon}_{ij}^* + \tilde{p} (\tilde{\zeta}^* - \alpha \tilde{\varepsilon}_{ii}^*) \tilde{\sigma}_{ij} \\ &= D_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} \tilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{n^2}{R} \tilde{p} \tilde{p}^* = \tilde{\sigma}_{ij}^* \tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{p}^* \tilde{\zeta} \end{aligned} \quad (5.92)$$

L'intégration de l'équation (5.92) sur tout le domaine  $\Omega$  conduit au théorème de réciprocité pour la poroélasticité qui peut être considéré comme une généralisation du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti pour l'élasticité [79] :

$$\int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij}^* + \tilde{p} \tilde{\zeta}^*) d\Omega = \int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_{ij}^* \tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{p}^* \tilde{\zeta}) d\Omega \quad (5.93)$$

Une transformation inverse mène au théorème de réciprocité dépendant du temps dans lequel les produits dans l'équation (5.93) sont les produits de convolutions temporelle :

$$(x \star y)(t) = \int_0^t x(t-\tau) y(\tau) d\tau = \int_0^t x(\tau) y(t-\tau) d\tau \quad (5.94)$$

Cependant, pour déduire l'équation intégrale de frontière il est plus adéquat de rester dans le domaine de Laplace.

Dans la suite, les membres de l'intégrale (5.93) seront traités séparément. En considérant la relation linéaire déformation-déplacement, le théorème de la divergence et l'équation d'équilibre (5.13), on aura :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij}^* d\Omega &= \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{u}_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \tilde{\sigma}_{ij} n_j \tilde{u}_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{i,j} \tilde{u}_i^* d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} \tilde{t}_i \tilde{u}_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} (\rho s^2 \tilde{u}_i + n \rho_f s \tilde{w}_i - \tilde{F}_i) \tilde{u}_i^* d\Omega \end{aligned} \quad (5.95)$$

L'autre intégrale dans le membre de gauche de l'équation (5.93) peut être développée en utilisant l'équation de continuité (5.11) de la façon suivante :

$$\int_{\Omega} \tilde{p} \tilde{\zeta}^* d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{p} \frac{-\tilde{q}_{i,i}^* + \tilde{\gamma}^*}{s} d\Omega = -\frac{1}{s} \int_{\Gamma} \tilde{p} \tilde{q}^* d\Gamma + \frac{1}{s} \int_{\Omega} \tilde{p}_{,i} \tilde{q}_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{p} \frac{\tilde{\gamma}^*}{s} d\Omega \quad (5.96)$$

La seconde intégrale dans le membre de droite de l'équation (5.96), en considérant la loi de Darcy (5.14) avec  $\rho_a = 0$ , s'écrit :

$$\frac{1}{s} \int_{\Omega} \tilde{p}_{,i} \tilde{q}_i^* d\Omega = - \int_{\Omega} \left( \frac{\tilde{q}_i}{\kappa} + \rho_f s^2 \tilde{u}_i + \rho_f s \tilde{w}_i \right) n \tilde{w}_i^* d\Omega \quad (5.97)$$

En faisant un développement identique pour le membre de droite de l'équation (5.93), le théorème de réciprocité s'obtient finalement :

$$\int_{\Gamma} (\tilde{t}_i \tilde{u}_i^* - \tilde{t}_i^* \tilde{u}_i) d\Gamma - \frac{1}{s} \int_{\Gamma} (\tilde{p} \tilde{q}^* - \tilde{p}^* \tilde{q}) d\Gamma + \int_{\Omega} (\tilde{F}_i \tilde{u}_i^* - \tilde{F}_i^* \tilde{u}_i) d\Omega + \frac{1}{s} \int_{\Omega} (\tilde{p} \tilde{\gamma}^* - \tilde{p}^* \tilde{\gamma}) d\Omega = 0 \quad (5.98)$$

Pour obtenir les solutions, c.-à-d. les deux composantes de déplacement  $\tilde{u}_i$  et la pression interstitielle  $\tilde{p}$ , trois chargements différents (les forces de volume externes  $\tilde{F}_{ij}^*$  suivant les deux coordonnées  $j$  et une source d'injection du fluide  $\tilde{\gamma}^*$ ) doivent être appliqués à l'état étoile (\*) dans l'équation intégrale (5.98). Comme utilisé habituellement dans les formulations intégrales de frontière, on considère des charges ponctuelles unitaires, c.-à-d. les distributions de Dirac,  $\tilde{F}_{ij}^* = \delta(x - \xi) \delta_{ij}$  et  $\tilde{\gamma}^* = \delta(x - \xi)$ . En supposant l'absence de force de volume et de source d'injection du fluide dans l'état non-étoile ( $\tilde{F}_{ij}, \tilde{\gamma}$ ), la représentation correspondante à l'équation (5.85) en notation matricielle sera :

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_j \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{ij}^* & \frac{1}{s} \tilde{p}_i^* \\ -s \tilde{u}_j^* & -\tilde{p}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_i \\ \tilde{q} \end{bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{t}_{ij}^* & \frac{1}{s} \tilde{q}_i^* \\ -s \tilde{t}_j^* & -\tilde{q}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{p} \end{bmatrix} d\Gamma \quad (5.99)$$

Comme les chargements dans l'état étoile sont ponctuels, l'état étoile représente les solutions fondamentales des équations aux dérivées partielles (5.17) et (5.18) dans le domaine de Laplace. Ceci est au contraire de l'équation intégrale obtenue par la méthode des résidus pondérés et les solutions fondamentales doivent satisfaire l'équation suivante :

$$\mathbf{B} \tilde{\mathbf{G}}^* + \mathbf{I} \delta(x - \xi) = 0 \quad (5.100)$$

avec l'opérateur original  $\mathbf{B}$  (5.21) et

$$\tilde{\mathbf{G}}^* = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{ij}^* & \tilde{G}_{i3}^* \\ \tilde{G}_{3j}^* & \tilde{G}_{33}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{ij}^* & \tilde{u}_j^* \\ \tilde{p}_i^* & \tilde{p}^* \end{bmatrix} \quad (5.101)$$

En plus,  $\tilde{t}_{ij}^*$ ,  $\tilde{t}_j^*$  et  $\tilde{q}^*$ ,  $\tilde{q}_i^*$  dans l'équation (5.99) dénotent les solutions fondamentales concernant la traction et le flux, respectivement :

$$\tilde{t}_{ij}^* = [(\lambda \tilde{u}_{k,j,k}^* - \alpha \tilde{p}_j^*) \delta_{il} + \mu (\tilde{u}_{ij,l}^* + \tilde{u}_{lj,i}^*)] n_l \quad (5.102)$$

$$\tilde{q}_j^* = -\kappa (\tilde{p}_{j,i}^* + \rho_f s^2 \tilde{u}_{ji}^*) n_i \quad (5.103)$$

$$\tilde{t}_i^* = [(\lambda \tilde{u}_{k,i,k}^* - \alpha \tilde{p}^*) \delta_{il} + \mu (\tilde{u}_{i,l}^* + \tilde{u}_{l,i}^*)] n_l \quad (5.104)$$

$$\tilde{q}_i^* = -\kappa (\tilde{p}_{,i}^* + \rho_f s^2 \tilde{u}_i^*) n_j \quad (5.105)$$

qui sont différents par rapport aux solutions (5.81)-(5.84). Cela est dû au fait que la solution fondamentale  $\tilde{\mathbf{G}}$  correspond à l'opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$  tandis que  $\tilde{\mathbf{G}}^*$  correspond à l'opérateur

| Composantes        | Singularité                        |
|--------------------|------------------------------------|
| $\tilde{U}_{ij}^S$ | faiblement singulières ( $\ln r$ ) |
| $\tilde{U}_i^f$    | régulières (1)                     |
| $\tilde{P}_i^S$    | régulières (1)                     |
| $\tilde{P}^f$      | faiblement singulière ( $\ln r$ )  |
| $\tilde{T}_{ij}^S$ | fortement singulières ( $1/r$ )    |
| $\tilde{T}_i^f$    | faiblement singulières ( $\ln r$ ) |
| $\tilde{Q}_j^S$    | faiblement singulières ( $\ln r$ ) |
| $\tilde{Q}^f$      | fortement singulière ( $1/r$ )     |

Tableau 5.1 — Singularité des solutions fondamentales

original **B**. En comparant les deux équations (5.32) et (5.100) pour la détermination de  $\tilde{\mathbf{G}}$  et de  $\tilde{\mathbf{G}}^*$ , on trouvera :

$$\tilde{u}_{ij}^* = \tilde{U}_{ij}^S \quad -s\tilde{u}_j^* = \tilde{U}_j^f \quad -\tilde{p}_i^* = s\tilde{P}_i^S \quad \tilde{p}^* = \tilde{P}^f \quad (5.106)$$

Avec ces relations, l'équivalence de l'équation intégrale (5.85) déduite par la méthode des résidus pondérés et l'équation intégrale (5.99) déduite par le théorème de réciprocity est claire [291].

Dans la suite, l'équation intégrale (5.85) avec les solutions fondamentales  $\tilde{\mathbf{G}}$  est considérée comme le meilleur choix.

**Équation intégrale singulière :** La représentation intégrale (5.85 ou 5.99) permet d'évaluer les valeurs des inconnues  $(\tilde{u}_i, \tilde{p})$  en un point  $\xi$  à l'intérieur du domaine  $\Omega$  en fonction des valeurs  $(\tilde{u}_i, \tilde{t}_i, \tilde{p}, \tilde{q})$  sur la frontière  $\Gamma$ . Pour un problème bien posé, la moitié des composants scalaires des variables est donnée par des conditions aux limites, l'autre moitié restant inconnu [262]. Il reste donc à définir une équation intégrale ne portant que des inconnues sur la frontière  $\Gamma$ . Comme l'expression (5.85) ne vaut que pour  $\xi \notin \Gamma$ , l'établissement d'une équation intégrale s'effectue en approchant le point source  $\xi$  vers la frontière. Par conséquent afin de déterminer des inconnues de frontière, il est nécessaire de savoir le comportement des solutions fondamentales lorsque  $r = |\xi - x|$  tend vers zéro, autrement dit, quand le point d'intégration  $x$  s'approche du point de collocation  $\xi$ . Le développement en série par rapport à la variable  $r = |\xi - x|$  montre l'ordre de singularité de ces solutions (5.56, 5.57, 5.58, 5.59, 5.81, 5.82, 5.83, 5.84) (Tab. 5.1) :

$$\tilde{P}_i^S, \tilde{U}_i^f = \mathcal{O}(r^0) \quad (5.107)$$

$$\tilde{U}_{ij}^S = \underbrace{-\frac{1+\nu}{4\pi E(1-\nu)} \{(3-4\nu) \ln r \delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}\}}_{\text{solution fondamentale élastostatique}} + \mathcal{O}(r^0) \quad (5.108)$$

$$\tilde{P}^f = -\frac{1}{2\pi\kappa} \ln r + \mathcal{O}(r^0) \quad (5.109)$$

$$\tilde{T}_{ij}^S = \underbrace{-\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}]r_{,n} - (1-2\nu)(r_{,j}n_i - r_{,i}n_j)\}}_{\text{solution fondamentale élastostatique}} + \mathcal{O}(r^0) \quad (5.110)$$

$$\tilde{T}_i^f = -\frac{n_i s}{4\pi\kappa(1-\nu)} \{s\rho_f\kappa + \alpha(1-2\nu)\} \ln r + \mathcal{O}(r^0) \quad (5.111)$$

$$\tilde{Q}_j^S = \frac{n_j(1+\nu)}{4\pi} \frac{\alpha(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \ln r + \mathcal{O}(r^0) \quad (5.112)$$

$$\tilde{Q}^f = \underbrace{-\frac{1}{2\pi} \frac{r_{,n}}{r}}_{\text{solution fondamentale acoustique}} + \mathcal{O}(r^0) \quad (5.113)$$

Comme montré auparavant, les singularités fortes des fonctions noyaux (5.110, 5.113) sont égales à celles des solutions fondamentales élastostatique et acoustique.

Par conséquent, en approchant le point source  $\xi$  vers la frontière  $\Gamma$ , on obtient les équations intégrales de frontière :

$$\begin{bmatrix} c_{ij} & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{U}_{ij}^S & -\tilde{P}_i^S \\ \tilde{U}_j^f & -\tilde{P}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_i \\ \tilde{q} \end{bmatrix} d\Gamma - \oint_{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{T}_{ij}^S & \tilde{Q}_i^S \\ \tilde{T}_j^f & \tilde{Q}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{p} \end{bmatrix} d\Gamma \quad (5.114)$$

avec les termes libres :

$$c(\xi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \tilde{T}_{ij}^S(x - \xi) d\Gamma \quad (5.115)$$

$$c(\xi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \tilde{Q}^f(x - \xi) d\Gamma \quad (5.116)$$

Ces termes dépendent de la géométrie local de la surface  $\Gamma$  (si  $\xi$  est un point régulier de  $\Gamma$ ,  $c_{\alpha\beta}(\xi) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$ ). Comme il sera expliqué dorénavant, les composantes  $\tilde{T}_{ij}^S$  et  $\tilde{Q}^f$  sont fortement singulières et par conséquent, les intégrales de contour contenant ces termes ne convergent que dans le sens de la valeur principale de Cauchy.

Une transformation au domaine temporel mène finalement à l'équation intégrale temporelle pour la poroélasticité :

$$\begin{bmatrix} c_{ij}(\xi) & 0 \\ 0 & c(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(\xi; t) \\ p(\xi; t) \end{bmatrix} = \int_0^t \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{ij}^S(x, \xi; t - \tau) & -P_i^S(x, \xi; t - \tau) \\ U_j^f(x, \xi; t - \tau) & -P^f(x, \xi; t - \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i(x; \tau) \\ q(x; \tau) \end{bmatrix} d\Gamma d\tau \\ - \int_0^t \oint_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{ij}^S(x, \xi; t - \tau) & Q_i^S(x, \xi; t - \tau) \\ T_j^f(x, \xi; t - \tau) & Q^f(x, \xi; t - \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(x; \tau) \\ p(x; \tau) \end{bmatrix} d\Gamma d\tau \quad (5.117)$$

## 5.3 Problèmes quasi-statiques

### 5.3.1 Système d'équations de champs

Pour l'exhaustivité et la consultation plus facile, la théorie de la poroélasticité linéaire, isotrope et quasi-statique est brièvement présentée ci-dessous. L'intention est de préciser la notation et d'indiquer les hypothèses de base. Pour une description plus détaillée sur la théorie de la consolidation, voir le travail originale de Biot [36].

Les équations de champs de la poroélasticité se composent des éléments suivants :

**Équations constitutives :**

$$\sigma_{ij} = G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{k,k} - \alpha \delta_{ij} p \quad (5.118)$$

$$\zeta = \alpha u_{k,k} + \frac{\alpha^2(1-2\nu_u)(1-2\nu)}{2G(\nu_u - \nu)} p \quad (5.119)$$

où  $\sigma_{ij}$  est le tenseur de contrainte totale,  $p$  est la pression interstitielle,  $u_i$  est le déplacement du squelette solide et  $\zeta$  est la variation de volume de fluide par unité de volume de référence.  $G$ , le module de cisaillement et  $\nu$ , le coefficient de Poisson sont connus de l'élasticité.  $\alpha$ , le coefficient de Biot et  $\nu_u$ , le coefficient de Poisson non-drainé complètent l'ensemble des paramètres matériaux. De plus, une relation linéaire déformation-déplacement  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  est utilisée, c.-à-d., de petits gradients de déformation sont supposés.

**Équation d'équilibre :**

$$\sigma_{ij,j} = -F_i \quad (5.120)$$

où  $F_i$  est la force volumique par unité de volume.

**Équation de continuité du fluide :**

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + q_{i,i} = \gamma \quad (5.121)$$

où  $q_i$  est le flux spécifique du fluide et  $\gamma(t)$  est le taux de volume injecté dû à une source de fluide.

**Loi de Darcy :**

$$q_i = -\kappa p_{,i} \quad (5.122)$$

où  $\kappa$  est la perméabilité.

Les processus poroélastiques linéaires sont donc décrits par les équations (5.118, 5.119, 5.120, 5.121, 5.122) et par un ensemble des paramètres mécaniques des matériaux. Comme montré dans [49], il suffit d'utiliser le déplacement du squelette solide et la pression interstitielle en tant que variables d'état pour décrire un milieu poroélastique. Par conséquent, ces équations seront combinées pour obtenir des équations de champ en terme de  $u_i$  et  $p$ . Celles-ci consistent en une *équation de l'élasticité* avec un terme couplé de fluide et une *équation de diffusion* avec un terme couplé de squelette solide :

$$Gu_{i,jj} + \frac{G}{1-2\nu}u_{j,ij} - \alpha p_{,i} = -F_i \quad (5.123)$$

$$\kappa p_{,ii} - \frac{\alpha^2(1-2\nu_u)(1-2\nu)}{2G(\nu_u - \nu)} \frac{\partial p}{\partial t} - \alpha \frac{\partial u_{i,i}}{\partial t} = -\gamma \quad (5.124)$$

Puisque dans ce qui suit, les solutions fondamentales ne s'obtiennent que dans le domaine transformé de Laplace, les équations (5.123, 5.124) doivent être transformées dans le domaine de Laplace (5.19).

Donc, en supposant les conditions initiales nulles pour toutes les variables d'état, les équations (5.123, 5.124) s'écrivent dans le domaine de Laplace sous la forme suivante :

$$G\tilde{u}_{i,jj} + \frac{G}{1-2\nu}\tilde{u}_{j,ij} - \alpha\tilde{p}_{,i} = -\tilde{F}_i \quad (5.125)$$

$$\kappa\tilde{p}_{,ii} - \frac{s\alpha^2(1-2\nu_u)(1-2\nu)}{2G(\nu_u - \nu)}\tilde{p} - \alpha s\tilde{u}_{i,i} = -\tilde{\gamma} \quad (5.126)$$

Ce système d'équations peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{F}_i \\ \tilde{\gamma} \end{bmatrix} \quad (5.127)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} G\nabla^2\delta_{ij} + \frac{G}{1-2\nu}\partial_i\partial_j & -\alpha\partial_i \\ -\alpha s\partial_i & \kappa\nabla^2 - \frac{\alpha^2 s(1-2\nu_u)(1-2\nu)}{2G(\nu_u - \nu)} \end{bmatrix} \quad (5.128)$$

où  $\mathbf{B}$  est la matrice d'opérateurs différentiels qui est *non auto-adjointe*.

### 5.3.2 Solutions fondamentales

Une collection de tous les types des solutions fondamentales dans le domaine temporel provoquées par différentes chargements pour la poroélasticité quasi-statique peut être trouvée dans [76]. Les solutions fondamentales dans le domaine de Laplace présentées ci-dessous sont celles

obtenues par Cheng et Detournay [75] pour la matrice d'opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$  (5.134).

Le déplacement et la pression dues à une force ponctuelle unitaire dans le solide sont respectivement :

$$\tilde{U}_{ij}^S = \frac{1}{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3-4\nu_u}{4G(1-\nu_u)} \delta_{ij} \ln r + \frac{1}{4G(1-\nu_u)} r_{,i} r_{,j} + \\ \frac{\nu_u - \nu}{2G(1-\nu)(1-\nu_u)} \left[ \delta_{ij} \left( \frac{1}{r^2 \lambda^2} - \frac{1}{r\lambda} K_1(r\lambda) \right) + r_{,i} r_{,j} \left( K_2(r\lambda) - \frac{2}{r^2 \lambda^2} \right) \right] \end{array} \right\} \quad (5.129)$$

$$\tilde{P}_i^S = \frac{1}{2\pi} \frac{\nu_u - \nu}{s\alpha(1-2\nu)(1-\nu_u)} \lambda r_{,i} \left( K_1(r\lambda) - \frac{1}{r\lambda} \right) \quad (5.130)$$

et dues à une source d'injection ponctuelle unitaire dans le fluide :

$$\tilde{U}_i^f = \frac{1}{2\pi} \frac{\nu_u - \nu}{\alpha(1-2\nu)(1-\nu_u)} \lambda r_{,i} \left( K_1(r\lambda) - \frac{1}{r\lambda} \right) \quad (5.131)$$

$$\tilde{P}^f = \frac{1}{2\pi\kappa} K_0(r\lambda) \quad (5.132)$$

où  $K_0$ ,  $K_1$  et  $K_2$  sont respectivement les fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce d'ordre zéro, premier et second et  $\lambda^2 = \frac{s\alpha^2(1-\nu_u)(1-2\nu)^2}{2\kappa G(1-\nu)(\nu_u - \nu)} = \frac{s}{c}$ .

### 5.3.3 Équations intégrales de frontière

L'équation intégrale de frontière pour la poroélasticité quasi-statique en domaine de Laplace peut être obtenue en utilisant soit le *théorème de réciprocité* [18] soit la *méthode des résidus pondérés* [297]. La procédure pour obtenir l'équation intégrale par ces deux méthodes est bien détaillée dans la partie précédente. Ici, pour la brièveté du texte on présente les formes finales de l'équation intégrale de frontière obtenues par les deux méthodes.

**Résidus pondérés :**

$$\begin{bmatrix} c_{ij} & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{U}_{ij}^S & -\tilde{P}_i^S \\ \tilde{U}_j^f & -\tilde{P}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_i \\ \tilde{q} \end{bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{T}_{ij}^S & \tilde{Q}_i^S \\ \tilde{T}_j^f & \tilde{Q}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{p} \end{bmatrix} d\Gamma \quad (5.133)$$

où le vecteur de contrainte  $\tilde{t}_i = \sigma_{ij} n_j = [(\lambda \tilde{u}_{k,k} - \alpha \tilde{p}) \delta_{ij} + \mu(\tilde{u}_{j,i} + \tilde{u}_{i,j})] n_j$  et le flux normal  $\tilde{q} = -\kappa p_{,j} n_j$  sont introduits.

$\tilde{U}_{ij}^S$ ,  $\tilde{P}_i^S$ ,  $\tilde{U}_j^f$  et  $\tilde{P}^f$  sont les composantes de la matrice de solution fondamentale  $\tilde{\mathbf{G}}$  qui doit être solution de la matrice d'opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$  pour les problèmes quasi-statiques :

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} G \nabla^2 \delta_{ij} + \frac{G}{1-2\nu} \partial_i \partial_j & \alpha s \partial_i \\ \alpha \partial_i & \kappa \nabla^2 - \frac{\alpha^2 s (1-2\nu_u)(1-2\nu)}{2G(\nu_u - \nu)} \end{bmatrix} \quad (5.134)$$

Également, les abréviations

$$\tilde{T}_{ij}^S = \left[ (\lambda \tilde{U}_{kj,k}^S + \alpha s \tilde{P}_j^S) \delta_{il} + \mu (\tilde{U}_{ij,l}^S + \tilde{U}_{lj,i}^S) \right] n_l \quad (5.135)$$

$$\tilde{Q}_i^S = \kappa \tilde{P}_{i,l}^S n_l \quad (5.136)$$

$$\tilde{T}_j^f = \left[ (\lambda \tilde{U}_{k,k}^f + \alpha s \tilde{P}^f) \delta_{il} + \mu (\tilde{U}_{i,l}^f + \tilde{U}_{l,i}^f) \right] n_l \quad (5.137)$$

$$\tilde{Q}_j^f = \kappa \tilde{P}_{,l}^f n_l \quad (5.138)$$

sont utilisées, où  $\tilde{T}_{ij}^S$  et  $\tilde{Q}_i^S$  peuvent être interprétés comme étant les termes adjoints au vecteur de contrainte  $\tilde{t}_i$  et au flux  $\tilde{q}$ , respectivement.

En identifiant les solutions fondamentales (5.129)-(5.132), les formes explicites de ces abréviations s'obtiennent comme suit :

$$\tilde{T}_{ij}^S = \frac{1}{2\pi} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1 - 2\nu_u}{2(1 - \nu_u)} \frac{n_i r_{,j} - n_j r_{,i} - \delta_{ij} r_{,n}}{r} - \frac{1 - \nu_u}{1 - \nu_u} \frac{r_{,i} r_{,j} r_{,n}}{r} + \frac{\nu_u - \nu}{(1 - \nu)(1 - \nu_u)} \lambda \\ & \times \left[ n_i r_{,j} \left( K_3(r\lambda) - \frac{3}{r\lambda} K_2(r\lambda) - \frac{2}{r^3 \lambda^3} \right) + (n_j r_{,i} + \delta_{ij} r_{,n}) \left( \frac{1}{r\lambda} K_2(r\lambda) - \frac{2}{r^3 \lambda^3} \right) + \right. \\ & \left. r_{,i} r_{,j} r_{,n} \left( \frac{8}{r^3 \lambda^3} - K_3(r\lambda) \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.139)$$

$$\tilde{T}_i^f = \frac{1}{2\pi} \frac{s\alpha(1 - 2\nu)}{2\kappa(1 - \nu)} \left[ n_i \left( K_2(r\lambda) + K_0(r\lambda) - \frac{2}{r^2 \lambda^2} \right) + r_{,i} r_{,n} \left( \frac{4}{r^2 \lambda^2} - 2K_2(r\lambda) \right) \right] \quad (5.140)$$

$$\tilde{Q}_j^S = \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha(1 - 2\nu)}{2G(1 - \nu)} \left[ r_{,j} r_{,n} \left( \frac{2}{r^2 \lambda^2} - K_2(r\lambda) \right) + n_j \left( \frac{1}{r\lambda} K_1(r\lambda) - \frac{1}{r^2 \lambda^2} \right) \right] \quad (5.141)$$

$$\tilde{Q}^f = -\frac{1}{2\pi} r_{,n} \lambda K_1(r\lambda) \quad (5.142)$$

$K_3$  étant la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce de troisième ordre et  $r_{,n} = r_{,k} n_k$  la dérivée normale.

**Théorème de réciprocité :**

$$\begin{bmatrix} c_{ij} & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{ij}^* & \frac{1}{s} \tilde{p}_i^* \\ -s \tilde{u}_j^* & -\tilde{p}_j^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_i \\ \tilde{q} \end{bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{t}_{ij}^* & \frac{1}{s} \tilde{q}_i^* \\ -s \tilde{t}_j^* & -\tilde{q}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{p} \end{bmatrix} d\Gamma \quad (5.143)$$

où l'état étoile représente les composantes de la matrice de solution fondamentale  $\tilde{\mathbf{G}}^*$  qui doit être solution de la matrice d'opérateur différentiel  $\mathbf{B}$  (5.128). Ceci est au contraire de l'équation

intégrale obtenue par la méthode des résidus pondérés dans laquelle les solutions fondamentales doivent satisfaire l'équation (5.32). En plus,  $\tilde{t}_{ij}^*$ ,  $\tilde{t}_j^*$  et  $\tilde{q}^*$ ,  $\tilde{q}_i^*$  dans l'équation (5.143) dénotent les solutions fondamentales concernant la traction et le flux, respectivement :

$$\tilde{t}_{ij}^* = [(\lambda \tilde{u}_{kj,k}^* - \alpha \tilde{p}_j^*) \delta_{il} + \mu (\tilde{u}_{ij,l}^* + \tilde{u}_{lj,i}^*)] n_l \quad (5.144)$$

$$\tilde{q}_i^* = -\kappa \tilde{p}_{i,l}^* n_l \quad (5.145)$$

$$\tilde{t}_j^* = [(\lambda \tilde{u}_{k,k}^* - \alpha \tilde{p}^*) \delta_{il} + \mu (\tilde{u}_{i,l}^* + \tilde{u}_{l,i}^*)] n_l \quad (5.146)$$

$$\tilde{q}^* = -\kappa \tilde{p}_j^* n_l \quad (5.147)$$

qui sont différents par rapport aux solutions (5.135)-(5.138). Cela est dû au fait que la solution fondamentale  $\tilde{\mathbf{G}}$  correspond à l'opérateur adjoint  $\tilde{\mathbf{B}}^*$  tandis que  $\tilde{\mathbf{G}}^*$  correspond à l'opérateur original  $\tilde{\mathbf{B}}$ . En comparant les deux équations (5.128) et (5.134) pour la détermination de  $\tilde{\mathbf{G}}$  et de  $\tilde{\mathbf{G}}^*$ , on trouvera :

$$\tilde{u}_{ij}^* = \tilde{U}_{ij}^S \quad -s\tilde{u}_j^* = \tilde{U}_j^f \quad -\tilde{p}_i^* = s\tilde{P}_i^S \quad \tilde{p}^* = \tilde{P}^f \quad (5.148)$$

Avec ces relations, l'équivalence de l'équation intégrale (5.133) déduite par la méthode des résidus pondérés et l'équation intégrale (5.143) déduite par le théorème de réciprocité est claire [291].

Dans la suite, l'équation intégrale (5.133) avec les solutions fondamentales  $\tilde{\mathbf{G}}$  est prise en compte. La singularité de ces solutions fondamentales, lorsque le point d'observation  $x$  s'approche du point source  $\xi$  est celle présentée pour le cas dynamique (Tab. 5.1) :

$$\tilde{U}_{ij}^S = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \{r_{,i}r_{,j} - (3-4\nu_u) \delta_{ij} \ln r\} + \mathcal{O}(r^0) \quad (5.149)$$

$$\tilde{P}^f = -\frac{1}{2\pi\kappa} \ln r + \mathcal{O}(r^0) \quad (5.150)$$

$$\tilde{T}_{ij}^S = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}]r_{,n} - (1-2\nu)(r_{,j}n_i - r_{,i}n_j)\} + \mathcal{O}(r^0) \quad (5.151)$$

$$\tilde{T}_i^f = \frac{-s\alpha(1-2\nu)}{4\pi\kappa(1-\nu)} n_i \ln r + \mathcal{O}(r^0) \quad (5.152)$$

$$\tilde{Q}_j^S = \frac{\alpha(1-2\nu)}{8\pi G(1-\nu)} n_j \ln r + \mathcal{O}(r^0) \quad (5.153)$$

$$\tilde{Q}^f = -\frac{1}{2\pi} \frac{r_{,n}}{r} + \mathcal{O}(r^0) \quad (5.154)$$

Une transformation au domaine temporel mène finalement à l'équation intégrale temporelle pour la poroélasticité :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_{ij}(\xi) & 0 \\ 0 & c(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(\xi; t) \\ p(\xi; t) \end{bmatrix} &= \int_0^t \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{ij}^S(x, \xi; t - \tau) & -P_i^S(x, \xi; t - \tau) \\ U_{\beta}^f(x, \xi; t - \tau) & -P^f(x, \xi; t - \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i(x; \tau) \\ q(x; \tau) \end{bmatrix} d\Gamma \\ &\quad - \int_0^t \oint_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{ij}^S(x, \xi; t - \tau) & Q_i^S(x, \xi; t - \tau) \\ T_j^f(x, \xi; t - \tau) & Q^f(x, \xi; t - \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(x; \tau) \\ p(x; \tau) \end{bmatrix} d\Gamma \end{aligned} \quad (5.155)$$



# CHAPITRE 6

---

## Équations intégrales de frontière et solutions fondamentales pour les sols non-saturés

### 6.1 Problèmes dynamiques

DANS le chapitre 3, le modèle de couplage hydro-mécanique dans les milieux poreux non saturés soumis aux chargements dynamiques a été bien décrit [234, 236]. Ce modèle phénoménologique est présenté en se basant sur les observations expérimentales et la théorie de la poromécanique. Cela est obtenu dans le cadre du modèle mathématique présenté par Gatmiri [143] et Gatmiri et al. [150] en utilisant la succion comme une variable indépendante.

Les équations de la conservation de la masse pour tous les constituants et l'équation de la conservation de la quantité de mouvement ont été utilisées pour dériver les équations de champs. Dans ce modèle, l'effet de déformation sur la distribution de succion dans le squelette solide et l'effet inverse sont inclus via des surfaces d'état en indice des vides «  $e$  » et en degré de saturation «  $S_r$  ». La loi de Darcy généralisée a été utilisée pour décrire l'écoulement de l'eau et de l'air dans le milieu poreux non-saturé. Quant à la modélisation du comportement dynamique des sols non saturés, deux variables d'état indépendantes, la contrainte nette et la succion, ont été considérées. Aussi, les équations concernant le comportement dynamique des sols non saturés sont dérivées en considérant le déplacement du squelette solide «  $u$  », la pression de l'eau «  $p_w$  » et la pression de l'air «  $p_a$  » comme les degrés de liberté.

Pour une consultation plus facile, on récapitule brièvement ci-dessous le système d'équations obtenu. Le but général de cette section est d'établir les équations intégrales de frontière et les solutions fondamentales correspondant à ce système-ci dans les deux cas 2D et 3D. Elles seront dérivées d'une manière qui permet une discrétisation et une mise en œuvre facile dans un code d'éléments de frontière.

### 6.1.1 Système d'équations de champs

Le système d'équations régissant le comportement dynamique des milieux poreux non saturés se compose des éléments suivants :

#### Conservation de la quantité de mouvement :

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_a)_{,j} + p_{a,i} + f_i = \rho\ddot{u}_i \quad (6.1)$$

où  $\sigma_{ij}$  est le tenseur de contrainte totale,  $\delta_{ij}$  est le delta de Kronecker,  $p_a$  est la pression interstitielle de l'air,  $f_i$  est la force volumique par unité de volume,  $\rho = \rho_s(1 - n) + \rho_w n_w + \rho_a n_a$  est la masse volumique du système squelette/eau/air et  $u_i$  est le déplacement du squelette solide. Cette équation est obtenue en supposant que les accélérations de l'eau et de l'air par rapport au squelette solide sont négligeables ( $\ddot{\mathbf{w}}^w/\ddot{\mathbf{u}} \rightarrow 0$ ,  $\ddot{\mathbf{w}}^a/\ddot{\mathbf{u}} \rightarrow 0$ ).

#### Loi de comportement du squelette solide :

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_a) = (\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}) - F_{ij}^s(p_a - p_w) \quad (6.2)$$

Dans cette équation constitutive  $(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_a)$  et  $(p_a - p_w)$  indiquent respectivement le tenseur de contrainte totale nette et la succion,  $p_w$  est la pression interstitielle de l'eau,  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé qui dans un sol non saturé dépendent des variables indépendantes  $(\sigma - p_a)$  et  $(p_a - p_w)$ .  $\varepsilon_{ij}$  est la déformation totale du squelette et  $F_{ij}^s = D_{ijkl}(D_{lk}^{suc})^{-1}$  dans laquelle  $D_{ijkl}$  est la matrice de rigidité élastique linéaire et  $D_{lk}^{suc} = \beta_{suc}[1, 1, 0]^T$  où  $\beta_{suc}$  s'obtient à partir de la surface d'état de l'indice des vides «  $e$  ».

#### Conservation de la masse d'eau :

$$\dot{w}_{i,i} = -S_w\dot{\varepsilon}_{ii} + C_{ww}\dot{p}_w + C_{wa}\dot{p}_a \quad (6.3)$$

où  $\mathbf{w}^w$  est le déplacement relatif de l'eau par rapport au squelette solide,  $S_w$  est le degré de saturation par rapport à l'eau  $w$ ,  $C_{ww} = (ng_1 - C_w n S_w)$  dans laquelle  $n$  est la porosité,  $g_1 = D^s S_w / D(p_a - p_w)$ ,  $C_w$  est la compressibilité de l'eau et  $C_{wa} = -ng_1$ .

#### Équation d'écoulement de l'eau :

$$-p_{w,i} = \rho_w \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\dot{\mathbf{w}}^w}{k_w} \quad (6.4)$$

où  $k_w$  désigne la perméabilité à l'eau dans un sol non saturé.

**Conservation de la masse d'air :**

$$\dot{w}_{i,i}^a = -S_a \dot{\varepsilon}_{ii} + C_{wa} \dot{p}_w + C_{aa} \dot{p}_a \quad (6.5)$$

où  $w^a$  est le déplacement relatif de l'air par rapport au squelette solide,  $S_a$  est le degré de saturation par rapport à l'air  $a$ ,  $C_{aa} = (ng_1 - C_a n S_a)$  dans laquelle  $C_a$  est la compressibilité de l'air et  $C_{aw} = -ng_1$ .

**Équation d'écoulement de l'air :**

$$-p_{a,i} = \rho_a \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\dot{\mathbf{w}}^a}{k_a} \quad (6.6)$$

où  $k_a$  désigne la perméabilité à l'air dans un sol non saturé.

En introduisant (6.2) dans (6.1), (6.4) dans (6.3) et (6.6) dans (6.5), on trouve le système final des équations de champs régissant le comportement dynamique des milieux poreux non-saturés :

$$(\lambda + \mu)u_{\beta,\alpha\beta} + \mu u_{\alpha,\beta\beta} + F^s p_{w,\alpha} + (1 - F^s) p_{a,\alpha} - \rho \ddot{u}_\alpha + f_\alpha = 0 \quad (6.7)$$

$$-S_w \dot{u}_{\alpha,\alpha} + \rho_w k_w \ddot{u}_{\alpha,\alpha} + k_w p_{w,\alpha\alpha} + C_{ww} \dot{p}_w + C_{wa} \dot{p}_a = 0 \quad (6.8)$$

$$-S_a \dot{u}_{\alpha,\alpha} + \rho_a k_a \ddot{u}_{\alpha,\alpha} + k_a p_{a,\alpha\alpha} + C_{wa} \dot{p}_w + C_{aa} \dot{p}_a = 0 \quad (6.9)$$

En prenant la transformée de Laplace (équation 5.19) pour éliminer la variable temps et en supposant des conditions initiales nulles,

$$u_{i(t=0)} = w_{i(t=0)}^w = w_{i(t=0)}^a = 0 \quad (6.10)$$

$$p_{w(t=0)} = p_{a(t=0)} = 0 \quad (6.11)$$

les équations (6.7, 6.8, 6.9) s'écrivent dans le domaine de Laplace sous la forme suivante :

$$(\lambda + \mu) \tilde{u}_{\beta,\alpha\beta} + \mu \tilde{u}_{\alpha,\beta\beta} + F^s \tilde{p}_{w,\alpha} + (1 - F^s) \tilde{p}_{a,\alpha} - \rho s^2 \tilde{u}_\alpha + \tilde{f}_\alpha = 0 \quad (6.12)$$

$$-s \theta_1 \tilde{u}_{\alpha,\alpha} + k_w \tilde{p}_{w,\alpha\alpha} + C_{ww} s \tilde{p}_w + C_{wa} s \tilde{p}_a = 0 \quad (6.13)$$

$$-s \theta_2 \tilde{u}_{\alpha,\alpha} + C_{wa} s \tilde{p}_w + k_a \tilde{p}_{a,\alpha\alpha} + C_{aa} s \tilde{p}_a = 0 \quad (6.14)$$

où  $\theta_1 = (S_w - \rho_w k_w s)$  et  $\theta_2 = (S_a - \rho_a k_a s)$ . Ce système d'équations peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \tilde{u}_\alpha \\ \tilde{p}_w \\ \tilde{p}_a \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{f}_\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

où  $\mathbf{B}$  est la matrice d'opérateurs différentiels :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (\mu \nabla^2 - \rho s^2) \delta_{\alpha\beta} + (\lambda + \mu) \partial_\alpha \partial_\beta & F^s \partial_\alpha & (1 - F^s) \partial_\alpha \\ -s \theta_1 \partial_\beta & k_w \nabla^2 + C_{ww} s & C_{wa} s \\ -s \theta_2 \partial_\beta & C_{wa} s & k_a \nabla^2 + C_{aa} s \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

dans laquelle  $\alpha, \beta = 1, 2$  pour les problèmes bi-dimensionnels et  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  pour les problèmes tri-dimensionnels,  $\partial_\alpha$  désigne la dérivée partielle par rapport à  $x_\alpha$  et  $\nabla^2 = \partial_\alpha \partial_\alpha$  est l'opérateur laplacien. Les éléments sur les diagonales secondaires indiquent que cet opérateur est *non auto-adjoint*.

### 6.1.2 Équations intégrales de frontière pour l'analyse du comportement dynamique des sols non saturés

À l'état de l'art actuel, les équations intégrales de frontière pour le comportement dynamique des milieux poreux non-saturés n'ont pas été encore obtenues. Notre objectif est de parvenir à ces équations intégrales à un tel niveau qu'on puisse les appliquer aux problèmes physiques significatifs. Les solutions fondamentales correspondantes pour les deux cas 2D et 3D seront dérivées dans la section (6.1.3). Grâce à la méthode des éléments de frontière, une discrétisation et une mise en œuvre facile peuvent être faites dans un code numérique. À cette fin, la présente section est consacrée à la dérivation d'un ensemble d'équations intégrales de frontière pour la poroélasticité multiphasique dynamique en utilisant la méthode des résidus pondérés. Le détail de cette méthode est bien expliqué dans le chapitre précédent. Dans cette méthode, l'équation intégrale peut être dérivée directement en égalisant le produit scalaire des équations (6.12, 6.13, 6.14), écrites sous la forme matricielle avec la matrice d'opérateurs différentiels  $\mathbf{B}$  définie dans (6.16), et la matrice des solutions fondamentales adjointes  $\mathbf{G}$  (5.32) à un vecteur nul, c.-à-d.

$$\int_{\Omega} \mathbf{B} \begin{bmatrix} \tilde{u}_\alpha \\ \tilde{p}_w \\ \tilde{p}_a \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}} d\Omega = 0 \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{\alpha\beta} & \tilde{G}_{\alpha w} & \tilde{G}_{\alpha a} \\ \tilde{G}_{w\beta} & \tilde{G}_{ww} & \tilde{G}_{wa} \\ \tilde{G}_{a\beta} & \tilde{G}_{aw} & \tilde{G}_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{\alpha\beta}^S & \tilde{U}_\alpha^W & \tilde{U}_\alpha^A \\ \tilde{P}_\beta^{wS} & \tilde{P}^{wW} & \tilde{P}^{wA} \\ \tilde{P}_\beta^{aS} & \tilde{P}^{aW} & \tilde{P}^{aA} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

où  $\alpha, \beta = 1, 2$  pour les problèmes bi-dimensionnels et  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  pour les problèmes tri-dimensionnels. Dans cette équation, l'intégration est effectuée sur un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ , en supposant que les forces volumiques et les sources d'injection des fluides sont nulles.

L'équation (6.17) peut s'écrire avec la notation indicielle :

$$\int_{\Omega} \left[ (\lambda + \mu) \tilde{G}_{\alpha j} \tilde{u}_{\beta, \beta \alpha} + \mu \tilde{G}_{\alpha j} \Delta \tilde{u}_\alpha - \rho s^2 \tilde{u}_\alpha \tilde{G}_{\alpha j} + F^s \tilde{G}_{\alpha j} \tilde{p}_{w, \alpha} + (1 - F^s) \tilde{G}_{\alpha j} \tilde{p}_{a, \alpha} \right. \\ \left. + k_w \tilde{G}_{w j} \Delta \tilde{p}_w - s \theta_1 \tilde{G}_{w j} \tilde{u}_{\alpha, \alpha} + C_{ww} s \tilde{G}_{w j} \tilde{p}_w + C_{wa} s \tilde{G}_{w j} \tilde{p}_a \right. \\ \left. + k_a \tilde{G}_{a j} \Delta \tilde{p}_a - s \theta_2 \tilde{G}_{a j} \tilde{u}_{\alpha, \alpha} + C_{wa} s \tilde{G}_{a j} \tilde{p}_w + C_{aa} s \tilde{G}_{a j} \tilde{p}_a \right] d\Omega = 0 \quad (6.18)$$

où  $i, j = 1, 2, 3, 4$  pour les problèmes bi-dimensionnels et  $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$  pour les problèmes tri-dimensionnels.

Comme montré dans le chapitre précédent, en faisant l'intégration par parties sur le domaine pour chaque terme dans (6.18) et en utilisant le théorème de Green, l'opérateur  $\mathbf{B}$  se transforme d'une action sur le vecteur des inconnues  $\tilde{u}_i = [ \tilde{u}_\alpha \quad \tilde{p}_w \quad \tilde{p}_a ]^T$  en une action sur la matrice des solutions fondamentales  $\tilde{\mathbf{G}}$ . Ceci aboutit au système d'équations intégrales suivant écrit avec la notation indicielle :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} [(\lambda \tilde{u}_{k,k} - F^s (\tilde{p}_a - \tilde{p}_w) + \tilde{p}_a) n_\beta \delta_{\alpha\beta} + \mu (\tilde{u}_{\beta,\alpha} + \tilde{u}_{\alpha,\beta}) n_\beta] \tilde{\mathbf{G}}_{\alpha j} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \tilde{u}_\alpha \left[ (\lambda \tilde{\mathbf{G}}_{kj,k} + s\theta_1 \tilde{\mathbf{G}}_{wj} + s\theta_2 \tilde{\mathbf{G}}_{aj}) n_\beta \delta_{\alpha\beta} + \mu (\tilde{\mathbf{G}}_{\alpha j,\beta} + \tilde{\mathbf{G}}_{\beta j,\alpha}) n_\beta \right] d\Gamma \\ & + k_w \int_{\Gamma} (\tilde{p}_{w,n} \tilde{\mathbf{G}}_{wj} - \tilde{p}_w \tilde{\mathbf{G}}_{wj,n}) d\Gamma + k_a \int_{\Gamma} (\tilde{p}_{a,n} \tilde{\mathbf{G}}_{aj} - \tilde{p}_a \tilde{\mathbf{G}}_{aj,n}) d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \tilde{u}_i B_{im}^* \tilde{\mathbf{G}}_{mj} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

dans laquelle

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} (\mu \nabla^2 - \rho s^2) \delta_{\alpha\beta} + (\lambda + \mu) \partial_\alpha \partial_\beta & s\theta_1 \partial_\alpha & s\theta_2 \partial_\alpha \\ -F^s \partial_\beta & k_w \nabla^2 + C_{ww} s & C_{wa} s \\ -(1 - F^s) \partial_\beta & C_{wa} s & k_a \nabla^2 + C_{aa} s \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Comme mentionné dans l'équation (5.32),  $\tilde{\mathbf{G}}$  doit être solution de la matrice d'opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$  comme suit :

$$\mathbf{B}^* \mathbf{G} + \mathbf{I} \delta(x - \xi) = \mathbf{0} \quad (6.21)$$

Donc, en introduisant l'équation (6.21) dans l'équation (6.19) et en utilisant la propriété de la distribution de Dirac  $\delta(x - \xi)$ , on aura [233, 234] :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_{\alpha\beta}(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & c(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & c(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_\alpha(\xi; s) \\ \tilde{p}_w(\xi; s) \\ \tilde{p}_a(\xi; s) \end{bmatrix} = \\ & \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{U}_{\alpha\beta}^S(x, \xi; s) & -\tilde{P}_\alpha^{wS}(x, \xi; s) & -\tilde{P}_\alpha^{aS}(x, \xi; s) \\ \tilde{U}_\beta^W(x, \xi; s) & -\tilde{P}^{wW}(x, \xi; s) & -\tilde{P}^{aW}(x, \xi; s) \\ \tilde{U}_\beta^A(x, \xi; s) & -\tilde{P}^{wA}(x, \xi; s) & -\tilde{P}^{aA}(x, \xi; s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_\alpha(x; s) \\ \tilde{q}_w(x; s) \\ \tilde{q}_a(x; s) \end{bmatrix} d\Gamma \\ & - \oint_{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{T}_{\alpha\beta}^S(x, \xi; s) & \tilde{Q}_\alpha^{wS}(x, \xi; s) & \tilde{Q}_\alpha^{aS}(x, \xi; s) \\ \tilde{T}_\beta^W(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{wW}(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{aW}(x, \xi; s) \\ \tilde{T}_\beta^A(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{wA}(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{aA}(x, \xi; s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_\alpha(x; s) \\ \tilde{p}_w(x; s) \\ \tilde{p}_a(x; s) \end{bmatrix} d\Gamma \end{aligned} \quad (6.22)$$

où le vecteur de contrainte, le flux normal de l'eau et le flux normal de l'air sont respectivement :

$$\tilde{t}_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} n_\beta = [(\lambda \tilde{u}_{k,k} - F^s (\tilde{p}_a - \tilde{p}_w) + \tilde{p}_a) \delta_{\alpha\beta} + \mu (\tilde{u}_{\beta,\alpha} + \tilde{u}_{\alpha,\beta})] n_\beta \quad (6.23)$$

$$\tilde{q}_w = -k_w (\tilde{p}_{w,\beta} + \rho_w s^2 \tilde{u}_\beta) n_\beta \quad (6.24)$$

$$\tilde{q}_a = -k_a (\tilde{p}_{a,\beta} + \rho_a s^2 \tilde{u}_\beta) n_\beta \quad (6.25)$$

Également,  $\tilde{T}^S$ ,  $\tilde{Q}^{wS}$  et  $\tilde{Q}^{aS}$  peuvent être interprétés comme étant respectivement les termes adjoints au vecteur de contrainte  $\tilde{\mathbf{t}}$ , au flux de l'eau  $\tilde{q}_w$  et au flux de l'air  $\tilde{q}_a$  :

$$\tilde{T}_{\alpha\beta}^S = \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k\beta,k}^S + sS_w \tilde{P}_\beta^{wS} + sS_a \tilde{P}_\beta^{aS} \right) \delta_{\alpha l} + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha\beta,l}^S + \tilde{U}_{l\beta,\alpha}^S \right) \right] n_l \quad (6.26)$$

$$\tilde{T}_\alpha^W = \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k,k}^W + sS_w \tilde{P}^{wW} + sS_a \tilde{P}^{aW} \right) \delta_{\alpha l} + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha,l}^W + \tilde{U}_{l,\alpha}^W \right) \right] n_l \quad (6.27)$$

$$\tilde{T}_\alpha^A = \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k,k}^A + sS_w \tilde{P}^{wA} + sS_a \tilde{P}^{aA} \right) \delta_{\alpha l} + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha,l}^A + \tilde{U}_{l,\alpha}^A \right) \right] n_l \quad (6.28)$$

$$\tilde{Q}_\alpha^{wS} = k_w \tilde{P}_{\alpha,l}^{wS} n_l \quad (6.29)$$

$$\tilde{Q}^{wW} = k_w \tilde{P}_{,l}^{wW} n_l \quad (6.30)$$

$$\tilde{Q}^{wA} = k_w \tilde{P}_{,l}^{wA} n_l \quad (6.31)$$

$$\tilde{Q}_\alpha^{aS} = k_a \tilde{P}_{\alpha,l}^{aS} n_l \quad (6.32)$$

$$\tilde{Q}^{aW} = k_a \tilde{P}_{,l}^{aW} n_l \quad (6.33)$$

$$\tilde{Q}^{aA} = k_a \tilde{P}_{,l}^{aA} n_l \quad (6.34)$$

Dans la définition du flux de l'eau  $\tilde{q}_w$  et de l'air  $\tilde{q}_a$  les versions simplifiées de la loi de Darcy (6.4, 6.6) sont utilisées. Cependant, dans leurs termes adjoints  $\tilde{Q}_\alpha^{wS}$ ,  $\tilde{Q}_\alpha^{aS}$  et dans leurs solutions fondamentales correspondantes  $\tilde{Q}^{wW}$ ,  $\tilde{Q}^{aA}$  seules les versions quasi-statiques de la loi de Darcy sont trouvées. Ceci est dû à l'omission des effets d'inertie dans les fluides.

L'équation intégrale de frontière dépendant du temps pour le comportement dynamique des sols non saturés peut être obtenue par une transformation au domaine temporel [234] :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_{\alpha\beta}(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & c(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & c(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\alpha(\xi; t) \\ p_w(\xi; t) \\ p_a(\xi; t) \end{bmatrix} = \\ & \int_0^t \int_\Gamma \begin{bmatrix} U_{\alpha\beta}^S(x, \xi; t - \tau) & -P_\alpha^{wS}(x, \xi; t - \tau) & -P_\alpha^{aS}(x, \xi; t - \tau) \\ U_\beta^W(x, \xi; t - \tau) & -P^{wW}(x, \xi; t - \tau) & -P^{aW}(x, \xi; t - \tau) \\ U_\beta^A(x, \xi; t - \tau) & -P^{wA}(x, \xi; t - \tau) & -P^{aA}(x, \xi; t - \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_\alpha(x; \tau) \\ q_w(x; \tau) \\ q_a(x; \tau) \end{bmatrix} d\Gamma dt \\ & - \int_0^t \oint_\Gamma \begin{bmatrix} T_{\alpha\beta}^S(x, \xi; t - \tau) & Q_\alpha^{wS}(x, \xi; t - \tau) & Q_\alpha^{aS}(x, \xi; t - \tau) \\ T_\beta^W(x, \xi; t - \tau) & Q^{wW}(x, \xi; t - \tau) & Q^{aW}(x, \xi; t - \tau) \\ T_\beta^A(x, \xi; t - \tau) & Q^{wA}(x, \xi; t - \tau) & Q^{aA}(x, \xi; t - \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\alpha(x; \tau) \\ p_w(x; \tau) \\ p_a(x; \tau) \end{bmatrix} d\Gamma dt \end{aligned} \quad (6.35)$$

### 6.1.3 Solutions fondamentales pour l'analyse du comportement dynamique des sols non saturés

Dans cette section, les solutions fondamentales 2D et 3D pour le modèle dynamique des sols non saturés seront obtenues dans le domaine de Laplace en utilisant la méthode de Hörmander [182] ou Kupradze et al. [208]. L'idée centrale de cette méthode est clairement expliquée dans la section (5.2.2.1). Comme l'opérateur différentiel régissant le comportement dynamique des milieux poreux non saturés  $\mathbf{B}$  n'est pas auto-adjoint (6.16), ici, les solutions pour l'opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$  (6.20) seront dérivées.

D'après l'équation (5.28), d'abord, le déterminant de la matrice de l'opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$  (6.20) est calculé. Cela donne :

$$2D : \det(\mathbf{B}^*) = \mu(\lambda + 2\mu) k_w k_a (\nabla^2 - \lambda_1^2) (\nabla^2 - \lambda_2^2) (\nabla^2 - \lambda_3^2) (\nabla^2 - \lambda_4^2) \quad (6.36)$$

$$3D : \det(\mathbf{B}^*) = \mu^2 (\lambda + 2\mu) k_w k_a (\nabla^2 - \lambda_1^2)^2 (\nabla^2 - \lambda_2^2) (\nabla^2 - \lambda_3^2) (\nabla^2 - \lambda_4^2) \quad (6.37)$$

dans lesquelles  $\lambda_1^2$ ,  $\lambda_2^2$ ,  $\lambda_3^2$  et  $\lambda_4^2$  sont les racines de ces polynômes, où  $\lambda_1^2 = \rho s^2 / \mu$  correspond à la vitesse de l'onde de cisaillement se propageant dans le milieu. La partie restante des équations (6.36, 6.37) est un polynôme d'ordre 3 de  $\Delta$ , qui a trois racines  $\lambda_2^2$ ,  $\lambda_3^2$  et  $\lambda_4^2$ . Ces trois racines doivent être déterminées en utilisant les expressions suivantes :

$$\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = \frac{\rho s^2}{(\lambda + 2\mu)} + \frac{F^s \rho_w s^2}{(\lambda + 2\mu)} + \frac{\rho_a (1 - F^s) s^2}{(\lambda + 2\mu)} - \frac{C_{aa} s}{k_a} - \frac{C_{ww} s}{k_w} - \frac{S_w F^s s}{(\lambda + 2\mu) k_w} - \frac{S_a (1 - F^s) s}{(\lambda + 2\mu) k_a} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_4^2 + \lambda_3^2 \lambda_4^2 = & -\frac{\rho C_{aa} s^3}{(\lambda + 2\mu) k_a} - \frac{\rho C_{ww} s^3}{(\lambda + 2\mu) k_w} - \frac{\rho_w (F^s C_{aa} - (1 - F^s) C_{wa}) s^3}{(\lambda + 2\mu) k_a} \\ & - \frac{\rho_a (-F^s C_{wa} + (1 - F^s) C_{ww}) s^3}{(\lambda + 2\mu) k_w} + \frac{(C_{ww} C_{aa} - C_{wa}^2) s^2}{k_w k_a} \\ & + \frac{S_w (F^s C_{aa} - (1 - F^s) C_{wa}) s^2}{(\lambda + 2\mu) k_w k_a} + \frac{S_a (-F^s C_{wa} + (1 - F^s) C_{ww}) s^2}{(\lambda + 2\mu) k_w k_a} \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\lambda_2^2 \lambda_3^2 \lambda_4^2 = \frac{\rho (C_{ww} C_{aa} - C_{wa}^2) s^4}{(\lambda + 2\mu) k_w k_a} \quad (6.40)$$

Ces trois racines correspondent aux *trois* ondes de compression qui sont affectées par le degré de saturation et la distribution spatiale des fluides dans le milieu.

Biot a démontré l'existence de deux types d'ondes de compression dans un milieu complètement saturé ( $P_1$  et  $P_2$ ), tandis que dans le cas des sols non saturés où les espaces poreux sont remplis par deux fluides immiscibles, les forces capillaires sont importantes et l'existence d'une troisième onde de compression  $P_3$  (c.-à-d., une deuxième onde lente) est prédite dans le milieu [65].

À partir des équations (6.38, 6.39, 6.40) les coefficients complexes  $\lambda_2^2$ ,  $\lambda_3^2$  et  $\lambda_4^2$  peuvent être déterminés comme les racines de l'équation cubique suivante :

$$(\lambda^2)^3 + [-(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2)] (\lambda^2)^2 + [(\lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_4^2 + \lambda_3^2 \lambda_4^2)] (\lambda^2) + [-(\lambda_2^2 \lambda_3^2 \lambda_4^2)] = 0 \quad (6.41)$$

Maintenant, on peut calculer les éléments de la matrice des cofacteurs  $\mathbf{B}^{*co}$  en utilisant l'équation (5.24) :

$$2D : \mathbf{B}^{*co} = \begin{bmatrix} B_{\alpha\beta}^{*co} & B_{\alpha w}^{*co} & B_{\alpha a}^{*co} \\ B_{w\beta}^{*co} & B_{ww}^{*co} & B_{wa}^{*co} \\ B_{a\beta}^{*co} & B_{aw}^{*co} & B_{aa}^{*co} \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

$$3D : \mathbf{B}^{*co} = \mu (\nabla^2 - \lambda_1^2) \begin{bmatrix} B_{\alpha\beta}^{*co} & B_{\alpha w}^{*co} & B_{\alpha a}^{*co} \\ B_{w\beta}^{*co} & B_{ww}^{*co} & B_{wa}^{*co} \\ B_{a\beta}^{*co} & B_{aw}^{*co} & B_{aa}^{*co} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

où

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta}^{*co} &= \delta_{\alpha\beta} (\lambda + 2\mu) k_w k_a (\nabla^2 - \lambda_2^2) (\nabla^2 - \lambda_3^2) (\nabla^2 - \lambda_4^2) \\ &\quad - \partial_\alpha \partial_\beta \left\{ k_w k_a (\lambda + \mu) \nabla^4 + \right. \\ &\quad \left[ (1 - F^s) k_w (S_a - k_a \rho_a s) + F^s k_a (S_w - k_w \rho_w s) + (\lambda + \mu) (C_{aa} k_w + C_{ww} k_a) \right] s \nabla^2 + \\ &\quad \left[ (\lambda + \mu) (C_{ww} C_{aa} - C_{wa}^2) + C_{aa} F^s (S_w - k_w \rho_w s) - C_{wa} (1 - F^s) (S_w - k_w \rho_w s) \right. \\ &\quad \left. \left. + C_{ww} (1 - F^s) (S_a - k_a \rho_a s) - C_{wa} F^s (S_a - k_a \rho_a s) \right] s^2 \right\} \end{aligned}$$

$$B_{w\beta}^{*co} = \left\{ \mu F^s k_a \nabla^4 + \left[ -\mu C_{wa} (1 - F^s) + \mu C_{aa} F^s - \rho F^s k_a s \right] s \nabla^2 + \left[ \rho C_{wa} (1 - F^s) - \rho C_{aa} F^s \right] s^3 \right\} \partial_\beta$$

$$B_{a\beta}^{*co} = \left\{ \mu (1 - F^s) k_w \nabla^4 + \left[ \mu C_{ww} (1 - F^s) - \mu C_{wa} F^s - \rho (1 - F^s) k_w s \right] s \nabla^2 + \left[ -\rho C_{ww} (1 - F^s) + \rho C_{wa} F^s \right] s^3 \right\} \partial_\beta$$

$$\begin{aligned} B_{\alpha w}^{*co} &= \left\{ (-\mu S_w k_a + \mu k_w k_a \rho_w s) s \nabla^4 + \right. \\ &\quad \left[ \mu (C_{wa} S_a - C_{aa} S_w) + (\mu (-C_{wa} k_a \rho_a + k_w \rho_w C_{aa}) + \rho S_w k_a) s - \rho k_w k_a \rho_w s^2 \right] s^2 \nabla^2 + \\ &\quad \left. \left[ -\rho (C_{wa} S_a - C_{aa} S_w) + \rho (C_{wa} k_a \rho_a - k_w \rho_w C_{aa}) s \right] s^4 \right\} \partial_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{ww}^{*co} &= \mu (\lambda + 2\mu) k_a \nabla^6 + \\ &\quad \left[ C_{aa} \mu (\lambda + 2\mu) + \mu (1 - F^s) S_a - (\mu (1 - F^s) k_a \rho_a + \rho (\lambda + 2\mu) k_a + \mu \rho k_a) s \right] s \nabla^4 + \\ &\quad \left[ -\rho (1 - F^s) S_a - \rho C_{aa} (\lambda + 2\mu) - \mu C_{aa} \rho + (\rho (1 - F^s) k_a \rho_a + \rho^2 k_a) s \right] s^3 \nabla^2 \\ &\quad + C_{aa} \rho^2 s^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{aw}^{*co} &= \mu \left[ -C_{wa}(\lambda + 2\mu) - (1 - F^s)S_w + (1 - F^s)k_w\rho_w s \right] s\nabla^4 + \\
&\quad \left[ \rho C_{wa}(\lambda + 2\mu) + \rho(1 - F^s)S_w + \mu C_{wa}\rho - \rho(1 - F^s)k_w\rho_w s \right] s^3\nabla^2 - C_{wa}\rho^2 s^5 \\
B_{\alpha a}^{*co} &= \left\{ (-\mu S_a k_w + \mu k_w k_a \rho_a s) s\nabla^4 + \right. \\
&\quad \left[ \mu(C_{wa}S_w - C_{ww}S_a) + (\mu(-C_{wa}k_w\rho_w + k_a\rho_a C_{ww}) + \rho S_a k_w) s - \rho k_w k_a \rho_a s^2 \right] s^2\nabla^2 + \\
&\quad \left. \left[ -\rho(C_{wa}S_w - C_{ww}S_a) + \rho(C_{wa}k_w\rho_w - k_a\rho_a C_{ww}) s \right] s^4 \right\} \partial_\alpha \\
B_{wa}^{*co} &= \mu \left[ -C_{wa}(\lambda + 2\mu) - F^s S_a + F^s k_a \rho_a s \right] s\nabla^4 + \left[ \rho C_{wa}(\lambda + 2\mu) + \rho F^s S_a + \mu C_{wa}\rho - \right. \\
&\quad \left. \rho F^s k_a \rho_a s \right] s^3\nabla^2 - C_{wa}\rho^2 s^5 \\
B_{aa}^{*co} &= \mu(\lambda + 2\mu)k_w\nabla^6 + \\
&\quad \left[ C_{ww}\mu(\lambda + 2\mu) + \mu F^s S_w - (\rho(\lambda + 2\mu)k_w + \mu\rho_w k_w F^s + \mu\rho k_w) s \right] s\nabla^4 + \\
&\quad \left[ -\rho C_{ww}(\lambda + 2\mu) - \mu C_{ww}\rho - \rho F^s S_w + (\rho F^s k_w\rho_w + \rho^2 k_w) s \right] s^3\nabla^2 + C_{ww}\rho^2 s^5
\end{aligned}$$

En remplaçant le déterminant de la matrice de l'opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$  (6.36, 6.37), l'équation scalaire correspondant à (5.28) s'obtient comme suit :

$$(\nabla^2 - \lambda_1^2) (\nabla^2 - \lambda_2^2) (\nabla^2 - \lambda_3^2) (\nabla^2 - \lambda_4^2) \Phi + \delta(x - \xi) = 0 \quad (6.44)$$

avec l'abréviation

$$2D : \quad \Phi = \mu(\lambda + 2\mu) k_w k_a \varphi \quad (6.45)$$

$$3D : \quad \Phi = \mu^2(\lambda + 2\mu) k_w k_a (\nabla^2 - \lambda_1^2) \varphi \quad (6.46)$$

L'équation (6.44) peut être exprimée comme l'une des quatre équations (6.47), (6.48), (6.49) ou (6.50) :

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 - \lambda_1^2) \varphi_1 + \delta(x - \xi) &= 0 \\
\varphi_1 &= (\nabla^2 - \lambda_2^2) (\nabla^2 - \lambda_3^2) (\nabla^2 - \lambda_4^2) \Phi
\end{aligned} \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 - \lambda_2^2) \varphi_2 + \delta(x - \xi) &= 0 \\
\varphi_2 &= (\nabla^2 - \lambda_1^2) (\nabla^2 - \lambda_3^2) (\nabla^2 - \lambda_4^2) \Phi
\end{aligned} \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 - \lambda_3^2) \varphi_3 + \delta(x - \xi) &= 0 \\
\varphi_3 &= (\nabla^2 - \lambda_1^2) (\nabla^2 - \lambda_2^2) (\nabla^2 - \lambda_4^2) \Phi
\end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 - \lambda_4^2) \varphi_4 + \delta(x - \xi) &= 0 \\
\varphi_4 &= (\nabla^2 - \lambda_1^2) (\nabla^2 - \lambda_2^2) (\nabla^2 - \lambda_3^2) \Phi
\end{aligned} \quad (6.50)$$

Les équations ci-dessus ne sont autres que les équations de Helmholtz. Les solutions fondamentales de telles équations pour un domaine complètement symétrique dans les deux cas 2D et 3D sont respectivement :

$$2D : \varphi_i = \frac{K_0(\lambda_i r)}{2\pi}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (6.51)$$

$$3D : \varphi_i = \frac{\exp(-\lambda_i r)}{4\pi r}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (6.52)$$

où  $r = |\mathbf{x} - \xi|$  dénote la distance entre les deux points d'observation  $\mathbf{x}$  et la source  $\xi$ .

Par définition de  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  et  $\varphi_4$ , on en déduit :

$$(\nabla^2 - \lambda_4^2) \Phi = \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \left[ \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\lambda_3^2 - \lambda_2^2} - \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{\lambda_3^2 - \lambda_1^2} \right] \quad (6.53)$$

$$(\nabla^2 - \lambda_3^2) \Phi = -\frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \left[ \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{\lambda_4^2 - \lambda_1^2} - \frac{\varphi_4 - \varphi_2}{\lambda_4^2 - \lambda_2^2} \right] \quad (6.54)$$

La fonction  $\Phi$  est donc déterminée :

$$\Phi = \frac{1}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} \left[ \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\lambda_3^2 - \lambda_2^2} - \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{\lambda_3^2 - \lambda_1^2} + \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{\lambda_4^2 - \lambda_1^2} - \frac{\varphi_4 - \varphi_2}{\lambda_4^2 - \lambda_2^2} \right] \quad (6.55)$$

En remplaçant les équations (6.51, 6.52) dans (6.55), on obtient :

$$2D : \Phi = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \frac{K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} + \frac{K_0(\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} \right] \quad (6.56)$$

$$3D : \Phi = \frac{1}{4\pi r} \left[ \frac{\exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} + \frac{\exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} \right] \quad (6.57)$$

avec la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre zéro  $K_0(\lambda_i r)$ .

Ayant en vue que la transformée de Laplace de la fonction qui décrit un front d'onde avec une constante de vitesse  $c$  est  $\exp(-rs/c) = \mathcal{L}\{H(t - r/c)\}$  (3D), il est évident que l'équation ci-dessus (6.57) représente les quatre ondes de compression et de cisaillement propagées dans le milieu non saturé. Comme les racines  $\lambda_i, i = 2, 3, 4$  sont fonctions de  $s$ , les vitesses de l'onde de compression sont dépendantes du temps. Ceci représente l'atténuation dans un milieu poroélastique [298]. Au contraire, la vitesse de l'onde de cisaillement  $\lambda_1$  n'est plus dépendante du temps. Autrement dit, elle n'est pas atténuée. Le terme  $s$  dans l'expression  $\lambda_1$  appartient à la fonction exponentielle  $\exp(-rs/c)$  et non pas à la vitesse de l'onde de cisaillement  $c_2$  [298]. La même interprétation est valable pour le cas 2D où les fronts d'ondes amorties sont représentés dans le domaine de Laplace par la fonction de Bessel modifiée  $K_0(z)$ .

En tenant compte de la relation appropriée entre  $\varphi$  et  $\Phi$  (6.45, 6.46) et en appliquant ultérieurement la matrice d'opérateur  $\mathbf{B}^{*co}$  (6.42, 6.43) à la solution  $\varphi(r, s)$  (d'après l'équation (5.30)), les solutions fondamentales pour les sols non saturés soumis aux chargements dynamiques dans les deux cas 2D et 3D s'obtiennent [234, 238].

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{\alpha\beta} & \tilde{G}_{\alpha w} & \tilde{G}_{\alpha a} \\ \tilde{G}_{w\beta} & \tilde{G}_{ww} & \tilde{G}_{wa} \\ \tilde{G}_{a\beta} & \tilde{G}_{aw} & \tilde{G}_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{\alpha\beta}^S & \tilde{U}_{\alpha}^W & \tilde{U}_{\alpha}^A \\ \tilde{P}_{\beta}^{wS} & \tilde{P}^{wW} & \tilde{P}^{wA} \\ \tilde{P}_{\beta}^{aS} & \tilde{P}^{aW} & \tilde{P}^{aA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\alpha\beta}^{*co} & B_{\alpha w}^{*co} & B_{\alpha a}^{*co} \\ B_{w\beta}^{*co} & B_{ww}^{*co} & B_{wa}^{*co} \\ B_{a\beta}^{*co} & B_{aw}^{*co} & B_{aa}^{*co} \end{bmatrix} \frac{\Phi}{\mu(\lambda + 2\mu)k_w k_a} \quad (6.58)$$

Il faut préciser que les expressions des dérivées partielles de  $\Phi(r, s)$  sont données dans l'annexe (A.1).

Après quelques manipulations algébriques, on trouve les formes explicites des solutions fondamentales comme suit :

#### solutions 2D :

- *déplacement du squelette solide dans la direction  $\alpha$  dû à la force ponctuelle impulsionnelle dans le solide dans la direction  $\beta$*

$$\tilde{U}_{\alpha\beta}^S = \frac{1}{2\pi\mu} \left\{ \begin{array}{l} \frac{-(\lambda + \mu)\Lambda^2}{\rho s^2} \frac{(\lambda_1^2 - K_{ss1}^2)(\lambda_1^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)} (R_1\lambda_1 K_1(\lambda_1 r) + R_2\lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r)) + \\ \frac{-(\lambda + \mu)\Lambda^2}{\rho s^2} \frac{(\lambda_2^2 - K_{ss1}^2)(\lambda_2^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} (R_1\lambda_2 K_1(\lambda_2 r) + R_2\lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r)) + \\ \frac{-(\lambda + \mu)\Lambda^2}{\rho s^2} \frac{(\lambda_3^2 - K_{ss1}^2)(\lambda_3^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} (R_1\lambda_3 K_1(\lambda_3 r) + R_2\lambda_3^2 K_0(\lambda_3 r)) + \\ \frac{-(\lambda + \mu)\Lambda^2}{\rho s^2} \frac{(\lambda_4^2 - K_{ss1}^2)(\lambda_4^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} (R_1\lambda_4 K_1(\lambda_4 r) + R_2\lambda_4^2 K_0(\lambda_4 r)) \end{array} \right\} + \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2\pi\mu} K_0(\lambda_1 r) \quad (6.59)$$

$$\text{avec } R_1 = \left( \frac{2r_{,\alpha} r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{r} \right), R_2 = r_{,\alpha} r_{,\beta}, \Lambda^2 = \frac{\rho s^2}{(\lambda + 2\mu)} \text{ et}$$

$$K_{ss1}^2 + K_{ss2}^2 = \frac{-S_w F^s s}{(\lambda + \mu)k_w} + \frac{-S_a(1 - F^s)s}{(\lambda + \mu)k_a} - \frac{(k_w C_{aa} + k_a C_{ww})s}{k_w k_a} + \frac{\rho_w F^s s^2}{(\lambda + \mu)} + \frac{\rho_a(1 - F^s)s^2}{(\lambda + \mu)}$$

$$K_{ss1}^2 K_{ss2}^2 = \left( \frac{(C_{ww} C_{aa} - C_{wa}^2)}{k_w k_a} + \frac{S_w (F^s C_{aa} - C_{wa}(1 - F^s))}{(\lambda + \mu)k_w k_a} + \frac{S_a ((1 - F^s)C_{ww} - F^s C_{wa})}{(\lambda + \mu)k_w k_a} - \frac{\rho_w (F^s C_{aa} - C_{wa}(1 - F^s))s}{(\lambda + \mu)k_a} - \frac{\rho_a (C_{ww}(1 - F^s) - F^s C_{wa})s}{(\lambda + \mu)k_w} \right) s^2$$

- *pression interstitielle de l'eau due à la force ponctuelle impulsionnelle dans le solide dans la direction  $\beta$*

$$\tilde{P}_\beta^{wS} = \frac{F^s}{2\pi(\lambda + 2\mu)k_w} r_{,\beta} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\lambda_2}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \left( \lambda_2^2 - \frac{(C_{wa}(1 - F^s) - F^s C_{aa})s}{F^s k_a} \right) K_1(\lambda_2 r) + \\ \frac{-\lambda_3}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \left( \lambda_3^2 - \frac{(C_{wa}(1 - F^s) - F^s C_{aa})s}{F^s k_a} \right) K_1(\lambda_3 r) + \\ \frac{-\lambda_4}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} \left( \lambda_4^2 - \frac{(C_{wa}(1 - F^s) - F^s C_{aa})s}{F^s k_a} \right) K_1(\lambda_4 r) \end{array} \right\} \quad (6.60)$$

- *pression interstitielle de l'air due à la force ponctuelle impulsionnelle dans le solide dans la direction  $\beta$*

$$\tilde{P}_\beta^{aS} = \frac{(1 - F^s)}{2\pi(\lambda + 2\mu)k_a} r_{,\beta} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\lambda_2}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \left( \lambda_2^2 - \frac{(C_{ww}(1 - F^s) - F^s C_{wa})s}{-(1 - F^s)k_w} \right) K_1(\lambda_2 r) + \\ \frac{-\lambda_3}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \left( \lambda_3^2 - \frac{(C_{ww}(1 - F^s) - F^s C_{wa})s}{-(1 - F^s)k_w} \right) K_1(\lambda_3 r) + \\ \frac{-\lambda_4}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} \left( \lambda_4^2 - \frac{(C_{ww}(1 - F^s) - F^s C_{wa})s}{-(1 - F^s)k_w} \right) K_1(\lambda_4 r) \end{array} \right\} \quad (6.61)$$

- *déplacement du squelette solide dans la direction  $\alpha$  dû à la source ponctuelle impulsion-*

nelle d'eau injectée

$$\tilde{U}_\alpha^W = \frac{-(S_w - \rho_w k_w s) s}{2\pi (\lambda + 2\mu) k_w} r_{,\alpha} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\lambda_2}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \left( \lambda_2^2 - \frac{(C_{wa}(S_a - \rho_a k_a s) - C_{aa}(S_w - \rho_w k_w s)) s}{k_a (S_w - \rho_w k_w s)} \right) K_1(\lambda_2 r) + \\ \frac{-\lambda_3}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \left( \lambda_3^2 - \frac{(C_{wa}(S_a - \rho_a k_a s) - C_{aa}(S_w - \rho_w k_w s)) s}{k_a (S_w - \rho_w k_w s)} \right) K_1(\lambda_3 r) + \\ \frac{-\lambda_4}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} \left( \lambda_4^2 - \frac{(C_{wa}(S_a - \rho_a k_a s) - C_{aa}(S_w - \rho_w k_w s)) s}{k_a (S_w - \rho_w k_w s)} \right) K_1(\lambda_4 r) \end{array} \right\} \quad (6.62)$$

- pression interstitielle de l'eau due à la source ponctuelle impulsionnelle d'eau injectée

$$\tilde{P}^{wW} = \frac{1}{2\pi k_w} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} (\lambda_2^2 - K_w^2) (\lambda_2^2 - \Lambda_w^2) K_0(\lambda_2 r) + \\ \frac{1}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} (\lambda_3^2 - K_w^2) (\lambda_3^2 - \Lambda_w^2) K_0(\lambda_3 r) + \\ \frac{1}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} (\lambda_4^2 - K_w^2) (\lambda_4^2 - \Lambda_w^2) K_0(\lambda_4 r) \end{array} \right\} \quad (6.63)$$

avec

$$K_w^2 \Lambda_w^2 = \frac{-\rho C_{aa} s^3}{(\lambda + 2\mu) k_a}$$

$$K_w^2 + \Lambda_w^2 = \frac{-S_a(1 - F^s) s}{(\lambda + 2\mu) k_a} - \frac{C_{aa} s}{k_a} + \frac{\rho_a(1 - F^s) s^2}{(\lambda + 2\mu)} + \frac{\rho s^2}{(\lambda + 2\mu)}$$

- pression interstitielle de l'air due à la source ponctuelle impulsionnelle d'eau injectée

$$\tilde{P}^{aW} = \frac{s}{2\pi (\lambda + 2\mu) k_w k_a} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\left( (\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_w - \rho_w k_w s) (1 - F^s) \right) \lambda_2^2 + \rho C_{wa} s^2}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} K_0(\lambda_2 r) + \\ \frac{-\left( (\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_w - \rho_w k_w s) (1 - F^s) \right) \lambda_3^2 + \rho C_{wa} s^2}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} K_0(\lambda_3 r) + \\ \frac{-\left( (\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_w - \rho_w k_w s) (1 - F^s) \right) \lambda_4^2 + \rho C_{wa} s^2}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} K_0(\lambda_4 r) \end{array} \right\} \quad (6.64)$$

- *déplacement du squelette solide dans la direction  $\alpha$  dû à la source ponctuelle impulsionnelle d'air injecté*

$$\tilde{U}_\alpha^A = \frac{(S_a - \rho_a k_a s) s}{2\pi (\lambda + 2\mu) k_a} r_{,\alpha} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda_2}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \left( \lambda_2^2 - \frac{(C_{wa}(S_w - \rho_w k_w s) - C_{ww}(S_a - \rho_a k_a s)) s}{k_w (S_a - \rho_a k_a s)} \right) K_1(\lambda_2 r) + \\ \frac{\lambda_3}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \left( \lambda_3^2 - \frac{(C_{wa}(S_w - \rho_w k_w s) - C_{ww}(S_a - \rho_a k_a s)) s}{k_w (S_a - \rho_a k_a s)} \right) K_1(\lambda_3 r) + \\ \frac{\lambda_4}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} \left( \lambda_4^2 - \frac{(C_{wa}(S_w - \rho_w k_w s) - C_{ww}(S_a - \rho_a k_a s)) s}{k_w (S_a - \rho_a k_a s)} \right) K_1(\lambda_4 r) \end{array} \right\} \quad (6.65)$$

- *pression interstitielle de l'eau due à la source ponctuelle impulsionnelle d'air injecté*

$$\tilde{P}^{wA} = \frac{s}{2\pi (\lambda + 2\mu) k_w k_a} \times \left\{ \begin{array}{l} - \frac{((\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_a - \rho_a k_a s) F^s) \lambda_2^2 + \rho C_{wa} s^2}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} K_0(\lambda_2 r) + \\ - \frac{((\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_a - \rho_a k_a s) F^s) \lambda_3^2 + \rho C_{wa} s^2}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} K_0(\lambda_3 r) + \\ - \frac{((\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_a - \rho_a k_a s) F^s) \lambda_4^2 + \rho C_{wa} s^2}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} K_0(\lambda_4 r) \end{array} \right\} \quad (6.66)$$

- *pression interstitielle de l'air due à la source ponctuelle impulsionnelle d'air injecté*

$$\tilde{P}^{aA} = \frac{1}{2\pi k_a} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} (\lambda_2^2 - K_a^2) (\lambda_2^2 - \Lambda_a^2) K_0(\lambda_2 r) + \\ \frac{1}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} (\lambda_3^2 - K_a^2) (\lambda_3^2 - \Lambda_a^2) K_0(\lambda_3 r) + \\ \frac{1}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} (\lambda_4^2 - K_a^2) (\lambda_4^2 - \Lambda_a^2) K_0(\lambda_4 r) \end{array} \right\} \quad (6.67)$$

avec

$$K_a^2 \Lambda_a^2 = \frac{-\rho C_{ww} s^3}{(\lambda + 2\mu) k_w}$$

$$K_a^2 + \Lambda_a^2 = \frac{-S_w F^s s}{(\lambda + 2\mu) k_w} - \frac{C_{ww} s}{k_w} + \frac{\rho_w F^s s^2}{(\lambda + 2\mu)} + \frac{\rho s^2}{(\lambda + 2\mu)}$$

**solutions 3D :**

- *déplacement du squelette solide dans la direction  $\alpha$  dû à la force ponctuelle impulsionnelle dans le solide dans la direction  $\beta$*

$$\tilde{U}_{\alpha\beta}^s = \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{(\lambda + \mu)\Lambda^2}{\rho s^2} \frac{(\lambda_1^2 - K_{ss1}^2)(\lambda_1^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)} (R_1 + R_2\lambda_1 + R_3\lambda_1^2) \exp(-\lambda_1 r) + \\ -\frac{(\lambda + \mu)\Lambda^2}{\rho s^2} \frac{(\lambda_2^2 - K_{ss1}^2)(\lambda_2^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} (R_1 + R_2\lambda_2 + R_3\lambda_2^2) \exp(-\lambda_2 r) + \\ -\frac{(\lambda + \mu)\Lambda^2}{\rho s^2} \frac{(\lambda_3^2 - K_{ss1}^2)(\lambda_3^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} (R_1 + R_2\lambda_3 + R_3\lambda_3^2) \exp(-\lambda_3 r) + \\ -\frac{(\lambda + \mu)\Lambda^2}{\rho s^2} \frac{(\lambda_4^2 - K_{ss1}^2)(\lambda_4^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} (R_1 + R_2\lambda_4 + R_3\lambda_4^2) \exp(-\lambda_4 r) \end{array} \right\} \\ + \frac{\delta_{\alpha\beta}}{4\pi\mu r} \exp(-\lambda_1 r) \quad (6.68)$$

$$\text{avec } R_1 = \left( \frac{3r_{,\alpha}r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{r^3} \right), R_2 = \left( \frac{3r_{,\alpha}r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{r^2} \right), R_3 = \frac{r_{,\alpha}r_{,\beta}}{r}, \Lambda^2 = \frac{\rho s^2}{(\lambda + 2\mu)} \text{ et}$$

$$K_{ss1}^2 + K_{ss2}^2 = \frac{-S_w F^s s}{(\lambda + \mu)k_w} + \frac{-S_a(1 - F^s)s}{(\lambda + \mu)k_a} - \frac{(k_w C_{aa} + k_a C_{ww})s}{k_w k_a} + \frac{\rho_w F^s s^2}{(\lambda + \mu)} + \frac{\rho_a(1 - F^s)s^2}{(\lambda + \mu)}$$

$$K_{ss1}^2 K_{ss2}^2 = \left( \frac{(C_{ww}C_{aa} - C_{wa}^2)}{k_w k_a} + \frac{S_w(F^s C_{aa} - C_{wa}(1 - F^s))}{(\lambda + \mu)k_w k_a} + \frac{S_a((1 - F^s)C_{ww} - F^s C_{wa})}{(\lambda + \mu)k_w k_a} \right. \\ \left. - \frac{\rho_w(-C_{wa}(1 - F^s) + F^s C_{aa})s}{(\lambda + \mu)k_a} - \frac{\rho_a(C_{ww}(1 - F^s) - F^s C_{wa})s}{(\lambda + \mu)k_w} \right) s^2$$

- *pression interstitielle de l'eau due à la force ponctuelle impulsionnelle dans le solide dans la direction  $\beta$*

$$\tilde{P}_{\beta}^{ws} = \frac{-F^s}{4\pi(\lambda + 2\mu)k_w r^2} r_{,\beta} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{(1 + \lambda_2 r) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \left( \lambda_2^2 - \frac{(C_{wa}(1 - F^s) - F^s C_{aa})s}{F^s k_a} \right) + \\ \frac{(1 + \lambda_3 r) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \left( \lambda_3^2 - \frac{(C_{wa}(1 - F^s) - F^s C_{aa})s}{F^s k_a} \right) + \\ \frac{(1 + \lambda_4 r) \exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} \left( \lambda_4^2 - \frac{(C_{wa}(1 - F^s) - F^s C_{aa})s}{F^s k_a} \right) \end{array} \right\} \quad (6.69)$$

- *pression interstitielle de l'air due à la force ponctuelle impulsionnelle dans le solide dans*

la direction  $\beta$

$$\tilde{P}_\beta^{aS} = \frac{-(1-F^s)}{4\pi(\lambda+2\mu)k_a r^2} r_{,\beta} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{(1+\lambda_2 r) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \left( \lambda_2^2 + \frac{(C_{ww}(1-F^s) - F^s C_{wa})s}{(1-F^s)k_w} \right) + \\ \frac{(1+\lambda_3 r) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \left( \lambda_3^2 + \frac{(C_{wa}(1-F^s) - F^s C_{aa})s}{(1-F^s)k_w} \right) + \\ \frac{(1+\lambda_4 r) \exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} \left( \lambda_4^2 + \frac{(C_{wa}(1-F^s) - F^s C_{aa})s}{(1-F^s)k_w} \right) \end{array} \right\} \quad (6.70)$$

• *déplacement du squelette solide dans la direction  $\alpha$  dû à la source ponctuelle impulsionnelle d'eau injectée*

$$\tilde{U}_\alpha^W = \frac{(S_w - \rho_w k_w s) s}{4\pi(\lambda+2\mu)k_w r^2} r_{,\alpha} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{(1+\lambda_2 r) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \left( \lambda_2^2 - \frac{(C_{wa}(S_a - \rho_a k_a s) - C_{aa}(S_w - \rho_w k_w s))s}{k_a(S_w - \rho_w k_w s)} \right) + \\ \frac{(1+\lambda_3 r) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \left( \lambda_3^2 - \frac{(C_{wa}(S_a - \rho_a k_a s) - C_{aa}(S_w - \rho_w k_w s))s}{k_a(S_w - \rho_w k_w s)} \right) + \\ \frac{(1+\lambda_4 r) \exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} \left( \lambda_4^2 - \frac{(C_{wa}(S_a - \rho_a k_a s) - C_{aa}(S_w - \rho_w k_w s))s}{k_a(S_w - \rho_w k_w s)} \right) \end{array} \right\} \quad (6.71)$$

• *pression interstitielle de l'eau due à la source ponctuelle impulsionnelle d'eau injectée*

$$\tilde{P}^{wW} = \frac{1}{4\pi k_w r} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} (\lambda_2^2 - K_w^2) (\lambda_2^2 - \Lambda_w^2) + \\ \frac{\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} (\lambda_3^2 - K_w^2) (\lambda_3^2 - \Lambda_w^2) + \\ \frac{\exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} (\lambda_4^2 - K_w^2) (\lambda_4^2 - \Lambda_w^2) \end{array} \right\} \quad (6.72)$$

avec

$$K_w^2 \Lambda_w^2 = \frac{-\rho C_{aa} s^3}{(\lambda+2\mu)k_a}$$

$$K_w^2 + \Lambda_w^2 = \frac{-S_a(1-F^s)s}{(\lambda+2\mu)k_a} - \frac{C_{aa}s}{k_a} + \frac{\rho_a(1-F^s)s^2}{(\lambda+2\mu)} + \frac{\rho s^2}{(\lambda+2\mu)}$$

- *pression interstitielle de l'air due à la source ponctuelle impulsionnelle d'eau injectée*

$$\tilde{P}^{aW} = \frac{s}{4\pi (\lambda + 2\mu) k_w k_a r} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \left[ - \left( (\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_w - \rho_w k_w s) (1 - F^s) \right) \lambda_2^2 + \rho C_{wa} s^2 \right] + \\ \frac{\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \left[ - \left( (\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_w - \rho_w k_w s) (1 - F^s) \right) \lambda_3^2 + \rho C_{wa} s^2 \right] + \\ \frac{\exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} \left[ - \left( (\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_w - \rho_w k_w s) (1 - F^s) \right) \lambda_4^2 + \rho C_{wa} s^2 \right] \end{array} \right\} \quad (6.73)$$

- *déplacement du squelette solide dans la direction  $\alpha$  dû à la source ponctuelle impulsionnelle d'air injecté*

$$\tilde{U}_\alpha^A = \frac{(S_a - \rho_a k_a s) s}{4\pi (\lambda + 2\mu) k_a r^2} r_{,\alpha} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{(1 + \lambda_2 r) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \left( \lambda_2^2 - \frac{(C_{wa}(S_w - \rho_w k_w s) - C_{ww}(S_a - \rho_a k_a s)) s}{k_w (S_a - \rho_a k_a s)} \right) + \\ \frac{(1 + \lambda_3 r) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \left( \lambda_3^2 - \frac{(C_{wa}(S_w - \rho_w k_w s) - C_{ww}(S_a - \rho_a k_a s)) s}{k_w (S_a - \rho_a k_a s)} \right) + \\ \frac{(1 + \lambda_4 r) \exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} \left( \lambda_4^2 - \frac{(C_{wa}(S_w - \rho_w k_w s) - C_{ww}(S_a - \rho_a k_a s)) s}{k_w (S_a - \rho_a k_a s)} \right) \end{array} \right\} \quad (6.74)$$

- *pression interstitielle de l'eau due à la source ponctuelle impulsionnelle d'air injecté*

$$\tilde{P}^{wA} = \frac{s}{4\pi (\lambda + 2\mu) k_w k_a r} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \left[ - \left( (\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_a - \rho_a k_a s) F^s \right) \lambda_2^2 + \rho C_{wa} s^2 \right] + \\ \frac{\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \left[ - \left( (\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_a - \rho_a k_a s) F^s \right) \lambda_3^2 + \rho C_{wa} s^2 \right] + \\ \frac{\exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} \left[ - \left( (\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_a - \rho_a k_a s) F^s \right) \lambda_4^2 + \rho C_{wa} s^2 \right] \end{array} \right\} \quad (6.75)$$

- *pression interstitielle de l'air due à la source ponctuelle impulsionnelle d'air injecté*

$$\tilde{P}^{aA} = \frac{1}{4\pi k_a r} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} (\lambda_2^2 - K_a^2) (\lambda_2^2 - \Lambda_a^2) + \\ \frac{\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} (\lambda_3^2 - K_a^2) (\lambda_3^2 - \Lambda_a^2) + \\ \frac{\exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} (\lambda_4^2 - K_a^2) (\lambda_4^2 - \Lambda_a^2) \end{array} \right\} \quad (6.76)$$

avec

$$K_a^2 \Lambda_a^2 = \frac{-\rho C_{ww} s^3}{(\lambda + 2\mu) k_w}$$

$$K_a^2 + \Lambda_a^2 = \frac{-S_w F^s s}{(\lambda + 2\mu) k_w} - \frac{C_{ww} s}{k_w} + \frac{\rho_w F^s s^2}{(\lambda + 2\mu)} + \frac{\rho s^2}{(\lambda + 2\mu)}$$

Pendant la dérivation de l'équation intégrale de frontière pour l'analyse du comportement dynamique des sols non saturés (6.22) plusieurs abréviations correspondant aux termes adjoints sont présentées (6.26, 6.27, 6.28, 6.29, 6.30, 6.31, 6.32, 6.33, 6.34). En introduisant les solutions fondamentales obtenues ci-dessus et leurs dérivées partielles, les formes explicites de ces termes dans les deux cas 2D et 3D sont comme suit :

**termes adjoints 2D :**

$$\begin{aligned} -\tilde{T}_{\alpha\beta}^S &= \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k\beta,k}^S + s S_w \tilde{P}_\beta^{wS} + s S_a \tilde{P}_\beta^{aS} \right) \delta_{\alpha l} + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha\beta,l}^S + \tilde{U}_{l\beta,\alpha}^S \right) \right] n_l \Rightarrow \\ \left( \tilde{U}_{\alpha\beta,l}^S + \tilde{U}_{l\beta,\alpha}^S \right) n_l &= \frac{2}{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} C_1^{sS} \left( R_3 \lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r) + \left( \frac{2}{r} R_3 - R_4 \lambda_1^2 \right) \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) \right) + \\ C_2^{sS} \left( R_3 \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) + \left( \frac{2}{r} R_3 - R_4 \lambda_2^2 \right) \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right) + \\ C_3^{sS} \left( R_3 \lambda_3^2 K_0(\lambda_3 r) + \left( \frac{2}{r} R_3 - R_4 \lambda_3^2 \right) \lambda_3 K_1(\lambda_3 r) \right) + \\ C_4^{sS} \left( R_3 \lambda_4^2 K_0(\lambda_4 r) + \left( \frac{2}{r} R_3 - R_4 \lambda_4^2 \right) \lambda_4 K_1(\lambda_4 r) \right) \end{array} \right\} \quad (6.77) \\ &\quad - \frac{(r_{,\alpha} n_\beta + r_{,n} \delta_{\alpha\beta})}{2\pi\mu} \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) \end{aligned}$$

$$\text{avec } R_3 = \frac{(-4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} + r_{,\beta} n_\alpha + r_{,\alpha} n_\beta + r_{,n} \delta_{\alpha\beta})}{r}, \quad R_4 = r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n}$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{k,\beta,k}^S \delta_{\alpha l} n_l = & -\frac{r,\beta n_\alpha}{2\pi} \left( C_1^{sS} \lambda_1^3 K_1(\lambda_1 r) + C_2^{sS} \lambda_2^3 K_1(\lambda_2 r) + C_3^{sS} \lambda_3^3 K_1(\lambda_3 r) + C_4^{sS} \lambda_4^3 K_1(\lambda_4 r) \right) \\ & -\frac{r,\beta n_\alpha}{2\pi\mu} \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) \end{aligned} \quad (6.78)$$

$$\begin{aligned} -\tilde{T}_\alpha^W = & \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k,k}^W + sS_w \tilde{P}^{wW} + sS_a \tilde{P}^{aW} \right) \delta_{\alpha l} + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha,l}^W + \tilde{U}_{l,\alpha}^W \right) \right] n_l \Rightarrow \\ \left( \tilde{U}_{\alpha,l}^W + \tilde{U}_{l,\alpha}^W \right) n_l = & \frac{2}{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{n_\alpha - 2r,\alpha r,n}{r} \left( C_1^{sW} \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) + C_2^{sW} \lambda_3 K_1(\lambda_3 r) + C_3^{sW} \lambda_4 K_1(\lambda_4 r) \right) \\ -r,\alpha r,n \left( C_1^{sW} \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) + C_2^{sW} \lambda_3^2 K_0(\lambda_3 r) + C_3^{sW} \lambda_4^2 K_0(\lambda_4 r) \right) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (6.79)$$

$$\tilde{U}_{k,k}^W \delta_{\alpha l} n_l = -\frac{n_\alpha}{2\pi} \left( C_1^{sW} \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) + C_2^{sW} \lambda_3^2 K_0(\lambda_3 r) + C_3^{sW} \lambda_4^2 K_0(\lambda_4 r) \right) \quad (6.80)$$

$$\begin{aligned} -\tilde{T}_\alpha^A = & \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k,k}^A + sS_w \tilde{P}^{wA} + sS_a \tilde{P}^{aA} \right) \delta_{\alpha l} + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha,l}^A + \tilde{U}_{l,\alpha}^A \right) \right] n_l \Rightarrow \\ \left( \tilde{U}_{\alpha,l}^A + \tilde{U}_{l,\alpha}^A \right) n_l = & \frac{2}{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{n_\alpha - 2r,\alpha r,n}{r} \left( C_1^{sA} \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) + C_2^{sA} \lambda_3 K_1(\lambda_3 r) + C_3^{sA} \lambda_4 K_1(\lambda_4 r) \right) \\ -r,\alpha r,n \left( C_1^{sA} \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) + C_2^{sA} \lambda_3^2 K_0(\lambda_3 r) + C_3^{sA} \lambda_4^2 K_0(\lambda_4 r) \right) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (6.81)$$

$$\tilde{U}_{k,k}^A \delta_{\alpha l} n_l = -\frac{n_\alpha}{2\pi} \left( C_1^{sA} \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) + C_2^{sA} \lambda_3^2 K_0(\lambda_3 r) + C_3^{sA} \lambda_4^2 K_0(\lambda_4 r) \right) \quad (6.82)$$

Les autres expressions explicites sont

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{wS} = & \frac{n_\alpha - 2r,\alpha r,n}{2\pi r} \left( C_1^{wS} \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) + C_2^{wS} \lambda_3 K_1(\lambda_3 r) + C_3^{wS} \lambda_4 K_1(\lambda_4 r) \right) \\ & -\frac{r,\alpha r,n}{2\pi} \left( C_1^{wS} \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) + C_2^{wS} \lambda_3^2 K_0(\lambda_3 r) + C_3^{wS} \lambda_4^2 K_0(\lambda_4 r) \right) \end{aligned} \quad (6.83)$$

$$Q^{wW} = -\frac{r,n}{2\pi} \left( C_1^{wW} \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) + C_2^{wW} \lambda_3 K_1(\lambda_3 r) + C_3^{wW} \lambda_4 K_1(\lambda_4 r) \right) \quad (6.84)$$

$$Q^{wA} = -\frac{r,n}{2\pi} \left( C_1^{wA} \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) + C_2^{wA} \lambda_3 K_1(\lambda_3 r) + C_3^{wA} \lambda_4 K_1(\lambda_4 r) \right) \quad (6.85)$$

$$Q_\alpha^{aS} = \frac{n_\alpha - 2r_{,\alpha} r,n}{2\pi r} \left( C_1^{aS} \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) + C_2^{aS} \lambda_3 K_1(\lambda_3 r) + C_3^{aS} \lambda_4 K_1(\lambda_4 r) \right) - \frac{r_{,\alpha} r,n}{2\pi} \left( C_1^{aS} \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) + C_2^{aS} \lambda_3^2 K_0(\lambda_3 r) + C_3^{aS} \lambda_4^2 K_0(\lambda_4 r) \right) \quad (6.86)$$

$$Q^{aW} = -\frac{r,n}{2\pi} \left( C_1^{aW} \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) + C_2^{aW} \lambda_3 K_1(\lambda_3 r) + C_3^{aW} \lambda_4 K_1(\lambda_4 r) \right) \quad (6.87)$$

$$Q^{aA} = -\frac{r,n}{2\pi} \left( C_1^{aA} \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) + C_2^{aA} \lambda_3 K_1(\lambda_3 r) + C_3^{aA} \lambda_4 K_1(\lambda_4 r) \right) \quad (6.88)$$

dans lesquelles les coefficients  $C_i^{mn}$  sont présentés dans l'annexe (A.2).

### termes adjoints 3D :

$$- \tilde{T}_{\alpha\beta}^S = \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k\beta,k}^S + s S_w \tilde{P}_\beta^{wS} + s S_a \tilde{P}_\beta^{aS} \right) \delta_{\alpha l} + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha\beta,l}^S + \tilde{U}_{l\beta,\alpha}^S \right) \right] n_l \Rightarrow$$

$$\left( \tilde{U}_{\alpha\beta,l}^S + \tilde{U}_{l\beta,\alpha}^S \right) n_l = \frac{2n_l}{4\pi r} \left\{ \begin{array}{l} C_1^{sS} \left( \frac{R_5}{r^2} \left( \lambda_1 + \frac{1}{r} \right) + \frac{R_6}{r} \lambda_1^2 - r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l} \lambda_1^3 \right) \exp(-\lambda_1 r) + \\ C_2^{sS} \left( \frac{R_5}{r^2} \left( \lambda_2 + \frac{1}{r} \right) + \frac{R_6}{r} \lambda_2^2 - r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l} \lambda_2^3 \right) \exp(-\lambda_2 r) + \\ C_3^{sS} \left( \frac{R_5}{r^2} \left( \lambda_3 + \frac{1}{r} \right) + \frac{R_6}{r} \lambda_3^2 - r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l} \lambda_3^3 \right) \exp(-\lambda_3 r) + \\ C_4^{sS} \left( \frac{R_5}{r^2} \left( \lambda_4 + \frac{1}{r} \right) + \frac{R_6}{r} \lambda_4^2 - r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l} \lambda_4^3 \right) \exp(-\lambda_4 r) \end{array} \right\}$$

$$- \frac{(r_{,\alpha} n_\beta + r_{,n} \delta_{\alpha\beta})}{4\pi \mu r} \left( \lambda_1 + \frac{1}{r} \right) \exp(-\lambda_1 r) \quad (6.89)$$

avec  $R_5 = 3(r_{,\alpha} \delta_{\beta l} + r_{,\beta} \delta_{\alpha l} + r_{,l} \delta_{\alpha\beta} - 5r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l})$ ,  $R_6 = (r_{,\alpha} \delta_{\beta l} + r_{,\beta} \delta_{\alpha l} + r_{,l} \delta_{\alpha\beta} - 6r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l})$

$$\tilde{U}_{k\beta,k}^S \delta_{\alpha l} n_l = - \frac{r_{,\beta} n_{\alpha}}{4\pi r} \left\{ \begin{array}{l} C_1^{sS} \left( \frac{1}{r} + \lambda_1 \right) \lambda_1^2 \exp(-\lambda_1 r) + C_2^{sS} \left( \frac{1}{r} + \lambda_2 \right) \lambda_2^2 \exp(-\lambda_2 r) \\ + C_3^{sS} \left( \frac{1}{r} + \lambda_3 \right) \lambda_3^2 \exp(-\lambda_3 r) + C_4^{sS} \left( \frac{1}{r} + \lambda_4 \right) \lambda_4^2 \exp(-\lambda_4 r) \end{array} \right\} \\ - \frac{r_{,\beta} n_{\alpha}}{4\pi \mu r} \left( \frac{1}{r} + \lambda_1 \right) \exp(-\lambda_1 r) \quad (6.90)$$

$$- \tilde{T}_{\alpha}^W = \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k,k}^W + sS_w \tilde{P}^{wW} + sS_a \tilde{P}^{aW} \right) \delta_{\alpha l} + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha,l}^W + \tilde{U}_{l,\alpha}^W \right) \right] n_l \Rightarrow$$

$$\left( \tilde{U}_{\alpha,l}^W + \tilde{U}_{l,\alpha}^W \right) n_l = \frac{2n_l}{4\pi r} \left\{ C_1^{sW} R_1 \exp(-\lambda_2 r) + C_2^{sW} R_2 \exp(-\lambda_3 r) + C_3^{sW} R_3 \exp(-\lambda_4 r) \right\} \quad (6.91)$$

$$\tilde{U}_{k,k}^W \delta_{\alpha l} n_l = - \frac{n_{\alpha}}{4\pi r} \left( C_1^{sW} \lambda_2^2 \exp(-\lambda_2 r) + C_2^{sW} \lambda_3^2 \exp(-\lambda_3 r) + C_3^{sW} \lambda_4^2 \exp(-\lambda_4 r) \right) \quad (6.92)$$

$$\text{avec } R_k = \frac{\delta_{\alpha l} - 3r_{,\alpha} r_{,l}}{r^2} + \lambda_k \frac{\delta_{\alpha l} - 3r_{,\alpha} r_{,l}}{r} - \lambda_k^2 r_{,\alpha} r_{,l}$$

$$- \tilde{T}_{\alpha}^A = \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k,k}^A + sS_w \tilde{P}^{wA} + sS_a \tilde{P}^{aA} \right) \delta_{\alpha l} + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha,l}^A + \tilde{U}_{l,\alpha}^A \right) \right] n_l \Rightarrow$$

$$\left( \tilde{U}_{\alpha,l}^A + \tilde{U}_{l,\alpha}^A \right) n_l = \frac{2n_l}{4\pi r} \left\{ C_1^{sA} R_1 \exp(-\lambda_2 r) + C_2^{sA} R_2 \exp(-\lambda_3 r) + C_3^{sA} R_3 \exp(-\lambda_4 r) \right\} \quad (6.93)$$

$$\tilde{U}_{k,k}^A \delta_{\alpha l} n_l = - \frac{n_{\alpha}}{4\pi r} \left( C_1^{sA} \lambda_2^2 \exp(-\lambda_2 r) + C_2^{sA} \lambda_3^2 \exp(-\lambda_3 r) + C_3^{sA} \lambda_4^2 \exp(-\lambda_4 r) \right) \quad (6.94)$$

Les autres expressions explicites sont

$$Q_{\alpha}^{wS} = \frac{n_{\alpha}}{4\pi r} \left\{ C_1^{wS} R_1 \exp(-\lambda_2 r) + C_2^{wS} R_2 \exp(-\lambda_3 r) + C_3^{wS} R_3 \exp(-\lambda_4 r) \right\} \quad (6.95)$$

$$Q^{wW} = -\frac{r,n}{4\pi r} \left\{ C_1^{wW} \left( \lambda_2 + \frac{1}{r} \right) \exp(-\lambda_2 r) + C_2^{wW} \left( \lambda_3 + \frac{1}{r} \right) \exp(-\lambda_3 r) + C_3^{wW} \left( \lambda_4 + \frac{1}{r} \right) \exp(-\lambda_4 r) \right\} \quad (6.96)$$

$$Q^{wA} = -\frac{r,n}{4\pi r} \left\{ C_1^{wA} \left( \lambda_2 + \frac{1}{r} \right) \exp(-\lambda_2 r) + C_2^{wA} \left( \lambda_3 + \frac{1}{r} \right) \exp(-\lambda_3 r) + C_3^{wA} \left( \lambda_4 + \frac{1}{r} \right) \exp(-\lambda_4 r) \right\} \quad (6.97)$$

$$Q_\alpha^{aS} = \frac{n_\alpha}{4\pi r} \left\{ C_1^{aS} R_1 \exp(-\lambda_2 r) + C_2^{aS} R_2 \exp(-\lambda_3 r) + C_3^{aS} R_3 \exp(-\lambda_4 r) \right\} \quad (6.98)$$

$$Q^{aW} = -\frac{r,n}{4\pi r} \left\{ C_1^{aW} \left( \lambda_2 + \frac{1}{r} \right) \exp(-\lambda_2 r) + C_2^{aW} \left( \lambda_3 + \frac{1}{r} \right) \exp(-\lambda_3 r) + C_3^{aW} \left( \lambda_4 + \frac{1}{r} \right) \exp(-\lambda_4 r) \right\} \quad (6.99)$$

$$Q^{aA} = -\frac{r,n}{4\pi r} \left\{ C_1^{aA} \left( \lambda_2 + \frac{1}{r} \right) \exp(-\lambda_2 r) + C_2^{aA} \left( \lambda_3 + \frac{1}{r} \right) \exp(-\lambda_3 r) + C_3^{aA} \left( \lambda_4 + \frac{1}{r} \right) \exp(-\lambda_4 r) \right\} \quad (6.100)$$

#### 6.1.4 Comportement singulier des solutions fondamentales

Comme montré dans la section (6.1.2), l'équation intégrale de frontière est obtenue en approchant le point source  $\xi$  vers la frontière  $\Gamma$ . Par conséquent, afin de déterminer des inconnues de frontière, il est nécessaire de connaître le comportement des solutions fondamentales lorsque  $r = |\xi - x|$  tend vers zéro, autrement dit, quand le point d'intégration  $x$  s'approche du point de collocation  $\xi$ . Le développement en série par rapport à la variable  $r = |\xi - x|$  montre que les singularités de ces solutions dans la limite  $r \rightarrow 0$  sont égales à celles des solutions fondamentales élastostatique, poro-élastostatique ou acoustique (Tab.6.1).

**cas 2D** : la variable  $r$  dans les solutions bi-dimensionnelles se trouve dans les fonctions de Bessel modifiées. Quand  $r \rightarrow 0$ , l'argument des fonctions de Bessel Modifiées tend aussi vers zéro. Par conséquent, on a :

$$K_0(\lambda_k r) = -\ln(\lambda_k r) + \mathcal{O}(r^2) = -\ln(\lambda_k) + \ln(1/r) + \mathcal{O}(r^2) \quad (6.101)$$

Premièrement, on considère  $\tilde{G}_{ww} = \tilde{P}^{wW}$ , la pression due à une source de Dirac engendrée dans l'eau. En introduisant (6.101) dans (6.63), elle se réduit à la forme suivante :

$$\tilde{G}_{ww} = \tilde{P}^{wW} = \underbrace{-\frac{1}{2\pi k_w} \ln(r)}_{\text{solution fondamentale poro-élastostatique}} + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.102)$$

De façon similaire pour  $\tilde{G}_{aa} = \tilde{P}^{aA}$ , on a :

$$\tilde{G}_{aa} = \tilde{P}^{aA} = -\frac{1}{2\pi k_a} \ln(r) + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.103)$$

Deuxièmement, nous considérons  $\tilde{G}_{\alpha w} = \tilde{U}_\alpha^W$ . L'équation (6.62) peut être écrite comme

$$\tilde{G}_{\alpha w} = \tilde{U}_\alpha^W = \frac{(S_w - \rho_w k_w s) s}{4\pi (\lambda + 2\mu) k_w} \frac{x_\alpha}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2) (\lambda_4^2 - \lambda_3^2) (\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} f(r) + \left. \begin{aligned} & \frac{(S_w - \rho_w k_w s) s}{4\pi (\lambda + 2\mu) k_w} \frac{x_\alpha}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2) (\lambda_4^2 - \lambda_3^2) (\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \left\{ \begin{aligned} & -(\lambda_2^2 - M_w) (\lambda_4^2 - \lambda_3^2) \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) \\ & + (\lambda_3^2 - M_w) (\lambda_4^2 - \lambda_2^2) \lambda_3^2 K_0(\lambda_3 r) \\ & - (\lambda_4^2 - M_w) (\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \lambda_4^2 K_0(\lambda_4 r) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6.104)$$

$$\text{où } M_w = \frac{(C_{wa} (S_a - \rho_a k_a s) - C_{aa} (S_w - \rho_w k_w s)) s}{k_a (S_w - \rho_w k_w s)} \text{ et}$$

$$f(r) = \frac{(\lambda_2^2 - M_w) (\lambda_4^2 - \lambda_3^2) \lambda_2^2 r^2 K_2(\lambda_2 r)}{r^2} - \frac{(\lambda_3^2 - M_w) (\lambda_4^2 - \lambda_2^2) \lambda_3^2 r^2 K_2(\lambda_3 r)}{r^2} + \frac{(\lambda_4^2 - M_w) (\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \lambda_4^2 r^2 K_2(\lambda_4 r)}{r^2} \quad (6.105)$$

dans laquelle

$$K_2(\lambda_k r) = K_0(\lambda_k r) + \frac{2}{\lambda_k r} K_1(\lambda_k r) \quad (6.106)$$

Par conséquent, on cherche à trouver la valeur de  $f(r)$  lorsque  $r \rightarrow 0$ . Comme

$$K_2(\lambda_k r) = \frac{2}{\lambda_k^2 r^2} + \mathcal{O}(r^3) \quad (6.107)$$

quand  $r \rightarrow 0$ , donc le numérateur et le dénominateur de  $f(r)$  tendent vers zéro. Ceci nous donne le cas 0/0. Par conséquent, on applique la règle de L'Hôpital en notant que  $K_1(\lambda_k r) = \frac{1}{\lambda_k r} + \mathcal{O}(r^2)$  quand  $r \rightarrow 0$  :

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r) = -\frac{1}{2} [(\lambda_4^2 - \lambda_3^2) \lambda_2^4 - (\lambda_4^2 - \lambda_2^2) \lambda_3^4 + (\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \lambda_4^4] \quad (6.108)$$

En substituant (6.108) dans (6.104), on obtient :

$$\tilde{G}_{\alpha w} = \tilde{U}_\alpha^W = -\frac{r}{8\pi} \frac{(S_w - \rho_w k_w s) s}{(\lambda + 2\mu) k_w} \frac{x_\alpha}{r} (1 - 2 \ln r) + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.109)$$

Avec la même approche, on aura :

$$\tilde{G}_{\alpha\alpha} = \tilde{U}_{\alpha}^A = -\frac{r}{8\pi} \frac{(S_a - \rho_a k_a s) s}{(\lambda + 2\mu) k_a} \frac{x_{\alpha}}{r} (1 - 2 \ln r) + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.110)$$

$$\tilde{G}_{w\beta} = \tilde{P}_{\beta}^{wS} = \frac{r}{8\pi} \frac{F^s}{(\lambda + 2\mu) k_w} \frac{x_{\beta}}{r} (1 - 2 \ln r) + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.111)$$

$$\tilde{G}_{a\beta} = \tilde{P}_{\beta}^{aS} = \frac{r}{8\pi} \frac{(1 - F^s)}{(\lambda + 2\mu) k_a} \frac{x_{\beta}}{r} (1 - 2 \ln r) + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.112)$$

$$\tilde{G}_{aw} = \tilde{P}^{aW} = \mathcal{O}(r^0) \quad (6.113)$$

$$\tilde{G}_{wa} = \tilde{P}^{wA} = \mathcal{O}(r^0) \quad (6.114)$$

Finalement, on étudie  $\tilde{G}_{\alpha\beta} = \tilde{U}_{\alpha\beta}^S$  qui peut s'écrire d'une façon plus compacte :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\alpha\beta} = \tilde{U}_{\alpha\beta}^S = & \frac{r_{,\alpha} r_{,\beta}}{2\pi\mu} \frac{-(\lambda + \mu) \Lambda^2}{\rho s^2} h(r) - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{4\pi\mu} \frac{-(\lambda + \mu) \Lambda^2}{\rho s^2} h(r) - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{4\pi\mu} \frac{\Lambda^2}{\rho s^2} \times \\ & \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 - K_{ss1}^2) (\lambda_1^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) (\lambda_1^2 - \lambda_4^2)} K_0(\lambda_1 r) - \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 - K_{ss1}^2) (\lambda_2^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) (\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} K_0(\lambda_2 r) \\ & -\frac{\lambda_3^2 (\lambda_3^2 - K_{ss1}^2) (\lambda_3^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) (\lambda_3^2 - \lambda_2^2) (\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} K_0(\lambda_3 r) - \frac{\lambda_4^2 (\lambda_4^2 - K_{ss1}^2) (\lambda_4^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2) (\lambda_4^2 - \lambda_2^2) (\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} K_0(\lambda_4 r) \end{aligned} \right\} \\ & + \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2\pi\mu} K_0(\lambda_1 r) \end{aligned} \quad (6.115)$$

avec

$$h(r) = \frac{1}{r^2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 - K_{ss1}^2) (\lambda_1^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) (\lambda_1^2 - \lambda_4^2)} r^2 K_2(\lambda_1 r) + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 - K_{ss1}^2) (\lambda_2^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) (\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} r^2 K_2(\lambda_2 r) \\ & + \frac{\lambda_3^2 (\lambda_3^2 - K_{ss1}^2) (\lambda_3^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) (\lambda_3^2 - \lambda_2^2) (\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} r^2 K_2(\lambda_3 r) + \frac{\lambda_4^2 (\lambda_4^2 - K_{ss1}^2) (\lambda_4^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2) (\lambda_4^2 - \lambda_2^2) (\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} r^2 K_2(\lambda_4 r) \end{aligned} \right\} \quad (6.116)$$

Comme le cas  $h(r)$  lorsque  $r \rightarrow 0$  est  $0/0$ , on applique la règle de L'Hôpital :

$$\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = -\frac{1}{2} \quad (6.117)$$

Dès lors en combinant les équations (6.117) et (6.115), quelques manipulations algébriques nous permettent d'obtenir

$$\tilde{G}_{\alpha\beta} = \tilde{U}_{\alpha\beta}^S = \underbrace{\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ \frac{x_{\alpha} x_{\beta}}{r^2} - \delta_{\alpha\beta} (3 - 4\nu) \ln r \right\}}_{\text{solution fondamentale élastostatique}} + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.118)$$

Également pour les termes adjoints, on a :

$$\tilde{T}_{\alpha\beta}^S = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{(1-\nu)r} \underbrace{\left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha}r_{,\beta}] - (1-2\nu)(r_{,\alpha}n_{\beta} - r_{,\beta}n_{\alpha}) \right\}}_{\text{solution fondamentale élastostatique}} + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.119)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\alpha}^W = & \frac{\mu}{4\pi} \frac{-S_w s}{(\lambda+2\mu)k_w} \left[ (1+2\ln r)n_{\alpha} - 2r_{,\alpha}r_{,n} \right] + \\ & \frac{\mu}{4\pi} \frac{\rho_w k_w s^2}{(\lambda+2\mu)k_w} \left[ \left( 1 - 2 \left( \frac{\lambda+\mu}{\mu} \right) \ln r \right) n_{\alpha} - 2r_{,\alpha}r_{,n} \right] + \mathcal{O}(r^0) \end{aligned} \quad (6.120)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\alpha}^A = & \frac{\mu}{4\pi} \frac{-S_a s}{(\lambda+2\mu)k_a} \left[ (1+2\ln r)n_{\alpha} - 2r_{,\alpha}r_{,n} \right] + \\ & \frac{\mu}{4\pi} \frac{\rho_a k_a s^2}{(\lambda+2\mu)k_a} \left[ \left( 1 - 2 \left( \frac{\lambda+\mu}{\mu} \right) \ln r \right) n_{\alpha} - 2r_{,\alpha}r_{,n} \right] + \mathcal{O}(r^0) \end{aligned} \quad (6.121)$$

$$\tilde{Q}_{\alpha}^{wS} = \frac{1}{8\pi} \frac{F^s}{(\lambda+2\mu)} \left[ (1-2\ln r)n_{\alpha} - 2r_{,\alpha}r_{,n} \right] + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.122)$$

$$\tilde{Q}_{\alpha}^{aS} = \frac{1}{8\pi} \frac{(1-F^s)}{(\lambda+2\mu)} \left[ (1-2\ln r)n_{\alpha} - 2r_{,\alpha}r_{,n} \right] + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.123)$$

$$\tilde{Q}_{\alpha}^{wW} = \tilde{Q}_{\alpha}^{aA} = \underbrace{-\frac{r_{,n}}{2\pi r}}_{\text{solution fondamentale acoustique}} + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.124)$$

$$\tilde{Q}_{\alpha}^{wA} = \tilde{Q}_{\alpha}^{aW} = \mathcal{O}(r^0) \quad (6.125)$$

**cas 3D** : la variable  $r$  dans les solutions tri-dimensionnelles se trouve dans les fonctions exponentielles. Quand  $r \rightarrow 0$ , l'argument des fonctions exponentielles tend aussi vers zéro. Par conséquent, on a :

$$\exp(-\lambda_k r) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_k r)^l}{l!} = 1 - \lambda_k r + \mathcal{O}(r^2) \quad (6.126)$$

Brièvement en remplaçant l'équation (6.126) dans les solutions fondamentales 3D, on obtient (Tab. 6.2)

| Composantes                 | Singularité                        |
|-----------------------------|------------------------------------|
| $\tilde{U}_{\alpha\beta}^S$ | faiblement singulières ( $\ln r$ ) |
| $\tilde{U}_{\alpha}^W$      | faiblement singulières ( $\ln r$ ) |
| $\tilde{U}_{\alpha}^A$      | faiblement singulières ( $\ln r$ ) |
| $\tilde{P}_{\beta}^{wS}$    | faiblement singulières ( $\ln r$ ) |
| $\tilde{P}_{\beta}^{aS}$    | faiblement singulières ( $\ln r$ ) |
| $\tilde{P}^{wW}$            | faiblement singulière ( $\ln r$ )  |
| $\tilde{P}^{aA}$            | faiblement singulière ( $\ln r$ )  |
| $\tilde{P}^{aW}$            | régulière (1)                      |
| $\tilde{P}^{wA}$            | régulière (1)                      |
| $\tilde{T}_{\alpha\beta}^S$ | fortement singulières ( $1/r$ )    |
| $\tilde{T}_{\alpha}^W$      | faiblement singulières ( $\ln r$ ) |
| $\tilde{T}_{\alpha}^A$      | faiblement singulières ( $\ln r$ ) |
| $\tilde{Q}_{\alpha}^{wS}$   | faiblement singulières ( $\ln r$ ) |
| $\tilde{Q}_{\alpha}^{aS}$   | faiblement singulières ( $\ln r$ ) |
| $\tilde{Q}^{wW}$            | fortement singulière ( $1/r$ )     |
| $\tilde{Q}^{aA}$            | fortement singulière ( $1/r$ )     |
| $\tilde{Q}^{wA}$            | régulière (1)                      |
| $\tilde{Q}^{aW}$            | régulière (1)                      |

**Tableau 6.1** — Singularité des solutions fondamentales 2D

$$\tilde{U}_{\alpha\beta}^S = \underbrace{\frac{1}{16\pi} \frac{1}{\mu(1-\nu)} \frac{1}{r} \left\{ \frac{x_{\alpha}x_{\beta}}{r^2} + \delta_{\alpha\beta}(3-4\nu) \right\}}_{\text{solution fondamentale élastostatique}} + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.127)$$

$$\tilde{P}^{wW} = \underbrace{\frac{1}{4\pi k_w} \frac{1}{r}}_{\text{solution fondamentale poro-élastostatique}} + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.128)$$

$$\tilde{P}^{aA} = \frac{1}{4\pi k_a} \frac{1}{r} + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.129)$$

$$\tilde{U}_{\alpha}^W = \tilde{U}_{\alpha}^A = \mathcal{O}(r^0) \quad (6.130)$$

$$\tilde{P}_{\beta}^{wS} = \tilde{P}_{\beta}^{aS} = \mathcal{O}(r^0) \quad (6.131)$$

$$\tilde{P}^{wA} = \tilde{P}^{aW} = \mathcal{O}(r^0) \quad (6.132)$$

Également pour les termes adjoints, on a :

$$\tilde{T}_{\alpha\beta}^S = \underbrace{-\frac{1}{8\pi} \frac{1}{(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{\alpha\beta} + 3r_{,\alpha}r_{,\beta}] - (1-2\nu)(r_{,\alpha}n_{\beta} - r_{,\beta}n_{\alpha}) \right\}}_{\text{solution fondamentale élastostatique}} + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.133)$$

$$\tilde{T}_{\alpha}^W = \frac{s}{4\pi k_w} \left\{ \frac{4\mu(S_w - \rho_w k_w s)}{(\lambda + 2\mu)} r_{,n} r_{,\alpha} + \rho_w k_w s n_{\alpha} \right\} \frac{1}{r} + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.134)$$

$$\tilde{T}_{\alpha}^A = \frac{s}{4\pi k_a} \left\{ \frac{4\mu(S_a - \rho_a k_a s)}{(\lambda + 2\mu)} r_{,n} r_{,\alpha} + \rho_a k_a s n_{\alpha} \right\} \frac{1}{r} + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.135)$$

$$\tilde{Q}_{\alpha}^{wW} = \tilde{Q}_{\alpha}^{aA} = \underbrace{-\frac{r_{,n}}{4\pi r^2}}_{\text{solution fondamentale acoustique}} + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.136)$$

$$\tilde{Q}_{\alpha}^{wA} = \tilde{Q}_{\alpha}^{aW} = \mathcal{O}(r^0) \quad (6.137)$$

$$\tilde{Q}_{\beta}^{wS} = \frac{F^s}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{r} (n_{\beta} - 2r_{,n}r_{,\beta}) + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.138)$$

$$\tilde{Q}_{\beta}^{aS} = \frac{(1-F^s)}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{r} (n_{\beta} - 2r_{,n}r_{,\beta}) + \mathcal{O}(r^0) \quad (6.139)$$

### 6.1.5 Vérification analytique des solutions fondamentales

Après avoir obtenu les solutions fondamentales, ici, on s'intéresse à vérifier la validité de ces solutions d'une façon un peu plus détaillée. On étudie les formes des solutions en approchant  $k_w$  et  $k_a$  vers infini et  $\rho_w, \rho_a$  et  $F^s$  vers zéro pour voir si elles seront exactement de la même forme que la solution fondamentale élastodynamique dans le domaine transformé de Laplace.

#### Cas limite : Élastodynamique

En approchant  $k_w$  et  $k_a$  vers infini et  $\rho_w, \rho_a$  et  $F^s$  vers zéro, les racines de l'équation du déterminant de la matrice de l'opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$  (6.36, 6.37) se réduisent à deux et nous aurons

$$\lambda_1^2 = \frac{\rho s^2}{\mu}, \quad \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = 0, \quad \lambda_4^2 = \Lambda^2 = \frac{\rho s^2}{(\lambda + 2\mu)} \quad (6.140)$$

| Composantes                 | Singularité                       |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| $\tilde{U}_{\alpha\beta}^S$ | faiblement singulières ( $1/r$ )  |
| $\tilde{U}_{\alpha}^W$      | régulières (1)                    |
| $\tilde{U}_{\alpha}^A$      | régulières (1)                    |
| $\tilde{P}_{\beta}^{wS}$    | régulières (1)                    |
| $\tilde{P}_{\beta}^{aS}$    | régulières (1)                    |
| $\tilde{P}^{wW}$            | faiblement singulière ( $1/r$ )   |
| $\tilde{P}^{aA}$            | faiblement singulière ( $1/r$ )   |
| $\tilde{P}^{aW}$            | régulière (1)                     |
| $\tilde{P}^{wA}$            | régulière (1)                     |
| $\tilde{T}_{\alpha\beta}^S$ | fortement singulières ( $1/r^2$ ) |
| $\tilde{T}_{\alpha}^W$      | faiblement singulières ( $1/r$ )  |
| $\tilde{T}_{\alpha}^A$      | faiblement singulières ( $1/r$ )  |
| $\tilde{Q}_{\alpha}^{wS}$   | faiblement singulières ( $1/r$ )  |
| $\tilde{Q}_{\alpha}^{aS}$   | faiblement singulières ( $1/r$ )  |
| $\tilde{Q}^{wW}$            | fortement singulière ( $1/r^2$ )  |
| $\tilde{Q}^{aA}$            | fortement singulière ( $1/r^2$ )  |
| $\tilde{Q}^{wA}$            | régulière (1)                     |
| $\tilde{Q}^{aW}$            | régulière (1)                     |

**Tableau 6.2** — Singularité des solutions fondamentales 3D

Dès lors

$$\tilde{U}_{\alpha}^W = \tilde{U}_{\alpha}^A = 0 \quad (6.141)$$

$$\tilde{P}_{\beta}^{wS} = \tilde{P}_{\beta}^{aS} = 0 \quad (6.142)$$

$$\tilde{P}^{wW} = \tilde{P}^{aA} = 0 \quad (6.143)$$

$$\tilde{P}^{aW} = \tilde{P}^{wA} = 0 \quad (6.144)$$

$$\tilde{U}_{\alpha\beta}^S = \frac{1}{2\pi\rho C_2^2} \left( a\delta_{\alpha\beta} - b\frac{x_{\alpha}x_{\beta}}{r^2} \right) \quad (6.145)$$

dans laquelle

$$C_1^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad C_2^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \quad (6.146)$$

$$2D : a = K_0 \left( \frac{sr}{C_2} \right) + \frac{C_2}{sr} \left[ K_1 \left( \frac{sr}{C_2} \right) - \frac{C_2}{C_1} K_1 \left( \frac{sr}{C_1} \right) \right] \quad (6.147)$$

$$b = K_2 \left( \frac{sr}{C_2} \right) - \frac{C_2^2}{C_1^2} K_2 \left( \frac{sr}{C_1} \right)$$

$$3D : a = \left( \frac{1}{r} + \frac{C_2}{sr^2} + \frac{C_2^2}{s^2 r^3} \right) \exp \left( \frac{-sr}{C_2} \right) - \frac{C_2^2}{C_1^2} \left( \frac{C_1}{sr^2} + \frac{C_1^2}{s^2 r^3} \right) \exp \left( \frac{-sr}{C_1} \right) \quad (6.148)$$

$$b = \left( \frac{1}{r} + \frac{3C_2}{sr^2} + \frac{3C_2^2}{s^2 r^3} \right) \exp \left( \frac{-sr}{C_2} \right) - \frac{C_2^2}{C_1^2} \left( \frac{1}{r} + \frac{3C_1}{sr^2} + \frac{3C_1^2}{s^2 r^3} \right) \exp \left( \frac{-sr}{C_1} \right)$$

Les équations ci-dessus montrent les solutions fondamentales singulières dans le domaine transformé de Laplace. Ce cas limite confirme que les solutions fondamentales de la poroélasticité non-saturé dynamique dérivées dans la section précédente pour les deux cas 2D et 3D sont susceptibles d'être correctes.

### 6.1.6 Visualisation des solutions fondamentales 2D

Finalement, quelques exemples de solutions fondamentales sont calculées pour visualiser leurs comportements principaux. Dans ce qui suit, seulement le déplacement du squelette solide dû à une force ponctuelle impulsionnelle  $\tilde{U}_{\alpha\beta}^S$  et la pression interstitielle de l'eau due à une source ponctuelle impulsionnelle d'eau injectée  $\tilde{P}^{wW}$  pour le cas 2D sont présentés.

On considère un échantillon de sol non saturé avec les grains solides incompressibles dont les propriétés matérielles ont été définies dans le système métrique comme suit :

| $K_b(-)$ | $E(N/m^2)$       | $K_l(-)$ | $a_e(-)$ | $b_e(-)$ | $e_0(-)$ | $\sigma_e(-)$    | $n(-)$ | $\rho_s(Kg/m^3)$ |
|----------|------------------|----------|----------|----------|----------|------------------|--------|------------------|
| 3281     | $21 \times 10^6$ | 1678     | 2        | 0.2      | 0.4      | $35 \times 10^5$ | 0.4    | 2600             |

**Tableau 6.3** — données matérielles d'un sol non saturé (paramètres mécaniques)

| $\rho_w(Kg/m^3)$ | $K_w(N/m^2)$       | $a_w(m/s)$           | $\alpha_w(-)$ | $S_{wu}(-)$ | $\beta_w(Pa^{-1})$    | $m_{suc}(-)$ | $p_w(Pa)$         |
|------------------|--------------------|----------------------|---------------|-------------|-----------------------|--------------|-------------------|
| 1000             | $2.15 \times 10^9$ | $1.2 \times 10^{-9}$ | 5             | 0.05        | $1.08 \times 10^{-8}$ | 1            | $300 \times 10^5$ |

**Tableau 6.4** — données matérielles d'un sol non saturé (paramètres de l'eau)

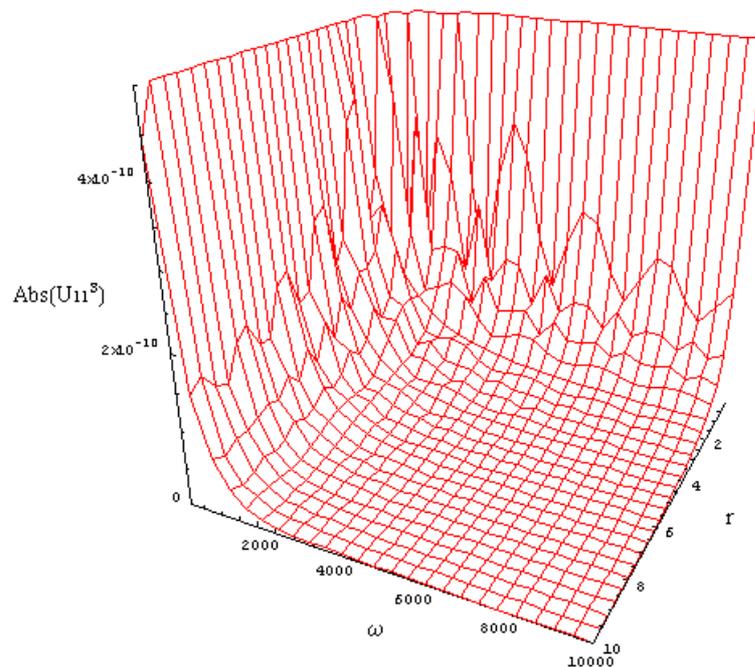
| $\rho_a(Kg/m^3)$ | $K_a(N/m^2)$       | $b_a(m^2)$          | $\alpha_a(-)$ | $\mu_a(N.s.m^{-2})$    | $P_{atm}(N/m^2)$ | $p_a(Pa)$ |
|------------------|--------------------|---------------------|---------------|------------------------|------------------|-----------|
| 1                | $1.01 \times 10^5$ | $3 \times 10^{-10}$ | 4             | $1.846 \times 10^{-5}$ | $10^5$           | 0         |

**Tableau 6.5** — données matérielles d'un sol non saturé (paramètres de l'air)

Tout d'abord, dans la Fig. (6.1), le déplacement dans la direction 1 dû à une force ponctuelle unitaire impulsionnelle dans la même direction  $\tilde{U}_{11}^S$  est représenté par rapport à la distance  $r$  et la fréquence  $\omega$ . À cette fin, la partie réelle de la variable complexe de Laplace  $s$  est mise égale

à zéro, c.-à-d.  $s = i\omega$ .

La valeur absolue des solutions de déplacement à valeurs complexes, c'est à dire *l'amplitude*, est présentée. En raison de la singularité des solutions, la figure est coupée dans la gamme de  $10^{-10}$ . Comme montré dans cette figure, le comportement singulier pour des petites valeurs de  $r$  est approximativement indépendant de la fréquence. En outre, pour un  $r$  constant loin de l'origine, on observe que l'amplitude des solutions fondamentales diminue avec la fréquence. Ces observations sont en accord avec la solution fondamentale de déplacement pour les sols saturés [296].



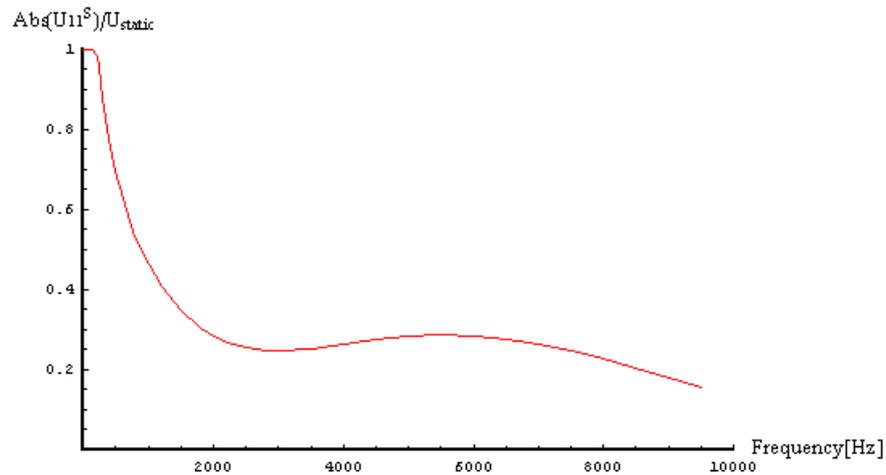
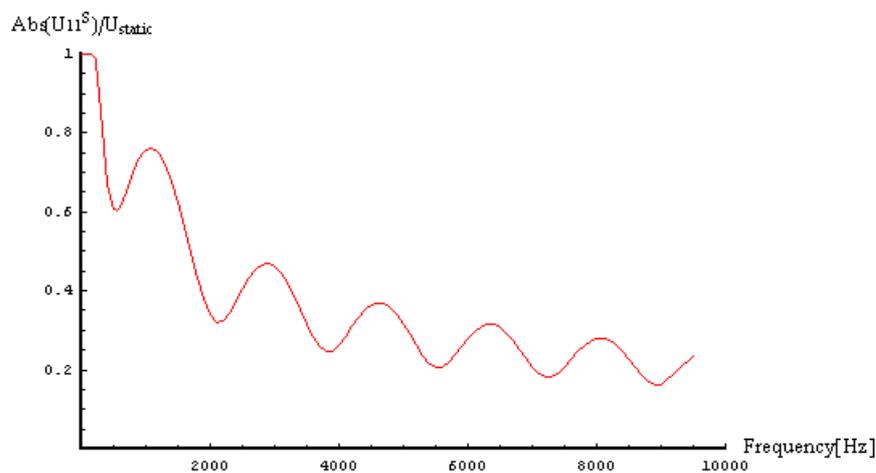
**Figure 6.1** — Solution fondamentale de déplacement en direction 1 due à une force ponctuelle unitaire dans la même direction  $|\tilde{U}_{11}^S|$  par rapport à la distance  $r$  et la fréquence  $\omega$

Également, les visualisations 2D de quelques solutions fondamentales sont présentées en maintenant constant la distance  $r$  et en variant les fréquences  $\omega$  pour voir d'une manière plus claire le comportement des solutions fondamentales. De plus, tous les résultats, c.-à-d., les résultats de déplacement et de pression, sont normalisés à leur comportement singulier présenté dans la section (6.1.4).

Dans la Fig. (6.2), la solution fondamentale de déplacement  $|\tilde{U}_{11}^S|$  normalisée par  $|\tilde{U}_{11}^S|_{statique}$  (6.118) est présentée en fonction de la fréquence pour deux points à  $r = 0.1m$  et à  $r = 0.5m$  de distance de l'origine.

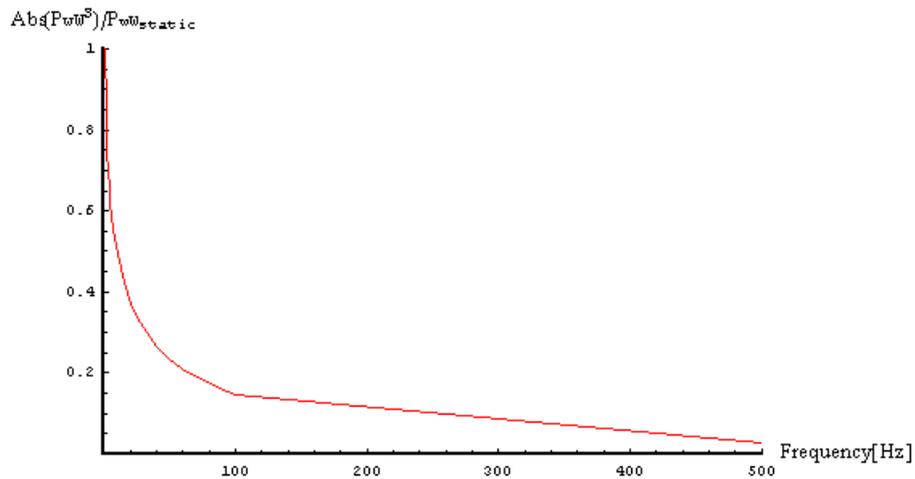
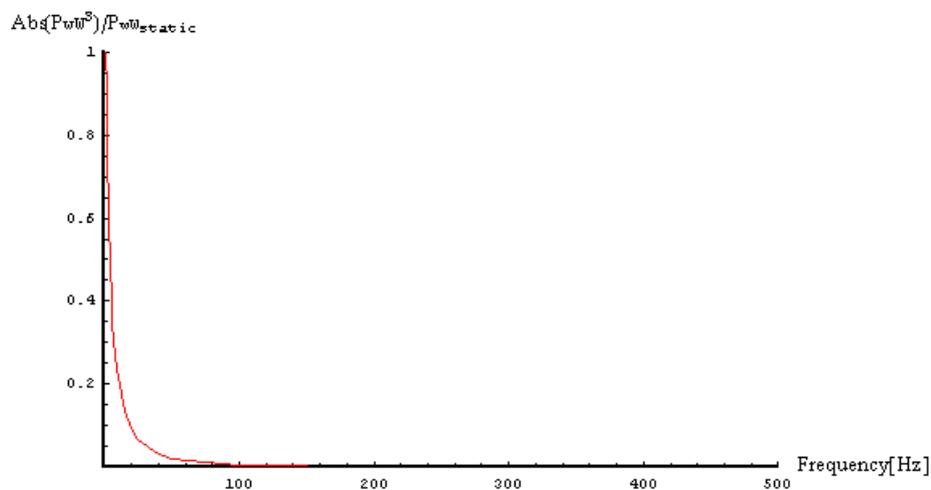
Une comparaison entre les Fig. 6.2(a) et Fig. 6.2(b) prouve qu'il y a une différence entre les

temps d'arrivée de l'onde de compression rapide. Il est évident que plus grande est la distance, plus tardif est le temps d'arrivée, c'est à dire, plus courte est la fréquence. Par conséquent, dans la Fig. 6.2(b) à  $r = 0.5m$ , l'onde de compression rapide arrive plus tard et influence les fréquences plus courtes.

(a)  $r = 0.1m$ (b)  $r = 0.5m$ 

**Figure 6.2** — Solution fondamentale de déplacement  $|\tilde{U}_{11}^S|$  normalisée par  $|\tilde{U}_{11}^S|_{statique}$  en fonction de la fréquence  $\omega$

Ensuite dans la Fig. 6.3, la pression d'eau normalisée due à une source dans l'eau est représentée. Comme montré, le changement de pression est immédiat dans les deux cas. Par conséquent, la pression d'eau n'est pas fortement dépendante du temps ou de la fréquence [296].

(a)  $r = 0.1m$ (b)  $r = 0.5m$ 

**Figure 6.3** — Solution fondamentale de pression d'eau  $|\tilde{P}^{wW}|$  normalisée par  $|\tilde{P}^{wW}|_{statique}$  contre la fréquence  $\omega$

## 6.2 Problèmes quasi-statiques isothermes

### 6.2.1 Système d'équations de champs

Pour l'exhaustivité et la consultation plus facile, le modèle de couplage hydro-mécanique dans les milieux poreux non saturés soumis aux chargements quasi-statiques (*modèle de consolidation*) est brièvement présenté ci-dessous. Dans ce modèle, les variables d'état sont la contrainte totale nette «  $\sigma - p_a$  » et la succion «  $p_a - p_w$  ». Les effets de la déformation sur la distribution de la succion dans le squelette solide et les effets inverses sont inclus dans le modèle via des surfaces d'état en indice des vides «  $e$  » et en degré de saturation «  $S_r$  » dépendantes de la succion. Le milieu poroélastique du squelette est isotrope et linéaire. Les propriétés mécaniques et hydrauliques du sol sont supposées être dépendantes de la succion. La loi de Darcy généralisée s'utilise pour le mouvement de l'eau et de l'air. Pour une description plus détaillée sur le modèle de consolidation dans les sols non saturés, voir [143, 144, 148, 149, 150].

Les équations de champs de la poroélasticité multiphasique se composent des éléments suivants :

**Équation d'équilibre :**

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_a)_{,j} + p_{a,i} + f_i = 0 \quad (6.149)$$

où  $\sigma_{ij}$  est le tenseur de contrainte totale,  $\delta_{ij}$  est le delta de Kronecker,  $p_a$  est la pression interstitielle de l'air,  $f_i$  est la force volumique par unité de volume.

**Loi de comportement du squelette solide :**

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_a) = (\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}) - F_{ij}^s(p_a - p_w) \quad (6.150)$$

Dans cette équation constitutive  $(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_a)$  et  $(p_a - p_w)$  indiquent respectivement le tenseur de contrainte totale nette et la succion,  $p_w$  est la pression interstitielle de l'eau,  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé qui dans un sol non saturé dépendent des variables indépendantes  $(\sigma - p_a)$  et  $(p_a - p_w)$ .  $\varepsilon_{ij}$  est la déformation totale du squelette et  $F_{ij}^s = D_{ijkl}(D_{lk}^{suc})^{-1}$  dans laquelle  $D_{ijkl}$  est la matrice de rigidité élastique linéaire et  $D_{lk}^{suc} = \beta_{suc}[1, 1, 0]^T$  où  $\beta_{suc}$  s'obtient à partir de la surface d'état de l'indice des vides «  $e$  ».

**Conservation de la masse d'eau :**

$$\frac{\partial(\rho_w n S_w)}{\partial t} + div(\rho_w U) = 0 \quad (6.151)$$

dans laquelle  $\rho_w$  est la masse volumique de l'eau,  $n = \varepsilon_v = u_{k,k}$  est la porosité,  $S_w$  est le degré de saturation par rapport à l'eau et  $U$  est la vitesse d'écoulement de l'eau.

**Équation d'écoulement de l'eau :**

$$U = -k_w \nabla \left( \frac{p_w}{\gamma_w} + z \right) \quad (6.152)$$

où  $k_w$  désigne la perméabilité à l'eau dans un sol non saturé.

**Conservation de la masse d'air :**

$$\frac{\partial(\rho_a n (1 - S_w))}{\partial t} + \text{div}(\rho_a V) = 0 \quad (6.153)$$

dans laquelle  $\rho_a$  est la masse volumique de l'air et  $V$  est la vitesse d'écoulement de l'air.

**Équation d'écoulement de l'air :**

$$V = -k_a \nabla \left( \frac{p_a}{\gamma_a} + z \right) \quad (6.154)$$

où  $k_a$  désigne la perméabilité à l'air dans un sol non saturé.

En introduisant (6.150) dans (6.149), (6.152) dans (6.151) et (6.154) dans (6.153), on trouve le système final des équations de champs régissant le comportement quasi-statique des milieux poreux non-saturés. En supposant des conditions initiales nulles, ce système s'écrit dans le domaine de Laplace (équation 5.19) sous la forme suivante :

$$(\lambda + \mu) \tilde{u}_{\beta, \alpha \beta} + \mu \tilde{u}_{\alpha, \beta \beta} + F^s \tilde{p}_{w, \alpha} + (1 - F^s) \tilde{p}_{a, \alpha} + \tilde{f}_\alpha = 0 \quad (6.155)$$

$$\rho_w S_w s \tilde{u}_{\alpha, \alpha} - \rho_w k'_w \tilde{p}_{w, \alpha \alpha} - \rho_w n g_1 s \tilde{p}_w + \rho_w n g_1 s \tilde{p}_a = 0 \quad (6.156)$$

$$\rho_a (1 - S_w) s \tilde{u}_{\alpha, \alpha} + \rho_a n g_1 s \tilde{p}_w - \rho_a k'_a \tilde{p}_{a, \alpha \alpha} - \rho_a n g_1 s \tilde{p}_a = 0 \quad (6.157)$$

où  $k'_w = k_w/\gamma_w$ ,  $k'_a = k_a/\gamma_a$  et  $g_1 = \partial S_w / \partial (p_a - p_w)$ . Ce système d'équations peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \tilde{u}_\alpha \\ \tilde{p}_w \\ \tilde{p}_a \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{f}_\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.158)$$

où  $\mathbf{B}$  est la matrice d'opérateurs différentiels :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (\mu \Delta) \delta_{\alpha \beta} + (\lambda + \mu) \partial_\alpha \partial_\beta & F^s \partial_\alpha & (1 - F^s) \partial_\alpha \\ s \rho_w S_w \partial_\beta & -\rho_w k'_w \Delta - s \rho_w n g_1 & s \rho_w n g_1 \\ s \rho_a (1 - S_w) \partial_\beta & s \rho_a n g_1 & -\rho_a k'_a \Delta - s \rho_a n g_1 \end{bmatrix} \quad (6.159)$$

dans laquelle  $\alpha, \beta = 1, 2$  (problème 2D),  $\partial_\alpha$  désigne la dérivée partielle par rapport à  $x_\alpha$  et  $\Delta = \partial_\alpha \partial_\alpha$  est l'opérateur laplacien. Les éléments sur les diagonales secondaires indiquent que cet opérateur est *non auto-adjoint*.

## 6.2.2 Équations intégrales de frontière pour l'analyse du comportement quasi-statique des sols non saturés

La procédure pour obtenir l'équation intégrale pour la poroélasticité non-saturée en utilisant la méthode des résidus pondérés est bien détaillée dans la partie précédente. De la même façon, la forme finale de l'équation intégrale de frontière pour l'analyse du comportement quasi-statique des sols non saturés s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} c_{\alpha\beta}(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & c(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & c(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_\alpha(\xi; s) \\ \tilde{p}_w(\xi; s) \\ \tilde{p}_a(\xi; s) \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{U}_{\alpha\beta}^S(x, \xi; s) & -\tilde{P}_\alpha^{wS}(x, \xi; s) & -\tilde{P}_\alpha^{aS}(x, \xi; s) \\ \tilde{U}_\beta^W(x, \xi; s) & -\tilde{P}^{wW}(x, \xi; s) & -\tilde{P}^{aW}(x, \xi; s) \\ \tilde{U}_\beta^A(x, \xi; s) & -\tilde{P}^{wA}(x, \xi; s) & -\tilde{P}^{aA}(x, \xi; s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_\alpha(x; s) \\ \tilde{q}_w(x; s) \\ \tilde{q}_a(x; s) \end{bmatrix} d\Gamma \quad (6.160)$$

$$- \oint_{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{T}_{\alpha\beta}^S(x, \xi; s) & \tilde{Q}_\alpha^{wS}(x, \xi; s) & \tilde{Q}_\alpha^{aS}(x, \xi; s) \\ \tilde{T}_\beta^W(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{wW}(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{aW}(x, \xi; s) \\ \tilde{T}_\beta^A(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{wA}(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{aA}(x, \xi; s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_\alpha(x; s) \\ \tilde{p}_w(x; s) \\ \tilde{p}_a(w; s) \end{bmatrix} d\Gamma$$

où le vecteur contrainte, le flux normal de l'eau et le flux normal de l'air sont respectivement :

$$\tilde{t}_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} n_\beta = [(\lambda \tilde{u}_{k,k} - F^s (\tilde{p}_a - \tilde{p}_w) + \tilde{p}_a) \delta_{\alpha\beta} + \mu(\tilde{u}_{\beta,\alpha} + \tilde{u}_{\alpha,\beta})] n_\beta \quad (6.161)$$

$$\tilde{q}_w = \rho_w k'_w \tilde{p}_{w,\beta} n_\beta \quad (6.162)$$

$$\tilde{q}_a = \rho_a k'_a \tilde{p}_{a,\beta} n_\beta \quad (6.163)$$

$\tilde{U}_{\alpha\beta}^S$ ,  $\tilde{U}_\beta^W$ ,  $\tilde{U}_\beta^A$ ,  $\tilde{P}_\alpha^{wS}$ ,  $\tilde{P}_\alpha^{aS}$ ,  $\tilde{P}^{wW}$ ,  $\tilde{P}^{aA}$ ,  $\tilde{P}^{wA}$  et  $\tilde{P}^{aW}$  sont les composantes de la matrice de solution fondamentale  $\tilde{\mathbf{G}}$  qui doit être solution de la matrice d'opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$  pour les problèmes quasi-statiques :

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} (\mu \Delta) \delta_{\alpha\beta} + (\lambda + \mu) \partial_\alpha \partial_\beta & -s \rho_w S_w \partial_\beta & -s \rho_a (1 - S_w) \partial_\beta \\ -F^s \partial_\alpha & -\rho_w k'_w \Delta - s \rho_w n g_1 & s \rho_a n g_1 \\ -(1 - F^s) \partial_\alpha & s \rho_w n g_1 & -\rho_a k'_a \Delta - s \rho_a n g_1 \end{bmatrix} \quad (6.164)$$

Également,  $\tilde{\mathbf{T}}^S$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}^{wS}$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}^{aS}$  peuvent être interprétés comme étant respectivement les termes adjoints au vecteur de contrainte  $\tilde{\mathbf{t}}$ , au flux de l'eau  $\tilde{q}_w$  et au flux de l'air  $\tilde{q}_a$  :

$$\tilde{T}_{\alpha\beta}^S = \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k\beta,k}^S + s \rho_w S_w \tilde{P}_\beta^{wS} + s \rho_a S_a \tilde{P}_\beta^{aS} \right) \delta_{\alpha l} + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha\beta,l}^S + \tilde{U}_{l\beta,\alpha}^S \right) \right] n_l \quad (6.165)$$

$$\tilde{T}_\alpha^W = \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k,k}^W + s \rho_w S_w \tilde{P}^{wW} + s \rho_a S_a \tilde{P}^{aW} \right) \delta_{\alpha l} + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha,l}^W + \tilde{U}_{l,\alpha}^W \right) \right] n_l \quad (6.166)$$

$$\tilde{T}_\alpha^A = \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k,k}^A + s \rho_w S_w \tilde{P}^{wA} + s \rho_a S_a \tilde{P}^{aA} \right) \delta_{\alpha l} + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha,l}^A + \tilde{U}_{l,\alpha}^A \right) \right] n_l \quad (6.167)$$

$$\tilde{Q}_\alpha^{wS} = \rho_w k'_w \tilde{P}_{\alpha,l}^{wS} n_l \quad (6.168)$$

$$\tilde{Q}^{wW} = \rho_w k'_w \tilde{P}_{,l}^{wW} n_l \quad (6.169)$$

$$\tilde{Q}^{wA} = \rho_w k'_w \tilde{P}_{,l}^{wA} n_l \quad (6.170)$$

$$\tilde{Q}_\alpha^{aS} = \rho_a k'_a \tilde{P}_{\alpha,l}^{aS} n_l \quad (6.171)$$

$$\tilde{Q}^{aW} = \rho_a k'_a \tilde{P}_{,l}^{aW} n_l \quad (6.172)$$

$$\tilde{Q}^{aA} = \rho_a k'_a \tilde{P}_{,l}^{aA} n_l \quad (6.173)$$

L'équation intégrale de frontière dépendant du temps pour le comportement quasi-statique des sols non saturés peut être obtenue par une transformation au domaine temporel [237] :

$$\begin{bmatrix} c_{\alpha\beta}(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & c(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & c(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\alpha(\xi; t) \\ p_w(\xi; t) \\ p_a(\xi; t) \end{bmatrix} = \int_0^t \int_\Gamma \begin{bmatrix} U_{\alpha\beta}^S(x, \xi; t - \tau) & -P_\alpha^{wS}(x, \xi; t - \tau) & -P_\alpha^{aS}(x, \xi; t - \tau) \\ U_\beta^W(x, \xi; t - \tau) & -P^{wW}(x, \xi; t - \tau) & -P^{aW}(x, \xi; t - \tau) \\ U_\beta^A(x, \xi; t - \tau) & -P^{wA}(x, \xi; t - \tau) & -P^{aA}(x, \xi; t - \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_\alpha(x; \tau) \\ q_w(x; \tau) \\ q_a(x; \tau) \end{bmatrix} d\Gamma dt \\ - \int_0^t \oint_\Gamma \begin{bmatrix} T_{\alpha\beta}^S(x, \xi; t - \tau) & Q_\alpha^{wS}(x, \xi; t - \tau) & Q_\alpha^{aS}(x, \xi; t - \tau) \\ T_\beta^W(x, \xi; t - \tau) & Q^{wW}(x, \xi; t - \tau) & Q^{aW}(x, \xi; t - \tau) \\ T_\beta^A(x, \xi; t - \tau) & Q^{wA}(x, \xi; t - \tau) & Q^{aA}(x, \xi; t - \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\alpha(x; \tau) \\ p_w(x; \tau) \\ p_a(w; \tau) \end{bmatrix} d\Gamma dt \quad (6.174)$$

### 6.2.3 Solutions fondamentales pour l'analyse du comportement quasi-statique des sols non saturés

Afin d'être capable de modéliser le phénomène de la consolidation dans les sols non-saturés par la méthode des éléments de frontière, il faut d'abord trouver les solutions fondamentales correspondantes. Comme mentionné auparavant, les solutions fondamentales obtenues par Gatmiri et Jabbari [152, 153, 154, 155] sont basées sur les hypothèses simplificatrices. Dans cette section, on fera un effort pour obtenir les solutions fondamentales 2D pour l'analyse du comportement quasi-statique des sols non saturés dans le domaine de Laplace en utilisant la méthode de Hörmander [182] ou de Kupradze et al. [208].

Comme l'opérateur différentiel régissant le comportement quasi-statique des milieux poreux non saturés  $\mathbf{B}$  n'est pas auto-adjoint (6.159), ici, les solutions pour l'opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$  (6.164) seront dérivées. Pour obtenir les solutions, on va suivre les étapes présentées dans la section (5.2.2.1).

La première étape, d'après l'équation (5.28), est de calculer le déterminant de la matrice de l'opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$  (6.164). Cela donne :

$$\det(\mathbf{B}^*) = \mu(\lambda + 2\mu) \rho_w \rho_a k'_w k'_a \nabla^4 (\nabla^2 - \lambda_1^2) (\nabla^2 - \lambda_2^2) \quad (6.175)$$

dans laquelle

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ - \left( \frac{g_1 n s (k'_w + k'_a)}{k'_w k'_a} + \frac{F^s S_w s}{k'_w (\lambda + 2\mu)} + \frac{(1 - F^s) (1 - S_w) s}{k'_a (\lambda + 2\mu)} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{g_1 n s (k'_w + k'_a)}{k'_w k'_a} + \frac{F^s S_w s}{k'_w (\lambda + 2\mu)} + \frac{(1 - F^s) (1 - S_w) s}{k'_a (\lambda + 2\mu)} \right)^2 - 4 \frac{g_1 n s^2}{k'_w k'_a (\lambda + 2\mu)}} \right] \quad (6.176)$$

Par conséquent, on a

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = - \left( \frac{g_1 n s (k'_w + k'_a)}{k'_w k'_a} + \frac{F^s S_w s}{k'_w (\lambda + 2\mu)} + \frac{(1 - F^s) (1 - S_w) s}{k'_a (\lambda + 2\mu)} \right) \quad (6.177)$$

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 = \frac{g_1 n s^2}{k'_w k'_a (\lambda + 2\mu)} \quad (6.178)$$

Maintenant, on peut calculer les éléments de la matrice des cofacteurs  $\mathbf{B}^{*co}$  en utilisant l'équation (5.24) :

$$\mathbf{B}^{*co} = \begin{bmatrix} B_{\alpha\beta}^{*co} & B_{\alpha 3}^{*co} & B_{\alpha 4}^{*co} \\ B_{3\beta}^{*co} & B_{33}^{*co} & B_{34}^{*co} \\ B_{4\beta}^{*co} & B_{43}^{*co} & B_{44}^{*co} \end{bmatrix} \quad (6.179)$$

où

$$B_{\alpha\beta}^{*co} = \delta_{\alpha\beta} (\lambda + 2\mu) \rho_w \rho_a k'_w k'_a \Delta (\Delta - \lambda_1^2) (\Delta - \lambda_2^2) - \rho_w \rho_a \partial_\alpha \partial_\beta \left\{ k'_w k'_a (\lambda + \mu) \nabla^4 + \left( F^s k'_a S_w + (1 - F^s) (1 - S_w) k'_w + (\lambda + \mu) g_1 n (k'_a + k'_w) \right) s \nabla^2 + g_1 n s^2 \right\}$$

$$\tilde{B}_{\alpha 3}^{co} = -\nabla^2 \mu \rho_w \rho_a s \left( g_1 n s \partial_\alpha + k'_a S_w \partial_\alpha \nabla^2 \right)$$

$$\tilde{B}_{\alpha 4}^{co} = -\nabla^2 \mu \rho_w \rho_a s \left( g_1 n s \partial_\alpha + k'_w (1 - S_w) \partial_\alpha \nabla^2 \right)$$

$$\tilde{B}_{3\beta}^{co} = -\nabla^2 \mu \rho_a \left( g_1 n s \partial_\beta + F^s k'_a \partial_\beta \nabla^2 \right)$$

$$\tilde{B}_{33}^{co} = -\nabla^2 \mu \rho_a \left( k'_a (\lambda + 2\mu) \nabla^4 + \left( (1 - F^s) s (1 - S_w) + (\lambda + 2\mu) g_1 n s \right) \nabla^2 \right)$$

$$\tilde{B}_{34}^{co} = -\nabla^2 \mu \rho_a s \left( -F^s (1 - S_w) + (\lambda + 2\mu) g_1 n \right) \nabla^2$$

$$\tilde{B}_{4\beta}^{co} = -\nabla^2 \mu \rho_w \left( (1 - F^s) k'_w \partial_\beta \nabla^2 + g_1 n s \partial_\beta \right)$$

$$\tilde{B}_{43}^{co} = -\nabla^2 \mu \rho_w s \left( g_1 n (\lambda + 2\mu) - (1 - F^s) S_w \right) \nabla^2$$

$$\tilde{B}_{44}^{co} = -\nabla^2 \mu \rho_w \left( k'_w (\lambda + 2\mu) \nabla^4 + (F^s s S_w + (\lambda + 2\mu) g_1 n s) \nabla^2 \right)$$

En remplaçant le déterminant de la matrice de l'opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$  (6.175), l'équation scalaire correspondant à (5.28) s'obtient comme suit :

$$\Delta (\Delta - \lambda_2^2) (\Delta - \lambda_1^2) \Phi + \delta(x - \xi) = 0 \quad (6.180)$$

avec l'abréviation

$$\Phi = \mu (\lambda + 2\mu) \rho_w \rho_a k'_w k'_a \Delta \phi \quad (6.181)$$

Pour résoudre cette équation, on suppose que

$$\phi_1 = \Delta (\Delta - \lambda_2^2) \Phi \quad (6.182)$$

$$\phi_2 = (\Delta - \lambda_2^2) (\Delta - \lambda_1^2) \Phi \quad (6.183)$$

$$\phi_3 = \Delta (\Delta - \lambda_1^2) \Phi \quad (6.184)$$

En substituant les expressions ci-dessus dans l'équation (6.181), on obtient :

$$(\Delta - \lambda_1^2) \phi_1 + \delta(x - \xi) = 0 \quad (6.185)$$

$$(\Delta - \lambda_2^2) \phi_3 + \delta(x - \xi) = 0 \quad (6.186)$$

$$\Delta \phi_2 + \delta(x - \xi) = 0 \quad (6.187)$$

Les deux premières équations ne sont autres que l'équation de Helmholtz dans  $\mathbb{R}^2$ , tandis que la troisième équation est l'équation de Laplace. Les solutions de ces équations sont bien connues :

$$\phi_1 = \frac{1}{2\pi} K_0(\lambda_1 r) \quad (6.188)$$

$$\phi_2 = -\frac{1}{2\pi} \ln(r) \quad (6.189)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2\pi} K_0(\lambda_2 r) \quad (6.190)$$

Par définition de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ , et  $\phi_3$ , on en déduit :

$$\Delta\Phi - \lambda_2^2\Phi = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\lambda_1^2} \quad (6.191)$$

$$\Delta\Phi - \lambda_1^2\Phi = \frac{\phi_3 - \phi_2}{\lambda_2^2} \quad (6.192)$$

La fonction  $\Phi$  est donc déterminée :

$$\Phi = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left( \frac{\phi_1 - \phi_2}{\lambda_1^2} - \frac{\phi_3 - \phi_2}{\lambda_2^2} \right) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_0(\lambda_1 r)}{\lambda_1^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} - \frac{\ln(r)}{\lambda_1^2\lambda_2^2} + \frac{K_0(\lambda_2 r)}{\lambda_2^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \right) \quad (6.193)$$

Alors :

$$\Delta\phi = \frac{1}{2\pi\mu(\lambda + 2\mu)\rho_w\rho_a k'_w k'_a} \left( \frac{K_0(\lambda_1 r)}{\lambda_1^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} - \frac{\ln(r)}{\lambda_1^2\lambda_2^2} + \frac{K_0(\lambda_2 r)}{\lambda_2^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \right) \quad (6.194)$$

Comme

$$\Delta(\varpi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial(\varpi)}{\partial r} \right) \quad (6.195)$$

$$\Delta^{-1}(\varpi) = \int_r \left( r^{-1} \int_r (r\varpi dr) \right) dr \quad (6.196)$$

on aura :

$$\begin{aligned} \Delta[K_0(\lambda_k r)] &= \frac{\lambda_k}{2r} [\lambda_k r K_0(\lambda_k r) - 2K_1(\lambda_k r) + \lambda_k r K_2(\lambda_k r)] \\ &= \frac{\lambda_k}{2r} \left[ \lambda_k r K_0(\lambda_k r) - 2K_1(\lambda_k r) + \lambda_k r \left( K_0(\lambda_k r) + \frac{2}{\lambda_k r} K_1(\lambda_k r) \right) \right] \\ &= \lambda_k^2 K_0(\lambda_k r) \end{aligned} \quad (6.197)$$

et

$$\Delta^{-1}[K_0(\lambda_k r)] = \frac{K_0(\lambda_k r)}{\lambda_k^2} \quad (6.198)$$

Également, on aura

$$\Delta[\ln(r)] = 0 \quad (6.199)$$

et

$$\Delta^{-1}[\ln(r)] = -\frac{\lambda_2^2 \ln(r)}{\lambda_1^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} - \frac{\lambda_1^2 \ln(r)}{\lambda_2^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \frac{r^2}{4} (\ln(r) - 1) \quad (6.200)$$

Par conséquent, en remplaçant les équations (6.198) et (6.200) dans (6.194), on obtient :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2\pi\mu(\lambda + 2\mu)\rho_w\rho_a k'_w k'_a} \times \\ &\left( \frac{K_0(\lambda_1 r)}{\lambda_1^4(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\ln(r)}{\lambda_1^4(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{r^2}{4\lambda_1^2\lambda_2^2} (1 - \ln(r)) + \frac{K_0(\lambda_2 r)}{\lambda_2^4(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\ln(r)}{\lambda_2^4(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \right) \end{aligned} \quad (6.201)$$

Finalement, en appliquant la matrice d'opérateur  $\mathbf{B}^{*co}$  à la solution  $\phi(r, s)$ , les solutions fondamentales pour les sols non saturés soumis aux chargements quasi-statiques s'obtiennent [237] :

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{\alpha\beta} & \tilde{G}_{\alpha 3} & \tilde{G}_{\alpha 4} \\ \tilde{G}_{3\beta} & \tilde{G}_{33} & \tilde{G}_{34} \\ \tilde{G}_{4\beta} & \tilde{G}_{43} & \tilde{G}_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{\alpha\beta}^S & \tilde{U}_{\alpha}^W & \tilde{U}_{\alpha}^A \\ \tilde{P}_{\beta}^{wS} & \tilde{P}^{wW} & \tilde{P}^{wA} \\ \tilde{P}_{\beta}^{aS} & \tilde{P}^{aW} & \tilde{P}^{aA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\alpha\beta}^{*co} & B_{\alpha 3}^{*co} & B_{\alpha 4}^{*co} \\ B_{3\beta}^{*co} & B_{33}^{*co} & B_{34}^{*co} \\ B_{4\beta}^{*co} & B_{43}^{*co} & B_{44}^{*co} \end{bmatrix} \phi \quad (6.202)$$

On va présenter ci-dessous les détails de calcul pour chaque composante de la matrice de solution fondamentale  $\mathbf{G}$ . Il faut préciser que les opérations des dérivées partielles apparues dans les équations suivantes sont données explicitement dans l'annexe (B.1).

- *déplacement du squelette solide dans la direction  $\alpha$  dû à la force ponctuelle dans le solide dans la direction  $\beta$*

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}^{*co} \phi = & \underbrace{\delta_{\alpha\beta} k'_w k'_a (\lambda + 2\mu) \rho_w \rho_a \Delta (\Delta - \lambda_1^2) (\Delta - \lambda_2^2) \phi}_{I} - \underbrace{\rho_w \rho_a k'_w k'_a (\lambda + \mu) \nabla^4 \partial_i \partial_j \phi}_{II} \\ & - \underbrace{\rho_w \rho_a \left( F^s k'_a s S_w + (1 - F^s) (1 - S_w) s k'_w + (\lambda + \mu) g_1 n s (k'_a + k'_w) \right) \nabla^2 \partial_\alpha \partial_\beta \phi}_{III} \\ & - \underbrace{\rho_w \rho_a g_1 n s^2 \partial_\alpha \partial_\beta \phi}_{IV} \end{aligned} \quad (6.203)$$

$$I = \delta_{\alpha\beta} k'_w k'_a (\lambda + 2\mu) \rho_w \rho_a \Delta (\Delta - \lambda_1^2) (\Delta - \lambda_2^2) \frac{\Delta^{-1} \Phi}{\mu (\lambda + 2\mu) \rho_a \rho_w k'_w k'_a}$$

$$II = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\mu} (\Delta - \lambda_1^2) (\Delta - \lambda_2^2) \Phi$$

$$III = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2\pi\mu} (\Delta - \lambda_1^2) \left( \frac{K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} - \frac{\lambda_2^2 K_0(\lambda_1 r)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\ln(r)}{\lambda_1^2} \right)$$

$$IV = \frac{-\delta_{ij}}{2\pi\mu} \ln(r)$$

$$II = -\rho_w \rho_a k'_w k'_a (\lambda + \mu) \nabla^4 \partial_\alpha \partial_\beta \frac{\Delta^{-1} \Phi}{\mu (\lambda + 2\mu) \rho_a \rho_w k'_w k'_a}$$

$$II = -\frac{(\lambda + \mu)}{\mu (\lambda + 2\mu)} \partial_\alpha \partial_\beta \Delta \Phi$$

$$II = -\frac{(\lambda + \mu)}{2\pi\mu (\lambda + 2\mu) (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left( r_{,\alpha} r_{,\beta} (\lambda_1^2 K_2(\lambda_1 r) - \lambda_2^2 K_2(\lambda_2 r)) - \delta_{\alpha\beta} \left( \frac{\lambda_1 K_1(\lambda_1 r)}{r} - \frac{\lambda_2 K_1(\lambda_2 r)}{r} \right) \right)$$

$$III = -\rho_w \rho_a \left( F^s k'_a s S_r + (1 - F^s) (1 - S_w) s k'_w + (\lambda + \mu) g_1 n s (k'_a + k'_w) \right) \Delta \partial_\alpha \partial_\beta \frac{\Delta^{-1} \Phi}{\mu (\lambda + 2\mu) \rho_a \rho_w k'_w k'_a}$$

$$III = -\left( \frac{F^s s S_w}{\mu (\lambda + 2\mu) k'_w} + \frac{(1 - F^s) (1 - S_w) s}{\mu (\lambda + 2\mu) k'_a} + \frac{(\lambda + \mu) g_1 n s (k'_a + k'_w)}{\mu (\lambda + 2\mu) k'_w k'_a} \right) \partial_\alpha \partial_\beta \Phi$$

$$\begin{aligned}
III &= -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{F^s s S_w}{\mu (\lambda + 2\mu) k'_w} + \frac{(1 - F^s) (1 - S_w) s}{\mu (\lambda + 2\mu) k'_a} + \frac{(\lambda + \mu) g_1 n s (k'_a + k'_w)}{\mu (\lambda + 2\mu) k'_w k'_a} \right) \times \\
&\quad \left( \frac{r, \alpha r, \beta}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} (K_2(\lambda_1 r) - K_2(\lambda_2 r)) - \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left( \frac{K_1(\lambda_1 r)}{r \lambda_1} - \frac{K_1(\lambda_2 r)}{r \lambda_2} \right) \right) \\
&\quad \left( + \left( \frac{2r, \alpha r, \beta - \delta_{\alpha\beta}}{r^2} \right) \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \\
IV &= -\frac{g_1 n s^2}{2\pi \mu (\lambda + 2\mu) k'_w k'_a} \times \\
&\quad \left( \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[ \frac{1}{r^2 \lambda_1^2} - \frac{1}{r \lambda_1} K_1(\lambda_1 r) \right] + r, \alpha r, \beta \frac{1}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[ K_2(\lambda_1 r) - \frac{2}{r^2 \lambda_1^2} \right] \right) \\
&\quad \left( -\delta_{\alpha\beta} \frac{1}{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[ \frac{1}{r^2 \lambda_2^2} - \frac{1}{r \lambda_2} K_1(\lambda_2 r) \right] - r, \alpha r, \beta \frac{1}{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[ K_2(\lambda_2 r) - \frac{2}{r^2 \lambda_2^2} \right] \right) \\
&\quad \left( -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} \ln(r) - \frac{r, \alpha r, \beta}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right)
\end{aligned}$$

À la fin, après quelques manipulations algébriques  $\tilde{G}_{\alpha\beta}$  s'écrit sous la forme finale suivante :

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{\alpha\beta} = \tilde{U}_{\alpha\beta}^s &= \frac{-\delta_{\alpha\beta}}{4\pi\mu} \ln(r) + \frac{r, \alpha r, \beta}{4\pi\mu} + \frac{1}{2\pi (\lambda + 2\mu) (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \\
&\quad \left\{ \left( r, \alpha r, \beta (\lambda_1^2 K_2(\lambda_1 r) - \lambda_2^2 K_2(\lambda_2 r)) - \delta_{\alpha\beta} \left( \frac{\lambda_1 K_1(\lambda_1 r)}{r} - \frac{\lambda_2 K_1(\lambda_2 r)}{r} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{g_1 n s (k'_a + k'_w)}{k'_w k'_a} \right) \left( r, \alpha r, \beta (K_2(\lambda_1 r) - K_2(\lambda_2 r)) - \delta_{\alpha\beta} \left( \frac{K_1(\lambda_1 r)}{r \lambda_1} - \frac{K_1(\lambda_2 r)}{r \lambda_2} \right) \right) \right\} \\
&\quad + \left( \frac{g_1 n s (k'_a + k'_w)}{2\pi (\lambda + 2\mu) k'_w k'_a} \right) \left( \frac{2r, \alpha r, \beta - \delta_{\alpha\beta}}{r^2} \right) \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}
\end{aligned} \tag{6.204}$$

Avec la même approche présentée ci-dessus, on trouve les formes explicites finales pour les autres solutions fondamentales comme suit :

- déplacement du squelette solide dans la direction  $\alpha$  dû à la source ponctuelle impulsionnelle d'eau injectée

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{\alpha}^W &= \frac{r, \alpha}{2\pi (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \\
&\quad \left\{ \left( \lambda_2^2 + \frac{S_w s}{(\lambda + 2\mu) k'_w} \right) \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{r} - \left( \lambda_1^2 + \frac{S_w s}{(\lambda + 2\mu) k'_w} \right) \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right\}
\end{aligned} \tag{6.205}$$

- déplacement du squelette solide dans la direction  $\alpha$  dû à la source ponctuelle impulsion-

nelle d'air injecté

$$\tilde{U}_\alpha^A = \frac{r, \alpha}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \left\{ \left( \lambda_2^2 + \frac{(1 - S_w) s}{(\lambda + 2\mu) k'_a} \right) \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{r} - \left( \lambda_1^2 + \frac{(1 - S_w) s}{(\lambda + 2\mu) k'_a} \right) \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right\} \quad (6.206)$$

• pression interstitielle de l'eau due à la force ponctuelle impulsionnelle dans le solide dans la direction  $\beta$

$$\tilde{P}_\beta^{wS} = \frac{r, \beta}{2\pi \rho_w s (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \left\{ \left( \lambda_2^2 + \frac{F^s s}{(\lambda + 2\mu) k'_w} \right) \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{r} - \left( \lambda_1^2 + \frac{F^s s}{(\lambda + 2\mu) k'_w} \right) \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right\} \quad (6.207)$$

• pression interstitielle de l'eau due à la source ponctuelle impulsionnelle d'eau injectée

$$\tilde{P}^{wW} = -\frac{1}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \rho_w k'_w} \left\{ (\lambda_1^2 + K_w^2) K_0(\lambda_1 r) - (\lambda_2^2 + K_w^2) K_0(\lambda_2 r) \right\} \quad (6.208)$$

avec  $K_w^2 = \frac{(1 - F^s) s (1 - S_w)}{(\lambda + 2\mu) k'_a} + \frac{g_1 n s}{k'_a}$

• pression interstitielle de l'eau due à la source ponctuelle impulsionnelle d'air injecté

$$\tilde{P}^{wA} = \frac{s}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \rho_w k'_w k'_a} \left( \frac{F^s (1 - S_w)}{(\lambda + 2\mu)} - g_1 n \right) \left( K_0(\lambda_1 r) - K_0(\lambda_2 r) \right) \quad (6.209)$$

• pression interstitielle de l'air due à la source ponctuelle impulsionnelle d'eau injectée

$$\tilde{P}^{aW} = \frac{s}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \rho_a k'_w k'_a} \left( \frac{(1 - F^s) S_w}{(\lambda + 2\mu)} - g_1 n \right) \left( K_0(\lambda_1 r) - K_0(\lambda_2 r) \right) \quad (6.210)$$

• pression interstitielle de l'air due à la force ponctuelle impulsionnelle dans le solide dans la direction  $\beta$

$$\tilde{P}_\beta^{aS} = \frac{r, \beta}{2\pi \rho_a s (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \left\{ \left( \lambda_2^2 + \frac{(1 - F^s) s}{(\lambda + 2\mu) k'_a} \right) \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{r} - \left( \lambda_1^2 + \frac{(1 - F^s) s}{(\lambda + 2\mu) k'_a} \right) \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right\} \quad (6.211)$$

• pression interstitielle de l'air due à la source ponctuelle impulsionnelle d'air injectée

$$\tilde{P}^{aA} = -\frac{1}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \rho_a k'_a} \left\{ (\lambda_1^2 + K_a^2) K_0(\lambda_1 r) - (\lambda_2^2 + K_a^2) K_0(\lambda_2 r) \right\} \quad (6.212)$$

$$\text{avec } K_a^2 = \frac{F^s s S_w}{(\lambda + 2\mu) k'_w} + \frac{g_1 n s}{k'_w}$$

Également, en introduisant les solutions fondamentales ci-dessus dans les abréviations de l'équation intégrale (6.165, 6.166, 6.167, 6.168, 6.169, 6.170, 6.171, 6.172, 6.173) on trouve leurs formes explicites comme suit :

$$- \tilde{T}_{\alpha\beta}^S = \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k,\beta,k}^S + s \rho_w S_w \tilde{P}_\beta^{wS} + s \rho_a S_a \tilde{P}_\beta^{aS} \right) \delta_{\alpha l} + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha\beta,l}^S + \tilde{U}_{l\beta,\alpha}^S \right) \right] n_l$$

Dans un souci de clarté, les différentes composantes de  $\tilde{T}_{\alpha\beta}^S$  seront présentées séparément.  $\tilde{P}_\beta^{wS}$  et  $\tilde{P}_\beta^{aS}$  sont déjà présentées respectivement dans (6.207) et (6.211). Pour les composantes des dérivées partielles de la solution en déplacement, on aura :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\alpha\beta,l}^S = & \underbrace{\left[ \frac{-\delta_{\alpha\beta}}{4\pi\mu} \ln(r) \right]_{,l}}_I + \underbrace{\left[ \frac{r_{,\alpha} r_{,\beta}}{4\pi\mu} \right]_{,l}}_{II} + \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \\ & \left\{ \underbrace{\left[ r_{,\alpha} r_{,\beta} (\lambda_1^2 K_2(\lambda_1 r) - \lambda_2^2 K_2(\lambda_2 r)) \right]_{,l}}_{IV} - \underbrace{\left[ \delta_{\alpha\beta} \left( \frac{\lambda_1 K_1(\lambda_1 r)}{r} - \frac{\lambda_2 K_1(\lambda_2 r)}{r} \right) \right]_{,l}}_V \right\} \\ & + \left( \frac{g_1 n s (k'_a + k'_w)}{k'_w k'_a} \right) \left\{ \underbrace{\left[ r_{,\alpha} r_{,\beta} (K_2(\lambda_1 r) - K_2(\lambda_2 r)) \right]_{,l}}_{VI} \right. \\ & \left. - \underbrace{\left[ \delta_{\alpha\beta} \left( \frac{K_1(\lambda_1 r)}{r \lambda_1} - \frac{K_1(\lambda_2 r)}{r \lambda_2} \right) \right]_{,l}}_{VII} \right\} \\ & + \underbrace{\left[ \left( \frac{g_1 n s (k'_a + k'_w)}{2\pi(\lambda + 2\mu) k'_w k'_a} \right) \left( \frac{2r_{,\alpha} r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{r^2} \right) \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right]}_{III} \end{aligned} \quad (6.213)$$

$$I = \left[ \frac{-\delta_{\alpha\beta}}{4\pi\mu} \ln(r) \right]_{,l} = \frac{-\delta_{\alpha\beta}}{4\pi\mu} \frac{r_{,l}}{r}$$

$$II = \left[ \frac{r_{,\alpha} r_{,\beta}}{4\pi\mu} \right]_{,l} = \frac{1}{4\pi\mu} \left[ \frac{\delta_{\alpha l} - r_{,\alpha} r_{,l}}{r} r_{,\beta} + r_{,\alpha} \frac{\delta_{\beta l} - r_{,\beta} r_{,l}}{r} \right] = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{r_{,\alpha} \delta_{\beta l} + r_{,\beta} \delta_{\alpha l} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l}}{r}$$

$$\begin{aligned} III = & \left( \frac{g_1 n s (k'_a + k'_w)}{2\pi(\lambda + 2\mu) k'_w k'_a} \right) \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \left[ \frac{2r_{,\alpha} r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{r^2} \right]_{,l} = \\ & \left( \frac{g_1 n s (k'_a + k'_w)}{2\pi(\lambda + 2\mu) k'_w k'_a} \right) \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \left[ \left( \frac{1}{r^2} \right)_{,l} (2r_{,\alpha} r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}) + \frac{1}{r^2} (2r_{,\alpha} r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta})_{,l} \right] = \\ & \left( \frac{g_1 n s (k'_a + k'_w)}{2\pi(\lambda + 2\mu) k'_w k'_a} \right) \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \frac{2}{r^3} (r_{,\alpha} \delta_{\beta l} + r_{,\beta} \delta_{\alpha l} + r_{,l} \delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} IV = & [r_{,\alpha} r_{,\beta}]_{,l} (\lambda_1^2 K_2(\lambda_1 r) - \lambda_2^2 K_2(\lambda_2 r)) + r_{,\alpha} r_{,\beta} (\lambda_1^2 K_2(\lambda_1 r) - \lambda_2^2 K_2(\lambda_2 r))_{,l} = \\ & \frac{r_{,\alpha} \delta_{\beta l} + r_{,\beta} \delta_{\alpha l} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l}}{r} (\lambda_1^2 K_2(\lambda_1 r) - \lambda_2^2 K_2(\lambda_2 r)) - r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l} (\lambda_1^3 K_1(\lambda_1 r) - \lambda_2^3 K_1(\lambda_2 r)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= -\delta_{\alpha\beta} \left[ \lambda_1 \left( \frac{K_1(\lambda_1 r)}{r} \right)_{,l} - \lambda_2 \left( \frac{K_1(\lambda_2 r)}{r} \right)_{,l} \right] = \\
&\delta_{\alpha\beta} \left[ \left( \frac{\lambda_1^2 r_{,l}}{r} K_0(\lambda_1 r) + \frac{2r_{,l}}{r^2} \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) \right) - \left( \frac{\lambda_2^2 r_{,l}}{r} K_0(\lambda_2 r) + \frac{2r_{,l}}{r^2} \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right) \right] = \\
&\delta_{\alpha\beta} \left[ \frac{\lambda_1^2 r_{,l}}{r} \left( K_0(\lambda_1 r) + \frac{2}{\lambda_1 r} K_1(\lambda_1 r) \right) - \frac{\lambda_2^2 r_{,l}}{r} \left( K_0(\lambda_2 r) + \frac{2}{\lambda_2 r} K_1(\lambda_2 r) \right) \right] = \\
&\frac{r_{,l} \delta_{\alpha\beta}}{r} (\lambda_1^2 K_2(\lambda_1 r) - \lambda_2^2 K_2(\lambda_2 r))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VI &= (r_{,\alpha} r_{,\beta})_{,l} (K_2(\lambda_1 r) - K_2(\lambda_2 r)) + r_{,\alpha} r_{,\beta} (K_2(\lambda_1 r) - K_2(\lambda_2 r))_{,l} = \\
&\frac{r_{,\alpha} \delta_{\beta l} + r_{,\beta} \delta_{\alpha l} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l}}{r} (K_2(\lambda_1 r) - K_2(\lambda_2 r)) - r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l} (\lambda_1 K_1(\lambda_1 r) - \lambda_2 K_1(\lambda_2 r))
\end{aligned}$$

$$VII = -\delta_{\alpha\beta} \left[ \frac{-r_{,l}}{r} K_2(\lambda_1 r) - \frac{-r_{,l}}{r} K_2(\lambda_2 r) \right] = \frac{r_{,l} \delta_{\alpha\beta}}{r} (K_2(\lambda_1 r) - K_2(\lambda_2 r))$$

Alors

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{\alpha\beta,l}^S &= \frac{1}{4\pi\mu} \frac{r_{,\alpha} \delta_{\beta l} + r_{,\beta} \delta_{\alpha l} - r_{,l} \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l}}{r} + \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \\
&\left\{ \begin{aligned} &\frac{r_{,\alpha} \delta_{\beta l} + r_{,\beta} \delta_{\alpha l} + r_{,l} \delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l}}{r} (\lambda_1^2 K_2(\lambda_1 r) - \lambda_2^2 K_2(\lambda_2 r)) \\ &-r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l} (\lambda_1^3 K_1(\lambda_1 r) - \lambda_2^3 K_1(\lambda_2 r)) + \\ &\left( \frac{g_1 n s (k'_a + k'_w)}{k'_w k'_a} \right) \left[ \frac{r_{,\alpha} \delta_{\beta l} + r_{,\beta} \delta_{\alpha l} + r_{,l} \delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l}}{r} (K_2(\lambda_1 r) - K_2(\lambda_2 r)) \right. \\ &\quad \left. -r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l} (\lambda_1 K_1(\lambda_1 r) - \lambda_2 K_1(\lambda_2 r)) \right] \end{aligned} \right\} \\
&+ \left( \frac{g_1 n s (k'_a + k'_w)}{2\pi(\lambda + 2\mu) k'_w k'_a} \right) \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 r^2} \frac{2(r_{,\alpha} \delta_{\beta l} + r_{,\beta} \delta_{\alpha l} + r_{,l} \delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,l})}{r}
\end{aligned} \tag{6.214}$$

Donc, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\tilde{U}_{\alpha\beta,l}^S + \tilde{U}_{l\beta,\alpha}^S) n_l &= \frac{1}{2\pi\mu} \frac{r_{,\beta} n_\alpha - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n}}{r} + \frac{2}{2\pi(\lambda + 2\mu)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \\
&\left\{ \begin{aligned} &\frac{r_{,\alpha} n_\beta + r_{,\beta} n_\alpha + r_{,n} \delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n}}{r} (\lambda_1^2 K_2(\lambda_1 r) - \lambda_2^2 K_2(\lambda_2 r)) \\ &-r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} (\lambda_1^3 K_1(\lambda_1 r) - \lambda_2^3 K_1(\lambda_2 r)) + \\ &\left( \frac{g_1 n s (k'_a + k'_w)}{k'_w k'_a} \right) \left[ \frac{r_{,\alpha} n_\beta + r_{,\beta} n_\alpha + r_{,n} \delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n}}{r} (K_2(\lambda_1 r) - K_2(\lambda_2 r)) \right. \\ &\quad \left. -r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} (\lambda_1 K_1(\lambda_1 r) - \lambda_2 K_1(\lambda_2 r)) \right] \end{aligned} \right\} \\
&+ \left( \frac{g_1 n s (k'_a + k'_w)}{2\pi(\lambda + 2\mu) k'_w k'_a} \right) \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 r^2} \frac{4(r_{,\alpha} n_\beta + r_{,\beta} n_\alpha + r_{,n} \delta_{\alpha\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n})}{r}
\end{aligned} \tag{6.215}$$

$$\tilde{U}_{k,\beta,k}^S \delta_{\alpha l} n_l = \frac{-r_{,\beta} n_\alpha}{2\pi (\lambda + 2\mu) (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \left\{ (\lambda_1^3 K_1(\lambda_1 r) - \lambda_2^3 K_1(\lambda_2 r)) + \left( \frac{g_1 n_s (k'_a + k'_w)}{k'_w k'_a} \right) (\lambda_1 K_1(\lambda_1 r) - \lambda_2 K_1(\lambda_2 r)) \right\} \quad (6.216)$$

$$- \tilde{T}_\alpha^W = \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k,k}^W + s \rho_w S_w \tilde{P}^{wW} + s \rho_a S_a \tilde{P}^{aW} \right) \delta_{\alpha l} + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha,l}^W + \tilde{U}_{l,\alpha}^W \right) \right] n_l$$

Dans un souci de clarté, les différentes composantes de  $\tilde{T}_\beta^W$  seront présentées séparément.  $\tilde{P}^{wW}$  et  $\tilde{P}^{aW}$  sont déjà présentées respectivement dans (6.208) et (6.210). Pour les composantes des dérivées partielles de la solution en déplacement, on aura :

$$\tilde{U}_{\alpha,l}^W = \frac{1}{2\pi (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta_{\alpha l} - 2r_{,\alpha} r_{,l}}{r} \left[ \left( \lambda_2^2 + \frac{S_w s}{(\lambda + 2\mu) k'_w} \right) \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{r} \right. \\ \left. - \left( \lambda_1^2 + \frac{S_w s}{(\lambda + 2\mu) k'_w} \right) \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right] \\ -r_{,\alpha} r_{,l} \left[ \left( \lambda_2^2 + \frac{S_w s}{(\lambda + 2\mu) k'_w} \right) \lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r) - \left( \lambda_1^2 + \frac{S_w s}{(\lambda + 2\mu) k'_w} \right) \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) \right] \end{array} \right\} \quad (6.217)$$

Alors

$$\left( \tilde{U}_{\alpha,l}^W + \tilde{U}_{l,\alpha}^W \right) n_l = \frac{2}{2\pi (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{n_\alpha - 2r_{,\alpha} r_{,n}}{r} \left[ \left( \lambda_2^2 + \frac{S_w s}{(\lambda + 2\mu) k'_w} \right) \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{r} \right. \\ \left. - \left( \lambda_1^2 + \frac{S_w s}{(\lambda + 2\mu) k'_w} \right) \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right] \\ -r_{,\alpha} r_{,n} \left[ \left( \lambda_2^2 + \frac{S_w s}{(\lambda + 2\mu) k'_w} \right) \lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r) - \left( \lambda_1^2 + \frac{S_w s}{(\lambda + 2\mu) k'_w} \right) \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) \right] \end{array} \right\} \quad (6.218)$$

$$\tilde{U}_{k,k}^W \delta_{\alpha l} n_l = \frac{-n_\alpha}{2\pi (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \left\{ \left( \lambda_2^2 + \frac{S_w s}{(\lambda + 2\mu) k'_w} \right) \lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r) - \left( \lambda_1^2 + \frac{S_w s}{(\lambda + 2\mu) k'_w} \right) \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) \right\} \quad (6.219)$$

$$- \tilde{T}_\alpha^A = \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k,k}^A + s \rho_w S_w \tilde{P}^{wA} + s \rho_a S_a \tilde{P}^{aA} \right) \delta_{\alpha l} + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha,l}^A + \tilde{U}_{l,\alpha}^A \right) \right] n_l$$

Également pour plus de clarté, les différentes composantes de  $\tilde{T}_\beta^A$  seront présentées séparément.  $\tilde{P}^{wA}$  et  $\tilde{P}^{aA}$  sont déjà présentées respectivement dans (6.209) et (6.212). Pour les composantes des dérivées partielles de la solution en déplacement, on aura :

$$\tilde{U}_{\alpha,l}^A = \frac{1}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta_{\alpha l} - 2r_{,\alpha}r_{,l}}{r} \left[ \left( \lambda_2^2 + \frac{(1-S_w)s}{(\lambda+2\mu)k'_a} \right) \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{r} \right. \\ \left. - \left( \lambda_1^2 + \frac{(1-S_w)s}{(\lambda+2\mu)k'_a} \right) \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right] \\ -r_{,\alpha}r_{,l} \left[ \left( \lambda_2^2 + \frac{(1-S_w)s}{(\lambda+2\mu)k'_a} \right) \lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r) - \left( \lambda_1^2 + \frac{(1-S_w)s}{(\lambda+2\mu)k'_a} \right) \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) \right] \end{array} \right\} \quad (6.220)$$

Alors

$$\left( \tilde{U}_{\alpha,l}^A + \tilde{U}_{l,\alpha}^A \right) n_l = \frac{2}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{n_\alpha - 2r_{,\alpha}r_{,n}}{r} \left[ \left( \lambda_2^2 + \frac{(1-S_w)s}{(\lambda+2\mu)k'_a} \right) \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{r} \right. \\ \left. - \left( \lambda_1^2 + \frac{(1-S_w)s}{(\lambda+2\mu)k'_a} \right) \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right] \\ -r_{,\alpha}r_{,n} \left[ \left( \lambda_2^2 + \frac{(1-S_w)s}{(\lambda+2\mu)k'_a} \right) \lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r) - \left( \lambda_1^2 + \frac{(1-S_w)s}{(\lambda+2\mu)k'_a} \right) \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) \right] \end{array} \right\} \quad (6.221)$$

$$\tilde{U}_{k,k}^A \delta_{\alpha l} n_l = \frac{-n_\alpha}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \left\{ \left( \lambda_2^2 + \frac{(1-S_w)s}{(\lambda+2\mu)k'_a} \right) \lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r) - \left( \lambda_1^2 + \frac{(1-S_w)s}{(\lambda+2\mu)k'_a} \right) \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) \right\} \quad (6.222)$$

Les autres expressions explicites après quelques manipulations algébriques s'obtiennent comme suit :

$$\tilde{Q}_\alpha^{wS} = \frac{k'_w}{2\pi s(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{n_\alpha - 2r_{,\alpha}r_{,n}}{r} \left[ \left( \lambda_2^2 + \frac{F^s s}{(\lambda+2\mu)k'_w} \right) \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{r} \right. \\ \left. - \left( \lambda_1^2 + \frac{F^s s}{(\lambda+2\mu)k'_w} \right) \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right] \\ -r_{,\alpha}r_{,n} \left[ \left( \lambda_2^2 + \frac{F^s s}{(\lambda+2\mu)k'_w} \right) \lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r) - \left( \lambda_1^2 + \frac{F^s s}{(\lambda+2\mu)k'_w} \right) \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) \right] \end{array} \right\} \quad (6.223)$$

$$\tilde{Q}^{wW} = \frac{r,n}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left\{ \left( \lambda_1^2 + \frac{(1-F^s)s(1-S_w)}{(\lambda+2\mu)k'_a} + \frac{g_1ns}{k'_a} \right) \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) - \left( \lambda_2^2 + \frac{(1-F^s)s(1-S_w)}{(\lambda+2\mu)k'_a} + \frac{g_1ns}{k'_a} \right) \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right\} \quad (6.224)$$

$$\tilde{Q}^{wA} = -\frac{r,n}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)k'_a} \left( \frac{F^s(1-S_w)}{(\lambda+2\mu)} - g_1n \right) s \left( \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) - \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right) \quad (6.225)$$

$$\tilde{Q}_\alpha^{aS} = \frac{k'_a}{2\pi s(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{n_\alpha - 2r_{,\alpha}r,n}{r} \left[ \left( \lambda_2^2 + \frac{(1-F^s)s}{(\lambda+2\mu)k'_a} \right) \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{r} - \left( \lambda_1^2 + \frac{(1-F^s)s}{(\lambda+2\mu)k'_a} \right) \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right] \\ -r_{,\alpha}r,n \left[ \left( \lambda_2^2 + \frac{(1-F^s)s}{(\lambda+2\mu)k'_a} \right) \lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r) - \left( \lambda_1^2 + \frac{(1-F^s)s}{(\lambda+2\mu)k'_a} \right) \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) \right] \end{array} \right\} \quad (6.226)$$

$$\tilde{Q}^{aW} = -\frac{r,n}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)k'_w} \left( \frac{(1-F^s)S_w}{(\lambda+2\mu)} - g_1n \right) s \left( \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) - \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right) \quad (6.227)$$

$$\tilde{Q}^{aA} = \frac{r,n}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \left\{ \left( \lambda_1^2 + \frac{F^s s S_w}{(\lambda+2\mu)k'_w} + \frac{g_1ns}{k'_w} \right) \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) - \left( \lambda_2^2 + \frac{F^s s S_w}{(\lambda+2\mu)k'_w} + \frac{g_1ns}{k'_w} \right) \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right\} \quad (6.228)$$

## 6.2.4 Vérification analytique des solutions fondamentales

Dans cette partie, on s'intéresse à la vérification de la validité des solutions fondamentales obtenues. Puisque ces solutions sont présentées pour la première fois dans cette étude, il n'y a pas de possibilité de les comparer avec d'autres résultats correspondants pour trouver les différences probables.

Toutefois, nous pouvons vérifier les solutions mathématiquement, en approchant  $t \rightarrow \infty$  (ou  $s \rightarrow 0$ ), pour voir si elles prennent exactement la même forme que les solutions fondamentales poroélastostatiques [70].

### Cas limite : Poroélastostatique

À partir de l'équation (6.176) lorsque  $s \rightarrow 0$ , on a  $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0$ . De plus, les conditions de la poroélasticité nécessitent que  $\rho_a \rightarrow 0$ ,  $S_w \rightarrow 1$ ,  $g_1 \rightarrow 0$  et  $F^s \rightarrow 1$ . Dès lors en considérant

(6.101 et 6.107) et après quelques simplifications, on obtient :

$$\tilde{G}_{\alpha\beta} = \tilde{U}_{\alpha\beta}^s = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ \frac{x_\alpha x_\beta}{r^2} - \delta_{\alpha\beta} (3 - 4\nu) \ln r \right\} \quad (6.229)$$

$$\tilde{G}_{33} = \tilde{P}^{wW} = \frac{1}{2\pi\rho_w k'_w} \ln r \quad (6.230)$$

$$\tilde{G}_{44} = \tilde{P}^{aA} = 0 \quad (6.231)$$

$$\tilde{G}_{3\beta} = -\tilde{U}_\alpha^W = 0 \quad (6.232)$$

$$\tilde{G}_{4\beta} = -\tilde{U}_\alpha^A = 0 \quad (6.233)$$

$$\tilde{G}_{\alpha 3} = -\tilde{P}_\alpha^{wS} = -\frac{r}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{\rho_w k'_w} \frac{x_\alpha}{r} \left( \frac{1}{2} - \ln r \right) \quad (6.234)$$

$$\tilde{G}_{\alpha 4} = -\tilde{P}_\alpha^{aS} = 0 \quad (6.235)$$

$$\tilde{G}_{34} = \tilde{P}^{aW} = 0 \quad (6.236)$$

$$\tilde{G}_{43} = \tilde{P}^{wA} = 0 \quad (6.237)$$

## 6.2.5 Illustration des solutions fondamentales

Dans ce qui suit, nous présenterons les solutions fondamentales en déplacement du squelette solide ( $\tilde{U}_{\alpha\beta}^S$ ,  $\tilde{U}_\alpha^W$  et  $\tilde{U}_\alpha^A$ ) pour visualiser leurs comportements principaux et leurs singularités lorsque  $r(= r_x e_x + r_y e_y) \rightarrow 0$ .

On considère un échantillon de sol non saturé avec les grains solides incompressibles dont les propriétés matérielles ont été définies dans le système métrique comme suit :

| $E(N/m^2)$       | $\nu(-)$ | $F^s(N/m^2)$ | $e_0(-)$ |
|------------------|----------|--------------|----------|
| $30 \times 10^6$ | 0.35     | 1            | 0.75     |

**Tableau 6.6** — données matérielles d'un sol non saturé (paramètres mécaniques)

| $\rho_w(Kg/m^3)$ | $a_w(m/s)$           | $\alpha_w(-)$ | $S_{wu}(-)$ | $g_1(Pa^{-1})$     | $p_w(Pa)$       |
|------------------|----------------------|---------------|-------------|--------------------|-----------------|
| 1000             | $1.2 \times 10^{-9}$ | 5             | 0.05        | $1 \times 10^{-6}$ | $1 \times 10^4$ |

**Tableau 6.7** — données matérielles d'un sol non saturé (paramètres de l'eau)

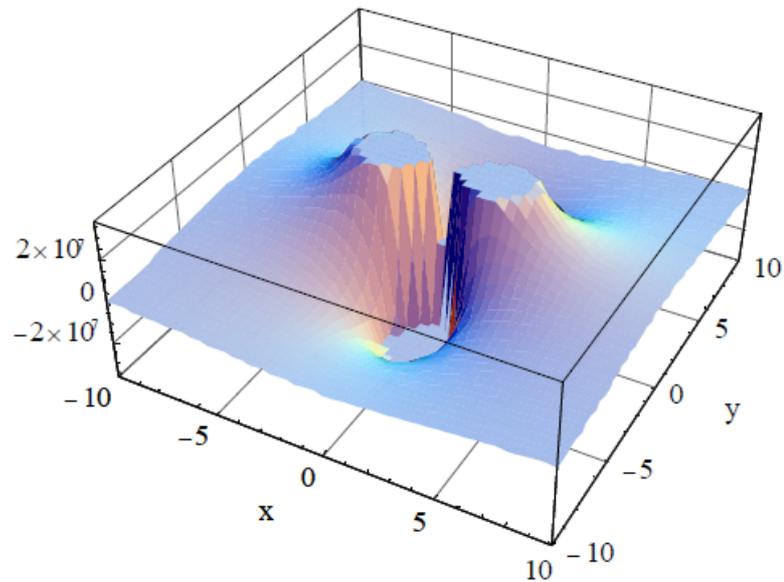


Figure 6.4 — Solution fondamentale en déplacement en direction 1 due à une force ponctuelle unitaire impulsionnelle dans la même direction,  $\tilde{U}_{11}^S$

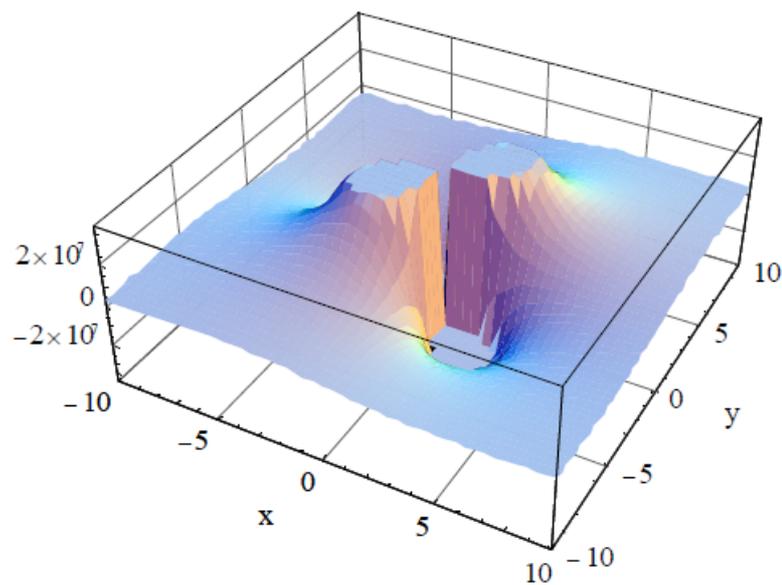
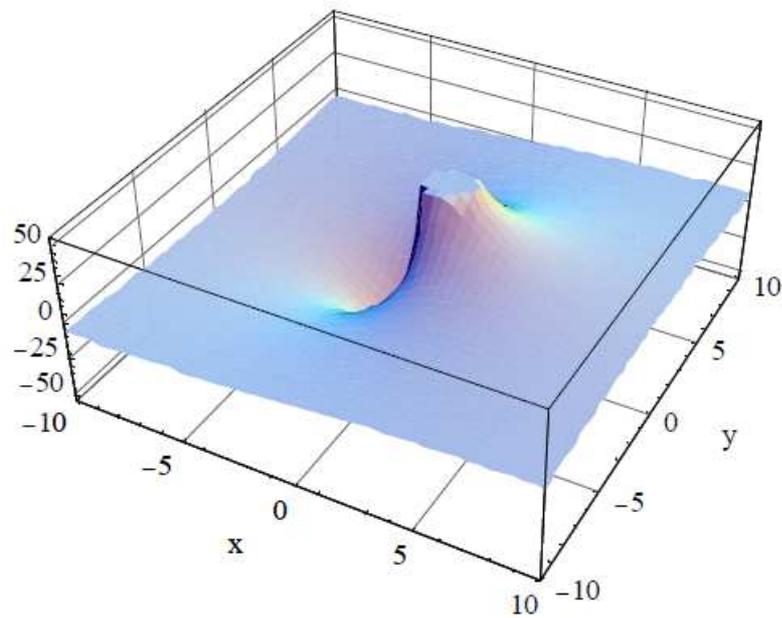


Figure 6.5 — Solution fondamentale en déplacement en direction 1 due à une force ponctuelle unitaire impulsionnelle dans la direction 2,  $\tilde{U}_{12}^S$

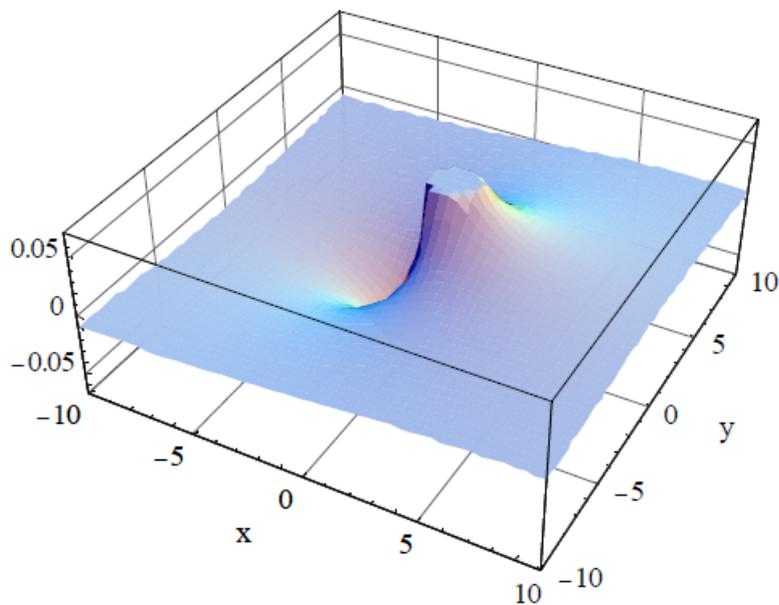
| $\rho_a(Kg/m^3)$ | $b_a(m^2)$         | $\alpha_a(-)$ | $\mu_a(N.s.m^{-2})$    | $p_a(Pa)$       |
|------------------|--------------------|---------------|------------------------|-----------------|
| 1                | $1 \times 10^{-4}$ | 2.6           | $1.846 \times 10^{-5}$ | $1 \times 10^5$ |

Tableau 6.8 — données matérielles d'un sol non saturé (paramètres de l'air)

Il faut constater que le paramètre de Laplace  $s = 1$ .



**Figure 6.6** — Solution fondamentale en déplacement en direction 1 due à la source ponctuelle impulsionnelle d'eau injectée,  $\tilde{U}_1^W$



**Figure 6.7** — Solution fondamentale en déplacement en direction 1 due à la source ponctuelle impulsionnelle d'air injectée,  $\tilde{U}_1^A$

### 6.3 Problèmes quasi-statiques non-isothermes

Dans le chapitre 2, un système d'équations couplées, gouvernant le comportement thermo-hydro-mécanique (THHM) des milieux poreux non saturés soumis aux chargements quasi-statiques est présenté. Dans ce modèle, les variables d'état sont la contrainte totale nette «  $\sigma - p_a$  », la succion «  $p_a - p_w$  » et la température «  $T$  ». Comme expliqué dans le chapitre 1, l'humidité est constituée de la vapeur et du liquide. Le terme de *transfert de liquide* sera utilisé pour le transfert qui se produit exclusivement dans la phase liquide, et le transfert au-delà de celui de l'état liquide est nommé le *transfert de vapeur*. Les effets de la déformation sur la distribution de la température et de la succion dans le squelette solide et les effets inverses sont inclus dans le modèle via des surfaces d'état en indice des vides «  $e$  » et en degré de saturation «  $S_r$  ». Les hypothèses de base prises en compte dans cette section sont les suivantes :

- Le milieu poroélastique du squelette est isotrope et linéaire.
- Les conditions quasi-statiques et la petite transformation sont considérées.
- La loi de Darcy généralisée s'utilise pour le mouvement de l'eau liquide et de l'air sec.
- La loi de Fourier est appliquée pour le flux de chaleur par conduction.
- Les surfaces d'état en indice des vides «  $e$  » et en degré de saturation «  $S_r$  » sont dépendantes de la température et de la succion.
- Les chaleurs latente et sensible, et l'air dissous sont pris en compte.

Pour la brièveté du texte, on récapitule le système d'équations ci-dessous. Pour plus d'informations voir le chapitre 2.

#### 6.3.1 Système d'équations de champs

Le système d'équations régissant le comportement des milieux poreux non saturés influencés par les effets de la chaleur se compose des éléments suivants :

**Équation d'équilibre :**

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_a)_{,j} + p_{a,i} + b_i = 0 \quad (6.238)$$

où  $\sigma_{ij}$  est le tenseur de contrainte totale,  $\delta_{ij}$  est le delta de Kronecker,  $p_a$  est la pression de l'air et  $b_i$  est la force volumique appliquée sur  $\Omega$ .

**Loi de comportement du squelette solide :**

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}p_a) = (\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}) - F_{ij}^s(p_a - p_w) - F_{ij}^T(T) \quad (6.239)$$

où  $F_{ij}^s = D_{ijkl}(D_{lk}^{suc})^{-1}$  et  $F_{ij}^T = D_{ijkl}(D_{lk}^T)^{-1}$  dans lesquelles  $D_{ijkl}$  est la matrice de rigidité élastique linéaire et  $D_{lk}^{suc} = \beta_{suc}[1, 1, 0]^T$  et  $D_{lk}^T = \beta_T[1, 1, 0]^T$  où  $\beta_{suc}$  et  $\beta_T$  s'obtiennent à partir de la surface d'état de l'indice des vides ( $e$ ).

**Conservation de la masse d'humidité :**

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \text{div}(\rho_m(\mathbf{V} + \mathbf{U})) = 0 \quad (6.240)$$

où  $\rho_m = \rho_w n S_r + \rho_{vap} n (1 - S_r)$  est la masse volumique homogénéisée de l'humidité dans laquelle  $n$  est la porosité,  $S_r = S_w$  est le degré de saturation relatif à l'eau,  $\rho_w$  et  $\rho_{vap}$  sont respectivement les masses volumiques de l'eau liquide et de la vapeur d'eau.  $\mathbf{U}$  est la vitesse d'écoulement de l'eau et  $\mathbf{V}$  est celle de la vapeur.

**Transfert en phase liquide :**

$$\mathbf{U} = -\mathbf{K}_w \nabla(\Psi + z) = -D_{Tw} \nabla T - D_{Pw} \nabla(p_a - p_w) - D_w \nabla z \quad (6.241)$$

où  $\mathbf{K}_w$  est le tenseur de perméabilité à l'eau du milieu,  $\Psi$  est le potentiel capillaire qui dans un problème non isotherme varie en fonction de la teneur en humidité et de la température,  $z$  est la cote du point considéré ou le terme de gravitation.  $D_{Tw}$ ,  $D_{Pw}$  et  $D_w$  sont respectivement la diffusivité thermique de l'eau, la diffusivité isotherme de l'eau et la diffusivité due à la pesanteur.

**Transfert de vapeur :**

$$\mathbf{V} = -D_{Tv} \nabla T - D_{Pv} \nabla(p_a - p_w) \quad (6.242)$$

où  $D_{Pv}$  et  $D_{Tv}$  sont respectivement, les diffusivités isotherme et thermique de la vapeur dans le milieu.

**Conservation de la masse d'air :**

$$\frac{\partial(\rho_a n (1 - S_r + H S_r))}{\partial t} + \text{div}(\rho_a \mathbf{V}_a) + \text{div}(\rho_a H \mathbf{U}) = 0 \quad (6.243)$$

où  $H$  est le coefficient de solubilité du gaz dans l'eau ou coefficient d'*Henry*,  $\rho_a$  est la masse volumique de l'air et  $\mathbf{V}_a$  est la vitesse de l'air dans le sol non saturé.

**Transfert de l'air :**

$$\mathbf{V}_a = -\mathbf{K}_a \left( \nabla \left( \frac{p_a}{\gamma_a} \right) + \nabla z \right) = -\mathbf{K}_a \beta_{pa} \nabla T - \mathbf{K}_a \left( \nabla \left( \frac{p_a}{\gamma_a} \right) + \nabla z \right) \quad (6.244)$$

dans laquelle  $\mathbf{K}_a$  est la perméabilité à l'air du milieu et  $\beta_{pa} = \frac{1}{\gamma_a} \frac{\partial p_a}{\partial T}$ .

**Conservation de l'énergie :**

$$\frac{\partial \varphi_T}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{Q}) = 0 \quad (6.245)$$

où  $\mathbf{Q}$  est le flux de chaleur et  $\varphi_T = c_T(T - T_0) + (n - \theta_w)\rho_{vap}h_{fg}$  décrit la quantité volumique de chaleur du sol dans laquelle  $c_T = (1 - n)\rho_s C_{ms} + \theta_w \rho_w C_{mw} + (n - \theta_w)\rho_{vap} C_{mv} + (n - \theta_w)\rho_a C_{ma}$  est la valeur de la capacité thermique volumique de sol non saturé et  $h_{fg}$  est la chaleur latente de vaporisation de l'eau du sol.

**Transfert de la chaleur :**

$$\mathbf{Q} = -\lambda_T \nabla T + (C_{mw}\rho_w \mathbf{U} + C_{mv}\rho_{vap} \mathbf{V} + C_{ma}\rho_a \mathbf{V}_a)(T - T_0) + h_{fg}(\rho_w \mathbf{V} + \rho_{vap} \mathbf{V}_a) \quad (6.246)$$

où  $C_{ms}$ ,  $C_{mw}$ ,  $C_{mv}$  et  $C_{ma}$  sont respectivement, les capacités thermiques massiques du solide, de l'eau, de la vapeur et de l'air.

En remplaçant (6.239) dans (6.238), (6.241) et (6.242) dans (6.240), (6.244) dans (6.243) et (6.246) dans (6.245), on trouve le système final des équations de champs régissant le comportement thermo-hydro-mécanique des milieux poreux non-saturés soumis aux chargements quasi-statiques :

$$(\lambda + \mu) u_{\beta,\alpha\beta} + \mu u_{\alpha,\beta\beta} + F^s p_{w,\alpha} + (1 - F^s) p_{a,\alpha} - F^T T_{,\alpha} + b_\alpha = 0 \quad (6.247)$$

$$\begin{aligned} & (\rho_w S_r + \rho_{vap}(1 - S_r)) \frac{\partial u_{\alpha,\alpha}}{\partial t} + n(\rho_w - \rho_{vap})g_1 \frac{\partial(p_a - p_w)}{\partial t} + n(\rho_w - \rho_{vap})g_2 \frac{\partial T}{\partial t} \\ & = \rho_w (D_T \nabla^2 T + D_p \nabla^2 p_a - D_p \nabla^2 p_w) \end{aligned} \quad (6.248)$$

$$\begin{aligned} & \rho_a (1 + (H - 1) S_r) \frac{\partial u_{\alpha,\alpha}}{\partial t} + \rho_a n (H - 1) g_1 \frac{\partial(p_a - p_w)}{\partial t} + \rho_a n (H - 1) g_2 \frac{\partial T}{\partial t} = \\ & -\rho_a \left( H D_{P_w} \nabla^2 p_w + \left( \frac{K_a}{\gamma_a} + H D_{P_w} \right) \nabla^2 p_a + (K_a \beta_{pa} + H D_{T_w}) \nabla^2 T \right) \end{aligned} \quad (6.249)$$

$$\chi_1 \frac{\partial u_{\alpha,\alpha}}{\partial t} - \chi_2 g_1 \frac{\partial p_w}{\partial t} + \chi_2 g_1 \frac{\partial p_a}{\partial t} + (\chi_2 g_2 + \chi_3) \frac{\partial T}{\partial t} = \chi_6 \nabla^2 p_w + \chi_5 \nabla^2 p_a + \chi_4 \nabla^2 T \quad (6.250)$$

Ces équations peuvent être récapitulées sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{B}_1 \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u_\alpha \\ p_w \\ p_a \\ T \end{bmatrix} + \mathbf{B}_2 \begin{bmatrix} u_\alpha \\ p_w \\ p_a \\ T \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.251)$$

où

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_6 \partial_\beta & a_7 & a_8 & a_9 \\ a_{13} \partial_\beta & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{20} \partial_\beta & a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad (6.252)$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} a_1 \partial_\alpha \partial_\beta + a_2 \nabla^2 & a_3 \partial_\alpha & a_4 \partial_\alpha & a_5 \partial_\alpha \\ 0 & a_{10} \nabla^2 & a_{11} \nabla^2 & a_{12} \nabla^2 \\ 0 & a_{17} \nabla^2 & a_{18} \nabla^2 & a_{19} \nabla^2 \\ 0 & a_{24} \nabla^2 & a_{25} \nabla^2 & a_{26} \nabla^2 \end{bmatrix} \quad (6.253)$$

dans lesquelles  $\alpha, \beta = 1, 2$  pour les problèmes bi-dimensionnels et  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  pour les problèmes tri-dimensionnels,  $\partial_\alpha$  désigne la dérivée partielle par rapport à  $x_\alpha$  et  $\nabla^2 = \partial_\alpha \partial_\alpha$  est l'opérateur laplacien. Dans la matrice  $\mathbf{B}_1$ , le nombre de lignes de zéros est déterminé par le paramètre  $\alpha$ . Autrement dit, dans les problèmes 2D et 3D on a respectivement deux et trois lignes de zéros. Les coefficients  $a_i$  sont :

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda + \mu, & a_2 &= \mu, & a_3 &= F^s, & a_4 &= 1 - F^s, & a_5 &= -F^T, \\ a_6 &= \rho_w S_r + \rho_{vap} (1 - S_r), & a_7 &= -n (\rho_w - \rho_{vap}) g_1, & a_8 &= n (\rho_w - \rho_{vap}) g_1, \\ a_9 &= n (\rho_w - \rho_{vap}) g_2, & a_{10} &= \rho_w D_P, & a_{11} &= -\rho_w D_P, & a_{12} &= -\rho_w D_T, \\ a_{13} &= \rho_a (1 + (H - 1) S_r), & a_{14} &= -\rho_a n (H - 1) g_1, & a_{15} &= \rho_a n (H - 1) g_1, \\ a_{16} &= \rho_a n (H - 1) g_2, & a_{17} &= \rho_a H D_{Pw}, & a_{18} &= -\rho_a \left( \frac{K_a}{\gamma_a} + H D_{Pw} \right), \\ a_{19} &= -\rho_a (K_a \beta_{pa} + H D_{Tw}), & a_{20} &= \chi_1, & a_{21} &= -\chi_2 g_1, & a_{22} &= \chi_2 g_1, \\ a_{23} &= (\chi_2 g_2 + \chi_3), & a_{24} &= -\chi_6, & a_{25} &= -\chi_5, & a_{26} &= -\chi_4 \end{aligned}$$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation (6.251) pour éliminer la variable temps en supposant les conditions initiales nulles, on en déduit

$$s \mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} \tilde{u}_\alpha \\ \tilde{p}_w \\ \tilde{p}_a \\ \tilde{T} \end{bmatrix} + \mathbf{B}_2 \begin{bmatrix} \tilde{u}_\alpha \\ \tilde{p}_w \\ \tilde{p}_a \\ \tilde{T} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{b}_\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.254)$$

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \tilde{u}_\alpha \\ \tilde{p}_w \\ \tilde{p}_a \\ \tilde{T} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{b}_\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.255)$$

où  $s$  est le paramètre complexe de Laplace et  $\mathbf{B} = s \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$  est la matrice d'opérateurs différentiels :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1 \partial_\alpha \partial_\beta + a_2 \nabla^2 & a_3 \partial_\alpha & a_4 \partial_\alpha & a_5 \partial_\alpha \\ s a_6 \partial_\beta & s a_7 + a_{10} \nabla^2 & s a_8 + a_{11} \nabla^2 & s a_9 + a_{12} \nabla^2 \\ s a_{13} \partial_\beta & s a_{14} + a_{17} \nabla^2 & s a_{15} + a_{18} \nabla^2 & s a_{16} + a_{19} \nabla^2 \\ s a_{20} \partial_\beta & s a_{21} + a_{24} \nabla^2 & s a_{22} + a_{25} \nabla^2 & s a_{23} + a_{26} \nabla^2 \end{bmatrix} \quad (6.256)$$

### 6.3.2 Équations intégrales de frontière pour l'analyse du comportement quasi-statique non-isotherme des sols non saturés

Comme mentionné auparavant, il y a plusieurs méthodes pour dériver les équations intégrales de frontière, y compris le théorème de réciprocité, l'approche variationnelle et la méthode des résidus pondérés. Ici, les équations intégrales de frontière pour le problème thermo-poro-élastique transitoire seront dérivées en prenant la solution fondamentale comme la fonction poids et en utilisant la méthode des résidus pondérés, qui est essentiellement une intégration par parties [235]. L'avantage d'utiliser des résidus pondérés est sa généralité dans la plupart des principes et des théories tels que le théorème de Betti, la troisième identité de Green, le théorème des travaux virtuels, etc. Ceci permet l'extension de la méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles les plus complexes. Elle peut également être utilisée pour relier la méthode des éléments de frontière à d'autres techniques numériques [57].

En outre, soient  $\tilde{\mathbf{G}}$  et  $\tilde{\mathbf{G}}^*$  la solution fondamentale correspondant à l'opérateur différentiel original  $\mathbf{B}$  (6.256) et la solution fondamentale adjointe correspondant à l'opérateur différentiel adjoint  $\mathbf{B}^*$ . Considérer que celles-ci sont associées à une force ponctuelle unitaire impulsionnelle dans le squelette solide, à une source ponctuelle unitaire impulsionnelle d'injection des fluides (eau et air) et à une source ponctuelle unitaire impulsionnelle de la chaleur, exercées à l'instant  $\tau = 0$  en un point fixé  $\xi$  hors de la frontière  $\Gamma$ ,

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \delta(x - \xi) \delta(t) \xrightarrow{\text{transformée de Laplace}} \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{I} \delta(x - \xi)$$

implique, respectivement :

$$\mathbf{B} \tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{I} \delta(x - \xi) = 0 \quad (6.257)$$

$$\mathbf{B}^* \tilde{\mathbf{G}}^* + \mathbf{I} \delta(x - \xi) = 0 \quad (6.258)$$

En utilisant la méthode des résidus pondérés un ensemble d'équations intégrales sera dérivé directement en égalisant le produit scalaire de l'équation (6.255) et la matrice des solutions fondamentales adjointes  $\tilde{\mathbf{G}}^*$  à un vecteur nul, c.-à-d.

$$\int_{\Omega} \mathbf{B} \begin{bmatrix} \tilde{u}_\alpha \\ \tilde{p}_w \\ \tilde{p}_a \\ \tilde{T} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}^* d\Omega = 0 \quad (6.259)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{G}}^* = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{\alpha\beta}^* & \tilde{G}_{\alpha w}^* & \tilde{G}_{\alpha a}^* & \tilde{G}_{\alpha T}^* \\ \tilde{G}_{w\beta}^* & \tilde{G}_{ww}^* & \tilde{G}_{wa}^* & \tilde{G}_{wT}^* \\ \tilde{G}_{a\beta}^* & \tilde{G}_{aw}^* & \tilde{G}_{aa}^* & \tilde{G}_{aT}^* \\ \tilde{G}_{T\beta}^* & \tilde{G}_{Tw}^* & \tilde{G}_{Ta}^* & \tilde{G}_{TT}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{\alpha\beta}^S & \tilde{U}_{\alpha}^W & \tilde{U}_{\alpha}^A & \tilde{U}_{\alpha}^T \\ \tilde{P}_{\beta}^{wS} & \tilde{P}^{wW} & \tilde{P}^{wA} & \tilde{P}^{wT} \\ \tilde{P}_{\beta}^{aS} & \tilde{P}^{aW} & \tilde{P}^{aA} & \tilde{P}^{aT} \\ \tilde{T}_{\beta}^S & \tilde{T}^W & \tilde{T}^A & \tilde{T}^T \end{bmatrix}$$

En supposant que les forces volumiques et les sources de fluides et de chaleur sont nulles, l'équation (6.259) peut s'écrire avec la notation indicielle :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} & \left[ (\lambda + \mu) \tilde{G}_{\alpha j}^* \tilde{u}_{\beta, \beta \alpha} + \mu \tilde{G}_{\alpha j}^* \tilde{u}_{\alpha, \beta \beta} + F^S \tilde{G}_{\alpha j}^* \tilde{p}_{w, \alpha} + (1 - F^S) \tilde{G}_{\alpha j}^* \tilde{p}_{a, \alpha} - F^T \tilde{G}_{\alpha j}^* \tilde{T}_{, \alpha} \right. \\ & + a_{10} \tilde{G}_{wj}^* \Delta \tilde{p}_w + s a_6 \tilde{G}_{wj}^* \tilde{u}_{\alpha, \alpha} + s a_7 \tilde{G}_{wj}^* \tilde{p}_w + s a_8 \tilde{G}_{wj}^* \tilde{p}_a + a_{11} \tilde{G}_{wj}^* \Delta \tilde{p}_a + s a_9 \tilde{G}_{wj}^* \tilde{T} \\ & + a_{12} \tilde{G}_{wj}^* \Delta \tilde{T} + a_{18} \tilde{G}_{aj}^* \Delta \tilde{p}_a + s a_{13} \tilde{G}_{aj}^* \tilde{u}_{\alpha, \alpha} + s a_{15} \tilde{G}_{aj}^* \tilde{p}_a + s a_{14} \tilde{G}_{aj}^* \tilde{p}_w + a_{17} \tilde{G}_{aj}^* \Delta \tilde{p}_w \\ & + s a_{16} \tilde{G}_{aj}^* \tilde{T} + a_{19} \tilde{G}_{aj}^* \Delta \tilde{T} + a_{26} \tilde{G}_{Tj}^* \Delta \tilde{T} + s a_{20} \tilde{G}_{Tj}^* \tilde{u}_{\alpha, \alpha} + s a_{23} \tilde{G}_{Tj}^* \tilde{T} + s a_{21} \tilde{G}_{Tj}^* \tilde{p}_w \\ & \left. + a_{24} \tilde{G}_{Tj}^* \Delta \tilde{p}_w + s a_{22} \tilde{G}_{Tj}^* \tilde{p}_a + a_{25} \tilde{G}_{Tj}^* \Delta \tilde{p}_a \right] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (6.260)$$

où  $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$  pour les problèmes bi-dimensionnels et  $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  pour les problèmes tri-dimensionnels.

Comme montré dans le chapitre précédent, en faisant l'intégration par parties sur le domaine pour chaque terme dans (6.260) et en utilisant le théorème de Green, l'opérateur  $\mathbf{B}$  se transforme d'une action sur le vecteur des inconnues  $\tilde{u}_i = [ \tilde{u}_{\alpha} \quad \tilde{p}_w \quad \tilde{p}_a \quad \tilde{T} ]^T$  en une action sur la matrice des solutions fondamentales  $\tilde{\mathbf{G}}^*$ . Ceci aboutit au système d'équations intégrales suivant écrit avec la notation indicielle :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left[ \left( \lambda \tilde{u}_{k, k} - F^S (\tilde{p}_a - \tilde{p}_w) + \tilde{p}_a - F^T \tilde{T} \right) n_{\beta} \delta_{\alpha \beta} + \mu (\tilde{u}_{\beta, \alpha} + \tilde{u}_{\alpha, \beta}) n_{\beta} \right] \tilde{G}_{\alpha j}^* d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \tilde{u}_{\alpha} \left[ \lambda \tilde{G}_{kj, k}^* - s a_6 \tilde{G}_{wj}^* - s a_{13} \tilde{G}_{aj}^* - s a_{20} \tilde{G}_{Tj}^* \right] n_{\beta} \delta_{\alpha \beta} + \mu \left( \tilde{G}_{\alpha j, \beta}^* + \tilde{G}_{\beta j, \alpha}^* \right) n_{\beta} \right] d\Gamma \\ & + a_{10} \int_{\Gamma} \left( \tilde{p}_{w, n} \tilde{G}_{wj}^* - \tilde{p}_w \tilde{G}_{wj, n}^* \right) d\Gamma + a_{18} \int_{\Gamma} \left( \tilde{p}_{a, n} \tilde{G}_{aj}^* - \tilde{p}_a \tilde{G}_{aj, n}^* \right) d\Gamma \\ & + a_{26} \int_{\Gamma} \left( \tilde{T}_{, n} \tilde{G}_{Tj}^* - \tilde{T} \tilde{G}_{Tj, n}^* \right) d\Gamma + a_{11} \int_{\Gamma} \left( \tilde{p}_{a, n} \tilde{G}_{wj}^* - \tilde{p}_a \tilde{G}_{wj, n}^* \right) d\Gamma \\ & + a_{12} \int_{\Gamma} \left( \tilde{T}_{, n} \tilde{G}_{wj}^* - \tilde{T} \tilde{G}_{wj, n}^* \right) d\Gamma + a_{17} \int_{\Gamma} \left( \tilde{p}_{w, n} \tilde{G}_{aj}^* - \tilde{p}_w \tilde{G}_{aj, n}^* \right) d\Gamma \\ & + a_{19} \int_{\Gamma} \left( \tilde{T}_{, n} \tilde{G}_{aj}^* - \tilde{T} \tilde{G}_{aj, n}^* \right) d\Gamma + a_{24} \int_{\Gamma} \left( \tilde{p}_{w, n} \tilde{G}_{Tj}^* - \tilde{p}_w \tilde{G}_{Tj, n}^* \right) d\Gamma \\ & + a_{25} \int_{\Gamma} \left( \tilde{p}_{a, n} \tilde{G}_{Tj}^* - \tilde{p}_a \tilde{G}_{Tj, n}^* \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \tilde{u}_i B_{im}^* \tilde{G}_{mj}^* d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (6.261)$$

Comme mentionné ci-dessus,  $B_{im}^*$  est l'opérateur différentiel adjoint :

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} a_1 \partial_{\alpha} \partial_{\beta} + a_2 \nabla^2 & -s a_6 \partial_{\alpha} & -s a_{13} \partial_{\alpha} & -s a_{20} \partial_{\alpha} \\ -a_3 \partial_{\beta} & s a_7 + a_{10} \nabla^2 & s a_{14} + a_{17} \nabla^2 & s a_{21} + a_{24} \nabla^2 \\ -a_4 \partial_{\beta} & s a_8 + a_{11} \nabla^2 & s a_{15} + a_{18} \nabla^2 & s a_{22} + a_{25} \nabla^2 \\ -a_5 \partial_{\beta} & s a_9 + a_{12} \nabla^2 & s a_{16} + a_{19} \nabla^2 & s a_{23} + a_{26} \nabla^2 \end{bmatrix} \quad (6.262)$$

En substituant (6.258) dans (6.261) et en utilisant la propriété de la distribution de Dirac  $\delta(x-\xi)$ , on arrive à la représentation intégrale de frontière dans le domaine transformé de Laplace pour la thermo-poro-élasticité transitoire multiphasique [235] :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_{\alpha\beta}(\xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_\alpha(\xi; s) \\ \tilde{p}_w(\xi; s) \\ \tilde{p}_a(\xi; s) \\ \tilde{T}(\xi; s) \end{bmatrix} = \\ & \int_\Gamma \begin{bmatrix} \tilde{U}_{\alpha\beta}^S(x, \xi; s) & -\tilde{P}_\alpha^{wS}(x, \xi; s) & -\tilde{P}_\alpha^{aS}(x, \xi; s) & -\tilde{T}_\alpha^S(x, \xi; s) \\ \tilde{U}_\beta^W(x, \xi; s) & -\tilde{P}^{wW}(x, \xi; s) & -\tilde{P}^{aW}(x, \xi; s) & -\tilde{T}^W(x, \xi; s) \\ \tilde{U}_\beta^A(x, \xi; s) & -\tilde{P}^{wA}(x, \xi; s) & -\tilde{P}^{aA}(x, \xi; s) & -\tilde{T}^A(x, \xi; s) \\ \tilde{U}_\beta^T(x, \xi; s) & -\tilde{P}^{wT}(x, \xi; s) & -\tilde{P}^{aT}(x, \xi; s) & -\tilde{T}^T(x, \xi; s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_\alpha(x; s) \\ \tilde{q}_w(x; s) \\ \tilde{q}_a(x; s) \\ \tilde{q}_T(x; s) \end{bmatrix} d\Gamma \\ & - \oint_\Gamma \begin{bmatrix} \tilde{F}_{\alpha\beta}^S(x, \xi; s) & \tilde{Q}_\alpha^{wS}(x, \xi; s) & \tilde{Q}_\alpha^{aS}(x, \xi; s) & \tilde{Q}_\alpha^{TS}(x, \xi; s) \\ \tilde{F}_\beta^W(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{wW}(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{aW}(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{TW}(x, \xi; s) \\ \tilde{F}_\beta^A(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{wA}(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{aA}(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{TA}(x, \xi; s) \\ \tilde{F}_\beta^T(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{wT}(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{aT}(x, \xi; s) & \tilde{Q}^{TT}(x, \xi; s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_\alpha(x; s) \\ \tilde{p}_w(x; s) \\ \tilde{p}_a(x; s) \\ \tilde{T}(x; s) \end{bmatrix} d\Gamma \end{aligned} \quad (6.263)$$

où le vecteur de contrainte, le flux normal de l'eau, le flux normal de l'air et le flux normal de la chaleur sont respectivement :

$$\tilde{t}_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} n_\beta = \left[ (\lambda \tilde{u}_{k,k} - F^S (\tilde{p}_a - \tilde{p}_w) + \tilde{p}_a - F^T \tilde{T}) \delta_{\alpha\beta} + \mu (\tilde{u}_{\beta,\alpha} + \tilde{u}_{\alpha,\beta}) \right] n_\beta \quad (6.264)$$

$$\tilde{q}_w = -\rho_w \left[ D_P (\tilde{p}_{w,\alpha} - \tilde{p}_{a,\alpha}) - D_T \tilde{T}_{,\alpha} \right] n_\alpha \quad (6.265)$$

$$\tilde{q}_a = -\rho_a \left[ H D_{Pw} (\tilde{p}_{w,\alpha} - \tilde{p}_{a,\alpha}) - \frac{K_a}{\gamma_a} \tilde{p}_{a,\alpha} - (K_a \beta_{pa} + H D_{Tw}) \tilde{T}_{,\alpha} \right] n_\alpha \quad (6.266)$$

$$\tilde{q}_T = \left[ \chi_6 \tilde{p}_{w,\alpha} + \chi_5 \tilde{p}_{a,\alpha} + \chi_4 \tilde{T}_{,\alpha} \right] n_\alpha \quad (6.267)$$

Également,  $\tilde{F}^S$ ,  $\tilde{Q}^{wS}$ ,  $\tilde{Q}^{aS}$  et  $\tilde{Q}^{TS}$  peuvent être interprétés comme étant respectivement les termes adjoints au vecteur de contrainte  $\tilde{t}$ , au flux de l'eau  $\tilde{q}_w$ , au flux de l'air  $\tilde{q}_a$  et au flux de la chaleur  $\tilde{q}_T$  :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\alpha\beta}^S = & \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k\beta,k}^S - s (\rho_w S_r + \rho_{vap} (1 - S_r)) \tilde{P}_\beta^{wS} - s \rho_a (1 + (H - 1) S_r) \tilde{P}_\beta^{aS} - s \chi_1 \tilde{T}_\beta^S \right) \delta_{\alpha l} \right. \\ & \left. + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha\beta,l}^S + \tilde{U}_{l\beta,\alpha}^S \right) \right] n_l \end{aligned} \quad (6.268)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\alpha^W = & \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k,k}^W - s (\rho_w S_r + \rho_{vap} (1 - S_r)) \tilde{P}^{wW} - s \rho_a (1 + (H - 1) S_r) \tilde{P}^{aW} - s \chi_1 \tilde{T}^W \right) \delta_{\alpha l} \right. \\ & \left. + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha,l}^W + \tilde{U}_{l,\alpha}^W \right) \right] n_l \end{aligned} \quad (6.269)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\alpha^A = & \left[ \left( \lambda \tilde{U}_{k,k}^A - s(\rho_w S_r + \rho_{vap}(1 - S_r)) \tilde{P}^{wA} - s\rho_a(1 + (H - 1)S_r) \tilde{P}^{aA} - s\chi_1 \tilde{T}^A \right) \delta_{\alpha l} \right. \\ & \left. + \mu \left( \tilde{U}_{\alpha,l}^A + \tilde{U}_{l,\alpha}^A \right) \right] n_l \end{aligned} \quad (6.270)$$

$$\tilde{Q}_\alpha^{wS} = \left[ \rho_w D_P \tilde{P}_{\alpha,l}^{wS} + \rho_a H D_{Pw} \tilde{P}_{\alpha,l}^{aS} - \chi_6 \tilde{T}_{\alpha,l}^S \right] n_l \quad (6.271)$$

$$\tilde{Q}^{wW} = \left[ \rho_w D_P \tilde{P}_{,l}^{wW} + \rho_a H D_{Pw} \tilde{P}_{,l}^{aW} - \chi_6 \tilde{T}_{,l}^W \right] n_l \quad (6.272)$$

$$\tilde{Q}^{wA} = \left[ \rho_w D_P \tilde{P}_{,l}^{wA} + \rho_a H D_{Pw} \tilde{P}_{,l}^{aA} - \chi_6 \tilde{T}_{,l}^A \right] n_l \quad (6.273)$$

$$\tilde{Q}_\alpha^{aS} = \left[ -\rho_w D_P \tilde{P}_{\alpha,l}^{wS} - \rho_a \left( \frac{K_a}{\gamma_a} + H D_{Pw} \right) \tilde{P}_{\alpha,l}^{aS} - \chi_5 \tilde{T}_{\alpha,l}^S \right] n_l \quad (6.274)$$

$$\tilde{Q}^{aW} = \left[ -\rho_w D_P \tilde{P}_{,l}^{wW} - \rho_a \left( \frac{K_a}{\gamma_a} + H D_{Pw} \right) \tilde{P}_{,l}^{aW} - \chi_5 \tilde{T}_{,l}^W \right] n_l \quad (6.275)$$

$$\tilde{Q}^{aA} = \left[ -\rho_w D_P \tilde{P}_{,l}^{wA} - \rho_a \left( \frac{K_a}{\gamma_a} + H D_{Pw} \right) \tilde{P}_{,l}^{aA} - \chi_5 \tilde{T}_{,l}^A \right] n_l \quad (6.276)$$

$$\tilde{Q}_\alpha^{TS} = \left[ -\rho_w D_T \tilde{P}_{\alpha,l}^{wS} - \rho_a (K_a \beta_{Pa} + H D_{Tw}) \tilde{P}_{\alpha,l}^{aS} - \chi_4 \tilde{T}_{\alpha,l}^S \right] n_l \quad (6.277)$$

$$\tilde{Q}^{TW} = \left[ -\rho_w D_T \tilde{P}_{,l}^{wW} - \rho_a (K_a \beta_{Pa} + H D_{Tw}) \tilde{P}_{,l}^{aW} - \chi_4 \tilde{T}_{,l}^W \right] n_l \quad (6.278)$$

$$\tilde{Q}^{TA} = \left[ -\rho_w D_T \tilde{P}_{,l}^{wA} - \rho_a (K_a \beta_{Pa} + H D_{Tw}) \tilde{P}_{,l}^{aA} - \chi_4 \tilde{T}_{,l}^A \right] n_l \quad (6.279)$$

En considérant la différence entre les deux opérateurs différentiels  $\mathbf{B}^*$  (6.262) et  $\mathbf{B}$  (6.256), on trouve la différence entre  $\tilde{\mathbf{G}}^*$  et  $\tilde{\mathbf{G}}$  comme suit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}_{\alpha\beta}^* & \tilde{G}_{\alpha w}^* & \tilde{G}_{\alpha a}^* & \tilde{G}_{\alpha T}^* \\ \tilde{G}_{w\beta}^* & \tilde{G}_{ww}^* & \tilde{G}_{wa}^* & \tilde{G}_{wT}^* \\ \tilde{G}_{a\beta}^* & \tilde{G}_{aw}^* & \tilde{G}_{aa}^* & \tilde{G}_{aT}^* \\ \tilde{G}_{T\beta}^* & \tilde{G}_{Tw}^* & \tilde{G}_{Ta}^* & \tilde{G}_{TT}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{\alpha\beta} & -\tilde{G}_{w\alpha} & -\tilde{G}_{a\alpha} & -\tilde{G}_{T\alpha} \\ -\tilde{G}_{\beta w} & \tilde{G}_{ww} & \tilde{G}_{aw} & \tilde{G}_{Tw} \\ -\tilde{G}_{\beta a} & \tilde{G}_{wa} & \tilde{G}_{aa} & \tilde{G}_{Ta} \\ -\tilde{G}_{\beta T} & \tilde{G}_{wT} & \tilde{G}_{aT} & \tilde{G}_{TT} \end{bmatrix} \quad (6.280)$$

L'équation intégrale de frontière dépendant du temps pour le comportement transitoire et non-isotherme des sols non saturés peut être obtenue par une transformation au domaine temporel :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} c_{\alpha\beta}(\xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\alpha(\xi; t) \\ p_w(\xi; t) \\ p_a(\xi; t) \\ T(\xi; t) \end{bmatrix} = \\
 & \int_\Gamma \begin{bmatrix} U_{\alpha\beta}^S(x, \xi; t - \tau) & -P_\alpha^{wS}(x, \xi; t - \tau) & -P_\alpha^{aS}(x, \xi; t - \tau) & -T_\alpha^S(x, \xi; t - \tau) \\ U_\beta^W(x, \xi; t - \tau) & -P^{wW}(x, \xi; t - \tau) & -P^{aW}(x, \xi; t - \tau) & -T^W(x, \xi; t - \tau) \\ U_\beta^A(x, \xi; t - \tau) & -P^{wA}(x, \xi; t - \tau) & -P^{aA}(x, \xi; t - \tau) & -T^A(x, \xi; t - \tau) \\ U_\beta^T(x, \xi; t - \tau) & -P^{wT}(x, \xi; t - \tau) & -P^{aT}(x, \xi; t - \tau) & -T^T(x, \xi; t - \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_\alpha(x; \tau) \\ q_w(x; \tau) \\ q_a(x; \tau) \\ q_T(x; \tau) \end{bmatrix} d\Gamma dt \\
 & - \oint_\Gamma \begin{bmatrix} F_{\alpha\beta}^S(x, \xi; t - \tau) & Q_\alpha^{wS}(x, \xi; t - \tau) & Q_\alpha^{aS}(x, \xi; t - \tau) & Q_\alpha^{TS}(x, \xi; t - \tau) \\ F_\beta^W(x, \xi; t - \tau) & Q^{wW}(x, \xi; t - \tau) & Q^{aW}(x, \xi; t - \tau) & Q^{TW}(x, \xi; t - \tau) \\ F_\beta^A(x, \xi; t - \tau) & Q^{wA}(x, \xi; t - \tau) & Q^{aA}(x, \xi; t - \tau) & Q^{TA}(x, \xi; t - \tau) \\ F_\beta^T(x, \xi; t - \tau) & Q^{wT}(x, \xi; t - \tau) & Q^{aT}(x, \xi; t - \tau) & Q^{TT}(x, \xi; t - \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\alpha(x; \tau) \\ p_w(x; \tau) \\ p_a(x; \tau) \\ T(x; \tau) \end{bmatrix} d\Gamma dt \\
 & \tag{6.281}
 \end{aligned}$$

### 6.3.3 Solutions fondamentales pour l'analyse du comportement quasi-statique non-isotherme des sols non saturés

#### 6.3.3.1 Solutions fondamentales dans le domaine de Laplace

L'objectif de cette section est de dériver la forme explicite de la solution fondamentale associée à l'équation (6.251) dans le domaine de Laplace pour les deux cas 2D et 3D en utilisant la méthode de Hörmander (voir 5.2.2.1). Celle-ci consiste en la réponse à une force ponctuelle unitaire dans le squelette solide, à une source ponctuelle unitaire d'injection des fluides (eau et air) et à une source ponctuelle unitaire de chaleur, exercées brutalement à l'instant  $\tau = 0$  en un point fixé  $\xi$  hors de la frontière  $\Gamma$ ,

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \delta(x - \xi) H(t - \tau) \xrightarrow{\text{transformée de Laplace}} \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{I} \delta(x - \xi) \frac{1}{s}$$

dans laquelle  $H(t - \tau)$  désigne la fonction de Heaviside :

$$H(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \succeq \tau \\ 0 & \text{si } t \preceq \tau \end{cases}$$

Alors, l'équation (6.255) peut s'écrire comme :

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{I} \frac{1}{s} \delta(x - \xi) = 0 \tag{6.282}$$

où  $\mathbf{I}$  désigne la matrice unité d'ordre  $n$  ( $= 5$  dans le cas 2D ou  $6$  dans le cas 3D) et  $\tilde{\mathbf{G}} = [\tilde{G}_{ij}]_{n \times n}$  est la matrice des solutions fondamentales correspondant à l'opérateur  $\mathbf{B}$ .

Comme montré dans la section précédente, l'ensemble des équations intégrales de frontière (6.263) est obtenu pour la force  $\mathbf{F} = \mathbf{I}\delta(x - \xi)\delta(t - \tau)$ , tandis que dans cette section les fonctions noyaux pour ces équations intégrales  $\tilde{\mathbf{G}}$  seront obtenues pour la force  $\mathbf{F} = \mathbf{I}\delta(x - \xi)H(t - \tau)$ . Par conséquent, sachant que  $\frac{dH(t - \tau)}{dt} = \delta(t - \tau)$  et en considérant (6.280) nous avons alors :

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_{\alpha\beta}^S & \tilde{U}_{\alpha}^W & \tilde{U}_{\alpha}^A & \tilde{U}_{\alpha}^T \\ \tilde{P}_{\beta}^{wS} & \tilde{P}^{wW} & \tilde{P}^{wA} & \tilde{P}^{wT} \\ \tilde{P}_{\beta}^{aS} & \tilde{P}^{aW} & \tilde{P}^{aA} & \tilde{P}^{aT} \\ \tilde{T}_{\beta}^S & \tilde{T}^W & \tilde{T}^A & \tilde{T}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\tilde{G}_{\alpha\beta} & -s\tilde{G}_{w\alpha} & -s\tilde{G}_{a\alpha} & -s\tilde{G}_{T\alpha} \\ -s\tilde{G}_{\beta w} & s\tilde{G}_{ww} & s\tilde{G}_{aw} & s\tilde{G}_{Tw} \\ -s\tilde{G}_{\beta a} & s\tilde{G}_{wa} & s\tilde{G}_{aa} & s\tilde{G}_{Ta} \\ -s\tilde{G}_{\beta T} & s\tilde{G}_{wT} & s\tilde{G}_{aT} & s\tilde{G}_{TT} \end{bmatrix} \quad (6.283)$$

D'après l'équation (5.28), d'abord, le déterminant de la matrice de l'opérateur  $\mathbf{B}$  (6.256) est calculé. Cela donne :

$$2D : \det(\mathbf{B}) = D_1 s^3 \nabla^4 + D_2 s^2 \nabla^6 + D_3 s \nabla^8 + D_4 \nabla^{10} \quad (6.284)$$

$$3D : \det(\mathbf{B}) = a_2 \nabla^2 (D_1 s^3 \nabla^4 + D_2 s^2 \nabla^6 + D_3 s \nabla^8 + D_4 \nabla^{10}) \quad (6.285)$$

où  $D_m$  sont des constantes comprenant les coefficients  $a_i$  (annexe C.1).

Maintenant, à partir de l'équation (5.24) on peut calculer les éléments de la matrice des cofacteurs  $\mathbf{B}^{co}$  :

$$2D : \mathbf{B}^{co} = \begin{bmatrix} B_{\alpha\beta}^{co} & B_{\alpha w}^{co} & B_{\alpha a}^{co} & B_{\alpha T}^{co} \\ B_{w\beta}^{co} & B_{ww}^{co} & B_{wa}^{co} & B_{wT}^{co} \\ B_{a\beta}^{co} & B_{aw}^{co} & B_{aa}^{co} & B_{aT}^{co} \\ B_{T\beta}^{co} & B_{Tw}^{co} & B_{Ta}^{co} & B_{TT}^{co} \end{bmatrix} \quad (6.286)$$

$$3D : \mathbf{B}^{co} = a_2 \nabla^2 \begin{bmatrix} B_{\alpha\beta}^{co} & B_{\alpha w}^{co} & B_{\alpha a}^{co} & B_{\alpha T}^{co} \\ B_{w\beta}^{co} & B_{ww}^{co} & B_{wa}^{co} & B_{wT}^{co} \\ B_{a\beta}^{co} & B_{aw}^{co} & B_{aa}^{co} & B_{aT}^{co} \\ B_{T\beta}^{co} & B_{Tw}^{co} & B_{Ta}^{co} & B_{TT}^{co} \end{bmatrix} \quad (6.287)$$

où

$$B_{\alpha\beta}^{co} = \delta_{\alpha\beta} (B_1 s^3 \nabla^2 + B_2 s^2 \nabla^4 + B_3 s \nabla^6 + B_4 \nabla^8) + \partial_{\alpha} \partial_{\beta} (B_5 s^3 + B_6 s^2 \nabla^2 + B_7 s \nabla^4 + B_8 \nabla^6)$$

$$B_{\alpha w}^{co} = B_9 s^2 \nabla^2 \partial_{\alpha} + B_{10} s \nabla^4 \partial_{\alpha} + B_{11} \nabla^6 \partial_{\alpha}$$

$$B_{\alpha a}^{co} = B_{12} s^2 \nabla^2 \partial_{\alpha} + B_{13} s \nabla^4 \partial_{\alpha} + B_{14} \nabla^6 \partial_{\alpha}$$

$$B_{\alpha T}^{co} = B_{15} s^2 \nabla^2 \partial_{\alpha} + B_{16} s \nabla^4 \partial_{\alpha} + B_{17} \nabla^6 \partial_{\alpha}$$

$$B_{w\beta}^{co} = B_{18} s^3 \nabla^2 \partial_{\beta} + B_{19} s^2 \nabla^4 \partial_{\beta} + B_{20} s \nabla^6 \partial_{\beta}$$

$$B_{ww}^{co} = B_{21}s^2\nabla^4 + B_{22}s\nabla^6 + B_{23}\nabla^8$$

$$B_{wa}^{co} = B_{24}s^2\nabla^4 + B_{25}s\nabla^6 + B_{26}\nabla^8$$

$$B_{wT}^{co} = B_{27}s^2\nabla^4 + B_{28}s\nabla^6 + B_{29}\nabla^8$$

$$B_{a\beta}^{co} = B_{30}s^3\nabla^2\partial_\beta + B_{31}s^2\nabla^4\partial_\beta + B_{32}s\nabla^6\partial_\beta$$

$$B_{aw}^{co} = B_{33}s^2\nabla^4 + B_{34}s\nabla^6 + B_{35}\nabla^8$$

$$B_{aa}^{co} = B_{36}s^2\nabla^4 + B_{37}s\nabla^6 + B_{38}\nabla^8$$

$$B_{aT}^{co} = B_{39}s^2\nabla^4 + B_{40}s\nabla^6 + B_{41}\nabla^8$$

$$B_{T\beta}^{co} = B_{42}s^3\nabla^2\partial_\beta + B_{43}s^2\nabla^4\partial_\beta + B_{44}s\nabla^6\partial_\beta$$

$$B_{Tw}^{co} = B_{45}s^2\nabla^4 + B_{46}s\nabla^6 + B_{47}\nabla^8$$

$$B_{Ta}^{co} = B_{48}s^2\nabla^4 + B_{49}s\nabla^6 + B_{50}\nabla^8$$

$$B_{TT}^{co} = B_{51}s^2\nabla^4 + B_{52}s\nabla^6 + B_{53}\nabla^8$$

dans lesquelles  $B_i$  sont des constantes comprenant les coefficients  $a_i$  (annexe C.2).

En remplaçant le déterminant de la matrice de l'opérateur  $\mathbf{B}$  (6.284, 6.285), l'équation scalaire correspondant à (5.28) s'obtient comme suit :

$$(\nabla^2 - \lambda_1^2) (\nabla^2 - \lambda_2^2) (\nabla^2 - \lambda_3^2) \Phi + \delta(x) = 0 \quad (6.288)$$

avec l'abréviation

$$2D : \quad \Phi = sD_4\nabla^4\phi \quad (6.289)$$

$$3D : \quad \Phi = sD_4\nabla^6\phi \quad (6.290)$$

Dans l'équation (6.288),  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont les racines de l'équation cubique du déterminant de  $\mathbf{B}$  (6.284, 6.285) qui sont obtenues en utilisant la méthode de Cardon :

$$\lambda_1 = \sqrt{m_1}\sqrt{s}, \quad \lambda_2 = \sqrt{m_2}\sqrt{s}, \quad \lambda_3 = \sqrt{m_3}\sqrt{s} \quad (6.291)$$

où

$$m_1 = \left( h + t - \frac{D_3}{3D_4} \right) \quad (6.292)$$

$$m_2 = - \left( \frac{1}{2} (h + t) + \frac{D_3}{3D_4} - \frac{\sqrt{3}i}{2} (h - t) \right) \quad (6.293)$$

$$m_3 = - \left( \frac{1}{2} (h + t) + \frac{D_3}{3D_4} + \frac{\sqrt{3}i}{2} (h - t) \right) \quad (6.294)$$

dans lesquelles

$$h = \sqrt[3]{r + \sqrt{q^3 + r^2}}, \quad t = \sqrt[3]{r - \sqrt{q^3 + r^2}} \quad (6.295)$$

avec

$$q = \frac{1}{9} \left( 3 \frac{D_2}{D_4} - \left( \frac{D_3}{D_4} \right)^2 \right), \quad r = \frac{1}{54} \left( 9 \frac{D_2 D_3}{D_4 D_4} - 27 \frac{D_1}{D_4} - 2 \left( \frac{D_3}{D_4} \right)^3 \right) \quad (6.296)$$

Si  $q^3 + r^2 < 0$  alors les coefficients  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  sont calculés comme suit :

$$m_1 = \left( 2\sqrt{-q} \cos \left( \frac{1}{3}\theta \right) - \frac{D_3}{3D_4} \right) \quad (6.297)$$

$$m_2 = \left( 2\sqrt{-q} \cos \left( \frac{1}{3}\theta + 120^\circ \right) - \frac{D_3}{3D_4} \right) \quad (6.298)$$

$$m_3 = \left( 2\sqrt{-q} \cos \left( \frac{1}{3}\theta + 240^\circ \right) - \frac{D_3}{3D_4} \right) \quad (6.299)$$

où  $\cos(\theta) = r/\sqrt{-q^3}$ .

L'équation (6.288) peut être exprimée comme l'une des trois équations (6.300), (6.301) et (6.302) :

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \lambda_1^2) \phi_1 + \delta(x) &= 0 \\ \phi_1 &= (\nabla^2 - \lambda_2^2) (\nabla^2 - \lambda_3^2) \Phi \end{aligned} \quad (6.300)$$

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \lambda_2^2) \phi_2 + \delta(x) &= 0 \\ \phi_2 &= (\nabla^2 - \lambda_1^2) (\nabla^2 - \lambda_3^2) \Phi \end{aligned} \quad (6.301)$$

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \lambda_3^2) \phi_3 + \delta(x) &= 0 \\ \phi_3 &= (\nabla^2 - \lambda_1^2) (\nabla^2 - \lambda_2^2) \Phi \end{aligned} \quad (6.302)$$

Les équations ci-dessus ne sont autres que les équations de Helmholtz. Les solutions fondamentales de telles équations pour un domaine complètement symétrique dans les deux cas 2D et 3D sont respectivement :

$$2D : \phi_m = \frac{K_0(\lambda_m r)}{2\pi}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (6.303)$$

$$3D : \phi_m = \frac{\exp(-\lambda_m r)}{4\pi r}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (6.304)$$

Par définition de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$ , on en déduit :

$$(\nabla^2 - \lambda_3^2) \Phi = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \quad (6.305)$$

$$(\nabla^2 - \lambda_1^2) \Phi = \frac{\phi_3 - \phi_2}{\lambda_3^2 - \lambda_2^2} \quad (6.306)$$

qui donnent

$$2D : \Phi = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right] \quad (6.307)$$

$$3D : \Phi = \frac{1}{4\pi r} \left[ \frac{\exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right] \quad (6.308)$$

En appliquant respectivement deux et trois fois l'opérateur inverse de Laplace pour les problèmes 2D et 3D, on peut obtenir la fonction  $\phi(r, s)$  comme suit :

$$2D : \phi = \frac{1}{2\pi p D_4} \left( \frac{K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1^4} + \frac{K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^4} + \frac{K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3^4} \right) \quad (6.309)$$

$$3D : \phi = \frac{1}{4\pi p D_4 r} \left( \frac{\exp(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1^6} + \frac{\exp(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^6} + \frac{\exp(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3^6} \right) \quad (6.310)$$

Finalement, en appliquant la matrice d'opérateur  $\mathbf{B}^{co}$  (6.286, 6.287) à la solution  $\phi(r, s)$  (annexe C.3)

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{\alpha\beta} & \tilde{G}_{\alpha w} & \tilde{G}_{\alpha a} & \tilde{G}_{\alpha T} \\ \tilde{G}_{w\beta} & \tilde{G}_{ww} & \tilde{G}_{wa} & \tilde{G}_{wT} \\ \tilde{G}_{a\beta} & \tilde{G}_{aw} & \tilde{G}_{aa} & \tilde{G}_{aT} \\ \tilde{G}_{T\beta} & \tilde{G}_{Tw} & \tilde{G}_{Ta} & \tilde{G}_{TT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\alpha\beta}^{co} & B_{\alpha w}^{co} & B_{\alpha a}^{co} & B_{\alpha T}^{co} \\ B_{w\beta}^{co} & B_{ww}^{co} & B_{wa}^{co} & B_{wT}^{co} \\ B_{a\beta}^{co} & B_{aw}^{co} & B_{aa}^{co} & B_{aT}^{co} \\ B_{T\beta}^{co} & B_{Tw}^{co} & B_{Ta}^{co} & B_{TT}^{co} \end{bmatrix} \phi \quad (6.311)$$

et en introduisant les fonctions intermédiaires  $\Pi_m$  comme

$$\begin{aligned} \Pi_1^{nD} &= C_1 \Omega_{11}^{nD} + C_2 \Omega_{12}^{nD} + C_3 \Omega_{13}^{nD} + C_4 \Omega_{14}^{nD} \\ \Pi_2^{nD} &= C_5 \Omega_{11}^{nD} + C_6 \Omega_{12}^{nD} + C_7 \Omega_{13}^{nD} + C_8 \Omega_{14}^{nD} \\ \Pi_3^{nD} &= C_5 \Omega_{21}^{nD} + C_6 \Omega_{22}^{nD} + C_7 \Omega_{23}^{nD} + C_8 \Omega_{24}^{nD} \end{aligned} \quad (6.312)$$

les solutions fondamentales pour les sols non saturés soumis aux chargements non-isothermes quasi-statiques pour les deux cas 2D ( $n = 2$ ) et 3D ( $n = 3$ ) et dans le domaine de Laplace s'obtiennent comme suit [161, 231, 232, 235, 239] :

**solutions 2D :**

$$\tilde{G}_{\alpha\beta}(r, s) = \delta_{\alpha\beta}\Pi_1^{2D} + \frac{r x_\alpha x_\beta}{r^3}\Pi_2^{2D} + \frac{(2x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})}{r^3}\Pi_3^{2D} \quad (6.313)$$

$$\tilde{G}_{\alpha w}(r, s) = -\frac{x_\alpha}{r} (C_9\Omega_{22}^{2D} + C_{10}\Omega_{23}^{2D} + C_{11}\Omega_{24}^{2D}) \quad (6.314)$$

$$\tilde{G}_{\alpha a}(r, s) = -\frac{x_\alpha}{r} (C_{12}\Omega_{22}^{2D} + C_{13}\Omega_{23}^{2D} + C_{14}\Omega_{24}^{2D}) \quad (6.315)$$

$$\tilde{G}_{\alpha T}(r, s) = -\frac{x_\alpha}{r} (C_{15}\Omega_{22}^{2D} + C_{16}\Omega_{23}^{2D} + C_{17}\Omega_{24}^{2D}) \quad (6.316)$$

$$\tilde{G}_{w\beta}(r, s) = -\frac{x_\beta}{r} (C_{18}\Omega_{27}^{2D} + C_{19}\Omega_{25}^{2D} + C_{20}\Omega_{26}^{2D}) \quad (6.317)$$

$$\tilde{G}_{a\beta}(r, s) = -\frac{x_\beta}{r} (C_{30}\Omega_{27}^{2D} + C_{31}\Omega_{25}^{2D} + C_{32}\Omega_{26}^{2D}) \quad (6.318)$$

$$\tilde{G}_{T\beta}(r, s) = -\frac{x_\beta}{r} (C_{42}\Omega_{27}^{2D} + C_{43}\Omega_{25}^{2D} + C_{44}\Omega_{26}^{2D}) \quad (6.319)$$

$$\tilde{G}_{ww}(r, s) = C_{21}\Omega_{12}^{2D} + C_{22}\Omega_{13}^{2D} + C_{23}\Omega_{14}^{2D} \quad (6.320)$$

$$\tilde{G}_{wa}(r, s) = C_{24}\Omega_{12}^{2D} + C_{25}\Omega_{13}^{2D} + C_{26}\Omega_{14}^{2D} \quad (6.321)$$

$$\tilde{G}_{wT}(r, s) = C_{27}\Omega_{12}^{2D} + C_{28}\Omega_{13}^{2D} + C_{29}\Omega_{14}^{2D} \quad (6.322)$$

$$\tilde{G}_{aw}(r, s) = C_{33}\Omega_{12}^{2D} + C_{34}\Omega_{13}^{2D} + C_{35}\Omega_{14}^{2D} \quad (6.323)$$

$$\tilde{G}_{aa}(r, s) = C_{36}\Omega_{12}^{2D} + C_{37}\Omega_{13}^{2D} + C_{38}\Omega_{14}^{2D} \quad (6.324)$$

$$\tilde{G}_{aT}(r, s) = C_{39}\Omega_{12}^{2D} + C_{40}\Omega_{13}^{2D} + C_{41}\Omega_{14}^{2D} \quad (6.325)$$

$$\tilde{G}_{Tw}(r, s) = C_{45}\Omega_{12}^{2D} + C_{46}\Omega_{13}^{2D} + C_{47}\Omega_{14}^{2D} \quad (6.326)$$

$$\tilde{G}_{Ta}(r, s) = C_{48}\Omega_{12}^{2D} + C_{49}\Omega_{13}^{2D} + C_{50}\Omega_{14}^{2D} \quad (6.327)$$

$$\tilde{G}_{TT}(r, s) = C_{51}\Omega_{12}^{2D} + C_{52}\Omega_{13}^{2D} + C_{53}\Omega_{14}^{2D} \quad (6.328)$$

où les coefficients  $C_i$  sont des constantes et égaux à  $B_i/(2\pi D_4)$ . Les fonctions intermédiaires  $\Omega_{kl}^{2D}$  sont présentées dans l'annexe (C.4).

### solutions 3D :

$$\tilde{G}_{\alpha\beta}(r, s) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r}\Pi_1^{3D} + \frac{rx_\alpha x_\beta}{r^4}\Pi_2^{3D} + \frac{(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})}{r^5}\Pi_3^{3D} \quad (6.329)$$

$$\tilde{G}_{\alpha w}(r, s) = -\frac{x_\alpha}{r^3}(C_9\Omega_{22}^{3D} + C_{10}\Omega_{23}^{3D} + C_{11}\Omega_{24}^{3D}) \quad (6.330)$$

$$\tilde{G}_{\alpha\alpha}(r, s) = -\frac{x_\alpha}{r^3}(C_{12}\Omega_{22}^{3D} + C_{13}\Omega_{23}^{3D} + C_{14}\Omega_{24}^{3D}) \quad (6.331)$$

$$\tilde{G}_{\alpha T}(r, s) = -\frac{x_\alpha}{r^3}(C_{15}\Omega_{22}^{3D} + C_{16}\Omega_{23}^{3D} + C_{17}\Omega_{24}^{3D}) \quad (6.332)$$

$$\tilde{G}_{w\beta}(r, s) = -\frac{x_\beta}{r^3}(C_{18}\Omega_{27}^{3D} + C_{19}\Omega_{25}^{3D} + C_{20}\Omega_{26}^{3D}) \quad (6.333)$$

$$\tilde{G}_{a\beta}(r, s) = -\frac{x_\beta}{r^3}(C_{30}\Omega_{27}^{3D} + C_{31}\Omega_{25}^{3D} + C_{32}\Omega_{26}^{3D}) \quad (6.334)$$

$$\tilde{G}_{T\beta}(r, s) = -\frac{x_\beta}{r^3}(C_{42}\Omega_{27}^{3D} + C_{43}\Omega_{25}^{3D} + C_{44}\Omega_{26}^{3D}) \quad (6.335)$$

$$\tilde{G}_{ww}(r, s) = \frac{1}{r}(C_{21}\Omega_{12}^{3D} + C_{22}\Omega_{13}^{3D} + C_{23}\Omega_{14}^{3D}) \quad (6.336)$$

$$\tilde{G}_{wa}(r, s) = \frac{1}{r}(C_{24}\Omega_{12}^{3D} + C_{25}\Omega_{13}^{3D} + C_{26}\Omega_{14}^{3D}) \quad (6.337)$$

$$\tilde{G}_{wT}(r, s) = \frac{1}{r}(C_{27}\Omega_{12}^{3D} + C_{28}\Omega_{13}^{3D} + C_{29}\Omega_{14}^{3D}) \quad (6.338)$$

$$\tilde{G}_{aw}(r, s) = \frac{1}{r}(C_{33}\Omega_{12}^{3D} + C_{34}\Omega_{13}^{3D} + C_{35}\Omega_{14}^{3D}) \quad (6.339)$$

$$\tilde{G}_{aa}(r, s) = \frac{1}{r}(C_{36}\Omega_{12}^{3D} + C_{37}\Omega_{13}^{3D} + C_{38}\Omega_{14}^{3D}) \quad (6.340)$$

$$\tilde{G}_{aT}(r, s) = \frac{1}{r} (C_{39}\Omega_{12}^{3D} + C_{40}\Omega_{13}^{3D} + C_{41}\Omega_{14}^{3D}) \quad (6.341)$$

$$\tilde{G}_{Tw}(r, s) = \frac{1}{r} (C_{45}\Omega_{12}^{3D} + C_{46}\Omega_{13}^{3D} + C_{47}\Omega_{14}^{3D}) \quad (6.342)$$

$$\tilde{G}_{Ta}(r, s) = \frac{1}{r} (C_{48}\Omega_{12}^{3D} + C_{49}\Omega_{13}^{3D} + C_{50}\Omega_{14}^{3D}) \quad (6.343)$$

$$\tilde{G}_{TT}(r, s) = \frac{1}{r} (C_{51}\Omega_{12}^{3D} + C_{52}\Omega_{13}^{3D} + C_{53}\Omega_{14}^{3D}) \quad (6.344)$$

où les coefficients  $C_i$  sont des constantes et égaux à  $B_i/(4\pi D_4)$ . Les fonctions intermédiaires  $\Omega_{kl}^{3D}$  sont présentées dans l'annexe (C.4).

Dans les solutions fondamentales ci-dessus présentées dans le domaine de Laplace,  $\tilde{G}_{\alpha\beta}$  indique le déplacement du squelette solide dans la direction  $\alpha$  au point  $x$  dû à une force ponctuelle unitaire exercée brutalement à l'instant  $\tau = 0$  dans le solide dans la direction  $\beta$  à l'origine, tandis que  $\tilde{G}_{\alpha w}$ ,  $\tilde{G}_{\alpha a}$  et  $\tilde{G}_{\alpha T}$  dénotent le déplacement du squelette solide dans la direction  $\alpha$  au point  $x$  dû respectivement à une source ponctuelle unitaire d'eau et d'air injectée et à une source ponctuelle unitaire de chaleur, exercée brutalement à l'instant  $\tau = 0$  à l'origine. Également,  $\tilde{G}_{w\beta}$ ,  $\tilde{G}_{a\beta}$  et  $\tilde{G}_{T\beta}$  sont respectivement, la pression interstitielle de l'eau, la pression interstitielle de l'air et la température au même point due à une force ponctuelle unitaire exercée brutalement à l'instant  $\tau = 0$  dans le solide dans la direction  $\beta$  à l'origine.  $\tilde{G}_{ww}$ ,  $\tilde{G}_{wa}$  et  $\tilde{G}_{wT}$  sont la pression interstitielle de l'eau au point  $x$  due respectivement à une source ponctuelle unitaire d'eau et d'air injectée et à une source ponctuelle unitaire de chaleur exercée brutalement à l'instant  $\tau = 0$  à l'origine. D'une façon similaire,  $\tilde{G}_{aw}$ ,  $\tilde{G}_{aa}$  et  $\tilde{G}_{aT}$  sont la pression interstitielle de l'air au point  $x$  due respectivement à une source ponctuelle unitaire d'eau et d'air injectée et à une source ponctuelle de chaleur exercée brutalement à l'instant  $\tau = 0$  à l'origine, alors que  $\tilde{G}_{Tw}$ ,  $\tilde{G}_{Ta}$  et  $\tilde{G}_{TT}$  sont la température au point  $x$  due respectivement à une source ponctuelle unitaire d'eau et d'air injectés et à une source ponctuelle unitaire de chaleur exercée brutalement à l'instant  $\tau = 0$  à l'origine.

### 6.3.3.2 Solutions fondamentales dans le domaine temporel

Pour obtenir les solutions fondamentales dans le domaine temporel, il faut nécessairement appliquer la *transformée de Laplace inverse* ( $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\}$ ). Une formule intégrale pour la transformée de Laplace inverse, appelée l'intégrale Bromwich, l'intégrale de Fourier-Mellin, et la transformation de Mellin inverse, est définie par l'intégrale curviligne suivante :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \tilde{f}(s) \exp(st) ds \quad (6.345)$$

où l'intégration est faite sur la ligne verticale  $Re(s) = \gamma$  dans le plan complexe telle que  $\gamma$  est plus grand que la partie réelle de toutes les singularités de  $\tilde{f}(s)$ . Cela garantit que le chemin

de contour est dans le rayon de convergence. Si toutes les singularités sont dans le demi-plan à gauche, alors  $\gamma$  peut être mis à zéro et la formule intégrale inverse ci-dessus devient identique à la transformée de Fourier inverse. En pratique, le calcul de cette intégrale complexe peut être fait en utilisant le théorème des résidus de Cauchy.

Mais la plupart du temps, le calcul précédent est problématique, car il n'existe pas de formule analytique générale permettant de calculer  $f(t)$  connaissant  $\tilde{f}(s)$ . Pour les cas de figure pour lesquels on ne peut pas trouver une solution analytique, il faut alors employer les techniques numériques d'inversion de la transformée Laplace-Fourier pour avoir une solution approximative.

Dans ce qui suit, on verra que les transformées inverses des fonctions utilisées dans les solutions fondamentales dans les deux cas 2D et 3D peuvent se trouver analytiquement [1]. Par conséquent dans cette section, on fait un effort pour obtenir les formes explicites des solutions fondamentales dans le domaine temporel.

### solutions 2D :

Afin d'obtenir la forme explicite des solutions fondamentales 2D dans le domaine temporel, il est nécessaire de trouver la transformée de Laplace inverse  $\psi_{kl}^{2D}(r, t)$  des fonctions intermédiaires  $\Omega_{kl}^{2D}(r, s)$  comprenant les fonctions de Bessel modifiées.

On utilise les formules suivantes trouvées dans la table de transformées inverses [1] :

$$\Lambda_0(\sqrt{m_j}r, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_0(\sqrt{m_j}r\sqrt{p})}{p} \right\} = \frac{1}{2} \Gamma \left( 0, \frac{m_j r^2}{4t} \right) \quad (6.346)$$

$$\Lambda_1(\sqrt{m_j}r, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_0(\sqrt{m_j}r\sqrt{p})}{p\sqrt{p}} \right\} = \exp \left( -\frac{m_j r^2}{4t} \right) - \frac{m_j r^2}{4} \Gamma \left( 0, \frac{m_j r^2}{4t} \right) \quad (6.347)$$

$$\Lambda_2(\sqrt{m_j}r, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_1(\sqrt{m_j}r\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{m_j}r} \exp \left( -\frac{m_j r^2}{4t} \right) \quad (6.348)$$

dans lesquelles  $\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} \exp(-t) dt$ .

Les expressions des fonctions intermédiaires dans le domaines temporel  $\psi_{kl}^{2D}(r, t)$  sont présentées dans l'annexe (C.5).

Finalement, les solutions fondamentales 2D dans le domaine temporel sont obtenues comme suit :

$$G_{\alpha\beta}(r, t) = \delta_{\alpha\beta} \Upsilon_1^{2D} + \frac{r x_\alpha x_\beta}{r^3} \Upsilon_2^{2D} + \frac{(2x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})}{r^3} \Upsilon_3^{2D} \quad (6.349)$$

$$G_{\alpha w}(r, t) = -\frac{x_\alpha}{r} (C_9 \psi_{22}^{2D} + C_{10} \psi_{23}^{2D} + C_{11} \psi_{24}^{2D}) \quad (6.350)$$

$$G_{\alpha\alpha}(r, t) = -\frac{x_\alpha}{r} (C_{12}\psi_{22}^{2D} + C_{13}\psi_{23}^{2D} + C_{14}\psi_{24}^{2D}) \quad (6.351)$$

$$G_{\alpha T}(r, t) = -\frac{x_\alpha}{r} (C_{15}\psi_{22}^{2D} + C_{16}\psi_{23}^{2D} + C_{17}\psi_{24}^{2D}) \quad (6.352)$$

$$G_{w\beta}(r, t) = -\frac{x_\beta}{r} (C_{18}\psi_{27}^{2D} + C_{19}\psi_{25}^{2D} + C_{20}\psi_{26}^{2D}) \quad (6.353)$$

$$G_{a\beta}(r, t) = -\frac{x_\beta}{r} (C_{30}\psi_{27}^{2D} + C_{31}\psi_{25}^{2D} + C_{32}\psi_{26}^{2D}) \quad (6.354)$$

$$G_{T\beta}(r, t) = -\frac{x_\beta}{r} (C_{42}\psi_{27}^{2D} + C_{43}\psi_{25}^{2D} + C_{44}\psi_{26}^{2D}) \quad (6.355)$$

$$G_{ww}(r, t) = C_{21}\psi_{12}^{2D} + C_{22}\psi_{13}^{2D} + C_{23}\psi_{14}^{2D} \quad (6.356)$$

$$G_{wa}(r, t) = C_{24}\psi_{12}^{2D} + C_{25}\psi_{13}^{2D} + C_{26}\psi_{14}^{2D} \quad (6.357)$$

$$G_{wT}(r, t) = C_{27}\psi_{12}^{2D} + C_{28}\psi_{13}^{2D} + C_{29}\psi_{14}^{2D} \quad (6.358)$$

$$G_{aw}(r, t) = C_{33}\psi_{12}^{2D} + C_{34}\psi_{13}^{2D} + C_{35}\psi_{14}^{2D} \quad (6.359)$$

$$G_{aa}(r, t) = C_{36}\psi_{12}^{2D} + C_{37}\psi_{13}^{2D} + C_{38}\psi_{14}^{2D} \quad (6.360)$$

$$G_{aT}(r, t) = C_{39}\psi_{12}^{2D} + C_{40}\psi_{13}^{2D} + C_{41}\psi_{14}^{2D} \quad (6.361)$$

$$G_{Tw}(r, t) = C_{45}\psi_{12}^{2D} + C_{46}\psi_{13}^{2D} + C_{47}\psi_{14}^{2D} \quad (6.362)$$

$$G_{Ta}(r, t) = C_{48}\psi_{12}^{2D} + C_{49}\psi_{13}^{2D} + C_{50}\psi_{14}^{2D} \quad (6.363)$$

$$G_{TT}(r, t) = C_{51}\psi_{12}^{2D} + C_{52}\psi_{13}^{2D} + C_{53}\psi_{14}^{2D} \quad (6.364)$$

où

$$\Upsilon_1^{2D} = C_1\psi_{11}^{2D} + C_2\psi_{12}^{2D} + C_3\psi_{13}^{2D} + C_4\psi_{14}^{2D} \quad (6.365)$$

$$\Upsilon_2^{2D} = C_5\psi_{11}^{2D} + C_6\psi_{12}^{2D} + C_7\psi_{13}^{2D} + C_8\psi_{14}^{2D} \quad (6.366)$$

$$\Upsilon_3^{2D} = C_5\psi_{21}^{2D} + C_6\psi_{22}^{2D} + C_7\psi_{23}^{2D} + C_8\psi_{24}^{2D} \quad (6.367)$$

**solutions 3D :**

Afin d'obtenir la forme explicite des solutions fondamentales 3D dans le domaine temporel, il est nécessaire de trouver la transformée de Laplace inverse  $\psi_{kl}^{3D}(r, t)$  des fonctions intermédiaires  $\Omega_{kl}^{3D}(r, s)$  comprenant les fonctions exponentielles.

Les expressions des fonctions intermédiaires dans le domaine temporel  $\psi_{kl}^{3D}(r, t)$  sont présentées dans l'annexe (C.5) en utilisant les formules suivantes trouvées dans la table de transformées inverses [1] :

$$\Lambda_0(\sqrt{m_j}r, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\exp(-\sqrt{m_j}\sqrt{p}r)}{p} \right\} = \text{Erfc} \left( \frac{\sqrt{m_j}r}{2\sqrt{t}} \right) \quad (6.368)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\sqrt{m_j}r, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\exp(-\sqrt{m_j}\sqrt{p}r)}{p^2} \right\} &= \left( \frac{m_j r^2}{2} + t \right) \text{Erfc} \left( \frac{\sqrt{m_j}r}{2\sqrt{t}} \right) \\ &- \sqrt{m_j}r \sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp \left( -\frac{m_j r^2}{4t} \right) \end{aligned} \quad (6.369)$$

$$\Lambda_2(\sqrt{m_j}r, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\exp(-\sqrt{m_j}\sqrt{p}r)}{\sqrt{p}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp \left( -\frac{m_j r^2}{4t} \right) \quad (6.370)$$

$$\Lambda_3(\sqrt{m_j}r, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\exp(-\sqrt{m_j}\sqrt{p}r)}{p\sqrt{p}} \right\} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp \left( -\frac{m_j r^2}{4t} \right) - \sqrt{m_j}r \text{Erfc} \left( \frac{\sqrt{m_j}r}{2\sqrt{t}} \right) \quad (6.371)$$

dans lesquelles  $\text{Erfc}(x) = 2/\sqrt{\pi} \int_x^\infty \exp(-u^2) du$ .

Finalement, les solutions fondamentales 3D dans le domaine temporel sont obtenues comme suit :

$$G_{\alpha\beta}(r, t) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r} \Upsilon_1^{3D} + \frac{x_\alpha x_\beta}{r^3} \Upsilon_2^{3D} + \frac{(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})}{r^5} \Upsilon_3^{3D} \quad (6.372)$$

$$G_{\alpha w}(r, t) = -\frac{x_\alpha}{r^3} (C_9 \psi_{22}^{3D} + C_{10} \psi_{23}^{3D} + C_{11} \psi_{24}^{3D}) \quad (6.373)$$

$$G_{\alpha a}(r, t) = -\frac{x_\alpha}{r^3} (C_{12} \psi_{22}^{3D} + C_{13} \psi_{23}^{3D} + C_{14} \psi_{24}^{3D}) \quad (6.374)$$

$$G_{\alpha T}(r, t) = -\frac{x_\alpha}{r^3} (C_{15} \psi_{22}^{3D} + C_{16} \psi_{23}^{3D} + C_{17} \psi_{24}^{3D}) \quad (6.375)$$

$$G_{w\beta}(r, t) = -\frac{x_\beta}{r^3} (C_{18} \psi_{27}^{3D} + C_{19} \psi_{25}^{3D} + C_{20} \psi_{26}^{3D}) \quad (6.376)$$

$$G_{a\beta}(r, t) = -\frac{x_\beta}{r} (C_{30}\psi_{27}^{3D} + C_{31}\psi_{25}^{3D} + C_{32}\psi_{26}^{3D}) \quad (6.377)$$

$$G_{T\beta}(r, t) = -\frac{x_\beta}{r^3} (C_{42}\psi_{27}^{3D} + C_{43}\psi_{25}^{3D} + C_{44}\psi_{26}^{3D}) \quad (6.378)$$

$$G_{ww}(r, t) = \frac{1}{r} (C_{21}\psi_{12}^{3D} + C_{22}\psi_{13}^{3D} + C_{23}\psi_{14}^{3D}) \quad (6.379)$$

$$G_{wa}(r, t) = \frac{1}{r} (C_{24}\psi_{12}^{3D} + C_{25}\psi_{13}^{3D} + C_{26}\psi_{14}^{3D}) \quad (6.380)$$

$$G_{wT}(r, t) = \frac{1}{r} (C_{27}\psi_{12}^{3D} + C_{28}\psi_{13}^{3D} + C_{29}\psi_{14}^{3D}) \quad (6.381)$$

$$G_{aw}(r, t) = \frac{1}{r} (C_{33}\psi_{12}^{3D} + C_{34}\psi_{13}^{3D} + C_{35}\psi_{14}^{3D}) \quad (6.382)$$

$$G_{aa}(r, t) = \frac{1}{r} (C_{36}\psi_{12}^{3D} + C_{37}\psi_{13}^{3D} + C_{38}\psi_{14}^{3D}) \quad (6.383)$$

$$G_{aT}(r, t) = \frac{1}{r} (C_{39}\psi_{12}^{3D} + C_{40}\psi_{13}^{3D} + C_{41}\psi_{14}^{3D}) \quad (6.384)$$

$$G_{Tw}(r, t) = \frac{1}{r} (C_{45}\psi_{12}^{3D} + C_{46}\psi_{13}^{3D} + C_{47}\psi_{14}^{3D}) \quad (6.385)$$

$$G_{Ta}(r, t) = \frac{1}{r} (C_{48}\psi_{12}^{3D} + C_{49}\psi_{13}^{3D} + C_{50}\psi_{14}^{3D}) \quad (6.386)$$

$$G_{TT}(r, t) = \frac{1}{r} (C_{51}\psi_{12}^{3D} + C_{52}\psi_{13}^{3D} + C_{53}\psi_{14}^{3D}) \quad (6.387)$$

où

$$\Upsilon_1^{3D} = C_1\psi_{11}^{3D} + C_2\psi_{12}^{3D} + C_3\psi_{13}^{3D} + C_4\psi_{14}^{3D} \quad (6.388)$$

$$\Upsilon_2^{3D} = C_5\psi_{11}^{3D} + C_6\psi_{12}^{3D} + C_7\psi_{13}^{3D} + C_8\psi_{14}^{3D} \quad (6.389)$$

$$\Upsilon_3^{3D} = C_5\psi_{21}^{3D} + C_6\psi_{22}^{3D} + C_7\psi_{23}^{3D} + C_8\psi_{24}^{3D} \quad (6.390)$$

### 6.3.4 Vérification analytique des solutions fondamentales

Après avoir dérivé les solutions fondamentales pour les deux cas 2D et 3D, il est d'intérêt de vérifier leurs validité d'une façon plus détaillée. Trois cas limites sont présentés dans cette section.

Premièrement, la forme des solutions à très longues périodes de temps, lorsque  $t$  approche l'infini, est étudiée pour vérifier si elles prennent exactement la même forme que les solutions fondamentales thermo-hydro-mécaniques à l'état stationnaire présentées dans [186].

Deuxièmement, comme les coefficients représentant le comportement thermique et celui de l'air dissous dans l'eau approchent vers zéro, le comportement des fonctions de réponse statiques (qui se trouvent dans la section 6.3.4.1) est comparé avec les solutions fondamentales hydro-mécaniques à l'état stationnaire [152, 153].

À la fin, en négligeant les effets des fluides (eau et air) dans les solutions fondamentales du cas hydro-mécanique à l'état stationnaire (qui se trouvent dans la section 6.3.4.2), il est vérifié si les fonctions de réponse concernées prennent exactement la forme élasto-statique [22, 29].

#### 6.3.4.1 Cas limite : solutions fondamentales thermo-hydro-mécaniques à l'état stationnaire

Maintenant, nous vérifions les solutions fondamentales dans le domaine transformé en laissant  $t \rightarrow \infty$  pour voir si elles prennent exactement la forme des solutions fondamentales thermo-hydro-mécaniques à l'état stationnaire présentées dans [186]. Pour obtenir les solutions fondamentales lorsque  $t \rightarrow \infty$ , on a

$$G_{ij}(r, \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{G}_{ij}(r, s) \quad (6.391)$$

Il est évident que dans les solutions dans le domaine transformé (2D : 6.313-6.328 et 3D : 6.329-6.344), les seuls termes qui sont fonctions de  $s$  sont les  $\Omega_{ij}^{nD}$ . Donc pour obtenir les limites de  $s \tilde{G}_{ij}(r, s)$  lorsque  $s \rightarrow 0$ , il est suffisant de trouver les  $\lim_{s \rightarrow 0} s \Omega_{ij}^{nD}$ . Parmi ces termes, ceux qui ont des valeurs non-nulles sont  $\lim_{s \rightarrow 0} s \Omega_{14}^{nD}$  et  $\lim_{s \rightarrow 0} s \Omega_{24}^{nD}$ . De plus, quand  $s \rightarrow 0$  on a  $\lambda_i (i = 1, 2, 3) \rightarrow 0$ . Par conséquent, on trouve les limites  $\Omega_{14}^{nD}$  et  $\Omega_{24}^{nD}$  lorsque  $\lambda_i$  approchent vers zéro.

$$2D : \lim_{s \rightarrow 0} s \Omega_{14}^{2D} = -\ln r, \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \Omega_{24}^{2D} = \frac{r}{2} \left( -\frac{1}{2} + \ln r \right) \quad (6.392)$$

$$3D : \lim_{s \rightarrow 0} s \Omega_{14}^{3D} = 1, \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \Omega_{24}^{3D} = -\frac{r^2}{2} \quad (6.393)$$

En substituant les équations (6.392) et (6.393) dans respectivement (6.313-6.328) et (6.329-6.344), on obtient exactement la même forme présentée dans [186] pour les deux cas 2D et 3D :

**solutions 2D :**

$$G_{\alpha\beta}^{TTHHM-st} = \frac{1}{4\pi D_4} \left( \delta_{\alpha\beta} \left( -(2B_4 + B_8) \ln r + \frac{B_8}{2} \right) + B_8 \left( -\frac{x_\alpha x_\beta}{r^2} \right) \right) \quad (6.394)$$

$$G_{\alpha w}^{TTHHM-st} = \frac{B_{11}}{4\pi D_4} x_\alpha \left( \frac{1}{2} - \ln r \right) \quad (6.395)$$

$$G_{\alpha a}^{TTHHM-st} = \frac{B_{14}}{4\pi D_4} x_\alpha \left( \frac{1}{2} - \ln r \right) \quad (6.396)$$

$$G_{\alpha T}^{TTHHM-st} = \frac{B_{17}}{4\pi D_4} x_\alpha \left( \frac{1}{2} - \ln r \right) \quad (6.397)$$

$$G_{ww}^{TTHHM-st} = -\frac{B_{23}}{2\pi D_4} \ln r \quad (6.398)$$

$$G_{wa}^{TTHHM-st} = -\frac{B_{26}}{2\pi D_4} \ln r \quad (6.399)$$

$$G_{wT}^{TTHHM-st} = -\frac{B_{29}}{2\pi D_4} \ln r \quad (6.400)$$

$$G_{aw}^{TTHHM-st} = -\frac{B_{35}}{2\pi D_4} \ln r \quad (6.401)$$

$$G_{aa}^{TTHHM-st} = -\frac{B_{38}}{2\pi D_4} \ln r \quad (6.402)$$

$$G_{aT}^{TTHHM-st} = -\frac{B_{41}}{2\pi D_4} \ln r \quad (6.403)$$

$$G_{Tw}^{TTHHM-st} = -\frac{B_{47}}{2\pi D_4} \ln r \quad (6.404)$$

$$G_{Ta}^{TTHHM-st} = -\frac{B_{50}}{2\pi D_4} \ln r \quad (6.405)$$

$$G_{TT}^{TTHHM-st} = -\frac{B_{53}}{2\pi D_4} \ln r \quad (6.406)$$

$$G_{w\beta}^{THHM-st} = G_{a\beta}^{THHM-st} = G_{T\beta}^{THHM-st} = 0 \quad (6.407)$$

**solutions 3D :**

$$G_{\alpha\beta}^{THHM-st} = \frac{1}{4\pi D_4} \frac{1}{r} \left( \delta_{\alpha\beta} B_4 + \frac{B_8}{2} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{x_\alpha x_\beta}{r^2} \right) \right) \quad (6.408)$$

$$G_{\alpha w}^{THHM-st} = \frac{B_{11}}{8\pi D_4} \frac{x_\alpha}{r} \quad (6.409)$$

$$G_{\alpha a}^{THHM-st} = \frac{B_{14}}{8\pi D_4} \frac{x_\alpha}{r} \quad (6.410)$$

$$G_{\alpha T}^{THHM-st} = \frac{B_{17}}{8\pi D_4} \frac{x_\alpha}{r} \quad (6.411)$$

$$G_{ww}^{THHM-st} = \frac{B_{23}}{4\pi D_4 r} \quad (6.412)$$

$$G_{wa}^{THHM-st} = \frac{B_{26}}{4\pi D_4 r} \quad (6.413)$$

$$G_{wT}^{THHM-st} = \frac{B_{29}}{4\pi D_4 r} \quad (6.414)$$

$$G_{aw}^{THHM-st} = \frac{B_{35}}{4\pi D_4 r} \quad (6.415)$$

$$G_{aa}^{THHM-st} = \frac{B_{38}}{4\pi D_4 r} \quad (6.416)$$

$$G_{aT}^{THHM-st} = \frac{B_{41}}{4\pi D_4 r} \quad (6.417)$$

$$G_{Tw}^{THHM-st} = \frac{B_{47}}{4\pi D_4 r} \quad (6.418)$$

$$G_{Ta}^{THHM-st} = \frac{B_{50}}{4\pi D_4 r} \quad (6.419)$$

$$G_{TT}^{THHM-st} = \frac{B_{53}}{4\pi D_4 r} \quad (6.420)$$

$$G_{w\beta}^{THHM-st} = G_{a\beta}^{THHM-st} = G_{T\beta}^{THHM-st} = 0 \quad (6.421)$$

Les équations  $G_{w\beta} = G_{a\beta} = G_{T\beta} = 0$  dans les deux cas 2D et 3D montrent que tous les effets des fluides (eau et air) et de la température subis dus à une force ponctuelle dans la direction  $\beta$  disparaissent à très longues périodes de temps.

### 6.3.4.2 Cas limite : solutions fondamentales hydro-mécaniques à l'état stationnaire

Si les coefficients représentant le comportement thermique approchent zéro et en négligeant l'air dissous dans l'eau, les solutions fondamentales thermo-hydro-mécaniques présentées ci-haut approchent celles hydro-mécaniques isothermes à l'état stationnaire [152, 153] :

**solutions 2D :**

$$G_{\alpha\beta}^{HHM-st} = \frac{\left((\lambda + \mu) - 2(\lambda + 3\mu) \ln r\right) r^2 \delta_{\alpha\beta} + 2(\lambda + \mu) x_\alpha x_\beta}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu) r^2} \quad (6.422)$$

$$G_{\alpha w}^{HHM-st} = \frac{\gamma_w F^s (1 + 2 \ln r) x_\alpha}{8\pi(\lambda + 2\mu) K_w} \quad (6.423)$$

$$G_{\alpha a}^{HHM-st} = \frac{\gamma_a (1 - F^s) (1 + 2 \ln r) x_\alpha}{8\pi(\lambda + 2\mu) K_a} \quad (6.424)$$

$$G_{ww}^{HHM-st} = \frac{\gamma_w \ln r}{2\pi K_w} \quad (6.425)$$

$$G_{aa}^{HHM-st} = \frac{\gamma_a \ln r}{2\pi K_a} \quad (6.426)$$

$$G_{w\beta}^{HHM-st} = G_{a\beta}^{HHM-st} = 0 \quad (6.427)$$

$$G_{wa}^{HHM-st} = G_{aw}^{HHM-st} = 0 \quad (6.428)$$

$$G_{iT}^{HHM-st} = G_{Tj}^{HHM-st} = 0, \quad i, j = \overline{1, 5} \quad (6.429)$$

**solutions 3D :**

$$G_{\alpha\beta}^{HHM-st} = \frac{(\lambda + 3\mu) r^2 \delta_{\alpha\beta} + (\lambda + \mu) x_\alpha x_\beta}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu) r^3} \quad (6.430)$$

$$G_{\alpha w}^{HHM-st} = -\frac{\gamma_w F^s}{8\pi(\lambda + 2\mu) K_w \rho_w} \frac{x_\alpha}{r} \quad (6.431)$$

$$G_{\alpha a}^{HHM-st} = \frac{\gamma_a (1 - F^s)}{8\pi(\lambda + 2\mu) K_a \rho_a} \frac{x_\alpha}{r} \quad (6.432)$$

$$G_{ww}^{HHM-st} = \frac{\gamma_w}{4\pi K_w \rho_w r} \quad (6.433)$$

$$G_{aa}^{HHM-st} = \frac{\gamma_a}{4\pi K_a \rho_a r} \quad (6.434)$$

$$G_{w\beta}^{HHM-st} = G_{a\beta}^{HHM-st} = 0 \quad (6.435)$$

$$G_{wa}^{HHM-st} = G_{aw}^{HHM-st} = 0 \quad (6.436)$$

$$G_{iT}^{HHM-st} = G_{Tj}^{HHM-st} = 0, \quad i, j = \overline{1,6} \quad (6.437)$$

### 6.3.4.3 Cas limite : solutions fondamentales élasto-statiques

Également, il est évident que lorsque  $F^s$  approche vers zéro et en négligeant les effets des fluides (eau et air), les solutions hydro-mécaniques présentées ci-dessus prennent exactement la même forme que celles élasto-statiques [22, 29] :

#### solutions 2D :

$$G_{\alpha\beta}^{st} = \frac{((\lambda + \mu) - 2(\lambda + 3\mu) \ln r) r^2 \delta_{\alpha\beta} + 2(\lambda + \mu) x_\alpha x_\beta}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu) r^2} \quad (6.438)$$

$$G_{ww}^{st} = G_{aa}^{st} = G_{wa}^{st} = G_{aw}^{st} = 0 \quad (6.439)$$

$$G_{w\beta}^{st} = G_{a\beta}^{st} = 0 \quad (6.440)$$

$$G_{iT}^{st} = G_{Tj}^{st} = 0, \quad i, j = \overline{1,5} \quad (6.441)$$

#### solutions 3D :

$$G_{\alpha\beta}^{st} = \frac{(\lambda + 3\mu) r^2 \delta_{\alpha\beta} + (\lambda + \mu) x_\alpha x_\beta}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu) r^3} \quad (6.442)$$

$$G_{ww}^{st} = G_{aa}^{st} = G_{wa}^{st} = G_{aw}^{st} = 0 \quad (6.443)$$

$$G_{w\beta}^{st} = G_{a\beta}^{st} = 0 \quad (6.444)$$

$$G_{iT}^{st} = G_{Tj}^{st} = 0, \quad i, j = \overline{1,6} \quad (6.445)$$

### 6.3.5 Validation des solutions fondamentales THHM quasi-statiques 2D

Cette section est consacrée à valider l'exactitude et la robustesse des fonctions noyaux 2D proposées. À cette fin, les réponses en déplacement du squelette solide et en pression interstitielle de l'eau d'un milieu infini à l'instant  $t = 1 \text{ min}$  dues à une force ponctuelle unitaire sont comparées avec un calcul d'éléments finis à l'aide du code  $\Theta$ -STOCKS développé par Gatmiri [139, 141, 146].

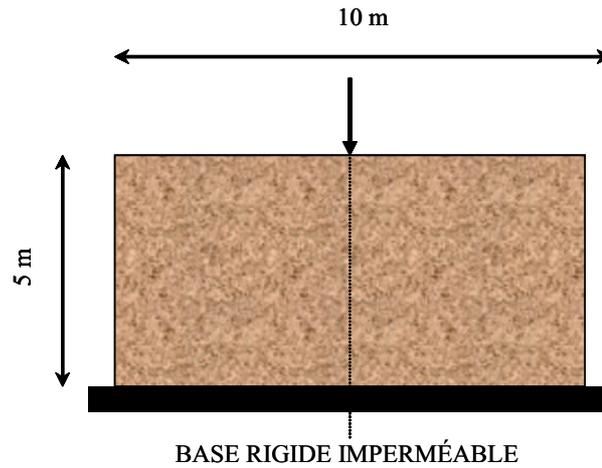


Figure 6.8 — Géométrie et chargement du milieu

Les données matérielles utilisées sont celles présentées ci-dessous :

$$\begin{aligned} \lambda &= 12.5 \times 10^6 (Pa), & \mu &= 8.33 \times 10^6 (Pa), & F^s &= 1 (Pa), & F^T &= 1 (Pa), \\ p_a &= 0 (Pa), & p_w &= 250 \times 10^3 (Pa), & \rho_w &= 1000 (kg/m^3), & \rho_a &= 1.293 (kg/m^3), \\ \rho_s &= 2.65 \times 10^3 (kg/m^3), & a_s &= 0.002 (Pa^{-1}), & b_s &= 0.0001 (1/^\circ C), & T &= 25 (^\circ C), \\ T_r &= 0 (^\circ C), & n &= 0.4 (-), & S_{ru} &= 0.05 (-), & a_w &= 1.2 \times 10^{-9} (m/s), & \alpha_w &= 5 (-), \\ d_w &= 3 (-), & c_a &= 10^{-4} (-), & d_a &= 2.6 (-), & \mu_a &= 1.85 \times 10^{-5} (kg/ms), & H &= 0.02 (-), \\ R &= 8.31 (m^3.Pa.K^{-1}.mol^{-1}), & \lambda_w &= 0.6 (W/mk), & \lambda_a &= 0.0258 (W/mk), \\ C_{ms} &= 800 (J/kgK), & C_{mw} &= 4180 (J/kgK), & C_{mv} &= 1870 (J/kgK), \\ C_{ma} &= 1000 (J/kgK) \end{aligned}$$

La géométrie, le maillage et les conditions aux limites générales sont illustrées dans les figures (6.8, 6.9). Le maillage est constitué de 1089 éléments quadrilatéraux. La dimension du modèle est considérée assez grande afin de satisfaire les conditions aux limites libres du concept de la solution fondamentale. Comme montré dans les figures (6.10, 6.11), il y a un bon accord entre ces deux solutions.

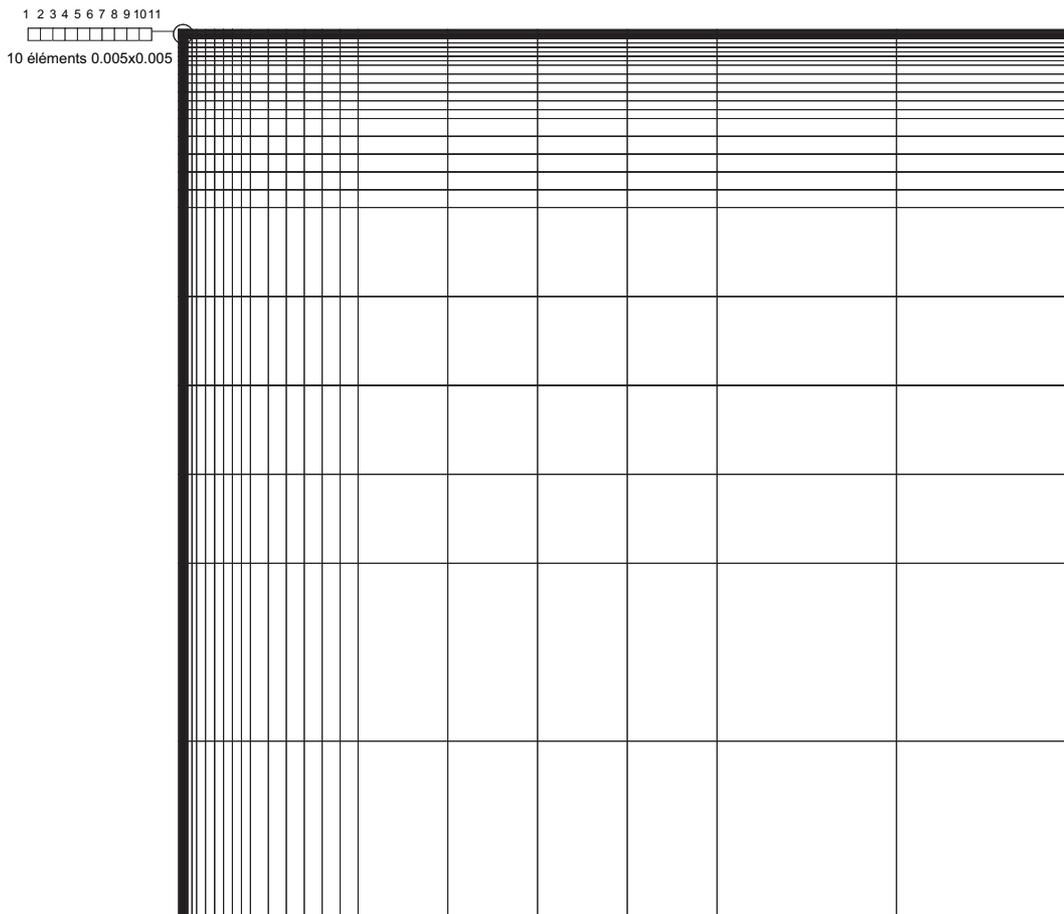
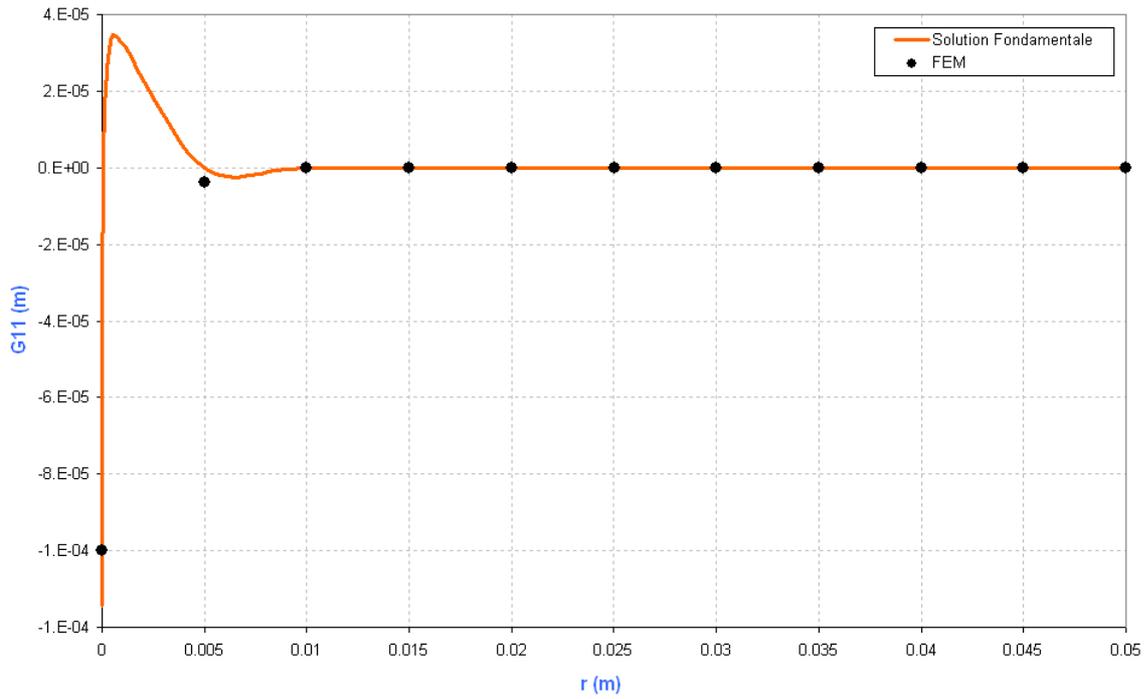


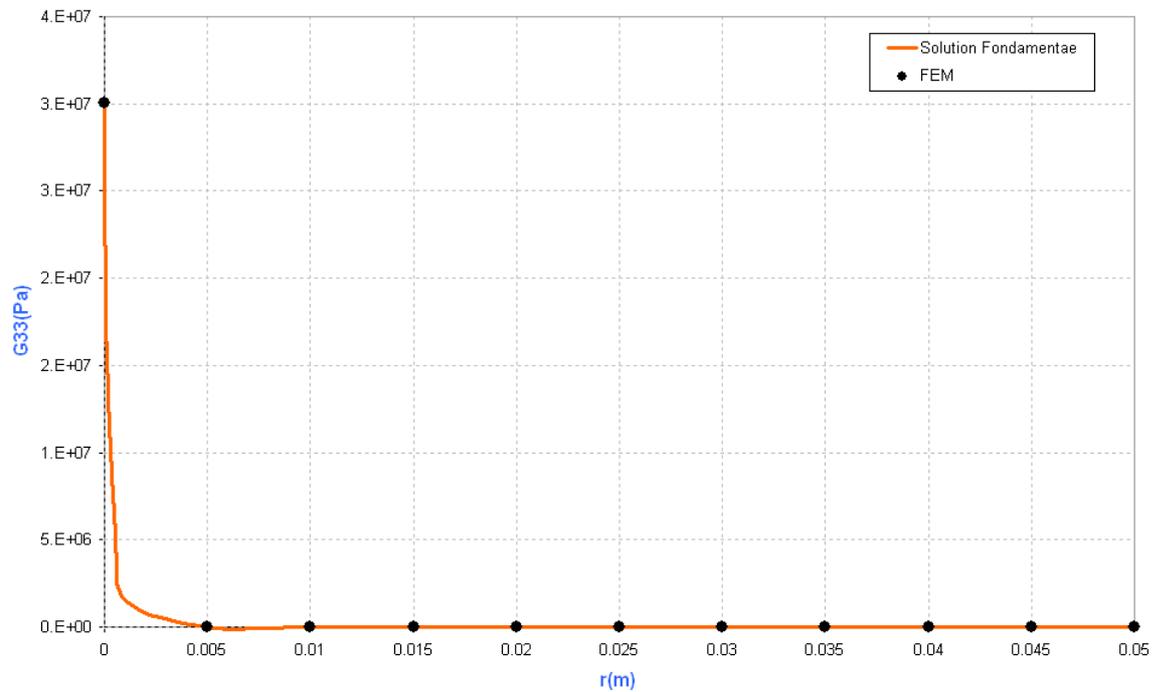
Figure 6.9 — Maillage de FEM

### 6.3.6 Quelques résultats numériques pour les solutions fondamentales 3D

Un ensemble de résultats numériques sont présentés dans cette section pour démontrer l'exactitude des solutions fondamentales analytiques proposées dans le domaine temporel. Les valeurs obtenues par l'inversion numérique des solutions dans le domaine de Laplace (6.329-6.344) sont comparées avec celles calculées par les solutions analytiques présentées dans le domaine temporel (6.372-6.390). Le sous-programme « INLAP-DINLAP », fournis par la librairie de programmes « IMSL » [331] et basé sur l'algorithme de De Hoog et al. [106] a été utilisé pour effectuer l'inversion numérique des solutions dans le domaine transformé de Laplace. Les paramètres matériaux sont ceux présentés dans la section précédente. La force ponctuelle est appliquée à la coordonné  $(0, 0, 0)$  à l'instant  $\tau = 0$  et le récepteur est situé à la coordonnée  $(0.2, 0.3, 0.4)$ . Les figures (6.12-6.18) illustrent respectivement la précision des solutions analytiques présentées pour les composantes  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{1w}$ ,  $G_{a1}$ ,  $G_{ww}$ ,  $G_{aa}$  et  $G_{TT}$ . Comme le montrent les figures ci-dessus mentionnées, il y a un excellent accord entre les solutions fondamentales proposées dans le domaine temporel et les résultats obtenus par l'inversion numérique des solutions présentées dans le domaine transformé de Laplace.



**Figure 6.10** — Déplacement du squelette solide dans la direction 1 due à une force ponctuelle unitaire dans la même direction en fonction de la distance : la solution fondamentale  $G_{11}$  est comparée avec les résultats de FEM



**Figure 6.11** — Pression interstitielle de l'eau due à une source ponctuelle unitaire d'eau injectée en fonction de la distance : la solution fondamentale  $G_{ww}$  est comparée avec les résultats de FEM

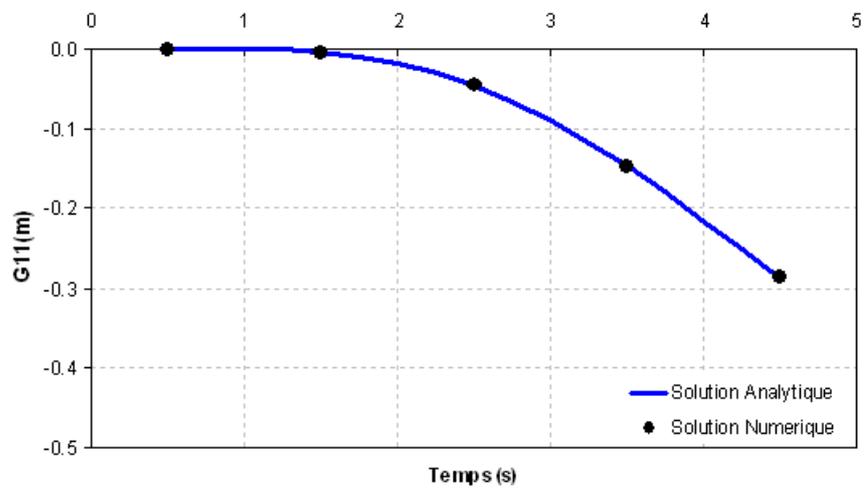


Figure 6.12 — Déplacement du point situé à  $(0.2, 0.3, 0.4)m$  dans la direction 1 au cours du temps dû à une force ponctuelle appliquée à  $(0, 0, 0)m$  dans la même direction,  $G_{11}$

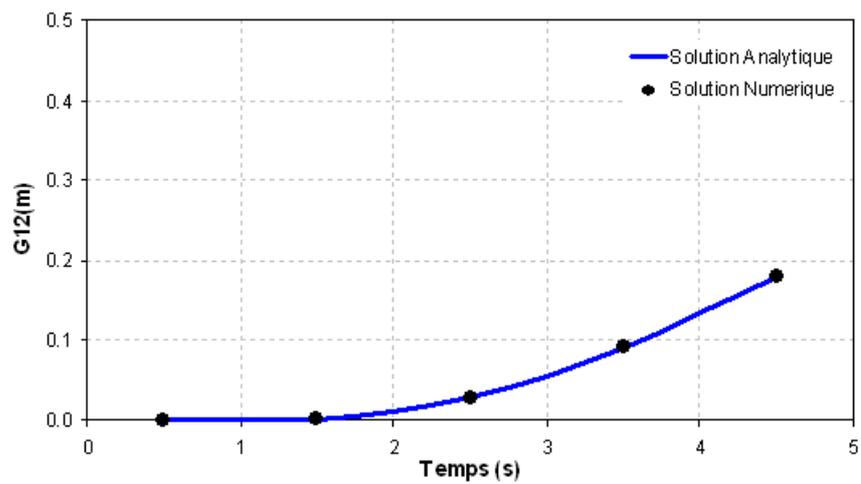
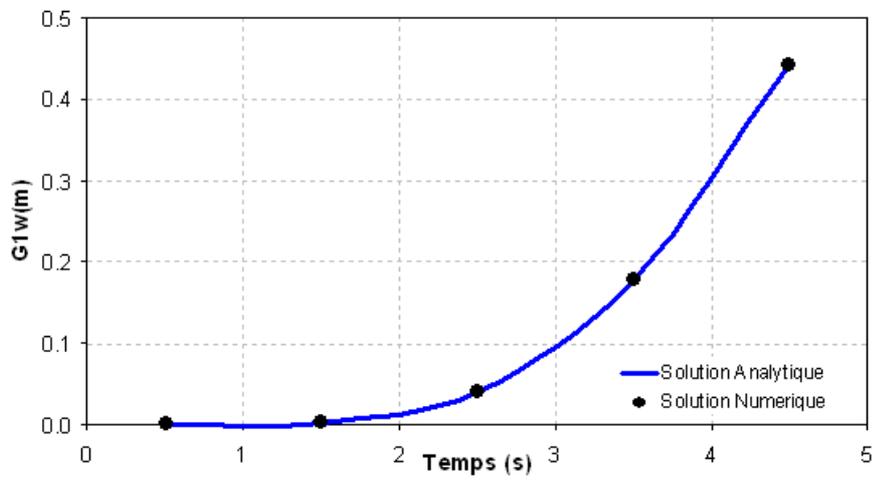
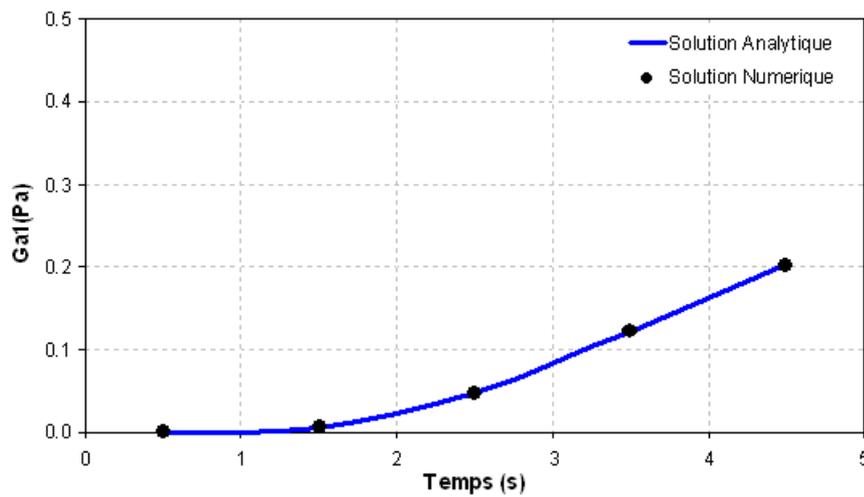


Figure 6.13 — Déplacement du point situé à  $(0.2, 0.3, 0.4)m$  dans la direction 1 au cours du temps dû à une force ponctuelle appliquée à  $(0, 0, 0)m$  dans la direction 2,  $G_{12}$



*Figure 6.14* — Déplacement du point situé à  $(0.2, 0.3, 0.4)m$  dans la direction 1 au cours du temps dû à une injection d'eau à  $(0, 0, 0)m$ ,  $G_{1w}$



*Figure 6.15* — Pression interstitielle d'air du point situé à  $(0.2, 0.3, 0.4)m$  au cours du temps dû à une force ponctuelle appliquée à  $(0, 0, 0)m$  dans la direction 1,  $G_{a1}$

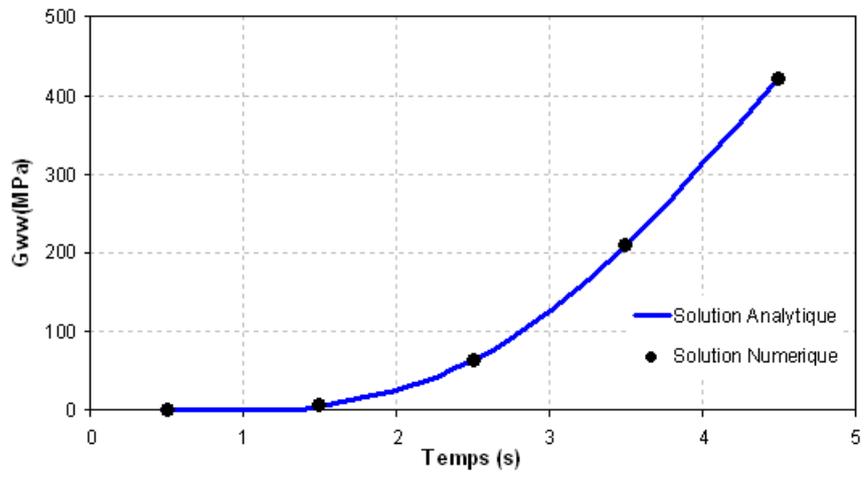


Figure 6.16 — Pression interstitielle d'eau du point situé à  $(0.2, 0.3, 0.4)m$  au cours du temps dû à une injection d'eau à  $(0, 0, 0)m$ ,  $G_{ww}$

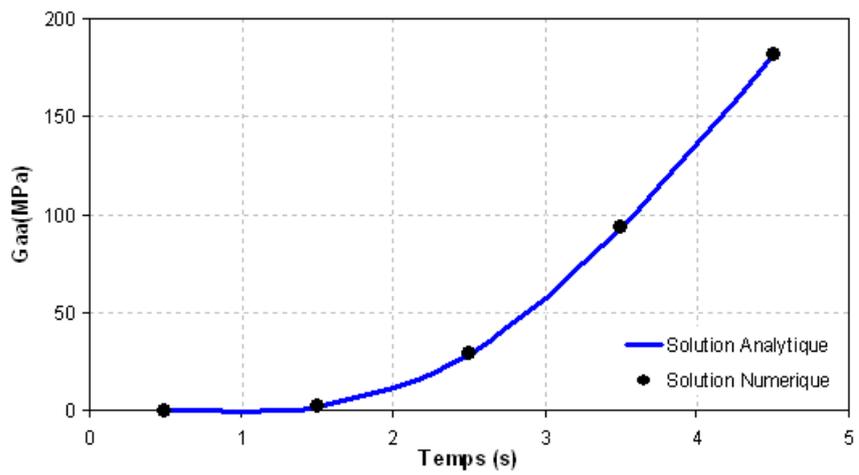


Figure 6.17 — Pression interstitielle d'air du point situé à  $(0.2, 0.3, 0.4)m$  au cours du temps dû à une injection d'air à  $(0, 0, 0)m$ ,  $G_{aa}$

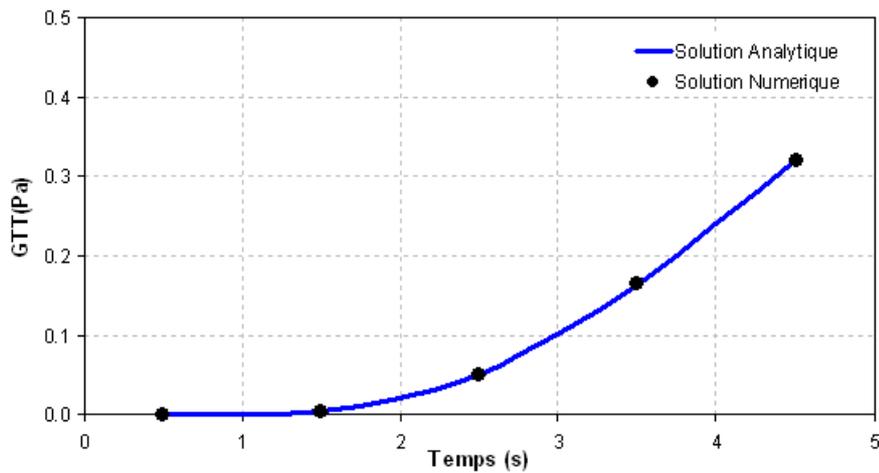


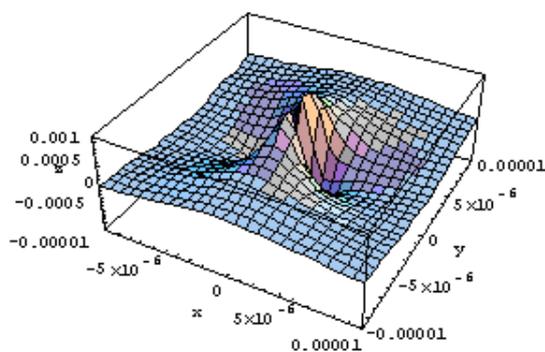
Figure 6.18 — Température du point situé à  $(0.2, 0.3, 0.4)m$  au cours du temps dû à une source de la chaleur située à  $(0, 0, 0)m$ ,  $G_{TT}$

### 6.3.7 Illustration des solutions fondamentales 2D et 3D

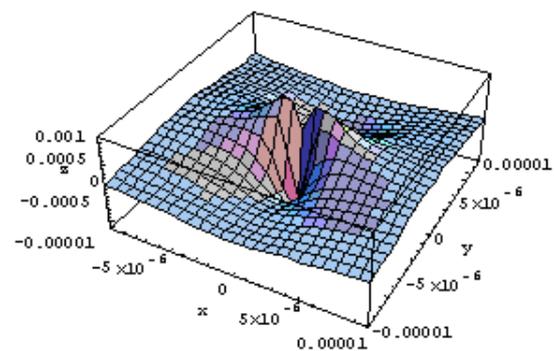
Dans ce qui suit, nous présenterons les solutions fondamentales 2D et 3D pour visualiser leurs comportements principaux et leurs singularités lorsque  $r \rightarrow 0$ .

Les paramètres matériaux sont ceux présentés dans la section précédente.

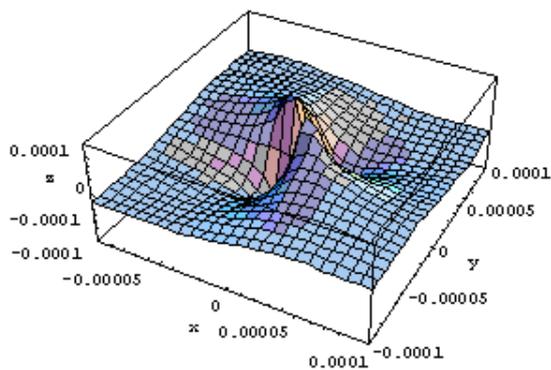
**solutions 2D :**



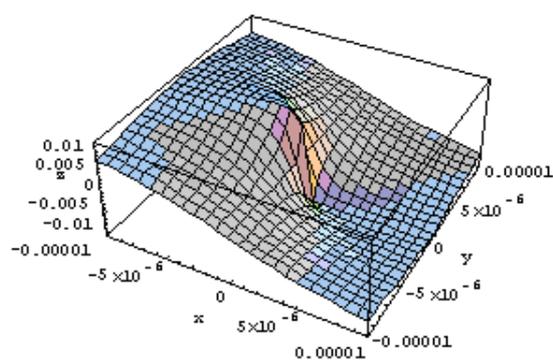
6.19.1  $G_{11}^{2D}$ . Déplacement du squelette solide dans la direction 1 dû à une force ponctuelle unitaire dans la même direction



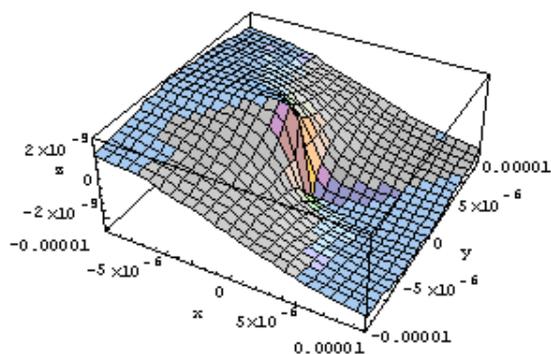
6.19.2  $G_{22}^{2D}$ . Déplacement du squelette solide dans la direction 2 dû à une force ponctuelle unitaire dans la même direction



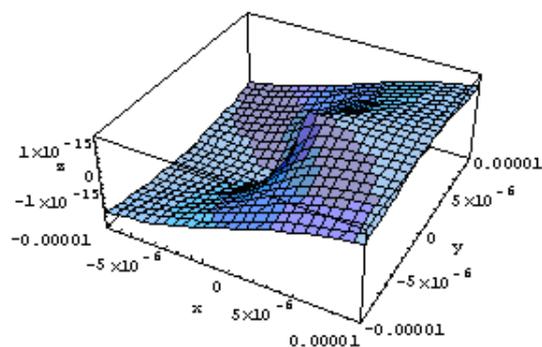
6.19.3  $G_{12}^{2D}$ . Déplacement du squelette solide dans la direction 1 dû à une force ponctuelle unitaire dans la direction 2



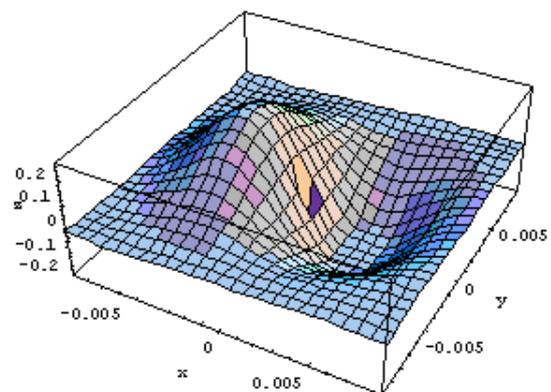
6.19.4  $G_{1w}^{2D}$ . Déplacement du squelette solide dans la direction 1 dû à une injection unitaire d'eau



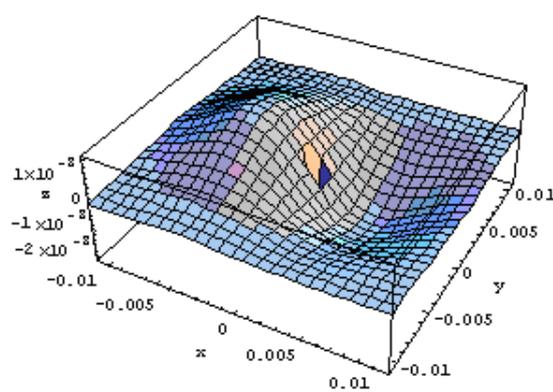
6.19.5  $G_{1a}^{2D}$ . Déplacement du squelette solide dans la direction 1 dû à une injection unitaire d'air



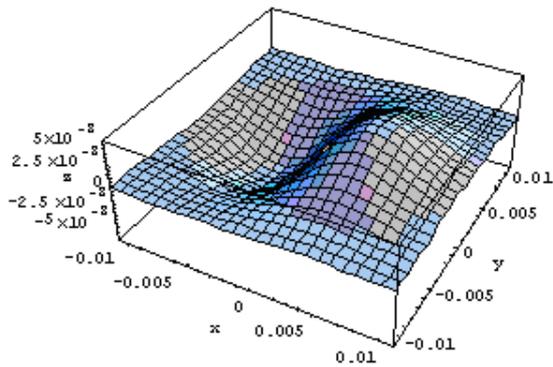
6.19.6  $G_{1T}^{2D}$ . Déplacement du squelette solide dans la direction 1 dû à une source unitaire de chaleur



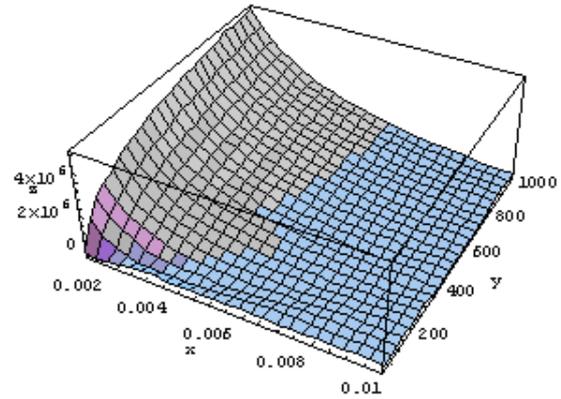
6.19.7  $G_{w1}^{2D}$ . Pression interstitielle de l'eau due à une force ponctuelle unitaire dans la direction 1



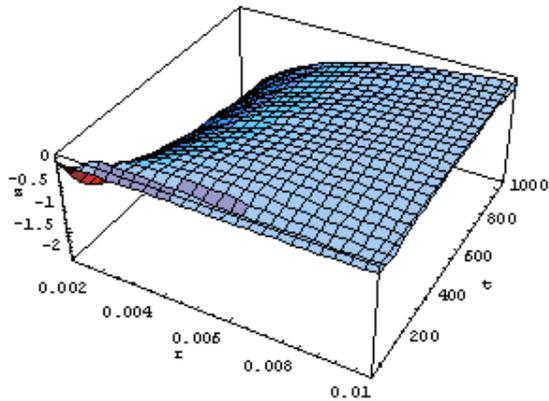
6.19.8  $G_{a1}^{2D}$ . Pression interstitielle de l'air due à une force ponctuelle unitaire dans la direction 1



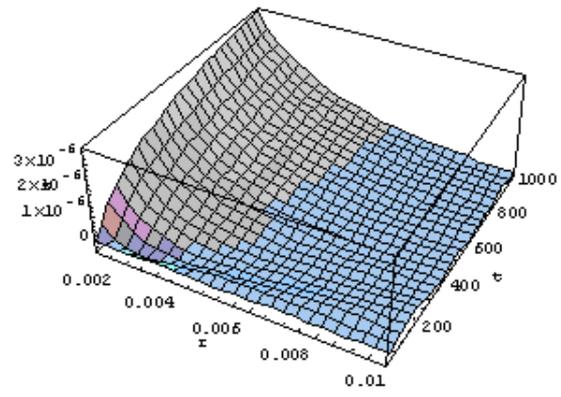
6.19.9  $G_{T1}^{2D}$ . Température due à une force ponctuelle unitaire dans la direction 1



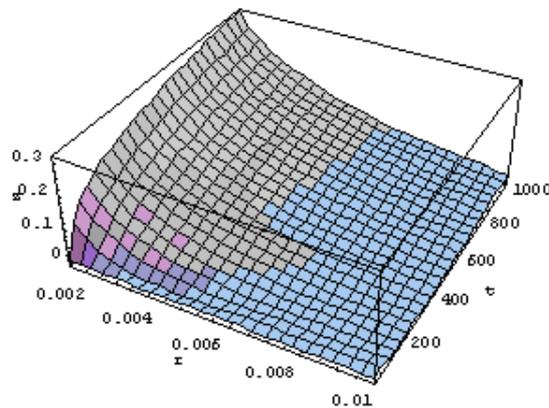
6.19.10  $G_{ww}^{2D}$ . Pression interstitielle de l'eau due à une injection unitaire d'eau



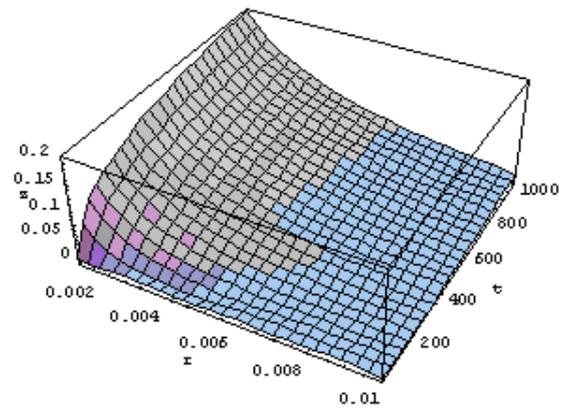
6.19.11  $G_{wa}^{2D}$ . Pression interstitielle de l'eau due à une injection unitaire d'air



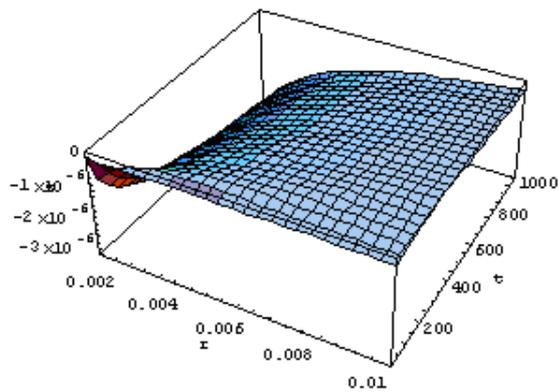
6.19.12  $G_{wT}^{2D}$ . Pression interstitielle de l'eau due à une source unitaire de chaleur



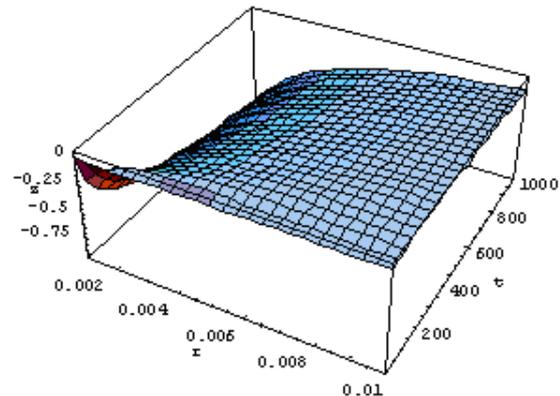
6.19.13  $G_{aw}^{2D}$ . Pression interstitielle de l'air due à une injection unitaire d'eau



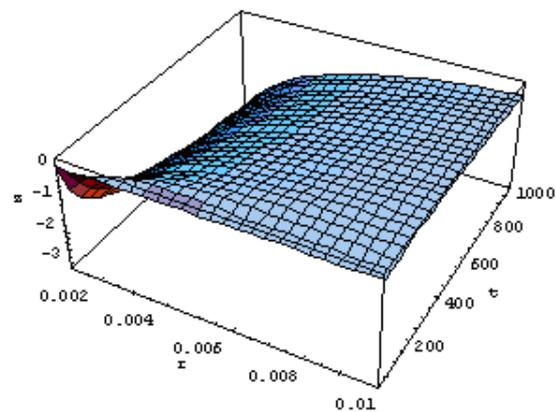
6.19.14  $G_{aa}^{2D}$ . Pression interstitielle de l'air due à une injection unitaire d'air



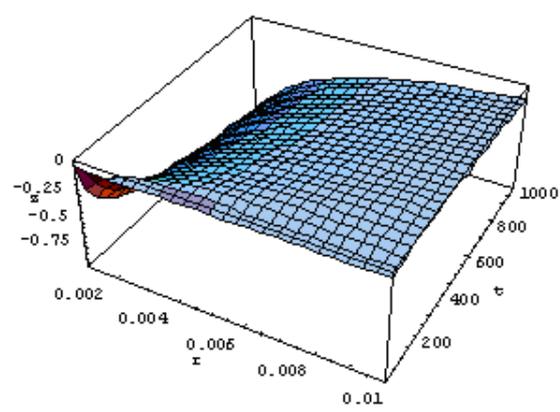
6.19.15  $G_{aT}^{2D}$ . Pression interstitielle de l'air due à une source unitaire de chaleur



6.19.16  $G_{Tw}^{2D}$ . Température due à une injection unitaire d'eau

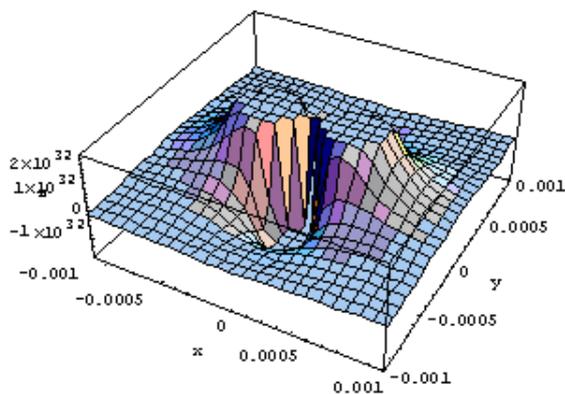


6.19.17  $G_{Ta}^{2D}$ . Température due à une injection unitaire d'air

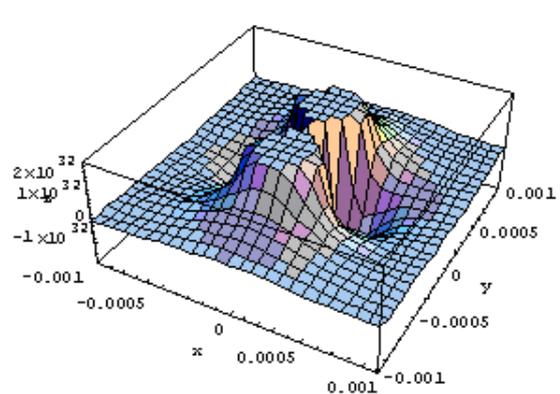


6.19.18  $G_{Tt}^{2D}$ . Température due à une source unitaire de chaleur

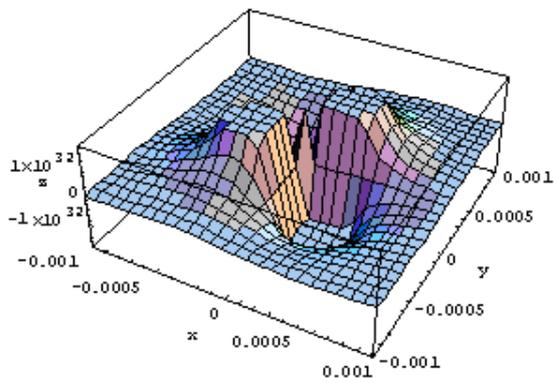
**solutions 3D :**



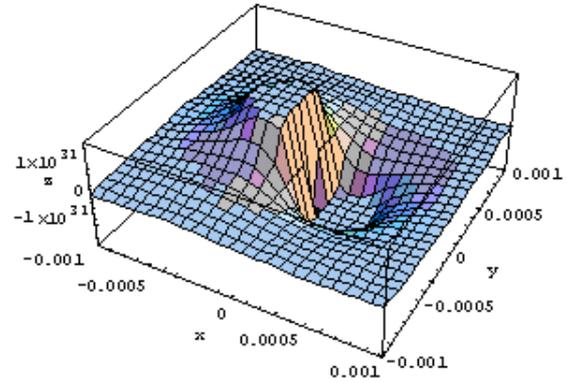
6.19.19  $G_{11}^{3D}$ . Déplacement du squelette solide dans la direction 1 dû à une force ponctuelle unitaire dans la même direction



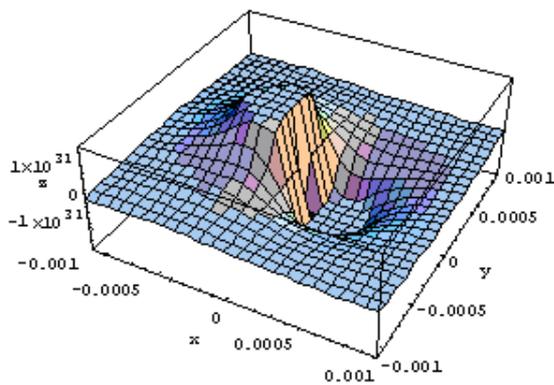
6.19.20  $G_{22}^{3D}$ . Déplacement du squelette solide dans la direction 2 dû à une force ponctuelle unitaire dans la même direction



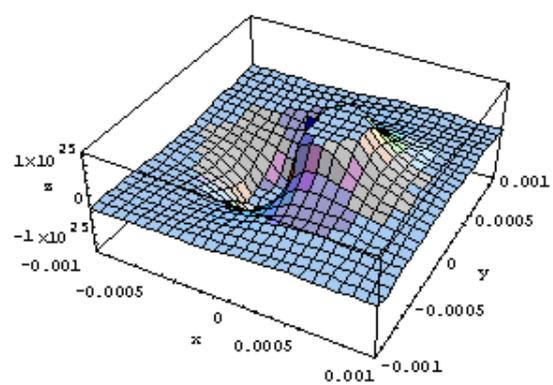
6.19.21  $G_{12}^{3D}$ . Déplacement du squelette solide dans la direction 1 dû à une force ponctuelle unitaire dans la direction 2



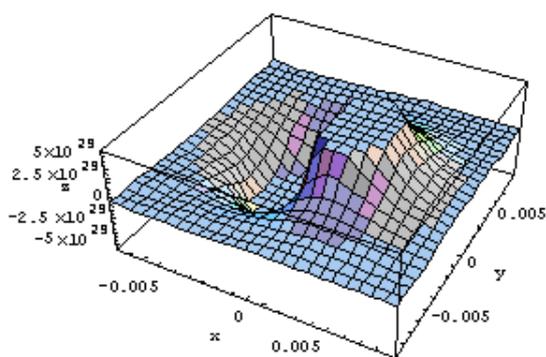
6.19.22  $G_{1w}^{3D}$ . Déplacement du squelette solide dans la direction 1 dû à une injection unitaire d'eau



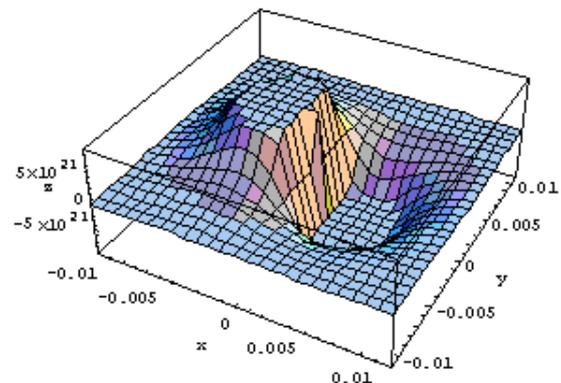
6.19.23  $G_{1a}^{3D}$ . Déplacement du squelette solide dans la direction 1 dû à une injection unitaire d'air



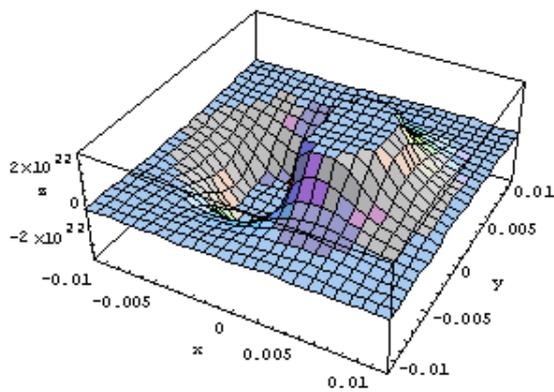
6.19.24  $G_{1T}^{3D}$ . Déplacement du squelette solide dans la direction 1 dû à une source unitaire de chaleur



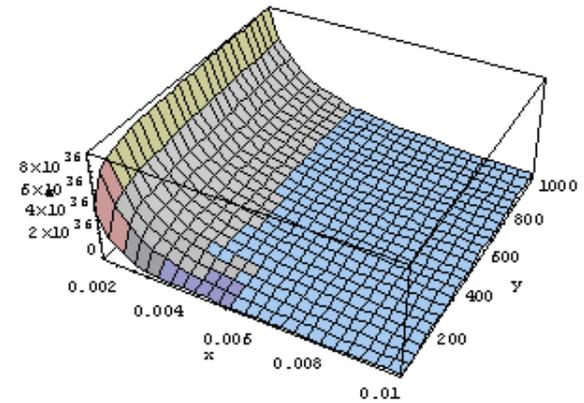
6.19.25  $G_{w1}^{3D}$ . Pression interstitielle de l'eau due à une force ponctuelle unitaire dans la direction 1



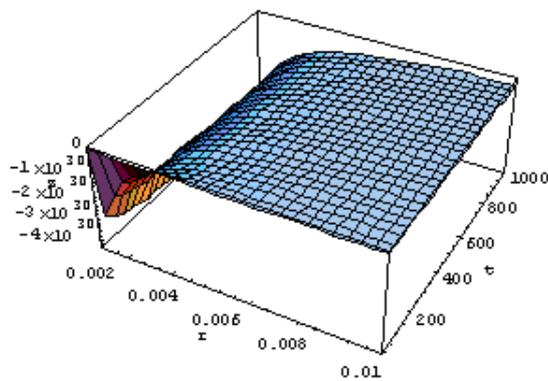
6.19.26  $G_{a1}^{3D}$ . Pression interstitielle de l'air due à une force ponctuelle unitaire dans la direction 1



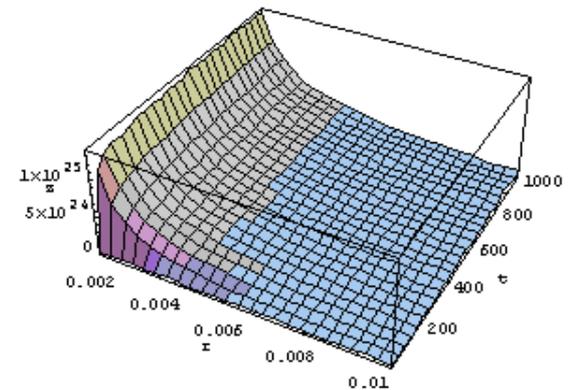
6.19.27  $G_{T1}^{3D}$ . Température due à une force ponctuelle unitaire dans la direction 1



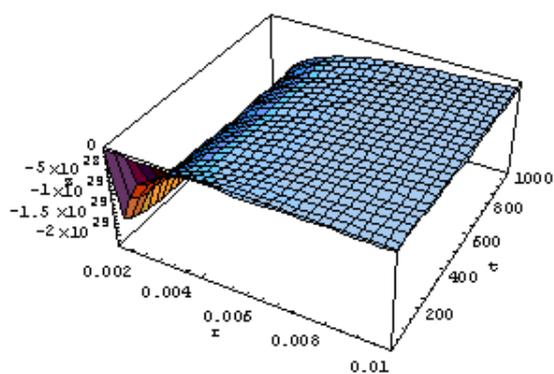
6.19.28  $G_{ww}^{3D}$ . Pression interstitielle de l'eau due à une injection unitaire d'eau



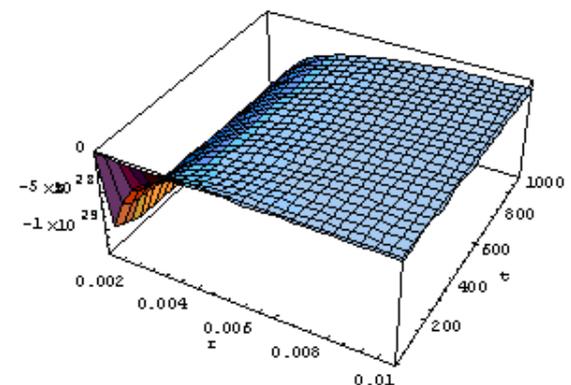
6.19.29  $G_{wa}^{3D}$ . Pression interstitielle de l'eau due à une injection unitaire d'air



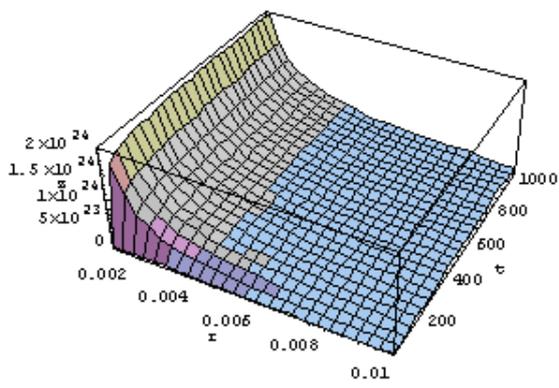
6.19.30  $G_{wT}^{3D}$ . Pression interstitielle de l'eau due à une source unitaire de chaleur



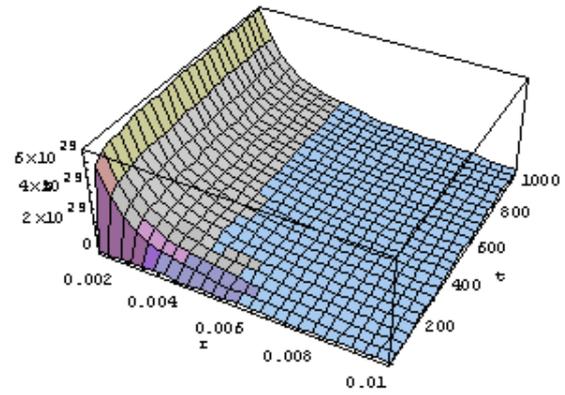
6.19.31  $G_{aw}^{3D}$ . Pression interstitielle de l'air due à une injection unitaire d'eau



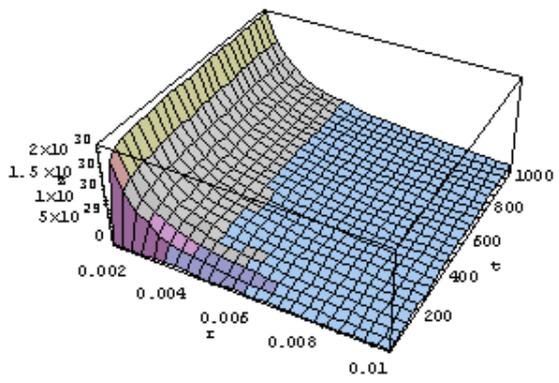
6.19.32  $G_{aa}^{3D}$ . Pression interstitielle de l'air due à une injection unitaire d'air



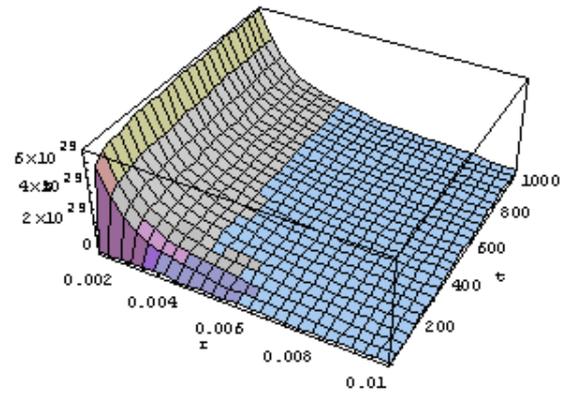
6.19.33  $G_{aT}^{3D}$ . Pression interstitielle de l'air due à une source unitaire de chaleur



6.19.34  $G_{Tw}^{3D}$ . Température due à une injection unitaire d'eau



6.19.35  $G_{Ta}^{3D}$ . Température due à une injection unitaire d'air



6.19.36  $G_{TT}^{3D}$ . Température due à une source unitaire de chaleur

## Mise en œuvre numérique de la méthode des éléments de frontière

DANS les chapitres précédents (5 et 6), nous avons établi les équations intégrales de frontière et les solutions fondamentales correspondantes pour les milieux poreux saturés et non-saturés soumis aux chargements dynamiques et quasi-statiques. Celles-ci comportent des intégrations sur la surface ainsi que sur le temps et relient les conditions aux limites connues à des inconnues sur la frontière ou dans le domaine. En pratique, ces équations intégrales peuvent seulement être résolues numériquement. Dans ce cas, les approximations appropriées sont nécessaires dans l'espace et dans le temps.

L'objet de ce chapitre est de traiter les équations intégrales présentées respectivement

- pour les **sols saturés** : problème de propagation d'ondes 2D (5.2.3), problème de consolidation (5.3.3) :

$$\mathbf{c} \begin{bmatrix} u_\alpha(\xi; t) \\ p(\xi; t) \end{bmatrix} = \int_\Gamma \begin{bmatrix} U_{\alpha\beta}^S(\mathbf{x}, \xi; t) & -P_\alpha^S(\mathbf{x}, \xi; t) \\ U_\beta^f(\mathbf{x}, \xi; t) & -P^f(\mathbf{x}, \xi; t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} t_\alpha(\mathbf{x}; t) \\ q(\mathbf{x}; t) \end{bmatrix} d\Gamma - \oint_\Gamma \begin{bmatrix} T_{\alpha\beta}^S(\mathbf{x}, \xi; t) & Q_\alpha^S(\mathbf{x}, \xi; t) \\ T_\beta^f(\mathbf{x}, \xi; t) & Q^f(\mathbf{x}, \xi; t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_\alpha(\mathbf{x}; t) \\ p(\mathbf{x}; t) \end{bmatrix} d\Gamma \quad (7.1)$$

- pour les **sols non-saturés** : problème de propagation d'ondes 2D (6.1.2), problème de consolidation isotherme (6.2.2) :

$$\mathbf{c} \begin{bmatrix} u_\alpha(\xi; t) \\ p_w(\xi; t) \\ p_a(\xi; t) \end{bmatrix} = \int_\Gamma \begin{bmatrix} U_{\alpha\beta}^S(\mathbf{x}, \xi; t) & -P_\alpha^{wS}(\mathbf{x}, \xi; t) & -P_\alpha^{aS}(\mathbf{x}, \xi; t) \\ U_\beta^W(\mathbf{x}, \xi; t) & -P^{wW}(\mathbf{x}, \xi; t) & -P^{aW}(\mathbf{x}, \xi; t) \\ U_\beta^A(\mathbf{x}, \xi; t) & -P^{wA}(\mathbf{x}, \xi; t) & -P^{aA}(\mathbf{x}, \xi; t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} t_\alpha(\mathbf{x}; t) \\ q_w(\mathbf{x}; t) \\ q_a(\mathbf{x}; t) \end{bmatrix} d\Gamma - \oint_\Gamma \begin{bmatrix} T_{\alpha\beta}^S(\mathbf{x}, \xi; t) & Q_\alpha^{wS}(\mathbf{x}, \xi; t) & Q_\alpha^{aS}(\mathbf{x}, \xi; t) \\ T_\beta^W(\mathbf{x}, \xi; t) & Q^{wW}(\mathbf{x}, \xi; t) & Q^{aW}(\mathbf{x}, \xi; t) \\ T_\beta^A(\mathbf{x}, \xi; t) & Q^{wA}(\mathbf{x}, \xi; t) & Q^{aA}(\mathbf{x}, \xi; t) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_\alpha(\mathbf{x}; t) \\ p_w(\mathbf{x}; t) \\ p_a(\mathbf{x}; t) \end{bmatrix} d\Gamma \quad (7.2)$$

par la méthode des éléments de frontière (BEM). Ceci est intégré dans le code de calcul HYBRID. La présentation générale, l'algorithme et l'architecture de ce code seront présentés dans la partie suivante.

Dans ce but, une bibliographie pertinente sur l'état de l'art en mise en œuvre numérique des équations intégrales est d'abord présentée. Cette implémentation numérique a été accomplie en utilisant le système d'analyse « GP-BEST » (*General Purpose Boundary Element Solution Technique*) qui a une large capacité dans la mécanique linéaire et non-linéaire des solides et des fluides. Dans ce cadre, plusieurs techniques ont été développées précédemment pour l'élastostatique, l'élastodynamique et la poroélasticité [21, 19, 101]. Ici, on adapte ces techniques pour l'analyse de la poroélasticité multiphasique.

Comme mentionné auparavant, comme il semble être difficile d'obtenir les solutions fondamentales pour les sols non-saturés explicitement dans le temps sous une forme analytique et aussi pour améliorer la stabilité du procédé d'avancement pas-à-pas dans le temps pour les sols saturés, les intégrales temporelles de convolution sont numériquement approximées par une méthode opérationnelle quadrature de convolution (MQC) développée par Lubich [222, 223]. Dans cette méthode, les pondérations sont déterminées par la transformée de Laplace de la solution fondamentale et par une méthode multipas linéaire. Également, les intégrales spatiales seront évaluées à l'aide des techniques numériques.

## 7.1 Discrétisation dans le temps : Méthode Quadrature de Convolution (MQC)

Comme la première étape, le produit de convolution de Riemann

$$y(t) = f(t) * g(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (7.3)$$

peut être approximée par la méthode de quadrature en utilisant la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$  :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \tilde{f}(s) \} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s) e^{st} ds \quad (7.4)$$

dans laquelle  $c \succ 0$  et

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L} \{ f(t) \} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} ds \quad (7.5)$$

En substituant  $f(t - \tau)$  par la transformée de Laplace inverse  $\tilde{f}(s)$  dans le produit de convolution (7.3) et en changeant l'ordre dans lequel les intégrations sont effectuées, on en déduit

$$\int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s) \underbrace{\int_0^t e^{s(t-\tau)} g(\tau) d\tau}_{x(s,t)} ds \quad (7.6)$$

Il est à noter que l'intégrale intérieure, abrégée en  $x(s, t)$ , est la solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{\partial x(s, t)}{\partial t} = sx(s, t) + g(t) \quad (7.7)$$

avec  $x(s, 0) = 0$ .

Après la discrétisation du temps en  $N$  intervalles de temps égaux  $\Delta t$ , le produit de convolution à l'instant  $t_n = n\Delta t$  peut s'écrire comme

$$y(n\Delta t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s) x(s, n\Delta t) ds \quad (7.8)$$

avec  $n = 0, 1, \dots, N$ .

La solution de l'équation (7.7),  $x(s, t)$ , peut être calculée approximativement à l'instant  $t_n = n\Delta t$  à partir de la méthode multipas linéaire d'ordre  $p$  comme suit

$$x_n(s) = x(s, n\Delta t) = \alpha_k x_{n+k} + \alpha_{k-1} x_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 x_n = \Delta t \left[ \beta_k \left( s x_{n+k} + g((n+k)\Delta t) \right) + \dots + \beta_0 \left( s x_n + g(n\Delta t) \right) \right] \quad (7.9)$$

où  $x(s, n\Delta t) = x_n(s)$  dénote la solution approximative de  $x(s, t)$  à l'instant  $n\Delta t$ .

Cette représentation de la méthode multipas ne permet pas d'extraire la valeur discrète  $x_n$  qui doit être utilisée pour évaluer l'équation (7.6). Par conséquent, l'équation (7.9) est multipliée par  $z^n$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) et est additionnée sur  $n$  à partir de 0 jusqu'à  $\infty$  :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_k x_{n+k} z^n + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0 x_n z^n = \\ \Delta t \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \beta_k \left( s x_{n+k} + g((n+k)\Delta t) \right) z^n + \dots + \beta_0 \left( s x_n + g(n\Delta t) \right) z^n \right] \end{aligned} \quad (7.10)$$

En supposant que les valeurs de départ sont nulles  $x_{-k}(s) = \dots = x_{-1}(s) = 0$ , la somme  $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+k} z^n$  est modifiée comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+k} z^n = z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+k} z^{n+k} = z^{-k} \sum_{m=k}^{\infty} x_m z^m = z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n \quad (7.11)$$

Avec la même hypothèse pour  $g(t < 0) = 0$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} g_{n+k} z^n$  est aussi modifiée de la même manière.

Alors, en introduisant (7.11) dans (7.10) on aura :

$$\left[ \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_k z^{-k} \right] \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n = \Delta t \left[ \beta_0 + \dots + \beta_k z^{-k} \right] \left[ s \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} g(n\Delta t) z^n \right] \quad (7.12)$$

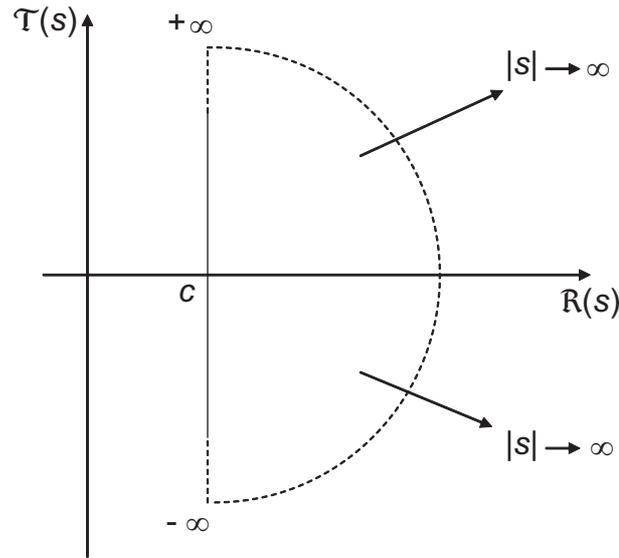


Figure 7.1 — Chemin d'intégration de l'équation (7.15)

En utilisant la fonction caractéristique  $\gamma(z)$  comme

$$\gamma(z) = \frac{\alpha_0 + \dots + \alpha_k z^{-k}}{\beta_0 + \dots + \beta_k z^{-k}} = \frac{\alpha_0 z^k + \dots + \alpha_k}{\beta_0 z^k + \dots + \beta_k} \quad (7.13)$$

et en réarrangeant (7.12), la fonction  $x(s, t)$  est représentée sous la forme d'une série entière comme suit

$$x_n(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n = \left( \frac{\gamma(z)}{\Delta t} - s \right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} g(n\Delta t) z^n \quad (7.14)$$

Maintenant, la représentation  $x(s, n\Delta t)$  peut être insérée dans (7.8). Dès lors, en multipliant  $y(n\Delta t)$  par  $z^n$  et en faisant la sommation sur  $n$ , le produit de convolution prend la forme suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(n\Delta t) z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{\frac{\gamma(z)}{\Delta t} - s} ds \sum_{n=0}^{\infty} g(n\Delta t) z^n \quad (7.15)$$

Dans cette équation, l'intégration complexe est effectuée sur la ligne parallèle à l'axe imaginaire située à  $c$  (Fig. 7.1). Le chemin d'intégration sera changé en un contour fermé en ajoutant un demi-cercle comme montré dans la figure (7.1). Si la fonction  $\tilde{f}(s)$  satisfait l'hypothèse suivante

$$|\tilde{f}(s)| \rightarrow 0 \quad \text{pour } \mathcal{R}(s) \succeq c \text{ et } |s| \rightarrow \infty$$

l'intégrale (7.15) peut être déterminée par la valeur de l'intégrande au point singulier  $s = \gamma(z)/\Delta t$  en utilisant le théorème des résidus comme suit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(n\Delta t) z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{\frac{\gamma(z)}{\Delta t} - s} ds \sum_{n=0}^{\infty} g(n\Delta t) z^n = \tilde{f}\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) \sum_{n=0}^{\infty} g(n\Delta t) z^n \quad (7.16)$$

Afin de trouver une expression directe pour  $y(n\Delta t)$ , il est nécessaire de représenter le membre de droite de l'équation (7.16) sous la forme d'une série avec les coefficients indépendants de  $z$ . Par conséquent, ici,  $\tilde{f}(\gamma(z)/\Delta t)$  est développé sous la forme d'une série entière comme suit :

$$\tilde{f}\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(\Delta t) z^n \quad (7.17)$$

Les coefficients  $\omega_n(\Delta t)$  de la série entière (7.17) sont déterminés soit

1. par une comparaison des coefficients, si  $\tilde{f}(\gamma(z)/\Delta t)$  peut être réarrangé comme une série.
2. ou pour des fonctions arbitraires  $\tilde{f}(\gamma(z)/\Delta t)$  par la formule intégrale de Cauchy

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \tilde{f}\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) z^{-n-1} dz \quad (7.18)$$

$R$  étant le rayon d'un cercle dans le domaine d'analyticité de  $\tilde{f}(\gamma(z)/\Delta t)$ .

En introduisant la série entière (7.17) dans le membre de droite de l'équation (7.16), une somme double apparaît. Celle-ci peut être simplifiée par le produit de Cauchy de deux séries entières :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(\Delta t) z^n \sum_{n=0}^{\infty} g(n\Delta t) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t) g(k\Delta t) z^n \quad (7.19)$$

Dès lors, on aura

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(n\Delta t) z^n = \tilde{f}\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) \sum_{n=0}^{\infty} g(n\Delta t) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t) g(k\Delta t) z^n \quad (7.20)$$

Une comparaison des coefficients en résulte la formule de quadrature finale pour l'intégrale de convolution comme suit

$$y(n\Delta t) = \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t) g(k\Delta t), \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (7.21)$$

L'équation (7.21) est une approximation pour l'intégrale de convolution (7.3) qui est seulement basée sur la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$  et les valeurs discrètes de l'autre fonction dans (7.3)  $g(k\Delta t)$ .

Comme montré ci-dessus, la seule approximation utilisée pour déduire la formule de quadrature (7.21) est la méthode multipas linéaire (7.9), tandis que les autres calculs sont exacts. Manifestement, la méthode multipas appliquée est caractérisée par  $\gamma(z)$ . Donc, les conditions d'être  $A(\alpha)$ -stable avec l'angle positif  $\alpha$ , d'être stable au voisinage de l'infini, d'être *fortement zéro-stable* et d'être *consistent* d'ordre  $p$  peuvent s'exprimer comme :

- $\gamma(z)$  n'a ni zéro ni pôle sur le disque unité fermé ( $|z| \leq 1$ ), avec l'exception d'un zéro simple à  $z = 1$
- $|\arg \gamma(z)| \leq \pi - \alpha$ , avec  $|z| \leq 1$ , pour  $\alpha \succ 0$
- $\Delta t^{-1} \gamma(e^{-\Delta t}) = 1 + O(\Delta t^p)$ , avec  $\Delta t \rightarrow 0$ , pour  $p \geq 1$

Les exemples bien connus des méthodes multipas qui satisfont ces conditions sont les méthodes BDF (*Backward Differentiation Formulas*) d'ordre  $p \leq 6$  :

$$\gamma(z) = \sum_{i=1}^p (1-z)^i / i \quad (7.22)$$

avec  $\alpha = 90^\circ, 90^\circ, 88^\circ, 73^\circ, 51^\circ, 18^\circ$  pour respectivement  $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Par exemple, BDF d'ordre 2 qui est A-stable ( $\alpha = 90^\circ$ ),  $\gamma(z) = 3/2 - 2z + z^2/2$ .

Comme mentionné auparavant, la seule approximation introduite jusqu'à maintenant est la méthode multipas linéaire pour l'approximation de  $x(s, t)$ . Cependant, si la fonction  $\tilde{f}(\gamma(z)/\Delta t)$  ne peut pas être analytiquement développée par une série entière, les coefficients de la série entière doivent être calculés par la formule intégrale de Cauchy (7.18). En général, le calcul de l'intégrale (7.18) pour déterminer les poids d'intégration  $\omega_n$  doit être effectué numériquement. À cette fin, une transformation en coordonnées polaire  $z = Re^{i\varphi}$  est introduite dans (7.18) :

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}\left(\frac{\gamma(Re^{i\varphi})}{\Delta t}\right) e^{-in\varphi} d\varphi \quad (7.23)$$

Dès lors, cette intégrale peut être approximée par la méthode des trapèzes comme suit :

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{f}\left(\frac{\gamma\left(Re^{il\frac{2\pi}{L}}\right)}{\Delta t}\right) e^{-inl\frac{2\pi}{L}} \quad (7.24)$$

avec  $L$  intervalles égaux  $2\pi/L$ .

Les preuves mathématiques de convergence et de stabilité peuvent être trouvées dans les articles [222, 224, 225] pour les différents types d'application.

Il faut signaler que les poids d'intégration dépendent de la différence temporelle  $t - \tau = (n - k)\Delta t$  et non du temps absolu. Également dans l'équation des poids d'intégration (7.24), la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$  désignée par  $\tilde{f}(s)$  doit être déterminée pour l'ensemble des paramètres de Laplace suivant :

$$s = \frac{\gamma\left(Re^{il\frac{2\pi}{L}}\right)}{\Delta t} \quad (7.25)$$

En raison de la nature de cette méthode, les paramètres de Laplace pour lesquels  $\tilde{f}(s)$  doit être évalué ont toujours la partie réelle positive.

Supposant que les valeurs de  $\tilde{f}$  dans (7.24) sont calculées avec une borne erreur  $\varepsilon$ , le choix  $L = N$  et  $R^N = \sqrt{\varepsilon}$  aboutit à une erreur de taille  $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$  dans le calcul  $\omega_n$  [223]. De plus, il est à noter qu'en choisissant  $L = N$  l'équation (7.24) sera identique à la transformée de Fourier discrète. Par conséquent, les  $N$  coefficients  $\omega_n$  peuvent être calculés rapidement par la technique de transformée de Fourier rapide (FFT) utilisant seulement  $\mathcal{O}(N \log N)$  opérations au lieu de  $\mathcal{O}(N^2)$ .

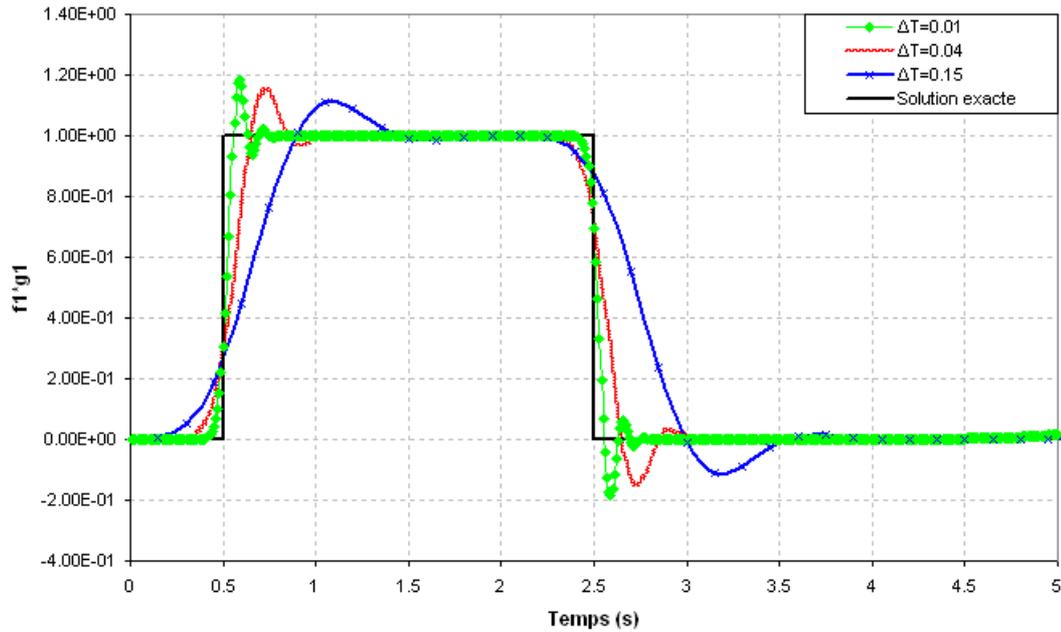


Figure 7.2 — Méthode de convolution quadrature utilisant les différentes tailles du pas de temps  $\Delta t$  pour l'intégrale 1

### 7.1.1 Test numérique

Comme mentionné dans la section précédente, le produit de convolution de Riemann (7.3) peut être calculé numériquement par la méthode de convolution quadrature (7.21), bien que les poids d'intégration sont déterminés en utilisant la formule (7.24).

Dans cette section, les résultats numériques de deux intégrales de convolutions obtenues par la méthode de convolution quadrature (7.21) seront comparés avec les solutions analytiques connues. Les deux intégrales de convolutions utilisées pour ce test sont :

**intégrale 1 :**

$$\left. \begin{array}{l} f_1(t) = \delta(t - a) \\ g_1(t) = H(t) - H(t - b) \end{array} \right\} \Rightarrow f_1(t) * g_1(t) = H(t - a) - H(t - (a + b)) \quad (7.26)$$

**intégrale 2 :**

$$\left. \begin{array}{l} f_2(t) = tH(t - a) \\ g_2(t) = H(t) \end{array} \right\} \Rightarrow f_2(t) * g_2(t) = \frac{1}{2} (t^2 - a^2) H(t - a) \quad (7.27)$$

dans lesquelles  $a = 0.5$  et  $b = 2$ .

Les paramètres existants dans l'équation (7.24) sont choisis comme :  $L = N$  et  $\varepsilon = 10^{-10}$ .

Comme montré dans les figures (7.2) et (7.3), les résultats numériques et les solutions exactes pour les deux intégrales sont en bon accord. Pour  $\Delta t = 0.15s$ , la taille de l'intervalle produit manifestement des résultats inexacts dans le cas de l'intégrale 1 ayant en vue qu'après trois

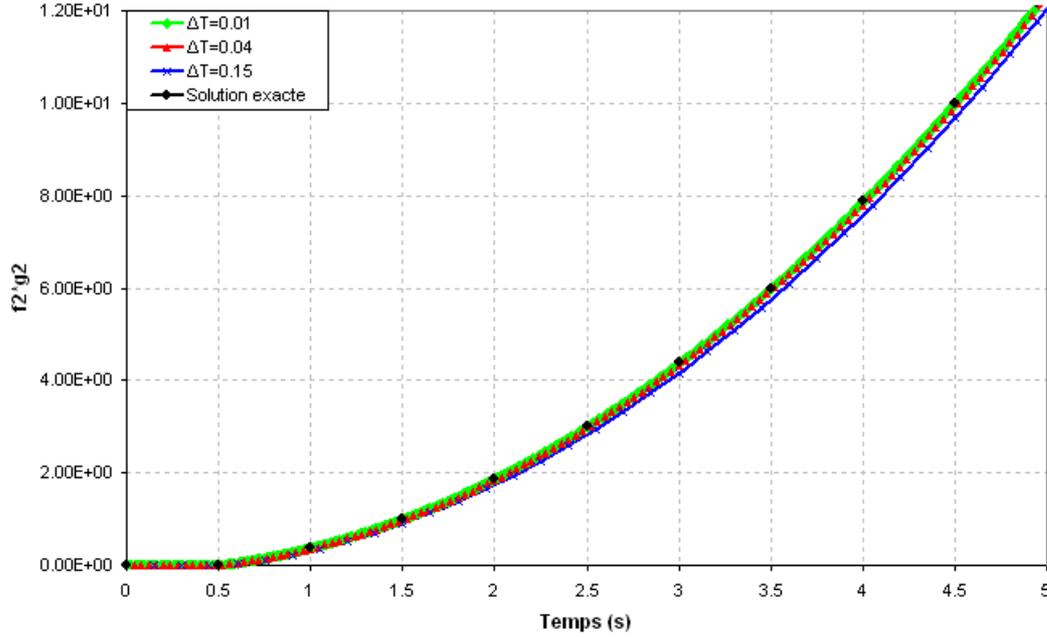


Figure 7.3 — Méthode de convolution quadrature utilisant les différentes tailles du pas de temps  $\Delta t$  pour l'intégrale 2

pas de temps le premier saut doit être approximé. Tandis que dans le cas de l'intégrale 2, cette taille de l'intervalle donne des résultats suffisamment exacts. Les sauts dans l'intégrale 1 sont approximés proprement par les petites tailles de l'intervalle de temps, cependant, un dépassement (*overshooting*) comparable au phénomène de Gibbs se produit. Le dépassement a des plus petites amplitudes mais une marge plus large pour des grandes tailles de l'intervalle de temps et des plus grandes amplitudes avec une marge plus localisée pour des petites tailles de l'intervalle de temps.

Maintenant, en introduisant la formule de convolution quadrature (7.21) et les poids d'intégration (7.24) dans les équations intégrales (7.1) et (7.2), on obtient :

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \xi; t) * t_j(\mathbf{x}; t) = \int_0^t G_{ij}(\mathbf{x}, \xi; t - \tau) t_j(\mathbf{x}; \tau) d\tau = \sum_{n=1}^N (\omega_{ij}^G)^{N-n+1}(\mathbf{x}, \xi) t_j^n(\mathbf{x}) \quad (7.28)$$

$$H_{ij}(\mathbf{x}, \xi; t) * u_j(\mathbf{x}; t) = \int_0^t H_{ij}(\mathbf{x}, \xi; t - \tau) u_j(\mathbf{x}; \tau) d\tau = \sum_{n=1}^N (\omega_{ij}^H)^{N-n+1}(\mathbf{x}, \xi) u_j^n(\mathbf{x}) \quad (7.29)$$

où

**dans le cas des sols saturés :**  $u_j = \begin{bmatrix} u_\alpha(\xi; t) \\ p(\xi; t) \end{bmatrix}, t_j = \begin{bmatrix} t_\alpha(\mathbf{x}; t) \\ q(\mathbf{x}; t) \end{bmatrix}$  et

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} U_{\alpha\beta}^S(\mathbf{x}, \xi; t) & -P_\alpha^S(\mathbf{x}, \xi; t) \\ U_\beta^f(\mathbf{x}, \xi; t) & -P^f(\mathbf{x}, \xi; t) \end{bmatrix}, H_{ij} = \begin{bmatrix} T_{\alpha\beta}^S(\mathbf{x}, \xi; t) & Q_\alpha^S(\mathbf{x}, \xi; t) \\ T_\beta^f(\mathbf{x}, \xi; t) & Q^f(\mathbf{x}, \xi; t) \end{bmatrix}$$

dans le cas des sols non-saturés :  $u_j = \begin{bmatrix} u_\alpha(\xi; t) \\ p_w(\xi; t) \\ p_a(\xi; t) \end{bmatrix}$ ,  $t_j = \begin{bmatrix} t_\alpha(\mathbf{x}; t) \\ q_w(\mathbf{x}; t) \\ q_a(\mathbf{x}; t) \end{bmatrix}$  et

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} U_{\alpha\beta}^S(\mathbf{x}, \xi; t) & -P_\alpha^{wS}(\mathbf{x}, \xi; t) & -P_\alpha^{aS}(\mathbf{x}, \xi; t) \\ U_\beta^W(\mathbf{x}, \xi; t) & -P^{wW}(\mathbf{x}, \xi; t) & -P^{aW}(\mathbf{x}, \xi; t) \\ U_\beta^A(\mathbf{x}, \xi; t) & -P^{wA}(\mathbf{x}, \xi; t) & -P^{aA}(\mathbf{x}, \xi; t) \end{bmatrix}$$

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} T_{\alpha\beta}^S(\mathbf{x}, \xi; t) & Q_\alpha^{wS}(\mathbf{x}, \xi; t) & Q_\alpha^{aS}(\mathbf{x}, \xi; t) \\ T_\beta^W(\mathbf{x}, \xi; t) & Q^{wW}(\mathbf{x}, \xi; t) & Q^{aW}(\mathbf{x}, \xi; t) \\ T_\beta^A(\mathbf{x}, \xi; t) & Q^{wA}(\mathbf{x}, \xi; t) & Q^{aA}(\mathbf{x}, \xi; t) \end{bmatrix}$$

Les composantes des matrices des solutions fondamentales  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  correspondant aux sols saturés (problèmes dynamique et quasi-statique) et non-saturés (problèmes dynamique et quasi-statique isotherme) sont présentées respectivement dans les sections (5.2.2, 5.3.2) et (6.1.3, 6.2.3).

Également, dans ces équations  $(\omega^G)^{N-n+1}$  et  $(\omega^H)^{N-n+1}$  sont les fonctions d'influence qui sont définies par :

$$(\omega_{ij}^G)^m(\mathbf{x}, \xi) = \frac{R^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{G}_{ij}(\mathbf{x}, \xi; s_l) e^{-iml\frac{2\pi}{L}} \quad (7.30)$$

$$(\omega_{ij}^H)^m(\mathbf{x}, \xi) = \frac{R^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{H}_{ij}(\mathbf{x}, \xi; s_l) e^{-iml\frac{2\pi}{L}} \quad (7.31)$$

où  $s_l = \gamma \left( R e^{-il\frac{2\pi}{L}} \right) / \Delta t$ .

Dans les équations (7.28) et (7.29), on suppose que dans chaque intervalle de temps  $\Delta t$  les deux champs de déplacement/pression  $\mathbf{u}$  et de contrainte/flux  $\mathbf{t}$  restent constants.

Finalement, en remplaçant les équations (7.28) et (7.29) dans (7.1) et (7.2) on obtient l'équation intégrale de frontière discrétisée dans le temps :

$$c_{ij}(\xi) u_j^N(\xi) = \sum_{n=1}^N \left( \int_{\Gamma} (\omega_{ij}^G)^{N-n+1}(\mathbf{x}, \xi) t_j^n(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} (\omega_{ij}^H)^{N-n+1}(\mathbf{x}, \xi) u_j^n(\mathbf{x}) d\Gamma \right) \quad (7.32)$$

## 7.2 Discrétisation dans l'espace

Dans cette section, une discrétisation spatiale sera effectuée afin de permettre l'évaluation numérique de l'intégrale sur la surface  $\Gamma$  apparue dans (7.32).

### 7.2.1 Discrétisation de la géométrie et interpolation des variables

La première démarche dans la discrétisation spatiale consiste à diviser la frontière  $\Gamma$  en  $E$  éléments frontières disjoints de forme relativement simple. La géométrie de chaque élément est

définie par les coordonnées des points nodaux et les fonctions de forme associées. Ceci donne :

$$c_{ij}u_j^N(\xi) = \sum_{n=1}^N \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} (\omega_{ij}^G)^{N-n+1}(\mathbf{x}, \xi) t_j^n(\mathbf{x}) d\Gamma_e - \sum_{n=1}^N \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} (\omega_{ij}^H)^{N-n+1}(\mathbf{x}, \xi) u_j^n(\mathbf{x}) d\Gamma_e \quad (7.33)$$

$$\text{où } \Gamma = \sum_{e=1}^E \Gamma_e.$$

Dans cette étude, on utilise la représentation *isoparamétrique* pour la géométrie et les inconnues du problème qui est similaire à celle utilisée dans la méthode des éléments finis (FEM). Cela signifie que les points de discrétisation géométrique et d'interpolation sont les mêmes. Également les fonctions de forme  $\bar{N}(\eta)$  et d'interpolation  $N(\eta)$  sont égales. Par conséquent, le paramètre de la frontière  $\mathbf{x}$ , le champ de déplacement inconnu  $u_j(\mathbf{x})$  et le champ de contrainte inconnu  $t_j(\mathbf{x})$  sont approximés en utilisant les fonctions d'interpolation de cette manière :

$$\mathbf{x}(\eta) = \sum_{m=1}^M N_m(\eta) \mathbf{X}_m \quad (7.34)$$

$$\mathbf{u}(\eta) = \sum_{m=1}^M N_m(\eta) \mathbf{U}_m \quad (7.35)$$

$$\mathbf{t}(\eta) = \sum_{m=1}^M N_m(\eta) \mathbf{T}_m \quad (7.36)$$

où  $M$  est le nombre de noeuds par élément,  $N_m$  sont des fonctions polynomiales d'ordre  $M - 1$  ayant les propriétés suivantes :

$$N_m(\eta_m) = 1, \quad N_m(\eta_i) = 0 \quad (i \neq m), \quad \sum_{m=1}^M N_m(\eta) = 1 \quad (7.37)$$

Ces fonctions d'interpolation sont définies en termes des coordonnées intrinsèques  $\eta$  ( $-1 \preceq \eta \preceq 1$ ).  $\mathbf{X}_m$ ,  $\mathbf{U}_m$  et  $\mathbf{T}_m$  sont respectivement des coordonnées cartésiennes, des valeurs de champ de déplacement/pression et des valeurs de champ de contrainte/flux au noeud  $m$ .

Dans ce travail, nous utilisons des éléments isoparamétriques quadratiques (Fig. 7.4). Dans ce type d'élément, les fonctions d'interpolation sont définies comme suit (Fig. 7.5) :

$$N_1(\eta) = \frac{1}{2}\eta(\eta - 1) \quad (7.38)$$

$$N_2(\eta) = 1 - \eta^2 \quad (7.39)$$

$$N_3(\eta) = \frac{1}{2}\eta(\eta + 1) \quad (7.40)$$

Dès lors, en introduisant (7.35) et (7.36) dans l'équation (7.33) on obtient :

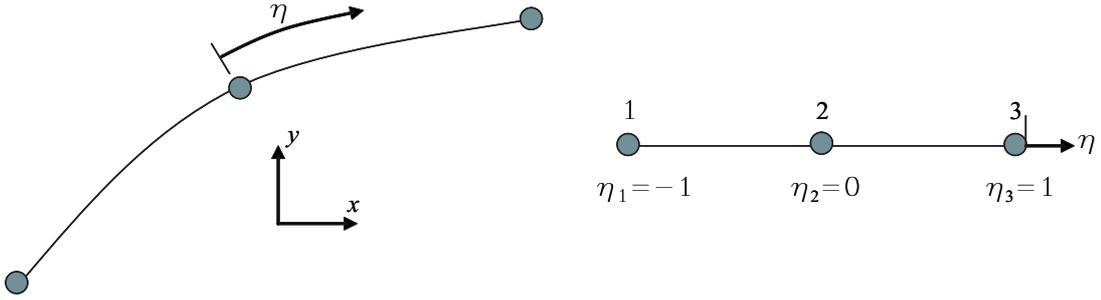


Figure 7.4 — Éléments isoparamétrique quadratique

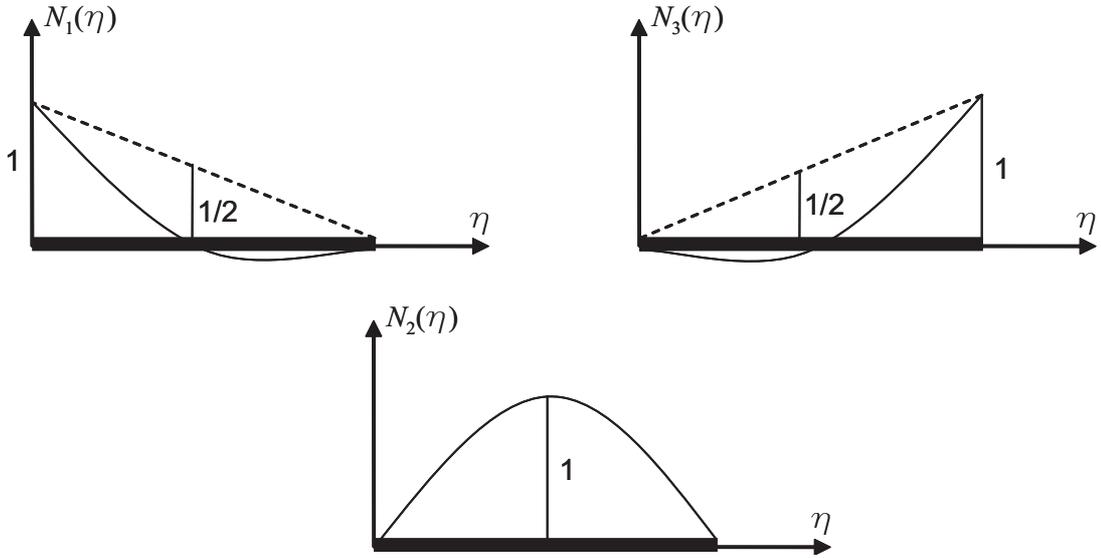


Figure 7.5 — Fonctions d'interpolation d'un élément quadratique

$$\begin{aligned}
 c_{ij}U_j^N(\xi) &= \sum_{n=1}^N \sum_{e=1}^E \sum_{m=1}^{M=3} (T_{jm}^e)^n \int_{\Gamma_e} (\omega_{ij}^G)^{N-n+1}(\mathbf{x}(\eta), \xi) N_m(\eta) d\Gamma_e(\mathbf{x}(\eta)) \\
 &\quad - \sum_{n=1}^N \sum_{e=1}^E \sum_{m=1}^{M=3} (U_{jm}^e)^n \int_{\Gamma_e} (\omega_{ij}^H)^{N-n+1}(\mathbf{x}(\eta), \xi) N_m(\eta) d\Gamma_e(\mathbf{x}(\eta))
 \end{aligned} \quad (7.41)$$

L'équation (7.41) s'écrit d'une façon plus compacte :

$$c_{ij}U_j^N(\xi) = \sum_{n=1}^N \sum_{e=1}^E \sum_{m=1}^{M=3} \left[ (T_{jm}^e)^n (\Delta G_{ijm}^e)^{N-n+1} - (U_{jm}^e)^n (\Delta H_{ijm}^e)^{N-n+1} \right] \quad (7.42)$$

où il faut rappeler que  $e$  est le numéro d'élément et  $m$  est le numéro de noeud local dans l'élément  $e$ . Selon le cas saturé ou non-saturé,  $(\Delta \mathbf{G}_m^e)^{N-n+1}$  et  $(\Delta \mathbf{H}_m^e)^{N-n+1}$  sont respectivement les matrices de dimension  $3 \times 3$  ou  $4 \times 4$  définies comme :

$$(\Delta G_{ijm}^e)^{N-n+1} = \int_{\Gamma_e} (\omega_{ij}^G)^{N-n+1}(\mathbf{x}(\eta), \xi) N_m(\eta) d\Gamma_e(\mathbf{x}(\eta)) \quad (7.43)$$

$$(\Delta H_{ijm}^e)^{N-n+1} = \int_{\Gamma_e} (\omega_{ij}^H)^{N-n+1}(\mathbf{x}(\eta), \xi) N_m(\eta) d\Gamma_e(\mathbf{x}(\eta)) \quad (7.44)$$

Cette équation montre que la discrétisation de l'équation intégrale mène à une somme d'intégrations des produits de fonction de forme et de noyau sur les éléments.

Afin d'exprimer  $d\Gamma_e(\mathbf{x})$  en coordonnées intrinsèques, on a :

$$d\Gamma_e(\mathbf{x}) = |J|d\eta \quad (7.45)$$

où  $|J|$  est le Jacobien de la transformation défini par :

$$|J(\eta)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2} = \sqrt{(V_\eta^x)^2 + (V_\eta^y)^2} \quad (7.46)$$

dans laquelle  $\mathbf{V}_\eta = (V_\eta^x, V_\eta^y)$  est le vecteur tangent à l'élément quadratique unidimensionnel en direction  $\eta$  :

$$\mathbf{V}_\eta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} = \sum_{m=1}^{M=3} \frac{dN_m(\eta)}{d\eta} \mathbf{X}_m^e = (\mathbf{X}_1^e - 2\mathbf{X}_2^e + \mathbf{X}_3^e) \eta + 0.5(\mathbf{X}_3^e - \mathbf{X}_1^e) \quad (7.47)$$

Par conséquent, les équations (7.43) et (7.44) s'expriment en coordonnées intrinsèques comme suit :

$$(\Delta G_{ijm}^e)^{N-n+1} = \int_{-1}^1 (\omega_{ij}^G)^{N-n+1} (\mathbf{x}(\eta), \xi) N_m(\eta) |J(\eta)| d\eta \quad (7.48)$$

$$(\Delta H_{ijm}^e)^{N-n+1} = \int_{-1}^1 (\omega_{ij}^H)^{N-n+1} (\mathbf{x}(\eta), \xi) N_m(\eta) |J(\eta)| d\eta \quad (7.49)$$

Nous nous occuperons de ces intégrations sur l'élément en détail plus tard.

## 7.2.2 Technique d'assemblage du système d'équations

Une fois la discrétisation dans le temps et dans l'espace effectuée, un système d'équations algébriques sera établi pour construire une solution approchée du problème original. Dans ce travail, la *méthode de collocation* est utilisée. Selon cette méthode, l'équation intégrale (7.1, 7.2) doit être exactement vérifiée aux points de collocation à tous les instants. En pratique, la collocation se fait à tous les noeuds d'interpolation, c'est-à-dire que les points de collocation coïncident avec les noeuds d'interpolation [262].

Par conséquent, l'équation intégrale (7.42) est évaluée au point nodal  $\mathbf{x}_c$ ,  $c = 1, M'$  (ou  $M'$  est le nombre total de noeuds du problème), à l'instant  $t = N\Delta t$  pour donner :

$$c_{ij} U_j^N(\mathbf{x}_c) = \sum_{n=1}^N \sum_{e=1}^E \sum_{m=1}^{M=3} \left[ (T_{jm}^e)^n (\Delta G_{ijm}^e(\mathbf{x}_c))^{N-n+1} - (U_{jm}^e)^n (\Delta H_{ijm}^e(\mathbf{x}_c))^{N-n+1} \right] \quad (7.50)$$

Comme montré dans l'équations (7.29), le vecteur  $u_i$  dénote respectivement dans les sols saturés  $[u_1, u_2, p]^T$  et dans les sols non-saturés  $[u_1, u_2, p_w, p_a]^T$ . Donc, selon le cas étudié on a  $i$  degrés de liberté pour chaque noeud du problème :  $i = 3$  pour les sols saturés et  $i = 4$  pour les sols

non-saturés. Ceci aboutit à  $i$  équations intégrales pour chaque noeud du problème.

Pour résoudre le système d'équations, il est convenable de remplacer la somme double  $\sum_{e=1}^E \sum_{m=1}^{M=3}$  par une multiplication matricielle du type :

$$[\Delta\mathbf{G}]\{\mathbf{T}\} = [\Delta\mathbf{H}]\{\mathbf{U}\} \quad (7.51)$$

où les vecteurs  $\{\mathbf{U}\}$  et  $\{\mathbf{T}\}$  comportent respectivement les valeurs de déplacement/pression et de contrainte/flux pour tous les noeuds dans le système de numérotation global. Par exemple, dans le cas des sols non-saturés on a :

$$\{\mathbf{U}\} = \{u_1^1, u_2^1, p_w^1, p_a^1, \dots, u_1^{M'}, u_2^{M'}, p_w^{M'}, p_a^{M'}\} \quad (7.52)$$

Également,  $[\Delta\mathbf{G}]$  et  $[\Delta\mathbf{H}]$  sont les matrices de coefficients globales assemblées par la collecte des contributions élémentaires. Dans les matrices de coefficients globales, les lignes correspondent aux points de collocation  $\mathbf{x}_c$  avec  $i$  degré de liberté (c'est-à-dire, pour chaque noeud de collocation on a  $i$  lignes) et les colonnes au degré de liberté global. La procédure d'assemblage est très similaire à celle de la méthode des éléments finis. Pour cette procédure nous avons besoin de la connectivité de l'élément  $e$ , qui se réfèrent aux numéros de noeud globaux de l'élément.

Afin de mieux comprendre comment l'assemblage de la matrice de coefficients globale se fait, on considère une configuration simple avec des maillages 2D pour un milieu poroélastique saturé comme montré dans la figure (7.6).

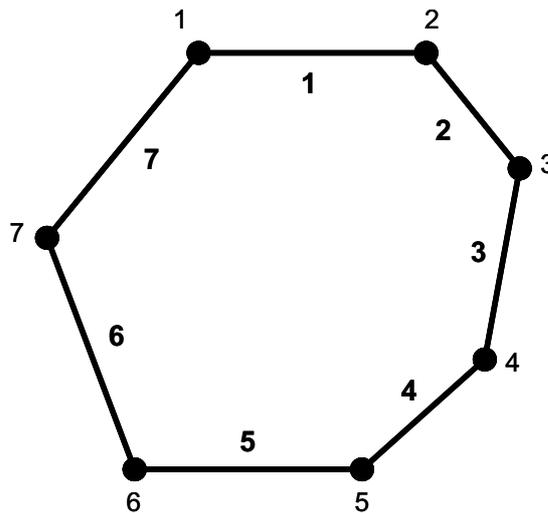


Figure 7.6 — Maillage BE 2D pour expliquer la procédure d'assemblage

Pour la simplicité, les éléments linéaires sont utilisés. Le tableau (7.1) montre les numéros des degrés de liberté globaux des éléments.

| Élément | Noeud 1 |       |     | Noeud 2 |       |     |
|---------|---------|-------|-----|---------|-------|-----|
|         | $u_x$   | $u_y$ | $p$ | $u_x$   | $u_y$ | $p$ |
| 1       | 1       | 2     | 3   | 4       | 5     | 6   |
| 2       | 4       | 5     | 6   | 7       | 8     | 9   |
| 3       | 7       | 8     | 9   | 10      | 11    | 12  |
| 4       | 10      | 11    | 12  | 13      | 14    | 15  |
| 5       | 13      | 14    | 15  | 16      | 17    | 18  |
| 6       | 16      | 17    | 18  | 19      | 20    | 21  |
| 7       | 19      | 20    | 21  | 1       | 2     | 3   |

Tableau 7.1 — Numéros des degrés de liberté globaux des éléments

Par exemple, pour assembler les contributions de l'élément 3 avec le vecteur des degrés de liberté globaux (7, 8, 9, 10, 11, 12), les colonnes de la matrice de coefficients  $[\Delta\mathbf{H}]^3$  sont ajoutées à la matrice globale  $[\Delta\mathbf{H}]$  comme suit :

$$\begin{array}{c}
 \text{Degrés de liberté} \rightarrow \\
 \begin{array}{cccccccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \dots & 21
 \end{array} \\
 [\Delta\mathbf{H}] = \begin{array}{cccccccccccccc}
 \left[ \begin{array}{cccccccccccccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta H_{xx11}^3 & \Delta H_{xp11}^3 & \Delta H_{xw11}^3 & \Delta H_{xx12}^3 & \Delta H_{xp12}^3 & \Delta H_{xw12}^3 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta H_{yx11}^3 & \Delta H_{yp11}^3 & \Delta H_{yw11}^3 & \Delta H_{yx12}^3 & \Delta H_{yp12}^3 & \Delta H_{yw12}^3 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta H_{wx11}^3 & \Delta H_{wy11}^3 & \Delta H_{ww11}^3 & \Delta H_{wx12}^3 & \Delta H_{wy12}^3 & \Delta H_{ww12}^3 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta H_{xx21}^3 & \Delta H_{xp21}^3 & \Delta H_{xw21}^3 & \Delta H_{xx22}^3 & \Delta H_{xp22}^3 & \Delta H_{xw22}^3 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta H_{yx21}^3 & \Delta H_{yp21}^3 & \Delta H_{yw21}^3 & \Delta H_{yx22}^3 & \Delta H_{yp22}^3 & \Delta H_{yw22}^3 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta H_{wx21}^3 & \Delta H_{wy21}^3 & \Delta H_{ww21}^3 & \Delta H_{wx22}^3 & \Delta H_{wy22}^3 & \Delta H_{ww22}^3 & \cdot & \cdot \\
 \vdots & \vdots \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta H_{wx21,1}^3 & \Delta H_{wy21,1}^3 & \Delta H_{ww21,1}^3 & \Delta H_{wx21,2}^3 & \Delta H_{wy21,2}^3 & \Delta H_{ww21,2}^3 & \cdot & \cdot
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \downarrow \\
 \text{Points de collocation } r_i \text{ avec} \\
 \text{ } i \text{ degrés de liberté}
 \end{array}
 \end{array}$$

Les indices utilisés  $\alpha \beta k l$  dans cette matrice désignent :

- $\alpha$  : la direction où la force est appliquée au point de collocation ( $x$  dans le squelette solide en direction 1,  $y$  dans le squelette solide en direction 2,  $w$  source d'injection d'eau)
- $\beta$  : la direction où on étudie la réponse au point d'observation ( $x$  déplacement du squelette solide dans la direction 1,  $y$  déplacement du squelette solide dans la direction 2,  $w$  pression interstitielle d'eau)
- $k$  : le numéro du noeud auquel la force est appliquée
- $l$  : le numéro du noeud auquel la réponse est étudiée.

Dès lors, l'équation (7.50) s'exprime sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{c}\mathbf{U}^N = \sum_{n=1}^N [\Delta\mathbf{G}^{N-n+1}\mathbf{T}^n - \Delta\mathbf{H}^{N-n+1}\mathbf{U}^n] \quad (7.53)$$

ou sous la forme :

$$\bar{\mathbf{H}}^1\mathbf{U}^N = \Delta\mathbf{G}^1\mathbf{T}^N + \sum_{n=1}^{N-1} [\Delta\mathbf{G}^{N-n+1}\mathbf{T}^n - \Delta\mathbf{H}^{N-n+1}\mathbf{U}^n] \quad (7.54)$$

dans laquelle  $\bar{\mathbf{H}} = \Delta\mathbf{H}^1 + \mathbf{c}$ .

L'équation (7.54) fait appel à la structure d'une convolution discrète qui fait a priori apparaître les valeurs à tous les instants antérieurs ; cela met en évidence le fait que les inconnues à chaque instant dépendent non seulement des conditions aux limites mais aussi de l'histoire du chargement.

Les cas où le chargement est un signal sismique incident sont couramment rencontrés dans les calculs de la réponse sismique des ouvrages (ou des structures), tenant compte de l'interaction dynamique sol-structure ou dans les problèmes de diffraction des ondes sismiques par une irrégularité topographique ou par une vallée sédimentaire. Pour appliquer l'incidence des ondes sismique comme un chargement, il faut ajouter  $\mathbf{u}_{eq}$ , champ des déplacements dus aux ondes incidentes, aux équations intégrales (7.1) et (7.2). Par conséquent, l'équation intégrale discrétisée (7.54) est modifiée comme suit :

$$\bar{\mathbf{H}}^1\mathbf{U}^N = \Delta\mathbf{G}^1\mathbf{T}^N + \sum_{n=1}^{N-1} [\Delta\mathbf{G}^{N-n+1}\mathbf{T}^n - \Delta\mathbf{H}^{N-n+1}\mathbf{U}^n] + \mathbf{U}_{eq}^N \quad (7.55)$$

Comme les variables à l'instant considéré  $t$  sont pour moitié inconnues et pour moitié données par les conditions aux limites du problème, il faut procéder à une permutation de colonnes de manière à isoler les valeurs nodales restées inconnues après prise en compte des conditions aux limites, de sorte que l'équation (7.54) prend la forme :

$$\mathbf{A}\mathbf{X}^N = \mathbf{B}\mathbf{Y}^N + \sum_{n=1}^{N-1} [\Delta\mathbf{G}^{N-n+1}\mathbf{T}^n - \Delta\mathbf{H}^{N-n+1}\mathbf{U}^n] \quad (7.56)$$

où

$\mathbf{X}^N$  : vecteur des valeurs nodales inconnues

$\mathbf{Y}^N$  : vecteur des valeurs nodales données

$\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  : matrices associées à  $\mathbf{X}^N$  et  $\mathbf{Y}^N$ . Ces matrices sont établies à la première étape et ne changent pas durant le processus itératif. La matrice  $\mathbf{A}$ , matrice résolvante, est normalement pleine et non-symétrique, ce qui constitue une différence majeure par rapport aux méthodes des éléments finis.

L'équation (7.54) ou (7.56) constitue un processus de résolution d'avancement pas à pas dans le temps : les inconnues à l'instant  $t$  sont calculées en supposant résolus tous les instants

antérieurs, et les conditions initiales à  $t = 0$  permettent de démarrer ce processus [262].

### Les étapes de résolution du problème :

1. Assemblage des matrices  $\Delta \mathbf{G}^1, \bar{\mathbf{H}}^1, \dots, \Delta \mathbf{G}^N, \Delta \mathbf{H}^N$
2. Prise en compte des conditions aux limites, construction des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$
3. Résolution de (7.54) ou (7.56) à chaque pas de temps.

## 7.2.3 Évaluation numérique des intégrales élémentaires

L'évaluation des intégrales (7.48) ou (7.49) sur les éléments isoparamétriques est probablement l'aspect le plus crucial de la mise en oeuvre numérique de la BEM et c'est beaucoup plus complexe que dans la FEM. Le problème se trouve dans le fait que les fonctions qui doivent être intégrées ont des singularités à certains points dans les éléments. En particulier, la solution  $\omega_{ij}^H$  contenant les solution  $\tilde{H}_{ij}$  est fortement singulière et les intégrales correspondantes n'existent que dans le sens de la valeur principale de Cauchy.

Dans cette section, on distingue les deux types d'intégrales singulières et non-singulières. On discute premièrement de l'évaluation numérique des intégrales non-singulières. Puis, le traitement numérique des intégrales singulières ou impropres sera abordé.

### 7.2.3.1 Intégrales élémentaires régulières

Lorsque le point source  $\xi$  ne se trouve pas dans le même élément que celui du point d'observation  $\mathbf{x}$ , on est dans le cas des intégrales non-singulières ou régulières. Dans ce cas, les intégrales élémentaires seront évaluées par les méthodes de quadrature de Gauss.

La règle d'intégration de Gauss-Legendre à  $g$  points implique que :

$$\int_{-1}^1 \phi(\beta) d\beta \approx \sum_{s=1}^g W_s^g \phi(\beta_s^g) \quad (7.57)$$

où  $W_s^g$  et  $\beta_s^g$  sont respectivement des poids et des abscisses. Il s'agit d'intégrer la fonction  $\phi(\beta) = a_0 + a_1\beta + \dots + a_{2g-1}\beta^{2g-1}$ . Ceci mène à des résultats précis si l'intégrande peut raisonnablement être approximé par un polynôme en une variable indépendante  $\beta$ . Comme il y a des fonctions avec des singularités logarithmiques à être intégrées et la fonction  $\ln \beta$  ne peut pas être précisément approximée par un polynôme en  $\beta$  à proximité de  $\beta = 0$ , nous exigeons également la formule de Gauss-Laguerre à  $g$  points :

$$\int_0^1 \phi(\gamma) \ln \frac{1}{\gamma} d\gamma \approx \sum_{s=1}^g C_s^g \phi(\gamma_s^g) \quad (7.58)$$

Il s'agit d'intégrer la fonction  $\phi(\gamma) \ln \frac{1}{\gamma}$  dans laquelle  $\phi(\gamma) = a_0 + a_1\gamma + \dots + a_{2g-1}\gamma^{2g-1}$ . Le schéma d'intégration doit garantir les conditions suivantes :

1. les intégrations doivent être entre les limites -1 et 1 ou 0 et 1 en fonction de la formule utilisée.
2. l'intégrande doit varier approximativement comme un polynôme en  $\beta$ , ou comme un polynôme en  $\gamma$  multiplié par  $\ln \frac{1}{\gamma}$ .
3. la valeur de  $g$  doit être de sorte à assurer une précision suffisante. Les valeurs inutilement élevées de  $g$  doivent être évitées, car elles augmentent le coût du calcul.

Dans cette étude, les fonctions à intégrer sont des produits d'un noyau, d'une fonction de forme et d'un Jacobien. Généralement, le Jacobien ne varie pas beaucoup sur un élément. De plus, les fonctions de forme varient lentement à l'égard des coordonnées intrinsèques sur un élément, tandis que les noyaux varient beaucoup plus rapidement sur les éléments qui sont à proximité du point de collocation  $\xi$  par rapport à leur longueur que sur les éléments qui sont loin du point de collocation. Par conséquent, un traitement spécial est nécessaire lorsque l'intégrande varie brutalement comme le point de collocation approche vers l'élément. Plusieurs techniques ont été développées pour s'occuper de ce type d'intégration, y compris la méthode de subdivision des éléments [210, 30, 29], l'intégration gaussienne adaptative [67], la technique de transformation de variable [316, 127] et l'intégration semi-analytique basée sur le développement en série [96, 250]. Dans cette étude, on utilise la méthode de subdivision des éléments. Cette technique a été premièrement développée par Lachat [209] et est discutée en détail par Banerjee et Batterfield [23].

Dans cette méthode, le but est de développer un critère qui assure à peu près la même précision d'intégration partout, sans tenir compte de l'approximée du point de collocation  $\xi$ .

Lachat et Watson [210] ont relié le nombre des subdivisions à une borne supérieure d'erreur dans la formule de Gauss-Legendre selon la démarche présentée par Stroud et Secrest [312].

Stroud et Secrest [312] ont fourni une formule pour les bornes supérieures de l'erreur en termes d'une borne supérieure pour la valeur absolue de  $2g$ -ième dérivée de l'intégrande. Supposons que :

$$\left| \frac{d^{2g}\phi}{d\beta^{2g}} \right| \preceq H_g \quad (7.59)$$

Alors, la borne supérieure pour l'erreur est :

$$\left| \int_{-1}^1 \phi(\beta) d\beta - \sum_{k=1}^g W_k^g \phi(\beta_k^g) \right| \preceq \frac{4H_g}{2^{2g}(2g)!} \quad (7.60)$$

Dans un code de calcul, il est seulement possible de préciser, par exemple au moyen de la commande « DATA », les coefficients de quadrature (ou poids) et les abscisses de Gauss pour une gamme limitée de valeurs de  $g$ . Si la précision d'intégration requise sur un élément ne peut pas être obtenue en prenant la plus grande valeur disponible, il est nécessaire de subdiviser cet élément en deux ou plusieurs intervalles sur lesquels les formules disponibles seront appliquées. Par conséquent, le schéma d'intégration doit être fourni pour la subdivision d'un élément en plus

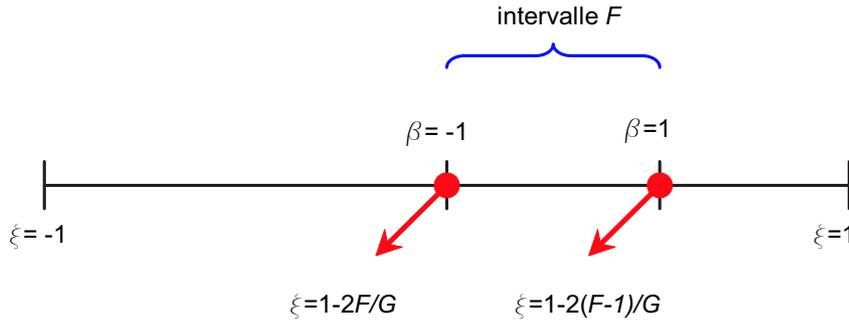


Figure 7.7 — Schématisation d'un intervalle sur un élément isoparamétrique

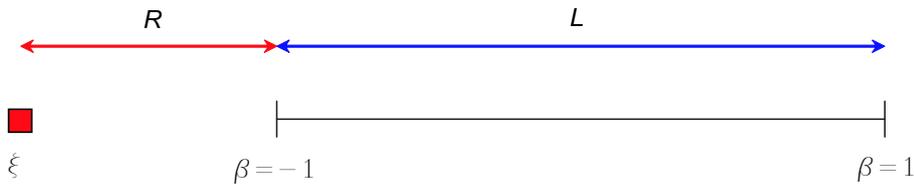


Figure 7.8 — Intervalle représentatif d'intégration

d'un intervalle. Dans le schéma simple décrit ici, chacun des intervalles en lesquels un élément est subdivisé, correspond à une gamme égale de coordonnée intrinsèque  $\eta = [-1, 1]$ . Diviser l'intervalle d'intégration en  $G$  intervalles mène à

$$\int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi \approx \frac{1}{G} \sum_{F=1}^G \sum_{k=1}^{g(F)} W_k^{g(F)} \phi(\xi_k^{g(F)}) \tag{7.61}$$

où le facteur  $1/G$  est le Jacobien  $d\xi/d\beta$  et (Fig. 7.7)

$$\xi_k^{g(F)} = \frac{1}{G} \left( G - 2F + 1 + \beta_k^{g(F)} \right) \tag{7.62}$$

La stratégie en principe est d'utiliser l'inégalité (7.60) pour déterminer les valeurs appropriées de  $G$  et  $g(1), g(2), \dots, g(G)$  dans l'équation (7.61). Ceci nécessite l'évaluation des bornes supérieures  $H_g$  comme définies dans l'inégalité (7.59) qui n'est pas pratique pour les intégrales en question. Par conséquent, on considère plutôt un problème simplifié représentatif. Comme le noyau  $\mathbf{H}$  varie plus rapidement que  $\mathbf{G}$ , au moins sur les éléments proches du point de collocation  $\xi$ , le schéma d'intégration est déterminé par la nécessité d'évaluer précisément les coefficients  $\Delta H_{ij}^e$ . On néglige la variation du Jacobien et des fonctions de forme, et on prend la variation de la fonction  $1/r$  comme la représentante du noyau  $\mathbf{H}$ . Le problème est alors davantage simplifié en ne considérant pas l'intervalle réel mais un intervalle de même longueur  $L$  qui se trouve sur une ligne droite passée par le point de collocation  $\xi$  comme montré dans la figure (7.8). La distance minimale  $R$  de  $\xi$  jusqu'à l'intervalle est considérée comme étant la même dans le problème simplifié. En dérivant la fonction  $1/r$ ,  $2g$  fois par rapport à  $\beta$  et puis en

substituant  $r = R$  on obtient le résultat approximatif suivant :

$$H_g = \left(\frac{L}{2}\right)^{2g} \frac{(2g)!}{R^{2g+1}} \quad (7.63)$$

En introduisant cette relation dans l'inégalité (7.60), on obtient la borne supérieure approximative :

$$\left| \int_{-1}^1 \frac{1}{r}(\beta)d\beta - \sum_{k=1}^g W_k^g \frac{1}{r}(\beta_k^g) \right| \preceq \left(\frac{L}{4}\right)^{2g} \frac{4}{R^{2g+1}} \quad (7.64)$$

Nous prenons comme une mesure de précision d'intégration, le rapport entre la borne supérieure (7.64) et une borne supérieure de l'intégrale de  $1/r$  sur l'intervalle. On écrit :

$$\left| \int_{-1}^1 \frac{1}{r}(\beta)d\beta \right| \preceq \frac{2}{R} \quad (7.65)$$

Par conséquent

$$\left(\frac{L}{4}\right)^{2g} \frac{4}{R^{2g+1}} \preceq \frac{2}{R} \epsilon \quad (7.66)$$

où  $\epsilon$  est une constante qui doit être choisie d'après l'expérience.

Ce résultat peut être réarrangé pour la commodité du calcul comme suit :

$$\frac{L}{R} \preceq 4 \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2g}} \quad (7.67)$$

Soient  $L_b$  la longueur de l'élément  $\Gamma_e$ ,  $R_b$  la distance minimale du point de collocation  $\xi$  jusqu'à  $\Gamma_e$  et  $g_{max}$  la plus grande valeur disponible de  $g$ . Comme dans le but de choisir le schéma d'intégration le Jacobien est considéré étant constant sur l'élément, on peut écrire pour un intervalle :

$$L = \frac{L_b}{G} \quad (7.68)$$

La valeur de  $G$  doit être choisie de telle sorte que la précision satisfaisante de l'intégration peut être atteinte pour l'intervalle en utilisant la formule de Gauss avec  $g_{max}$  points au maximum.

En substituant l'équation (7.68) et les valeurs  $R = R_b$  et  $g = g_{max}$  dans l'équation (7.67), on obtient [30] :

$$G \succeq \frac{L_b}{4R_b} \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2g_{max}}} \quad (7.69)$$

Par conséquent, la valeur de  $G$  est considérée comme étant le plus petit entier satisfaisant l'équation (7.69). Une fois que  $G$  est calculé, les valeurs de  $g(1), g(2), \dots, g(G)$  sont déterminées selon l'équation (7.67).

Dès lors,  $\Delta G_{ijm}^e$  et  $\Delta H_{ijm}^e$  sont calculés selon les équations suivantes :

$$(\Delta G_{ijm}^e)^{N-n+1} \approx \frac{1}{G} \sum_{F=1}^G \sum_{k=1}^{g(F)} (\omega_{ij}^G)^{N-n+1} \left(\mathbf{x}(\eta_k^{g(F)}), \xi\right) N_m \left(\eta_k^{g(F)}\right) J \left(\eta_k^{g(F)}\right) W_k^{g(F)} \quad (7.70)$$

$$(\Delta H_{ijm}^e)^{N-n+1} \approx \frac{1}{G} \sum_{F=1}^G \sum_{k=1}^{g(F)} (\omega_{ij}^H)^{N-n+1} \left(\mathbf{x}(\eta_k^{g(F)}), \xi\right) N_m \left(\eta_k^{g(F)}\right) J \left(\eta_k^{g(F)}\right) W_k^{g(F)} \quad (7.71)$$

Dans ce travail, l'estimation approximative décrite ci-dessus est intégrée dans le code de calcul HYBRID en prenant le nombre d'intervalles  $G$  entre 1 et 4 et l'ordre de l'intégration  $g(F)$  entre 3 et 10.

### 7.2.3.2 Intégrales élémentaires singulières

Lorsque le point source  $\xi$  se trouve dans le même élément que celui du point d'observation  $\mathbf{x}$ , on est dans le cas des intégrales singulières ou impropres. Dans ce cas, la précision de l'évaluation numérique des intégrales élémentaires est sérieusement dégradée même si un grand nombre de points de Gauss est utilisé. Dans ce cas, il faut diviser l'élément considéré en sous-éléments de la manière expliquée ci-dessous.

Quand  $\xi$  est l'un des noeuds de l'élément, les fonctions  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  tendent vers l'infini dans la zone d'intégration. Nous considérons les deux cas montrés dans la figure (7.9) :

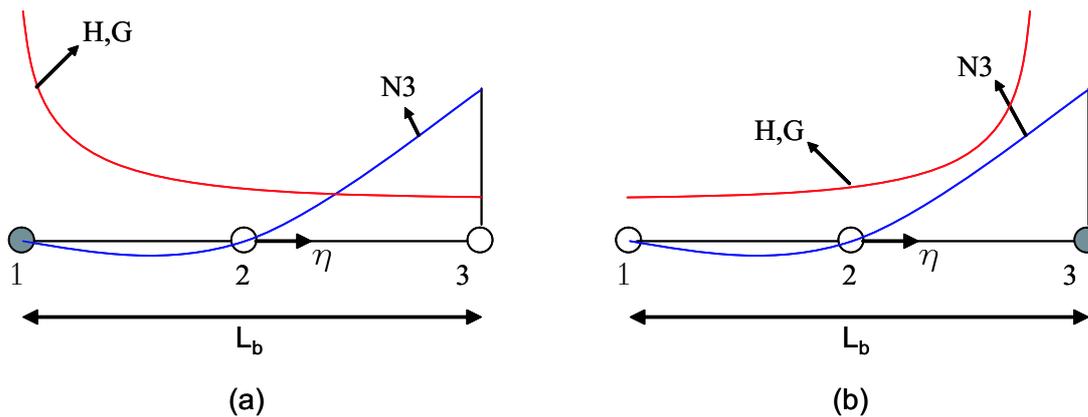


Figure 7.9 — Intégration lorsque  $\xi$  est l'un des noeuds de l'élément

- a)  $\xi$  est situé au point 1 et  $m$  dans les équations (7.48, 7.49) est égal à 2 ou 3 : cela signifie que même si les noyaux  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  tendent vers l'infini (à l'ordre  $\ln r$  et  $1/r$  respectivement) en s'approchant du point 1, les fonctions de forme ( $N_2$  et  $N_3$ ) tendent vers zéro à  $\eta = -1$ , alors l'intégrale des produits  $\omega_{ij}^H(\mathbf{x}, \xi) N_m(\eta)$  et  $\omega_{ij}^G(\mathbf{x}, \xi) N_m(\eta)$  tend vers une valeur finie. Par conséquent, pour le cas où  $\xi$  n'est pas au noeud  $m$  de l'élément, on rend ces intégrales régulières. Selon la position du point source on divise l'élément concerné en un ou deux sous-éléments comme montré dans la figure (7.10). Pour chaque sous-élément on définit une coordonnée  $\bar{\eta}$  qui varie entre  $-1$  et  $1$  et dénote par  $\bar{\eta}_0$  la valeur de  $\bar{\eta}$  à  $\xi$ . Pour la variation quadratique,  $\bar{\eta}$  et  $\bar{\eta}_0$  sont comme présentés dans le tableau (7.2). Dès lors,  $\Delta G_{ijm}^e$  et  $\Delta H_{ijm}^e$  peuvent être évalués sur un sous-élément en utilisant la formule de Gauss-Laguerre comme

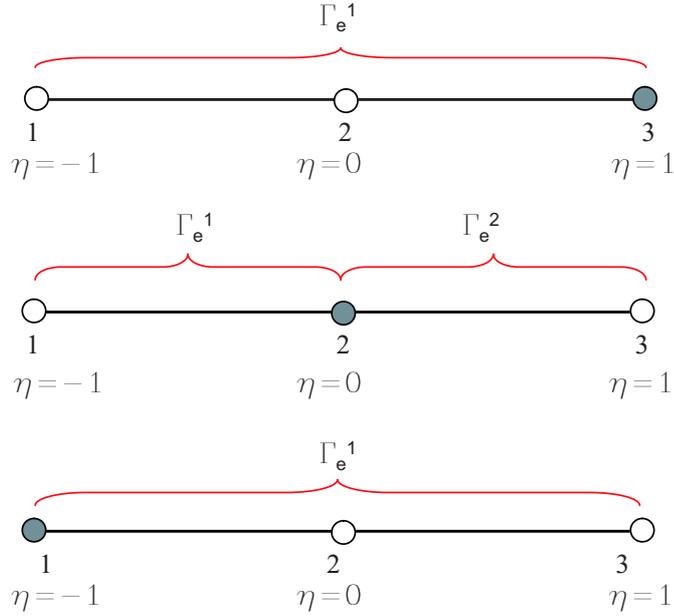


Figure 7.10 — Sous-éléments d'un élément quadratique

expliqué dans la section (7.2.3.1) sans aucun problème :

$$(\Delta G_{ijm}^e)^{N-n+1} \approx \frac{J_e}{G} \sum_{F=1}^G \sum_{k=1}^{g(F)} (\omega_{ij}^G)^{N-n+1} \left( \mathbf{x}(\bar{\eta}_k^{g(F)}), \xi \right) N_m \left( \bar{\eta}_k^{g(F)} \right) J \left( \bar{\eta}_k^{g(F)} \right) W_k^{g(F)} \quad (7.72)$$

$$(\Delta H_{ijm}^e)^{N-n+1} \approx \frac{J_e}{G} \sum_{F=1}^G \sum_{k=1}^{g(F)} (\omega_{ij}^H)^{N-n+1} \left( \mathbf{x}(\bar{\eta}_k^{g(F)}), \xi \right) N_m \left( \bar{\eta}_k^{g(F)} \right) J \left( \bar{\eta}_k^{g(F)} \right) W_k^{g(F)} \quad (7.73)$$

dans laquelle  $J_e = \frac{d\eta}{d\bar{\eta}}$ .

Une valeur appropriée de  $G$  peut être déterminée en considérant l'intégration sur un élément isoparamétrique de longueur égale à celle du sous-élément et la distance minimale du noeud  $\xi$  égale à sa longueur, alors l'équation (7.69) s'écrit :

$$G \succeq \frac{1}{4} \left( \frac{2}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2g_{max}}} \quad (7.74)$$

La valeur de  $G$  est considérée comme étant le plus petit entier satisfaisant cette équation. Nous proposons  $g(1), g(2), \dots, g(G) = g'$  où  $g'$  est le plus petit entier pour lequel :

$$G \succeq \frac{1}{4} \left( \frac{2}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2g'}} \quad (7.75)$$

|   |   |  |  |
|---|---|--|--|
| $\xi$ à $\eta = 1$<br>$\Gamma_e^1$        | $\xi$ à $\eta = 0$<br>$\Gamma_e^1$ $\Gamma_e^2$ |  | $\xi$ à $\eta = -1$<br>$\Gamma_e^1$        |
| $\bar{\eta} = \eta$<br>$\bar{\eta}_0 = 1$ | $\bar{\eta} = 2\eta + 1$<br>$\bar{\eta}_0 = -1$ | $\bar{\eta} = 2\eta - 1$<br>$\bar{\eta}_0 = 1$ | $\bar{\eta} = \eta$<br>$\bar{\eta}_0 = -1$ |

Tableau 7.2 — Valeurs de  $\eta$  et de  $\eta_0$  pour un élément quadratique

b)  $\xi$  est situé au point  $m' = (1, 2 \text{ ou } 3)$  et  $m$  dans les équations (7.48, 7.49) est égale à  $m'$  : Dans ce cas, les noyaux  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  tendent vers l'infini tandis que la fonction de forme au point source  $\xi$  est égale à l'unité. Par conséquent, les produits  $\omega_{ij}^G(\mathbf{x}, \xi)N_m(\eta)$  et  $\omega_{ij}^H(\mathbf{x}, \xi)N_m(\eta)$  tendent aussi vers l'infini. Comme le noyau  $\mathbf{G}$  a une singularité d'ordre  $\ln 1/r$ , le premier produit ne peut être intégré qu'en utilisant la formule de Gauss-Laguerre (7.58) comme expliqué dans la section (7.2.3.1). L'intégrale du deuxième produit  $\omega_{ij}^H(\mathbf{x}, \xi)N_m(\eta)$  qui contient les fonctions fortement singulières d'ordre  $1/r$  n'existe que dans le sens de la valeur principale de Cauchy et donc ne peut pas être correctement calculée par la quadrature de Gauss.

Deux approches générales existent pour la détermination de l'intégrale en valeur principale de Cauchy. La première est une approche mathématique présentée par Guiggiani et Casalini [173] et l'autre est basée sur des concepts simples d'ingénierie. Comme la deuxième approche est plus simple à mettre en oeuvre, elle est celle intégrée dans le code HYBRID. La section suivante est consacrée à présenter cette approche nommée la « *translation du corps rigide* ».

### Translation du corps rigide

Dans cette section, on se préoccupe des éléments  $T_{\alpha\beta}^S$  et  $Q^f$  pour les sols saturés et  $T_{\alpha\beta}^S$ ,  $Q^{wW}$  et  $Q^{aA}$  pour les sols non-saturés dans  $\Delta H_{ijm}^e$  qui sont fortement singulières et *non-intégrables*. Ceci aboutit au fait qu'en considérant la forme matricielle globale (7.54), le calcul des blocs diagonaux  $\Delta H_{kk}$  exige un traitement spécial. Comme indiqué ci-dessus, les intégrales élémentaires contenant ces composantes n'existent qu'au sens de la valeur principale de Cauchy et ne peuvent pas être correctement calculées par la quadrature de Gauss.

Sachant que la singularité des solutions fondamentales dynamique, quasi-statique et statique est identique [101], les intégrales singulières du problème dynamique ou quasi-statique sont régularisées en retranchant le noyau statique au noyau dynamique ou quasi-statique comme suit :

$$\bar{H}_{\alpha\beta}^1 = c_{\alpha\beta} + \int_{\Gamma_1} T_{\alpha\beta}^S N_1 d\Gamma_1 \quad (7.76)$$

où  $\alpha, \beta = 1, 2$ ,  $N_1$  est la fonction de forme au nœud singulier et  $\Gamma_1$  est l'élément singulier.

De la même façon, pour le problème statique on a :

$${}^{st}H_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} + \int_{\Gamma_1} {}^{st}T_{\alpha\beta}^S N_1 d\Gamma_1 \quad (7.77)$$

Par conséquent, on obtient :

$$\bar{H}_{\alpha\beta}^1 = {}^{st}H_{\alpha\beta} + \int_{\Gamma_1} \left( T_{\alpha\beta}^S - {}^{st}T_{\alpha\beta}^S \right) N_1 d\Gamma_1 \quad (7.78)$$

De la même façon, on aura pour les sols saturés :

$$\bar{H}_{33}^1 = {}^{st}H_{33} + \int_{\Gamma_1} \left( Q^f - {}^{st}Q^f \right) N_1 d\Gamma_1 \quad (7.79)$$

ou pour les sols non-saturés

$$\bar{H}_{33}^1 = {}^{st}H_{33} + \int_{\Gamma_1} \left( Q^{wW} - {}^{st}Q^{wW} \right) N_1 d\Gamma_1 \quad (7.80)$$

$$\bar{H}_{44}^1 = {}^{st}H_{44} + \int_{\Gamma_1} \left( Q^{aA} - {}^{st}Q^{aA} \right) N_1 d\Gamma_1 \quad (7.81)$$

Comme les différences  $(T_{\alpha\beta}^S - {}^{st}T_{\alpha\beta}^S)$ ,  $(Q^f - {}^{st}Q^f)$ ,  $(Q^{wW} - {}^{st}Q^{wW})$  et  $(Q^{aA} - {}^{st}Q^{aA})$  ne contiennent aucune singularité, l'évaluation du deuxième terme de (7.78, 7.79, 7.80, 7.81) ne pose aucune difficulté spéciale. Par contre, les premiers termes  ${}^{st}H_{\alpha\beta}$ ,  ${}^{st}H_{33}$  et  ${}^{st}H_{44}$  sont toujours singuliers. Ils seront indirectement évalués par l'emploi du concept de « translation de corps rigide ». Ce fameux concept a été utilisé avec succès pour des problèmes élastostatique [93] et élastodynamique [2]. Dargush et Banerjee [101], Chen et Dargush [73] ont récemment proposé une interprétation de ce concept, adaptée aux problèmes poroélastostatiques.

Considérons d'abord un champ de déplacement unitaire uniformément réparti dans tout le domaine  $\Omega$ , tel qu'il n'y ait aucun mouvement relatif fluide/squelette ( $u_\alpha = 1$  et  $q = 0$ ). Dans ce cas, il est facile de montrer qu'il n'y a pas de contrainte et de pression interstitielle générées dans le domaine  $\Omega$  ( $t_\alpha = 0$  et  $p = 0$ ). Ainsi, avec l'application de l'équation intégrale de la poroélastostatique à cet état, on constate que quatre éléments  ${}^{st}H_{11}$ ,  ${}^{st}H_{12}$ ,  ${}^{st}H_{21}$ ,  ${}^{st}H_{22}$  situés sur le bloc  $(3 \times 3)$  diagonal de  ${}^{st}\bar{\mathbf{H}}$  sont égaux à la somme des coefficients correspondants de tous les blocs non-diagonaux de même ligne, avec un changement de signe [262].

$${}^{st}H_{\alpha\beta} = - \left[ \sum_{m=2}^{M=3} \int_{\Gamma_1} {}^{st}H_{\alpha\beta} N_m d\Gamma_1 + \sum_{e=2}^E \sum_{m=1}^{M=3} \int_{\Gamma_e} {}^{st}H_{\alpha\beta} N_m d\Gamma_e \right] \quad (7.82)$$

Examinons ensuite la composante  ${}^{st}H_{33}$  : une pression unitaire d'eau  $p = 1$  uniformément répartie sur toute la frontière  $\Gamma$  du même domaine  $\Omega$  produit un débit de fluide nul  $q = 0$  sur toute la frontière, mais les champs de déplacements et de vecteurs-contrainte ne sont pas nuls ( $u_\alpha \neq 0$  et  $t_\alpha \neq 0$ ). Heureusement,  ${}^{st}U_i^f = 0$  et  ${}^{st}T_i^f = 0$  (5.2.3), ce qui implique que le coefficient  ${}^{st}H_{33}$  situé sur le bloc  $(3 \times 3)$  diagonal de  ${}^{st}\bar{\mathbf{H}}$  est égal à la somme des coefficients correspondants de tous les blocs non-diagonaux de même ligne, avec un changement de signe [262].

$${}^{st}H_{33} = - \left[ \sum_{m=2}^{M=3} \int_{\Gamma_1} {}^{st}H_{33} N_m d\Gamma_1 + \sum_{e=2}^E \sum_{m=1}^{M=3} \int_{\Gamma_e} {}^{st}H_{33} N_m d\Gamma_e \right] \quad (7.83)$$

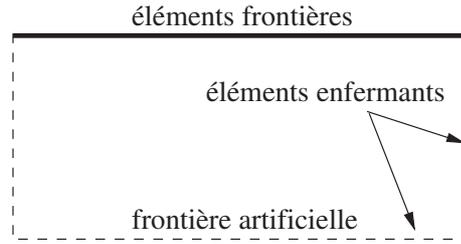


Figure 7.11 — Modélisation de l'espace semi-infini

La même procédure peut être appliquée au cas des sols non-saturés. Les composantes  ${}^{st}H_{\alpha\beta}$  et  ${}^{st}H_{33}$  sont comme celles présentées ci-dessus. La composante  ${}^{st}H_{44}$  s'obtient avec la même démarche que celle de  ${}^{st}H_{33}$  comme suit :

$${}^{st}H_{44} = - \left[ \sum_{m=2}^{M=3} \int_{\Gamma_1} {}^{st}H_{44} N_m d\Gamma_1 + \sum_{e=2}^E \sum_{m=1}^{M=3} \int_{\Gamma_e} {}^{st}H_{44} N_m d\Gamma_e \right] \quad (7.84)$$

Les expressions des composantes de la solution fondamentale de la poroélastostatique saturée et non-saturée sont données respectivement dans les chapitres 5 et 6.

Cependant, nous ne pouvons pas appliquer la technique de « translation du corps rigide » au problème impliquant un espace semi-infini ou infini, car le domaine  $\Omega$  considéré n'est pas fermé. Ahmad et Banerjee [2] ont développé une nouvelle technique utilisant des éléments dits enfermants (*enclosing element*) pour surmonter cette difficulté (figure 7.11). L'hypothèse de base dans cette technique est que les déplacements et les contraintes aux éléments enfermants situés à une distance suffisamment grande ont un effet négligeable sur les déplacements en tous les points réels du modèle. En généralisant le concept de « translation du corps rigide » au cas de la poroélasticité, les composantes singulières  ${}^{st}H_{\alpha\beta}$ ,  ${}^{st}H_{33}$  et  ${}^{st}H_{44}$  sont obtenues par la somme des termes non-singuliers calculée sur tous les éléments réels du modèle aussi bien que sur les éléments enfermants :

$${}^{st}H_{\alpha\beta} = - \left[ \sum_{m=2}^{M=3} \int_{\Gamma_1} {}^{st}H_{\alpha\beta} N_m d\Gamma_1 + \sum_{e=2}^E \sum_{m=1}^{M=3} \int_{\Gamma_e} {}^{st}H_{\alpha\beta} N_m d\Gamma_e + \sum_{l=2}^L \sum_{m=1}^3 \int_{\Gamma_l} {}^{st}H_{\alpha\beta} N_m d\Gamma_l \right] \quad (7.85)$$

$${}^{st}H_{33} = - \left[ \sum_{m=2}^{M=3} \int_{\Gamma_1} {}^{st}H_{33} N_m d\Gamma_1 + \sum_{e=2}^E \sum_{m=1}^{M=3} \int_{\Gamma_e} {}^{st}H_{33} N_m d\Gamma_e + \sum_{l=2}^L \sum_{m=1}^3 \int_{\Gamma_l} {}^{st}H_{33} N_m d\Gamma_l \right] \quad (7.86)$$

$${}^{st}H_{44} = - \left[ \sum_{m=2}^{M=3} \int_{\Gamma_1} {}^{st}H_{44} N_m d\Gamma_1 + \sum_{e=2}^E \sum_{m=1}^{M=3} \int_{\Gamma_e} {}^{st}H_{44} N_m d\Gamma_e + \sum_{l=2}^L \sum_{m=1}^3 \int_{\Gamma_l} {}^{st}H_{44} N_m d\Gamma_l \right] \quad (7.87)$$

où  $L$  est le nombre des éléments enfernants,  $\Gamma_l$  sont des éléments enfernants.

Il est à noter que tous les problèmes de singularité appartiennent à l'instant initial  $t_0$ , et non pas aux instants ultérieurs ( $t_n, n > 1$ ). Cela vient du fait que l'approche du point d'observation  $\mathbf{x}$  vers le point source  $\xi$  correspond toujours à l'instant initial  $t_0$ . Par conséquent, aux instants ultérieurs ( $t_n, n > 1$ ) les intégrales élémentaires sont toutes régulières et nous les abordons comme expliqué dans la section (7.2.3.1).



## **Troisième partie**

# **Algorithmique et Programmation**



DANS ce travail, les formulations d'éléments de frontière présentées dans la partie précédente pour les problèmes de propagation d'ondes ainsi que pour les problèmes de consolidation dans les milieux poreux saturés et non-saturés ont été implémentées dans un code de calcul nommé « HYBRID ». Nous présentons dans ce qui suit l'introduction générale, l'architecture du code et les sous-routines spécifiques ajoutées pendant ce travail de recherche.

Le code de calcul HYBRID, initialement écrit par Gatmiri a été complété et validé par Kamaalian (1997-2001) [193] pour résoudre les problèmes bidimensionnels (en déformation plane) statiques et dynamiques transitoires dans les milieux secs ou poreux saturés. Ceci est développé en utilisant la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments de frontière (BEM) de telle sorte que chaque partie, FEM ou BEM, peut être appliquée séparément ou elles peuvent être couplées l'une avec l'autre pour analyser des problèmes plus complexes.

En ce qui concerne la partie FEM, elle peut modéliser des *milieux secs* ayant un comportement purement mécanique et également des *milieux poreux saturés* qui obéissent à la théorie des milieux poreux saturés comportant un couplage hydro-mécanique. Les différents types de comportement constitutif des géomatériaux sont intégrés dans la partie FEM, y compris les modèles élastique linéaire, élastique non-linéaire de type hyperbolique (modèles de Duncan et Chang [119] et de Hardin et Drnevich [176]). Le modèle du comportement élasto-plastique (modèle de Prévost [281]) est en cours d'intégration dans le cadre d'une autre recherche.

La partie BEM, quant à elle, est capable de modéliser des *milieux secs* dans des domaines bornés ( $D_1$ ), infinis ( $D_2$ ) et semi-infinis ( $D_3$ ) en considérant le comportement constitutif élastique linéaire.

Les deux parties FEM et BEM sont discrétisées respectivement par les éléments quadrilatéraux à 8 noeuds et par les éléments linéiques quadratiques à 3 noeuds.

En tenant compte des avantages et des inconvénients de chaque méthode, la partie FEM sert à modéliser l'ouvrage et le sol alentour, qui peuvent avoir un comportement complexe, alors

que la partie BEM est utilisée pour modéliser le sol dans le champ lointain, supposé élastique linéaire [262].

Ce code est particulièrement efficace pour traiter des problèmes dynamiques en géotechnique impliquant les domaines infinis ou semi-infinis comme la propagation (et/ou la réflexion, la réfraction, la diffraction) d'ondes, l'interaction dynamique sol-structure, le comportement dynamique des ouvrages et des fondations et l'effet local de site.

Dans le but de développer la partie BEM, un peu plus tard, une formulation BEM pour l'analyse dynamique des *milieux poreux saturés* ayant le comportement constitutif élastique linéaire, dans le domaine temporel en négligeant l'accélération du fluide interstitiel et en utilisant l'hypothèse simplificatrice de l'incompressibilité des constituants du milieu (les grains solides et le fluide) a été développée par Nguyen (2002-2005) [262, 162, 264]. Également, il a amélioré la stabilité numérique du schéma temporel des solutions BEM élastodynamiques en utilisant deux approches : utiliser l'interpolation temporelle mixte avec le pas de temps approprié ou utiliser la méthode  $\Theta$  dans le code de calcul.

Aussi, afin de surmonter les inconvénients majeurs du schéma BEM et FEM/BEM appliqué en élastodynamique transitoire, Dehghan et Gatmiri [109] ont appliqué dans le code de calcul une stratégie d'amélioration de performance de la BEM. Ces inconvénients concernent le temps de calcul et l'espace de stockage des informations temporaires sur l'ordinateur qui croissent très vite avec le nombre de pas de temps  $N$ . Cette méthode d'amélioration, inspirée de l'idée de Davey et Hinduja [102], consiste à tronquer les intégrales temporelles, c'est-à-dire de ne plus démarrer l'intégration à partir de l'instant initial  $t_0$  mais à partir d'un instant ultérieur, en conservant la précision du résultat dans une limite acceptable. L'efficacité de cette méthode est surprenante, particulièrement si le nombre de pas de temps  $N$  est de l'ordre de plusieurs centaines ou milliers.

Le code de calcul HYBRID est écrit en Fortran (norme 90). Il s'agit d'un programme exécutable, qui est alimenté par un fichier de données en texte et fournit en sortie un fichier de résultats en texte.

Ayant intégrées les formulations de BEM pour les problèmes de propagation d'ondes ainsi que pour les problèmes de consolidation dans les milieux poreux saturés et non-saturés, nous pouvons prétendre d'avoir fourni à l'heure actuelle le premier code de calcul aux éléments de frontière (BEM) qui modélise les différents problèmes dans les sols secs, saturés et non-saturés.

Dans la section suivante, on présente la structure générale du code de calcul HYBRID.

## 8.1 Architecture du code « HYBRID »

Le logiciel est piloté par un sous-programme central (subroutine CONTROL), qui à son tour appelle toutes les sous-routines actives (Fig. 8.1). Le corps de ce code traite les points fondamentaux suivants :

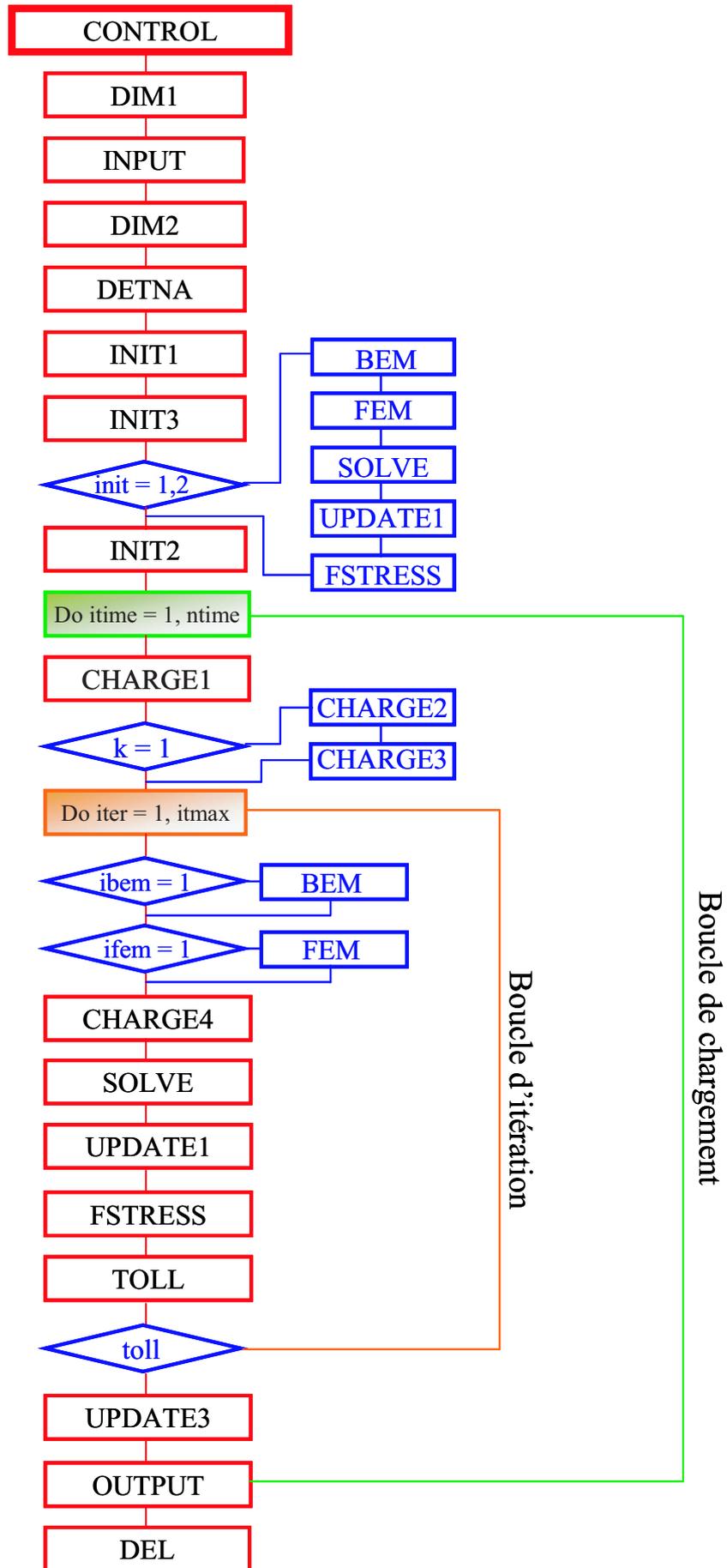


Figure 8.1 — Organigramme du code HYBRID

### 8.1.1 Acquisition des données de base et dimensionnement des variables de stockage dynamique

Lors de cette étape toutes les données concernant le mode de calcul, la méthode de résolution, la définition géométrique des éléments, les caractéristiques mécaniques et hydrauliques des matériaux, le chargement, les conditions aux limites, les conditions initiales et d'autres paramètres sont lues à partir d'un fichier de données en texte et stockés. Le stockage des données et des variables du problème est effectué dans un unique vecteur  $\{a\}$ , dont la longueur est ajustée en fonction des caractéristiques du problème, comme le nombre d'éléments, le type d'éléments utilisés (sec, saturé ou non-saturé), le type de domaine modélisé (borné, semi-infini ou infini), le type de comportement constitutif choisi ou les conditions aux limites. Le vecteur  $\{a\}$  se compose des sous-vecteurs  $\{a\}(L_k)$  de longueur  $L_k$  comprenant les variables ou des séries de données, à l'échelle de l'ensemble du modèle. Comme les longueurs  $L_k$  ne sont pas fixées par l'utilisateur, on appelle ce système de stockage le « *stockage dynamique des variables* ». L'accès aux différentes variables se fait donc par l'intermédiaire d'un système d'index flottants de cette manière : le numéro du coefficient de  $\{a\}$  qui correspond au premier coefficient de chaque sous-vecteur, désigné par  $l_k$ , est calculé dans les sous-routines **DIM1** et **DIM2** à travers des données lues. Alors, le sous-vecteur  $\{a\}(L_k)$  sera stocké entre les coefficients  $\{a\}(l_k)$  et  $\{a\}(l_{k+1})$ . Par conséquent, la localisation  $l_k$  donne la position du premier coefficient du sous-vecteur  $\{a\}(L_k)$  dans le vecteur de stockage global  $\{a\}$ . Un aperçu des variables de stockage dynamique intervenant dans HYBRID est donné dans le tableau (8.1). Les variables qui ont été ajoutées dans le code pour implanter des formulations de BEM présentées dans ce travail sont désignées par une étoile (\*).

Les sous-routines correspondantes sont :

- **DIM1** : les données principales telles que, le titre du problème (*title*); le nombre total de noeuds (*nnp*); la méthode de calcul (FEM, BEM ou FEM/BEM) (*ifem*, *ibem*); si *ifem=1* le nombre d'éléments drainés (*ne8d*), saturés (*ne8c*) ou bien non-saturés (*ne8u*); si *ibem=1* le nombre de zones D1, D2 et D3 (*nbed1*, *nbed2*, *nbed3*) et le nombre de noeuds dans chacune de ces zones (*nnpbed1* (1 : *nbed1*), *nnpbed2* (1 : *nbed2*), *nnpbed3*); le nombre d'éléments enfermants (*nnpem*); le nombre de matériaux drainés (*m8d*), saturés (*m8c*) ou bien non-saturés (*m8u*) et leurs types de comportement (*m8dep* (1 : *m8d*), *m8cep* (1 : *m8c*), *m8uep* (1 : *m8u*)), le type de chargement (*idyn*); le code de séisme (*ieaq*); le nombre d'étapes de chargement (*nload*); le nombre de pas de temps (*ntime*); l'indicateur du type de solution (symétrique ou asymétrique) (*isolv*); le code d'analyse (Newton-Raphson ou Newton-Raphson modifié) (*nr*); les pas de temps minimum et maximum (*dtimei* et *dtime*); la constante d'intégration de temps (*ptoll1*); la tolérance acceptable (*ptoll3*); le code de K-corrrection (*kcorf*); le point de coupure de l'intégration (*mtime*) et la tolérance admissible de K-corrrection (*rmtol*); le nombre de conditions aux limites nulles concernant la partie mécanique (*nbcx*, *nbcy*) aussi bien que la partie hydraulique (*nbcw*, *nbca*); les paramètres du schéma d'intégration de Newmark (*anew1*, *anew2*); le para-

mètre de la méthode  $\Theta$  (*wil*) et l'indicateur de l'interpolation temporelle pour les noyaux de la BEM dans les sols saturés (*intb*) sont lues et stockées. À partir de ces données, la première série des dimensions dynamiques des variables est déterminée.

- **INPUT** : les caractéristiques géométriques et mécaniques/hydrauliques telles que, les coordonnées des noeuds ( $x(1:2, nnp)$ ) ; le tableau des numéros globaux des noeuds formés des éléments respectivement drainés, saturés et non-saturés (*ie8d(1:8, ne8d1), ie8c(1:8, ne8c1), ie8u(1:8, ne8u1)*) avec leurs codes de type de matériau (*ie8d(9, ne8d1), ie8c(9, ne8c1), ie8u(9, ne8u1)*) dans la partie FEM ; le tableau des numéros globaux des noeuds formés des domaines D1, D2 et D3 (*ie3d1(npbmax, nbed11), ie3d2(npbmax, nbed21), ie3d3(1:nnpbed3)*) dans la partie BEM ; le tableau des numéros globaux des noeuds formés des éléments enfermants (*xencl(nnpn), yencl(nnpn)*) ; le tableau des propriétés mécaniques/hydrauliques des matériaux drainés, saturés et non-saturés (*sm8d(60, m8d), sm8c(60, m8c), sm8u(60, m8u)*) ; le tableau des conditions aux limites de type Dirichlet nulles (*kodex(nbcx1), koday(nbcy1), kodew(nbcw1), kodea(nbca1)*) ; les caractéristiques des phases de chargement (*iconst(3, nload1)*) ainsi que les valeurs initiales des variables sont lues et stockées.
- **DIM2** : cette subroutine détermine le tableau des degrés de liberté (*id*) qui affecte un code pour chacun des ddl envisageables. Également, la deuxième série des dimensions dynamiques des variables sera traitée dans cette subroutine.
- **DETNA** : cette subroutine détermine la mémoire accordée à la construction et au traitement de la matrice de rigidité globale (FEM/BEM) dans des conditions symétriques et non-symétriques. Ceci est fait pour identifier les ddl effectifs du maillage et pour réduire ainsi la taille de la matrice de rigidité globale. À cette fin, la construction du tableau *id* sera finalisée de cette manière : si le maillage comporte *nnp* noeuds, il y a au maximum  $4*nnp$  degrés de liberté dans le problème (les deux composantes de déplacement, la pression d'eau et la pression d'air). De plus, le code pour chacun des ddl envisageables est [15] :
  - pour les déplacements dans la direction 1 (x en déformations planes), le code est  $mdof+nbcx$  si une condition de type Dirichlet nulle est imposée, et 0 sinon.
  - pour les déplacements dans la direction 2 (y en déformations planes), le code est  $mdof+nbcx+nbcy$  si une condition de type Dirichlet nulle est imposée, et 0 sinon.
  - pour les pressions d'eau, si l'élément est sec le code est  $4*nnp+1$  sinon, le code est  $mdof+nbcx+nbcy+nbcw$  si une condition de type Dirichlet nulle est imposée, et 0 sinon.
  - pour les pressions d'air, si l'élément est sec ou saturé, le code est  $4*nnp+1$  sinon, le code est  $mdof+nbcx+nbcy+nbcw+nbca$  si une condition de type Dirichlet nulle est imposée, et 0 sinon.

Seuls les degrés de liberté effectifs, dont le code est 0 dans la matrice *id*, influencent la matrice de rigidité globale. Ces composantes de la matrice prendront les valeurs de 1 à

*mdof* dans la suite. Par conséquent, seuls les couples de ddl effectifs sont stockés. La partie triangulaire supérieure de la matrice de rigidité est stockée dans le vecteur dynamique  $\{s1\}$  et la partie inférieure, dans le vecteur dynamique  $\{s2\}$  (voir le tableau 8.1) selon la méthode dite « ligne de ciel » (sky line). Chaque couple de ddl effectifs a un numéro de positionnement dans  $\{s1\}$  ou  $\{s2\}$ . Le vecteur dynamique  $\{na\}$ , déterminé dans la subroutine **DETNA**, donne le numéro de positionnement des coefficients diagonaux de la matrice de rigidité pour chaque ddl effectif. Le positionnement des autres couples de ddl effectifs n'a pas besoin d'être stocké. Il suffit de lire le tableau  $\{id\}$  dans un ordre déterminé, et d'incrémenter la numérotation lorsque les codes des ddl concernés sont nuls.

### 8.1.2 Initialisation des variables

Les subroutines correspondantes sont :

- **INIT1** : cette subroutine met à zéro tous les tableaux de stockage des déplacements, des vitesses, des accélérations et des contraintes ainsi que les vecteurs des forces nodales  $\{r\}$ ,  $\{rr\}$ ,  $\{rrr\}$ ,  $\{totrr\}$ , les vecteurs des résidus  $\{rnn\}$  et  $\{rnn1\}$  et les vecteurs qui stockent les ddl incrémentaux et cumulés  $\{dt\}$ ,  $\{di\}$ ,  $\{dti\}$ .
- **INIT2** : cette subroutine détermine le champ de contrainte  $\sigma$  de 3 manières différentes :
  - prise en compte du poids des couches de sol susjacentes ( $init=1$ ) ;
  - considération d'un état d'équilibre géostatique ( $init=2$ ) ;
  - prise en compte du poids des couches susjacentes, en considérant que la géométrie du modèle est rectangulaire ( $init=3$ )

Si l'utilisateur choisit d'initialiser le champ de contraintes en considérant le poids des couches susjacentes réelles ( $init=1$ ) ou en considérant l'équilibre géostatique ( $init=2$ ), alors il faut connaître la matrice de rigidité initiale pour initialiser le vecteur des ddl  $\{dt\} = \{U\}$ . C'est pourquoi interviennent

- la subroutine **BEM**, dans laquelle les subroutines **BEMINIT**, **BEMT1** et **BEMS1S2** sont appelées afin de permettre de calculer la matrice de rigidité de la partie BEM ;
- la subroutine **FEM**, dans laquelle selon le type de sol les subroutines **STIF8D** (éléments drainés) ou **STIF8C** (éléments saturés) sont appelées pour calculer la matrice de rigidité de la partie FEM ;
- la subroutine **SOLVE**, qui permet de résoudre le système d'équations.
- la subroutine **UPDATE1**, qui permet d'injecter la solution du système d'équations d'équilibre  $\{r\}$  dans le vecteur  $\{dt\}$ .
- la subroutine **FSTRESS**, qui permet de déterminer les valeurs des variables de contrainte dans les éléments de la partie FEM à partir des valeurs des ddl nodaux.
- **INIT3** : elle lit et stocke les conditions initiales imposées sur respectivement les déplacements, les vitesses, les accélérations, les pressions interstitielles d'eau et d'air dans les vecteurs correspondantes. Également, le tableau de numérotation globale des noeuds

pour les *nelmu* éléments non-saturés dans la zone BEM *{ie3u}* et les composantes du tableau *{sig3u}* concernant les valeurs moyennes initiales de succions et de pressions interstitielles sur chaque élément non-saturé dans la zone BEM sont calculées dans cette subroutine.

### ◆ Début de boucle sur l'incrément du chargement

#### 8.1.3 Constitution du vecteur de forces nodales externes

Les conditions aux limites de Dirichlet qui sont choisies nulles pour toute la simulation sont prises en compte dans la phase d'acquisition des données (variables dynamiques *kodex*, *kodey*, *kodew* et *kodea*). Cette prise en compte permet notamment de réduire la taille de la matrice de rigidité globale (voir le paragraphe sur l'acquisition des données) [15]. Les conditions temporaires, valables pour un incrément de chargement seulement, sont traitées en faisant intervenir les subroutines correspondantes comme suit :

- **CHARGE1** : cette subroutine est appelée au début de chaque pas de temps (incrément du chargement) pour contrôler l'occurrence d'un changement d'incrément de chargement. Également, le vecteur des forces nodales dans la zone BEM *{rrr}* au début de chaque incrément de chargement est remis à zéro.
- **CHARGE2** : Dans les cas où le chargement n'est pas un signal sismique incident (*ieaq* = 0), les conditions imposées temporaires sont traitées comme suit : les conditions imposées sur les ddl nodaux sont stockées dans des vecteurs spécifiques dans cette subroutine. Celles imposées sur des surfaces sont traduites sous la forme d'un vecteur de forces nodales *{rr}*. Ces forces traduisent l'action de l'environnement extérieur sur le système imposé au début de l'incrément de chargement. Ceci est effectué
  - dans la subroutine **LOADNODE** dans laquelle les conditions imposées en contraintes sur des surfaces sont traduites en conditions imposées en force sur les noeuds de la surface. La relation entre les contraintes nodales ( $\Delta\sigma^e$ ) et les forces nodales ( $\Delta\mathbf{F}^e$ ) sur tous les noeuds d'un élément  $e$  est commodément écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\Delta_n\{\mathbf{F}^e\} = \mathbf{M}^e \Delta_n\{\sigma^e\} \quad (8.1)$$

où

$$\mathbf{M}^e = \begin{bmatrix} N_{11}^e \mathbf{I} & \cdots & N_{1j}^e \mathbf{I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{j1}^e \mathbf{I} & \cdots & N_{jj}^e \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

dans laquelle  $\mathbf{I}$  est la matrice unité d'ordre 2,  $j$  est le numéro local du noeud de l'élément et

$$N_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} N_i N_j d\Gamma_e = \int_{-1}^1 N_i N_j J d\eta = \sum_{m=1}^{g_i} N_i N_j J W_m \quad (8.3)$$

- dans les sous-routines **FLOWNODE** et **FLOANODE** dans lesquelles les chargements en flux d'eau et en flux d'air sont traités. Dans ce cas, pour obtenir les vecteurs de forces nodales, les flux doivent être intégrés dans le temps. Pour ce faire, une méthode semblable à celle de  $\Theta$ -méthode est utilisée.

Le vecteur  $\{rr\}$  est bien entendu recalculé au début de chaque incrément de chargement. Dans le cas où le chargement est un signal sismique incident, les conditions imposées temporaires en déplacement sur les noeuds de la surface  $\Delta_n\{\mathbf{U}_{eq}\}$  sont ajoutées dans les tableaux *uxeq* et *uyeq*.

- **CHARGE3** : dans cette sous-routine, les valeurs nodales des charges calculées à la sous-routine **CHARGE2** pour chaque incrément  $\{rr\}$  sont ajoutées à celles totales obtenues jusqu'à l'instant  $t_{n-1}$   $\{totrr\}$ .

Les conditions de Dirichlet temporaires sont prises en compte lors de la constitution de la matrice de rigidité globale. Les ddl sur lesquels des conditions sont imposées sont en fait neutralisés.

#### ◇ Début de boucle d'itération

### 8.1.4 Construction de la matrice de rigidité et des vecteurs de forces de la zone BEM

Comme mentionné auparavant, les aspects non-linéaire, irréversible et hétérogène du comportement des matériaux ne sont pris en compte que dans la zone FEM. Par conséquent, dans un schéma itératif dans chaque pas de temps, la matrice de rigidité équivalente de la zone BEM est calculée une seule fois pour une analyse linéaire. Cependant, les matrices des solutions fondamentales doivent être calculées pour chaque pas de temps, ce qui entraîne une quantité d'opérations de calcul importante.

Pour que le couplage FEM/BEM puisse être effectué, les deux systèmes d'équations de ces méthodes doivent faire intervenir les mêmes variables. Dans cette optique, la méthode des éléments finis relie le vecteur des déplacements nodaux à celui des forces nodales, tandis que la méthode des éléments de frontière donne la relation entre les déplacements nodaux et les vecteurs-contraintes nodaux. Par conséquent, ce dernier doit être converti en vecteur des forces nodales. À cette fin, les matrices  $\mathbf{M}^e$  (8.2) de tous les éléments de la zone d'éléments de frontière sont assemblées pour obtenir la matrice de distribution globale  $\mathbf{M}$  qui sert à convertir, dans le sens intégral, le vecteur des contraintes nodales en vecteur des forces nodales *équivalent*. Une fois que les contraintes nodales sont converties en forces nodales, l'équation intégrale de frontière discrétisée peut être transformée pour faire apparaître sa matrice de rigidité équivalente, en multipliant les deux membres de l'équation (7.55) par le terme  $\mathbf{M}(\Delta\mathbf{G}^1)^{-1}$  :

$${}^b\mathbf{K}\mathbf{U}^N = \mathbf{R}^N + \mathbf{Z}^{N-1} + \mathbf{F}_{eq}^N \quad (8.4)$$

où

$${}^b\mathbf{K} = \mathbf{M}(\Delta\mathbf{G}^1)^{-1}\bar{\mathbf{H}}^1 \quad (8.5a)$$

$$\mathbf{R}^N = \mathbf{M}\mathbf{T}^N \quad (8.5b)$$

$$\mathbf{Z}^{N-1} = \mathbf{M}(\Delta\mathbf{G}^1)^{-1} \sum_{n=1}^{N-1} [\Delta\mathbf{G}^{N-n+1}\mathbf{T}^n - \Delta\mathbf{H}^{N-n+1}\mathbf{U}^n] \quad (8.5c)$$

$$\mathbf{F}_{eq}^N = \mathbf{M}(\Delta\mathbf{G}^1)^{-1}\mathbf{U}_{eq}^N \quad (8.5d)$$

Tous les calculs de cette zone sont contrôlés dans la subroutine **BEM**. Dans cette subroutine la matrice de rigidité équivalente de la zone BEM ainsi que les vecteurs de forces nodales concernant l'histoire de chargement des pas de temps antécédents sont déterminés. La structure générale de cette subroutine est schématisée dans la figure (8.2).

Les subroutines principales appelées sont :

- **BEMINIT** : cette subroutine met à zéro au début du premier pas de temps les vecteurs de tractions concernant l'histoire de chargement  $\sum_{n=1}^{N-1} [\Delta\mathbf{G}^{N-n+1}\mathbf{T}^n - \Delta\mathbf{H}^{N-n+1}\mathbf{U}^n]$  qui sont selon le domaine étudié (**rbed1**), **rbed2** et **rbed3**). Également, la même procédure est abordée pour les vecteurs de forces nodales équivalentes  $\mathbf{Z}^{N-1}$  (**frbed1**), **frbed2** et **frbed3**).
- **BEMT1** : dans cette subroutine, les matrices des solutions fondamentales pour le premier pas de temps  $\bar{\mathbf{H}}^1$  et  $\Delta\mathbf{G}^1$  et pour les domaines borné, infini et semi-infini sont construites respectivement dans **GHMATD1**, **GHMATD2** et **GHMATD3** dans lesquelles les subroutines suivantes sont appelées :
  - **SNGTP** : cette subroutine détermine l'occurrence de la singularité et selon elle le nombre d'intervalles ou de sous-éléments et le nombre de points de Gauss dans chaque éléments.
  - **EXTINEQ** et **EXTINEQ1** : elles calculent les matrices  $(\Delta\mathbf{G}^e)^N$  et  $(\Delta\mathbf{H}^e)^N$  respectivement au niveau de l'élément quadratique et de ses intervalles. Dans la subroutine **EXTINEQ1** sont évaluées les intégrales (7.78)-(7.81). À cette fin, les solutions fondamentales dynamiques ainsi que statiques seront calculées pour chaque point de Gauss dans les subroutines correspondantes d'après la figure (8.2). Dans cette figure  $ibem = 1$  et  $ibem = 2$  désignent respectivement les problèmes élastodynamique et poroélastodynamique saturé.
  - **GHSAVED** : cette subroutine stocke les matrices  $\Delta\mathbf{G}^N$  et  $\Delta\mathbf{H}^N$  pour chaque pas de temps sur l'ordinateur.
  - **DINVERSE** : elle calcule l'inverse de la matrice  $\Delta\mathbf{G}^1$ .
  - **MTRFRD** : elle calcule la matrice de distribution globale  $\mathbf{M}$  qui permet de transférer les tractions nodales aux forces nodales équivalentes. Ceci est réalisé au moyen de la subroutine **MMATRICE** qui calcule la matrice  $\mathbf{M}^e$  au niveau élémentaire.
  - **OTHERMAT1**, **OTHERMAT2** et **OTHERMAT3** : cette subroutine calcule les matrices  $(\Delta\mathbf{G}^1)^{-1}\bar{\mathbf{H}}^1$ ,  $\mathbf{M}(\Delta\mathbf{G}^1)^{-1}$  et  $\mathbf{M}(\Delta\mathbf{G}^1)^{-1}\bar{\mathbf{H}}^1$  respectivement pour les domaines

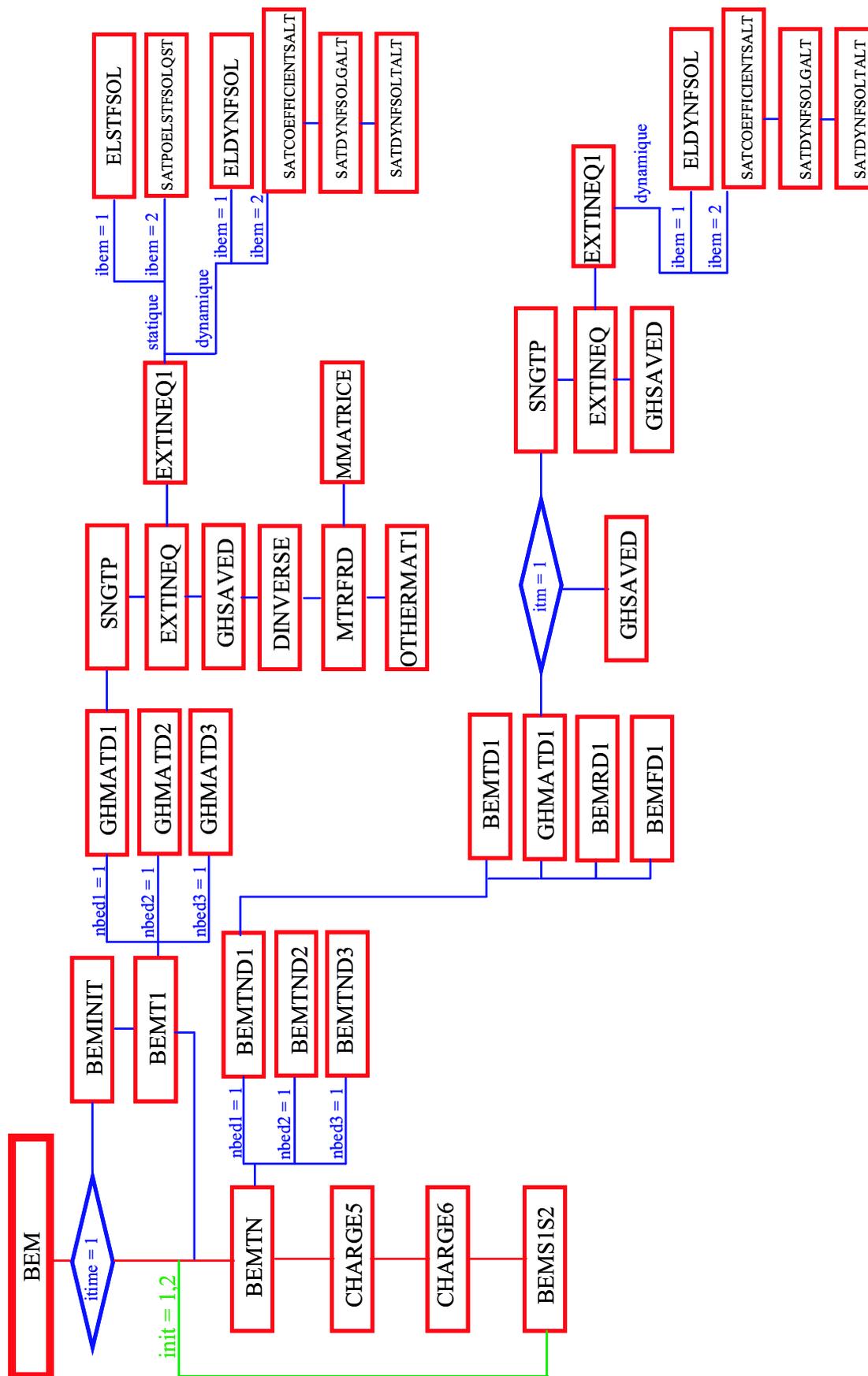


Figure 8.2 — Organigramme de la subroutine BEM

- D1, D2 et D3 ( $\{gihd1\}$ ,  $\{gihd2\}$ ,  $\{gihd3\}$ ,  $\{xgid1\}$ ,  $\{xgid2\}$ ,  $\{xgid3\}$ ,  $\{xgihd1\}$ ,  $\{xgihd2\}$  et  $\{xgihd3\}$ ).
- **BEMTN** : cette subroutine contrôle les opérations expliquées ci-dessus pour les pas de temps ultérieurs ( $t_N \succ 1$ ) pour les domaines D1, D2 et D3 respectivement à l'aide des subroutines suivantes :
    - **BEMTND1** : cette subroutine est consacrée aux calculs pour le domaine borné D1. Elle appelle les subroutines suivantes :
      - **BEMTD1**, dans laquelle le vecteur de contraintes/flux dans chaque pas de temps est calculé.
      - **GHMATD1**, dans laquelle les matrices des solutions fondamentales  $\Delta\mathbf{G}^N$  et  $\Delta\mathbf{H}^N$  pour chaque pas de temps sont calculées.
      - **BEMRD1**, dans laquelle le vecteur de tractions concernant l'histoire de chargement  $\sum_{n=1}^{N-1} [\Delta\mathbf{G}^{N-n+1}\mathbf{T}^n - \Delta\mathbf{H}^{N-n+1}\mathbf{U}^n]$  jusqu'à l'instant  $t_N$  est calculé  $\{rbed1\}$ .
      - **BEMFD1**, dans laquelle le vecteur de forces nodales équivalentes  $\mathbf{Z}^{N-1}$   $\{frbed1\}$  est calculé.
    - **BEMTND2** : elle est consacrée aux calculs pour le domaine fini D2. Les subroutines **BEMTD2**, **GHMATD2**, **BEMRD2** et **BEMFD2** qui fonctionnent comme celles expliquées pour le domaine D1 sont appelées dans cette subroutine.
    - **BEMTND3** : elle est consacrée aux calculs pour le domaine semi-fini D3. Les subroutines **BEMTD3**, **GHMATD3**, **BEMRD3** et **BEMFD3** qui fonctionnent comme celles expliquées pour le domaine D1 sont appelées dans cette subroutine.
  - **CHARGE5** : dans le cas où le chargement est un signal sismique incident, cette subroutine calcule le vecteur des forces sismiques pour chaque pas de temps  $\mathbf{F}_{eq}^N$  dans le domaine semi-infini D3.
  - **CHARGE6** : cette subroutine construit le membre de droite de l'équation (8.4) par un assemblage des vecteurs des forces nodales internes et sismiques  $\{rrr\}$ .
  - **BEMS1S2** : dans cette subroutine la matrice de rigidité équivalente de la zone BEM  ${}^b\mathbf{K} = \mathbf{M}(\Delta\mathbf{G}^1)^{-1}\bar{\mathbf{H}}^1$  est stockée selon la méthode de « ligne de ciel » dans les vecteurs de matrice de rigidité globale ( $s1$  pour la partie triangulaire supérieure de la matrice de rigidité et  $s2$  pour la partie inférieure)

### 8.1.5 Construction de la matrice de rigidité et des vecteurs de forces de la zone FEM

Puisque ce travail est censé développer la partie BEM dans le code de calcul HYBRID pour couvrir les différents aspects dans les milieux poreux saturés et non-saturés ainsi que pour la brièveté du texte, nous ne présentons pas dans ce mémoire les formulations concernant la partie FEM. Pour plus de détails sur la formulation variationnelle de la partie FEM, se référer à [193, 262].

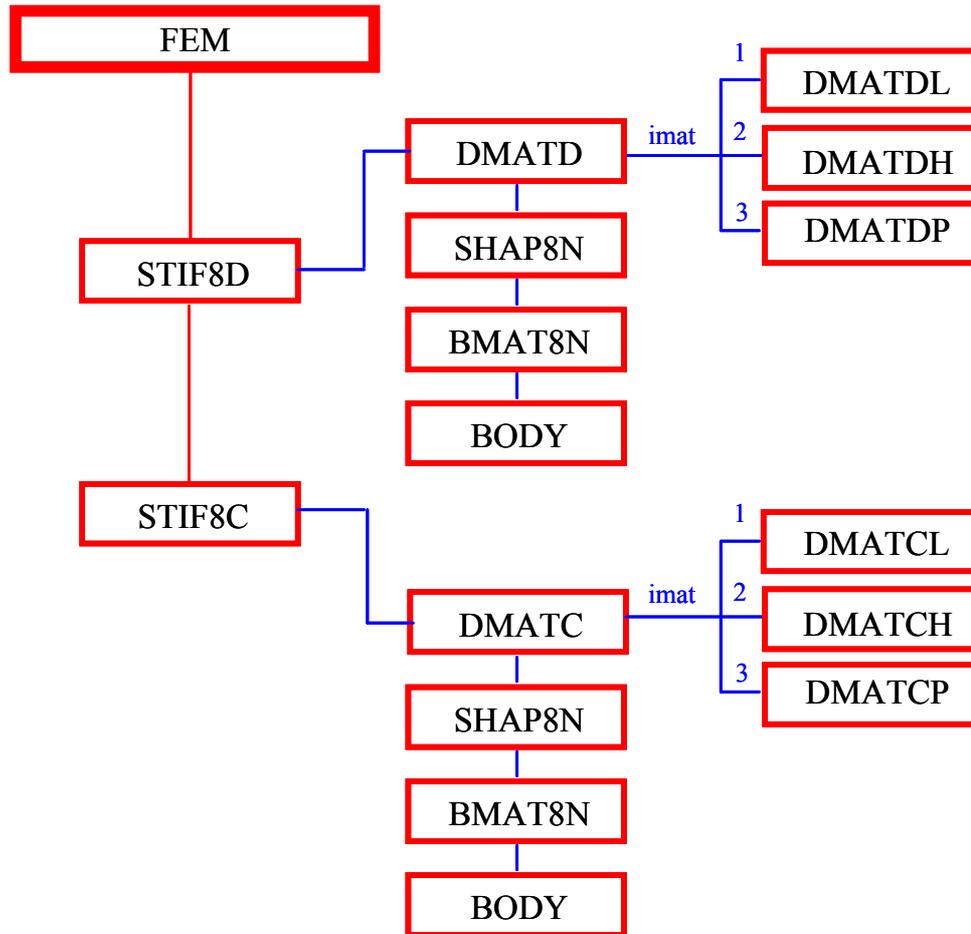


Figure 8.3 — Organigramme de la subroutine FEM

Tous les calculs de cette zone sont contrôlés dans la subroutine **FEM**. Cette subroutine détermine la matrice de rigidité équivalente de la zone FEM en faisant la somme de celles des éléments secs et saturés. La même procédure sera abordée pour construire les vecteurs des forces nodales concernant l’histoire de chargement des pas de temps antécédents ainsi que ceux des résidus provoqués par la méthode de Newton-Raphson. Également, les vecteurs des forces nodales correspondant aux matrices de masse et d’amortissement sont déterminés et assemblés. La structure générale de cette subroutine est schématisée dans la figure (8.3).

Les sous-routines principales appelées sont :

- **STIF8D** : cette subroutine contrôle les opérations expliquées ci-dessus pour les éléments secs à l’aide des sous-routines :
  - **DMATD** dans laquelle la matrice de rigidité des éléments drainés est établie. À cette fin, elle appelle les sous-routines **DMATDL**, **DMATDH** et **DMATDP** pour respectivement les comportements élastique linéaire, élastique non-linéaire hyperbolique et élastoplastique.
  - **SHAP8N** qui calcule les fonctions d’interpolation et leurs dérivées.
  - **BMAT8N** qui calcule la matrice de transformation des déplacements aux déformations

- **B** pour chaque élément.
- **BODY** dans laquelle les forces de volume pour chaque élément sont évaluées.
- **STIF8C** : cette subroutine contrôle les opérations expliquées ci-dessus pour les éléments saturés à l'aide des subroutines **DMATC** (dans laquelle **DMATCL**, **DMATCH** et **DMATCP** sont appelées), **SHAPE8N**, **BMAT8N** et **BODY**.

### 8.1.6 Constitution du vecteur global des forces nodales

À ce stade, la subroutine **CHARGE4** est appelée pour assembler les vecteurs de forces nodales externes, les vecteurs de forces nodales provoqués par la BEM et ceux provoqués par la FEM dans  $\{r\}$ . Également, les vecteurs des résidus ( $\{rnn\}$  et  $\{rnnl\}$ ) pour la FEM sont calculés dans cette subroutine.

### 8.1.7 Résolution du système

Maintenant, en ayant la matrice de rigidité globale et le vecteur global des forces nodales, on peut obtenir le vecteur nodal des inconnues : déplacements, pressions d'eau et pressions d'air. À cette fin, la subroutine **SOLVE** est consacrée à résoudre le système d'équations en fonction du type de problème considéré. Si seuls des éléments finis secs sont utilisés, alors la méthode de résolution sera la méthode de Mondkar & Powel, applicable aux matrices symétriques ( $isolv=1$ ). Par contre, s'il existe des éléments finis saturés ou des éléments de frontière, on devra utiliser la méthode de Taylor applicable aux matrices asymétriques ( $isolv=3$ ). Les solutions obtenues sont stockées dans le vecteur  $\{r\}$ .

### 8.1.8 Traitement des résultats, mise à jour des données

Les subroutines correspondantes sont :

- **UPDATE1** : grâce à cette subroutine une fois que le vecteur des inconnues est trouvé pour chaque itération, la solution du problème provisoirement stockée dans le vecteur  $\{r\}$  est transférée dans le vecteur  $\{dt\}$ . La solution de l'itération précédente  $i - 1$  est stockée dans le vecteur  $\{dti\}$  alors que la différence entre les deux itérations consécutives ( $i$  et  $i - 1$ ) est stockée dans le vecteur  $\{di\}$ . À la fin, le vecteur  $\{r\}$  est remis à zéro.
- **FSTRESS** : elle permet de calculer les vecteurs des contraintes incrémentales et totales à l'aide des valeurs des degrés de liberté nodaux incrémentaux précédemment obtenus et stockés dans  $\{dt\}$ . La subroutine fait appel à
  - la subroutine **STR8ND** pour calculer les contraintes élémentaires en milieu sec
  - et à la subroutine **STR8NC** pour calculer les contraintes élémentaires en milieu saturé.
- **TOLL** : cette subroutine assure la convergence du processus itératif en vérifiant les trois critères de convergence : le critère en déplacement, le critère en force et le critère en

énergie interne.

- **UPDATE3** : cette subroutine actualise les vecteurs de déplacements, de vitesses, d'accélération ainsi que les vecteurs de contraintes pour chaque itération.
- **OUTPUT** : elle écrit les résultats dans un fichier de sortie principal, qui comporte la quasi-intégralité des données du problème entrées par l'utilisateur.

#### ◇ Fin de boucle d'itération

#### ◆ Fin de boucle sur l'incrément du chargement

Tableau 8.1: Variables de stockage dynamiques utilisées dans le code de calcul HYBRID. Pour les variables localisées aux emplacements 1 à 12 et aux 50 à 51, la dimension du vecteur de stockage est divisée par 2 car on utilise des réels à 8 bits et non 16 bits.

| Localisation $l_k$ | Variable | Dimensions            | Description  |
|--------------------|----------|-----------------------|--|
| a(101)             | IE8D     | $(ne8d1*9+1)/2$       | numérotation des ddl pour les ne8d1 éléments secs dans la zone FEM                                     |
| a(102)             | IE8C     | $(ne8c1*9+1)/2$       | numérotation des ddl pour les ne8c1 éléments saturés dans la zone FEM                                  |
| a(103)             | IE8U (*) | $(ne8u1*9+1)/2$       | numérotation des ddl pour les ne8u1 éléments non-saturés dans la zone FEM                              |
| a(104)             | IE3D1    | $(nbed11*npbmax+1)/2$ | numérotation des ddl pour les nbed11 éléments formés le domaine D1 dans la zone BEM                    |
| a(105)             | IE3D2    | $(nbed21*npbmax+1)/2$ | numérotation des ddl pour les nbed21 éléments formés le domaine D2 dans la zone BEM                    |
| a(106)             | IE3D3    | $(nbed31*npbmax+1)/2$ | numérotation des ddl pour les nbed11 éléments formés le domaine D3 dans la zone BEM                    |
| a(107)             | ID       | $(nnp*4+1)/2$         | identification des ddl des nnp noeuds du maillage (déclarés actifs, bloqués ou avec condition imposée) |
| a(108)             | ICONST   | $(nload1*3+1)/2$      | caractéristiques des nload1 incréments de chargement   |

.../...

.../...

| Localisation $l_k$ | Variable  | Dimensions  | Description   |
|--------------------|-----------|-------------|---|
| a(109)             | KODEX     | (nbcx1+1)/2 | identification des nbcx1 ddl avec CL à 0 imposées sur les déplacements $u_x$                          |
| a(110)             | KODEY     | (nbcy1+1)/2 | identification des nbcx1 ddl avec CL à 0 imposées sur les déplacements $u_y$                          |
| a(111)             | KODEW     | (nbcw1+1)/2 | identification des nbcw1 ddl avec CL à 0 imposées sur les pressions d'eau $p_w$                       |
| a(112)             | KODEA (*) | (nbca1+1)/2 | identification des nbcw1 ddl avec CL à 0 imposées sur les pressions d'air $p_a$                       |
| a(113)             | X         | nnp*2       | coordonnées des noeuds de maillage FEM/BEM  |
| a(114)             | XINT (*)  | nbeint1*2   | coordonnées des noeuds facultatifs à l'intérieur de la zone BEM                                       |
| a(115)             | SM8D      | m8d1*60     | paramètres des modèles de comportement des m8d1 types d'éléments secs choisis                         |
| a(116)             | SM8C      | m8c1*60     | paramètres des modèles de comportement des m8c1 types d'éléments saturés choisis                      |
| a(117)             | SM8U (*)  | m8u1*60     | paramètres de modèle de comportement élastique linéaire des m8u1 types d'éléments non-saturés choisis |
| a(118)             | SIG8D     | ne8d1*5*9   | valeurs des variables de contrainte cumulées pour les éléments secs dans la zone FEM                  |
| a(119)             | SIG8C     | ne8c1*6*9   | valeurs des variables de contrainte cumulées pour les éléments saturés dans la zone FEM               |
| a(120)             | SIG8U (*) | ne8u1*7*9   | valeurs des variables de contrainte cumulées pour les éléments non-saturés dans la zone FEM           |

.../...

.../...

| Localisation $l_k$ | Variable   | Dimensions | Description   |
|--------------------|------------|------------|---|
| a(121)             | SIG8DO     | ne8d1*5*9  | valeurs des variables de contrainte cumulées pour les éléments secs dans la zone FEM        |
| a(122)             | SIG8CO     | ne8c1*6*9  | valeurs des variables de contrainte cumulées pour les éléments saturés dans la zone FEM     |
| a(123)             | SIG8UO (*) | ne8u1*7*9  | valeurs des variables de contrainte cumulées pour les éléments non-saturés dans la zone FEM |
| a(124)             | SIG8DI     | ne8d1*5*9  | valeurs des variables de contrainte cumulées pour les éléments secs dans la zone FEM        |
| a(125)             | SIG8CI     | ne8c1*6*9  | valeurs des variables de contrainte cumulées pour les éléments saturés dans la zone FEM     |
| a(126)             | SIG8DI (*) | ne8u1*7*9  | valeurs des variables de contrainte cumulées pour les éléments non-saturés dans la zone FEM |
| a(127)             | SIGMAD     | ne8d1*5*9  | valeurs des variables de contrainte cumulées pour les éléments secs dans la zone FEM        |
| a(128)             | SIGMAC     | ne8c1*6*9  | valeurs des variables de contrainte cumulées pour les éléments saturés dans la zone FEM     |
| a(129)             | SIGMAU (*) | ne8u1*7*9  | valeurs des variables de contrainte cumulées pour les éléments non-saturés dans la zone FEM |
| a(130)             | DPAD       | ne8dd*3*3  | matrice de rigidité élastoplastique pour les ne8dd éléments secs dans la zone FEM           |
| a(131)             | DPAC       | ne8cc*3*3  | matrice de rigidité élastoplastique pour les ne8cc éléments saturés dans la zone FEM        |
| a(132)             | DPAU (*)   | ne8uu*3*3  | matrice de rigidité élastoplastique pour les ne8uu éléments non-saturés dans la zone FEM    |

.../...

.../...

| Localisation $l_k$ | Variable  | Dimensions   | Description  |
|--------------------|-----------|--------------|--|
| a(133)             | ALFAD     | ne8dd*4*10   | centres des surfaces de plasticité pour les ne8dd éléments secs dans la zone FEM                 |
| a(134)             | ALFAC     | ne8cc*4*10   | centres des surfaces de plasticité pour les ne8cc éléments saturés dans la zone FEM              |
| a(135)             | ALFAU (*) | ne8uu*4*10   | centres des surfaces de plasticité pour les ne8uu éléments non-saturés dans la zone FEM          |
| a(136)             | IYSD      | ne8dd*2      | caractéristiques du comportement élastoplastique des ne8dd éléments secs dans la zone FEM        |
| a(137)             | IYSC      | ne8cc*2      | caractéristiques du comportement élastoplastique des ne8cc éléments saturés dans la zone FEM     |
| a(138)             | IYSU (*)  | ne8uu*2      | caractéristiques du comportement élastoplastique des ne8uu éléments non-saturés dans la zone FEM |
| a(139)             | SIG3U (*) | 5*500*nbed11 | valeurs des variables de contrainte pour les éléments non-saturés dans la zone BEM               |
| a(140)             | R         | mdof         | vecteur global des forces nodales, calculé pour chacun des mdof ddl                              |
| a(141)             | RR        | mdof         | vecteur des forces appliquées par l'extérieur au début de l'incrément de chargement              |
| a(142)             | TOTRR     | mdof         | vecteur des forces nodales au début de l'incrément de chargement dans la zone FEM                |
| a(143)             | RRR       | mdof         | vecteur des forces nodales au début de l'incrément de chargement dans la zone BEM                |
| a(144)             | DI        | mdofn        | valeurs des mdof ddl incrémentaux et stockage de mdofn-mdof CL à 0                               |

.../...

.../...

| Localisation $l_k$ | Variable | Dimensions         | Description  |
|--------------------|----------|--------------------|--|
| a(145)             | DTI      | mdofn              | valeurs des mdof ddl cumulés à l'instant $N - 1$ et stockage de mdofn-mdof CL à 0  |
| a(146)             | DT       | mdofn              | valeurs des mdof ddl cumulés à l'instant $N$ et stockage de mdofn-mdof CL à 0  |
| a(147)             | DISP     | mdofn              | valeurs des déplacements/pressions après chaque incrément de chargement  |
| a(148)             | VEL      | mdofn              | valeurs des vitesses après chaque incrément de chargement - utile dans la zone FEM   |
| a(149)             | ACC      | mdofn              | valeurs des accélérations après chaque incrément de chargement - utile dans la zone FEM  |
| a(150)             | NA       | (mdof+1)/2         | identification des ddl non bloqués   |
| a(151)             | IACT     | (nnp+1)/2          | identification des noeuds actifs (0 si dans un élément fictif, 1 si dans un élément matériel - utile pour le passage des construction) |
| a(152)             | XGIHD1   | n12gh*n12gh*nbed11 | stockage de la matrice $M(\Delta G^1)^{-1}\bar{H}^1$ dans le domaine D1 de la zone BEM   |
| a(153)             | XGIHD2   | n12gh*n12gh*nbed21 | stockage de la matrice $M(\Delta G^1)^{-1}\bar{H}^1$ dans le domaine D2 de la zone BEM   |
| a(154)             | XGIHD3   | n12gh*n12gh        | stockage de la matrice $M(\Delta G^1)^{-1}\bar{H}^1$ dans le domaine D3 de la zone BEM   |
| a(155)             | GIHD1    | n12gh*n12gh*nbed11 | stockage de la matrice $(\Delta G^1)^{-1}\bar{H}^1$ dans le domaine D1 de la zone BEM  |
| a(156)             | GIHD2    | n12gh*n12gh*nbed21 | stockage de la matrice $(\Delta G^1)^{-1}\bar{H}^1$ dans le domaine D2 de la zone BEM  |

.../...

.../...

| Localisation $l_k$ | Variable | Dimensions           | Description  |
|--------------------|----------|----------------------|--|
| a(157)             | GIHD3    | $n12gh*n12gh$        | stockage de la matrice $(\Delta G^1)^{-1}\bar{H}^1$ dans le domaine D3 de la zone BEM  |
| a(158)             | XGID1    | $n12gh*n12gh*nbed11$ | stockage de la matrice $M(\Delta G^1)^{-1}$ dans le domaine D1 de la zone BEM  |
| a(159)             | XGID2    | $n12gh*n12gh*nbed21$ | stockage de la matrice $M(\Delta G^1)^{-1}$ dans le domaine D2 de la zone BEM  |
| a(160)             | XGID3    | $n12gh*n12gh$        | stockage de la matrice $M(\Delta G^1)^{-1}$ dans le domaine D3 de la zone BEM  |
| a(161)             | GID1     | $n12gh*n12gh*nbed11$ | inverse de la matrice des solutions fondamentales déplacements/pressions à l'instant $t_1$ pour le domaine borné dans la zone BEM, $(\Delta G^1)^{-1}$       |
| a(162)             | GID2     | $n12gh*n12gh*nbed21$ | inverse de la matrice des solutions fondamentales déplacements/pressions à l'instant $t_1$ pour le domaine infini dans la zone BEM, $(\Delta G^1)^{-1}$      |
| a(163)             | GID3     | $n12gh*n12gh$        | inverse de la matrice des solutions fondamentales déplacements/pressions à l'instant $t_1$ pour le domaine semi-infini dans la zone BEM, $(\Delta G^1)^{-1}$ |
| a(164)             | TBED1    | $n12gh*ntime*nbed11$ | vecteur de traction/flux pour tous les intervalles de temps $T^N$ calculés pour chacun des mdof ddl pour le domaine borné dans la zone BEM                   |
| a(165)             | TBED2    | $n12gh*ntime*nbed21$ | vecteur de traction/flux pour tous les intervalles de temps $T^N$ calculés pour chacun des mdof ddl pour le domaine infini dans la zone BEM                  |

.../...

.../...

| Localisation $l_k$ | Variable | Dimensions         | Description   |
|--------------------|----------|--------------------|---|
| a(166)             | TBED3    | n12gh*ntime        | vecteur de traction/flux pour tous les intervalles de temps $T^N$ calculés pour chacun des mdof ddl pour le domaine semi-infini dans la zone BEM        |
| a(167)             | UBED1    | n12gh*ntime*nbed11 | vecteur de déplacement/pression pour tous les intervalles de temps $U^N$ calculés pour chacun des mdof ddl pour le domaine borné dans la zone BEM       |
| a(168)             | UBED2    | n12gh*ntime*nbed21 | vecteur de déplacement/pression pour tous les intervalles de temps $U^N$ calculés pour chacun des mdof ddl pour le domaine infini dans la zone BEM      |
| a(169)             | UBED3    | n12gh*ntime        | vecteur de déplacement/pression pour tous les intervalles de temps $U^N$ calculés pour chacun des mdof ddl pour le domaine semi-infini dans la zone BEM |
| a(170)             | RBED1    | n12gh*ntime*nbed11 | histoire de chargement pour tous les intervalles de temps pour le domaine borné dans la zone BEM $Z^{N-1}$  |
| a(171)             | RBED2    | n12gh*ntime*nbed21 | histoire de chargement pour tous les intervalles de temps pour le domaine infini dans la zone BEM $Z^{N-1}$   |
| a(172)             | RBED3    | n12gh*ntime        | histoire de chargement pour tous les intervalles de temps pour le domaine semi-infini dans la zone BEM $Z^{N-1}$  |
| a(173)             | S1       | ls                 | triangle supérieur de la matrice de rigidité globale FEM/BEM  |
| a(174)             | S2       | ls1                | triangle inférieur de la matrice de rigidité globale FEM/BEM  |

.../...

.../...

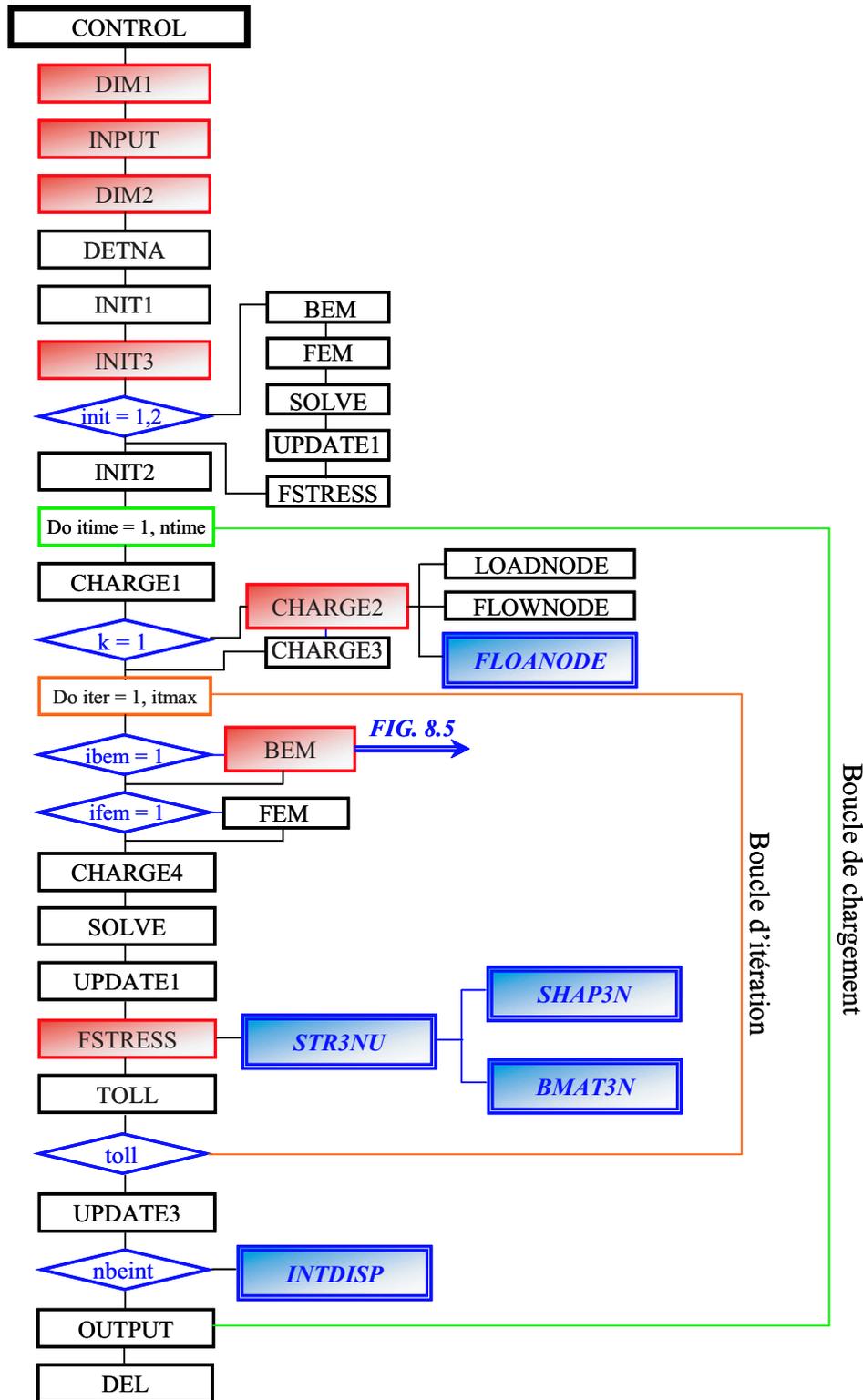
| Localisation $l_k$ | Variable | Dimensions | Description  |
|--------------------|----------|------------|--|
| a(175)             | S11      | ls         | sauvegarde du triangle supérieur de la matrice de rigidité globale FEM/BEM |
| a(176)             | S22      | ls1        | sauvegarde du triangle inférieur de la matrice de rigidité globale FEM/BEM |
| a(177)             | RNN      | mdof       | vecteur des résidus calculé pour chacun des mdof ddl dans la zone FEM      |
| a(178)             | RNN1     | mdof       | vecteur des résidus calculé pour chacun des mdof ddl dans la zone FEM      |

## 8.2 Subroutines spécifiques ajoutées dans HYBRID pour modéliser les différents phénomènes dans les milieux poreux saturés et non-saturés

Comme mentionné auparavant, les formulations d'éléments de frontière BEM présentées dans la partie précédente pour les problèmes de propagation d'ondes 2D ainsi que pour les problèmes de consolidation dans les milieux poreux saturés et non-saturés ont été implémentées dans le code de calcul « HYBRID ». À cette fin, des nouvelles variables de stockage dynamique spécifiques à ces formulations sont ajoutées dans le vecteur global  $\{a\}$  comme répertorié dans le tableau (8.1). Également, cette implémentation nécessite d'ajuster la dimension des sous-vecteurs  $\{a\}(L_k)$  déjà existants aux 4 degrés de liberté par noeud pour tenir compte de ce qui concerne les sols non-saturés (voir le tableau 8.1). Comme montré dans la section précédente, ces modifications sont effectuées dans la partie d'acquisition des données de base et dimensionnement des variables de stockage dynamique dans les deux subroutines **DIM1** et **DIM2**.

La programmation de ces formulations affecte le coeur du code HYBRID, particulièrement dans les parties existantes dans la boucle de chargement (Figs. 8.4 et 8.5).

En ce qui concerne la modélisation pour les sols *saturés* ( $ibem = 2$ ), les modifications sont effectuées dans la subroutine **EXTINEQ1** comme montré dans la figure (8.5). Dans cette subroutine, d'après le mode d'évaluation des intégrales temporelles dans la procédure de calcul ( $Icqm = 0$  : évaluation analytique [262],  $Icqm = 1$  : évaluation numérique par la méthode



*Figure 8.4* — Organigramme du code HYBRID modifié pour tenir compte des problèmes de propagation d’ondes 2D ainsi que des problèmes de consolidation dans les milieux poreux saturés et non-saturés dans la zone BEM. Les subroutines intervenant lors d’une simulation sont comme suit : en **bleu**, les subroutines spécifiques ajoutées ; en **rouge**, les subroutines préexistantes fortement affectées par l’implantation des nouvelles formulations ; en **noir**, les subroutines peu ou pas affectées par l’intégration des nouvelles formulations dans HYBRID. Un organigramme concernant la subroutine GHMATD1 existante dans la BEM est schématisé dans la figure (8.5).

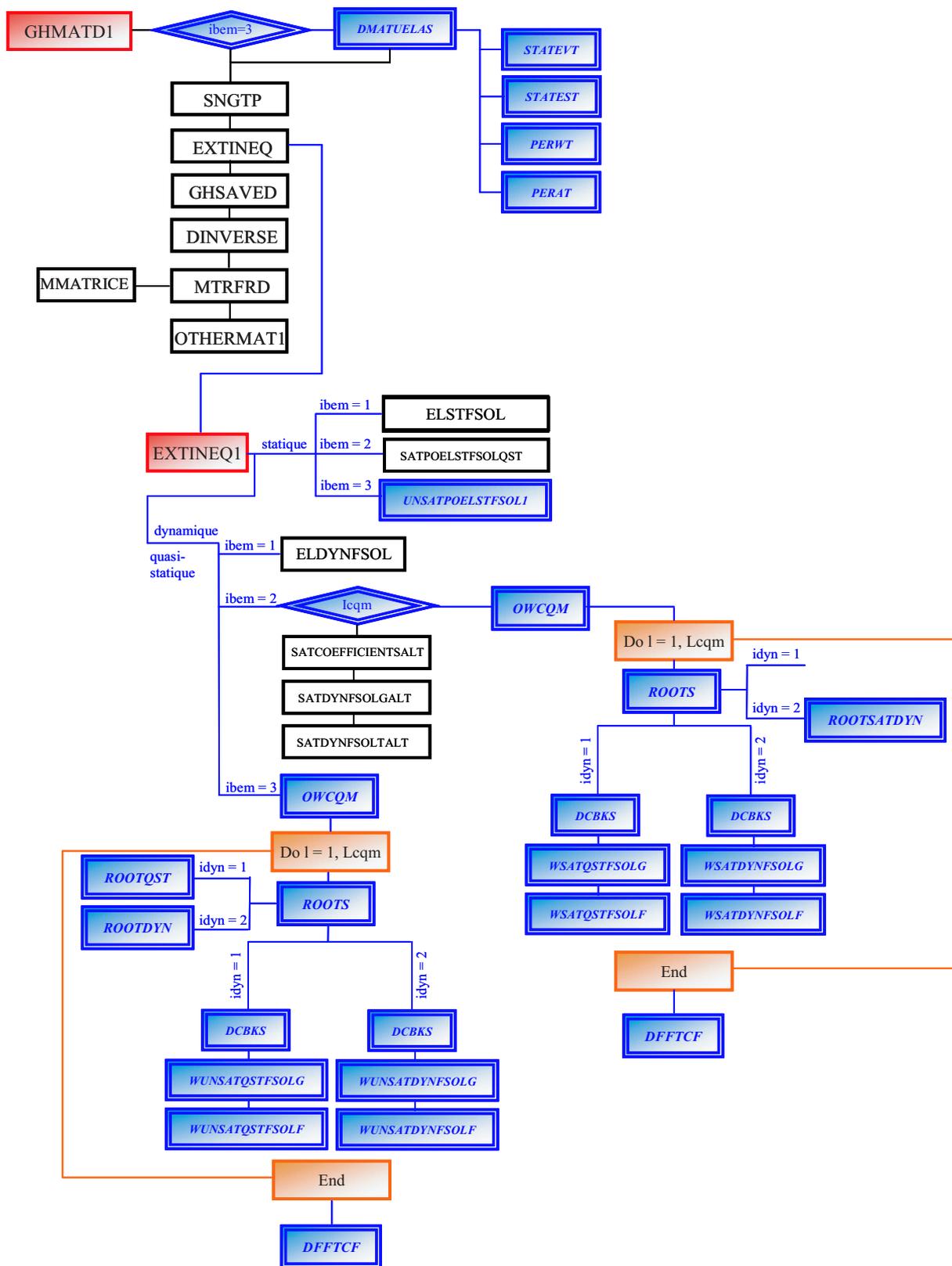


Figure 8.5 — Organigramme de la sousroutine GHMATD1 existante dans la BEM

MQC présentée dans le chapitre 7) les subroutines correspondantes sont appelées. Il est à noter que dans le programme, l'évaluation analytique des intégrales temporelles n'existe que pour les formulations de propagation d'ondes développées par [262]. Comme indiqué auparavant, ces formulations sont obtenues en considérant l'hypothèse simplificatrice de l'incompressibilité des constituants du milieu. Dans ce programme, l'implémentation des formulations dynamiques en considérant la compressibilité des constituants et la modélisation de consolidation pour les sols saturés (chapitre 5) sera faite en utilisant l'évaluation numérique des intégrales temporelles par la méthode MQC. Dans ce cas, les calculs correspondants sont traités en intervenant la subroutine **OWCQM** dans laquelle :

- la subroutine **ROOTS** permet de calculer les racines de l'équation du déterminant de la matrice de l'opérateur adjoint  $B^*$ . Pour les problèmes de consolidation la seule racine s'obtient dans la même subroutine, tandis que pour les problèmes dynamiques le couple de racines est calculé en appelant la subroutine **ROOTSATDYN**.
- la subroutine **DCBKS** permet d'évaluer une série de fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce d'ordre de nombre réel  $n$  à arguments *complexes*.
- la subroutine **WSATQSTFSOLG** calcule les solutions fondamentales en déplacements/pression pour les problèmes quasi-statiques (5.129-5.132) pour chaque point de Gauss.
- la subroutine **WSATQSTFSOLF** calcule les solutions fondamentales en tractions/flux pour les problèmes quasi-statiques (5.139-5.142) pour chaque point de Gauss.
- la subroutine **WSATDYNFSOLG** calcule les solutions fondamentales en déplacements/pression pour les problèmes dynamiques (5.56-5.59) pour chaque point de Gauss.
- la subroutine **WSATDYNFSOLF** calcule les solutions fondamentales en tractions/flux pour les problèmes dynamiques (5.86-5.90) pour chaque point de Gauss.
- la subroutine **DFFTCF** calcule les  $N$  coefficients complexes  $\omega_n$  (7.28-7.29) par la technique de transformée de Fourier rapide (FFT).

En ce qui concerne la modélisation pour les sols *non-saturés* ( $ibem = 3$ ), on suppose que la variation des variables est constante dans chaque pas de temps. Celle-ci nécessite d'évaluer les valeurs de l'indice des vides et du degré de saturation en eau dans chaque pas de temps  $n$  en utilisant les valeurs nodales de déplacements, de pressions d'eau et de pressions d'air obtenues par la résolution du système dans le pas de temps antécédent  $n - 1$ . Ces valeurs sont comptées comme étant les valeurs initiales pour le nouveau pas de temps. Ces opérations sont effectuées sur chaque élément de frontière dans la subroutine **DMATUELAS** existante dans la subroutine **GHMATDI** en faisant intervenir les subroutines suivantes :

- **STATEVT** dans laquelle la valeur de l'indice des vides s'obtient en utilisant la surface d'état «  $e$  ».
- **STATEST** dans laquelle la valeur du degré de saturation en eau s'obtient en utilisant la courbe de rétention «  $S_r$  ».

Grâce à ces valeurs, on peut calculer dans la subroutine **DMATUELAS** les autres paramètres mécaniques/hydrauliques du problème comme le module tangent d'élasticité  $E_t$ , le module de compressibilité volumique  $K_0$ , les coefficients de Lamé  $(\lambda, \mu)$ , puis la matrice de rigidité élastique linéaire  $\mathbf{D}$ ,  $\beta_{suc}$  et  $F^{suc}$  dans chaque pas de temps. Également, les valeurs de perméabilités à l'eau et à l'air s'obtiennent respectivement dans les subroutines **PERWT** et **PERAT**.

Avec les paramètres mécaniques/hydrauliques obtenus dans chaque pas de temps on calcule les solutions fondamentales pour les sols non-saturés soumis aux chargements dynamiques et quasi-statiques dans la subroutine **OWCQM** comme montré dans la figure (8.5). Dans cette subroutine, le couple de racines complexes de l'équation du déterminant de la matrice de l'opérateur adjoint  $\mathbf{B}^*$  pour les problèmes de consolidation (6.175) ainsi que les 4 racines complexes pour les problèmes dynamiques (6.36) s'obtiennent respectivement dans les subroutines **ROOTQST** et **ROOTDYN** existantes dans **ROOTS**. Alors, les fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce d'ordre  $n$  à arguments *complexes* existantes dans les expressions des solutions fondamentales dans le domaine de Laplace seront évaluées dans la subroutine **DCBKS**. À cette étape, les solutions fondamentales en déplacements/pressions et en tractions/flux pour les problèmes quasi-statiques et dynamiques seront calculées pour chaque point de Gauss respectivement dans les subroutines **WUNSATQSTFSOLG**, **WUNSATQSTFSOLF**, **WUNSATDYNFSOLG** et **WUNSATDYNFSOLF**. Finalement, les  $N$  coefficients complexes  $\omega_n$  (7.28-7.29) seront évalués par la technique de transformée de Fourier rapide (FFT) dans la subroutine **DFFTCF**.

### 8.3 Validation du code « HYBRID »

La validation des différentes parties du code de calcul HYBRID est traitée en réalisant plusieurs cas test dans les travaux originaux de Kamalian [193] et de Nguyen [262] comme répertorié dans le tableau (8.2).

Dans la présente section, nous nous intéressons à valider et à vérifier les développements effectués dans la partie des éléments de frontière (BEM) du code de calcul HYBRID. Les développements dans la partie BEM sont effectués afin de traiter les problèmes de propagation d'ondes 2D ainsi que les problèmes de consolidation dans les milieux poreux saturés et non-saturés. L'application de ce code aux calculs d'effets de site sismiques est abordée dans la partie suivante.

#### 8.3.1 Problème de consolidation dans les sols saturés

Pour montrer la précision et la robustesse des formulations proposées pour les problèmes de consolidation dans les sols saturés, la réponse en déplacement ainsi que la distribution de pression interstitielle d'une colonne de sol saturé sont comparées avec une solution analytique [113]

| méthode<br>d'analyse |     | type de<br>chargement | type de<br>domaine | type de<br>sol | loi de comportement   |                           |                       |
|----------------------|-----|-----------------------|--------------------|----------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------|
|                      |     |                       |                    |                | FEM                   |                           | BEM                   |
| FEM                  | BEM |                       |                    |                | élastique<br>linéaire | élastique<br>hyperbolique | élastique<br>linéaire |
| *                    |     | statique              | borné              | sec            | *                     | *                         |                       |
| *                    |     | consolidation         | borné              | saturé         | *                     | *                         |                       |
| *                    |     | dynamique             | borné              | saturé         | *                     | *                         |                       |
|                      | *   | statique              | borné              | sec            |                       |                           | *                     |
|                      | *   | statique              | infini             | sec            |                       |                           | *                     |
|                      | *   | statique              | semi-infini        | sec            |                       |                           | *                     |
|                      | *   | dynamique             | borné              | sec            |                       |                           | *                     |
|                      | *   | dynamique             | semi-infini        | sec            |                       |                           | *                     |
|                      | *   | dynamique             | semi-infini        | saturé         |                       |                           | *                     |
| *                    | *   | statique              | borné              | sec/sec        | *                     |                           | *                     |
| *                    | *   | statique              | semi-infini        | sec/sec        | *                     |                           | *                     |
| *                    | *   | dynamique             | semi-infini        | sec/sec        | *                     |                           | *                     |
| *                    | *   | dynamique             | semi-infini        | saturé/sec     | *                     |                           | *                     |

Tableau 8.2 — Validation des différentes parties du code de calcul HYBRID

et un calcul par éléments finis (FEM)<sup>1</sup> comme mentionné dans [297].

La simulation à l'aide du code de calcul HYBRID a été réalisée sur une colonne de sol de  $3m$  de hauteur ( $H = 3m$ ), maillée par 32 éléments quadratiques à 3 noeuds sur la frontière et en tout 64 noeuds (Fig. 8.6).

La charge appliquée sur le bord supérieur est une pression longitudinale, brutale et constante  $t_y = -1N/m^2 H(t)$  qui est distribuée de façon uniforme. Elle reste également constante au cours du phénomène de consolidation.

Comme les conditions aux limites, le bord inférieur est verticalement fixé. Concernant les déplacements sur les bords latéraux, ils sont uniquement bloqués dans le sens horizontal. De plus, la surface supérieure où la charge est appliquée est supposée être perméable, c.-à-d., la pression interstitielle est nulle, tandis que les autres bords comprenant les bord latéraux et le bord inférieur sont imperméables, c.-à-d., il n'y a pas de flux d'eau à travers ces limites.

Les maillages de BEM et de FEM sont montrés dans la figure (8.6) sur la quelle les carrés sur la frontière indiquent les 64 noeuds de la BEM, alors que les lignes fines indiquent les 48 éléments linéaires utilisés pour la FEM.

Concernant les propriétés mécaniques et hydrauliques du massif, on les résume dans le tableau (8.3).

Sur la figure (8.7), les déplacements verticaux calculés au point central de la surface supérieure

<sup>1</sup>le code aux éléments finis DIANA-SWANDYNE II à partir du site <http://www.bham.ac.uk/CivEng/swandyne> est utilisé

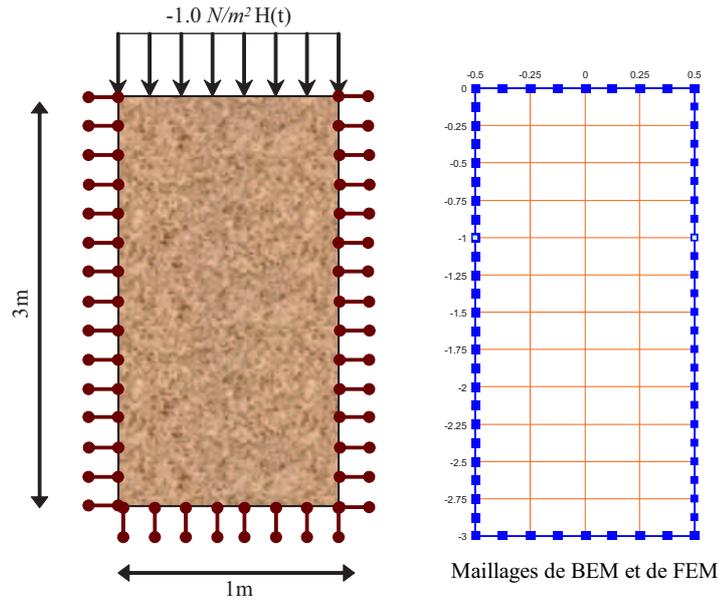


Figure 8.6 — Colonne de sol saturé

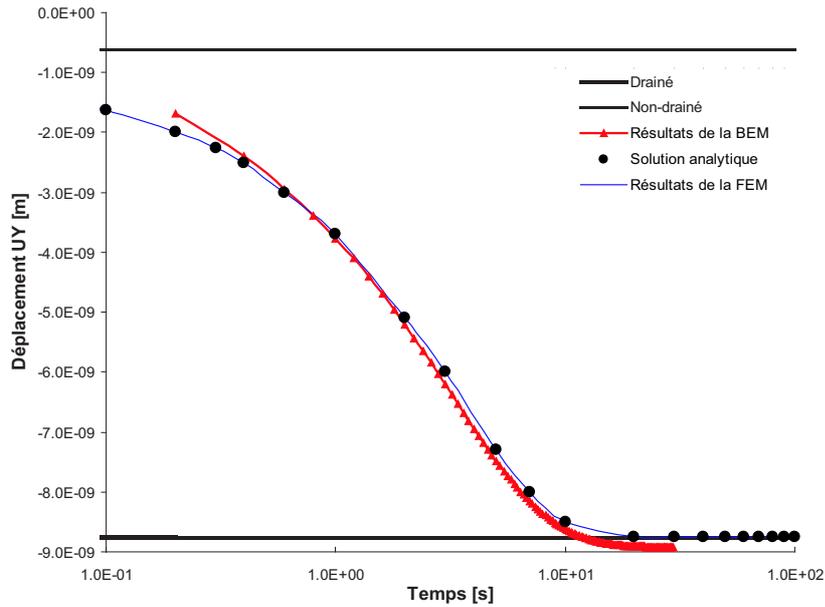
| $G(N/m^2)$        | $\nu(-)$ | $n(-)$ | $\alpha(-)$ | $\nu_u(-)$ | $\kappa(m^4/N.s)$     |
|-------------------|----------|--------|-------------|------------|-----------------------|
| $9.8 \times 10^7$ | 0.298    | 0.48   | 0.980918    | 0.49       | $3.55 \times 10^{-9}$ |

Tableau 8.3 — données matérielles d'un sol saturé (sable grossier)

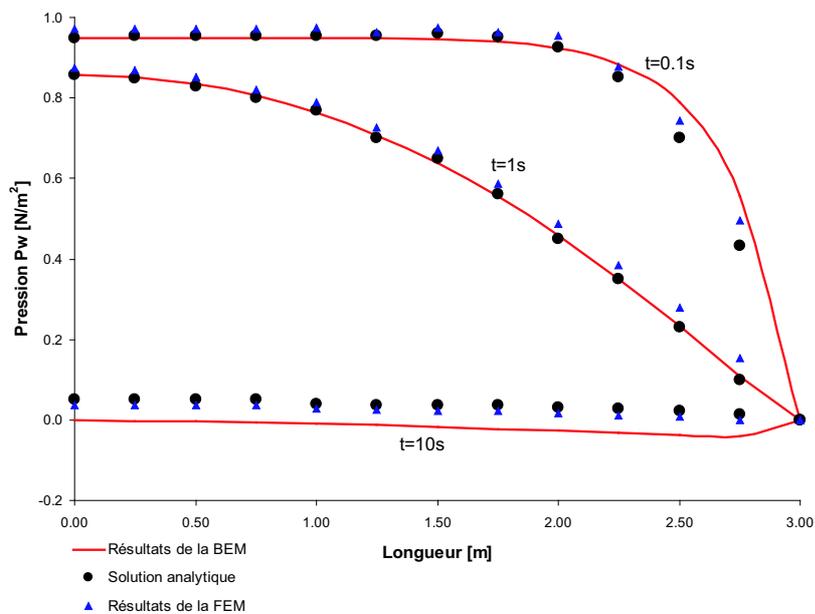
sont tracés par rapport au temps pour la solution analytique, les résultats de la BEM et les résultats de la FEM.

Outre les résultats proélastiques, comme des limites supérieure et inférieure, deux solutions élastostatiques sont présentées, c'est-à-dire, les solutions élastostatiques drainées et non-drainées qui sont données pour comparaison. Comme on peut le constater la concordance est très satisfaisante.

Également, dans la figure (8.8) la solution en pression pour les deux méthodes numériques et le résultat analytique sont tracés le long de la ligne médiane de la colonne pour trois moments différents :  $t = 0.1s$ ,  $t = 1s$  et  $t = 10s$ . Comme on peut le constater, il y a un bon accord entre les résultats obtenus par la méthode des éléments de frontière avec les résultats numériques de la FEM et la solution analytique.



*Figure 8.7* — Déplacement vertical au point central de la surface supérieure tracé par rapport au temps : les résultats de la BEM sont comparés avec ceux de la FEM et la solution analytique



*Figure 8.8* — Pression le long de la ligne médiane de la colonne : les résultats de la BEM sont comparés avec ceux de la FEM et la solution analytique pour trois moments différents

### 8.3.2 Problème de propagation d'ondes 2D dans les sols saturés

Dans cette section, on s'intéresse à étudier la précision et la robustesse des formulations proposées pour les problèmes de propagation d'ondes 2D dans les sols saturés. À cette fin, les réponses en déplacement ainsi qu'en pression interstitielle d'une colonne de sol saturé (Fig. 8.6) sont comparées avec la solution analytique obtenue par [298].

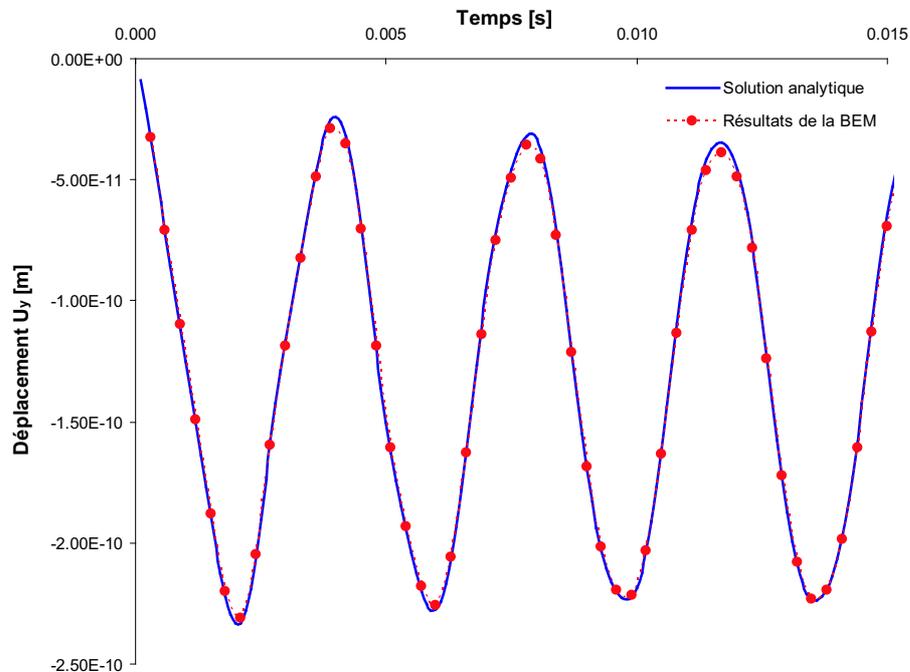
Les conditions aux limites et le type de chargement sont comme ceux expliqués dans la section précédente (8.3.1).

Concernant les propriétés mécaniques et hydrauliques du massif, on les résume dans le tableau (8.4).

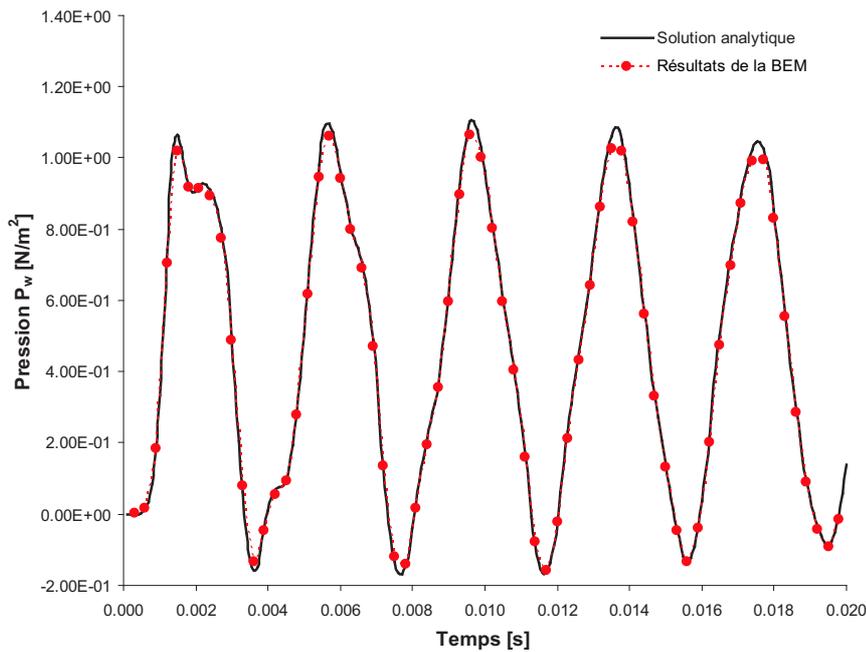
Les figures (8.9) et (8.10) présentent respectivement les déplacements verticaux au point central de la surface supérieure et la pression interstitielle au point central de la surface inférieure par rapport au temps. Ces résultats numériques sont comparés avec les solutions analytiques existantes dans la littérature [298]. Comme on peut le constater, il y a un bon accord entre les résultats obtenus par la méthode des éléments de frontière avec la solution analytique.

| $E(N/m^2)$            | $\nu(-)$ | $n(-)$ | $\alpha(-)$ | $R(N/m^2)$        | $\kappa(m^4/N.s)$     | $\rho(kg/m^3)$ | $\rho_f(kg/m^3)$ |
|-----------------------|----------|--------|-------------|-------------------|-----------------------|----------------|------------------|
| $1.44 \times 10^{10}$ | 0        | 0.19   | 0.86        | $4.7 \times 10^8$ | $1.9 \times 10^{-10}$ | 2458           | 1000             |

**Tableau 8.4** — données matérielles d'un sol saturé (grès de Berea)



**Figure 8.9** — Déplacement vertical au point central de la surface supérieure tracé par rapport au temps : les résultats de la BEM sont comparés avec la solution analytique



**Figure 8.10** — Pression au point central de la surface inférieure tracée par rapport au temps : les résultats de la BEM sont comparés avec la solution analytique

### 8.3.3 Comparaison avec le cas élastostatique

À l'état de l'art actuel, cette recherche est le premier effort pour développer les formulations concernant le problème de consolidation dans les sols non-saturés. Également, la complexité du modèle de couplage hydro-mécanique dans les milieux poreux non-saturés soumis aux chargements quasi-statiques aboutit au fait qu'aucune solution analytique n'est connue. Par conséquent, les résultats obtenus par éléments de frontière pour le modèle de consolidation dans les sols non-saturés seront vérifiés partiellement à partir de résultats élastostatiques. Il s'agit de simulation purement mécanique. Dans ce cas, on bloque les degrés de liberté nodaux relatifs à la pression d'eau et à la pression d'air.

On considère une colonne de sol de  $3m$  de hauteur, maillée par 32 éléments quadratiques sur la frontière et en tout 64 noeuds (Fig. 8.11). On applique sur la surface supérieure une pression longitudinale, brutale et constante  $t_y = -1N/m^2H(t)$  qui est distribuée de façon uniforme. Sur les parois latérales les déplacements normaux sont empêchés, alors que sur le bord inférieur ils sont bloqués dans le sens vertical. De plus, tous les bords sont supposés être perméables, c.-à-d., la pression d'eau est nulle. Également, la pression d'air est supposée être égale à zéro.

Concernant les propriétés mécaniques et hydrauliques du massif, on les résume dans le tableau (8.5).

Dans la figure (8.12), on a présenté les déplacements verticaux des noeuds situés sur les parois latérales et sur la ligne médiane de la colonne pour les différents niveaux à partir de la surface supérieure jusqu'à la base inférieure. Comme on peut le constater les déplacements des noeuds

|                       |                      |             |                      |                        |                       |
|-----------------------|----------------------|-------------|----------------------|------------------------|-----------------------|
| $E(N/m^2)$            | $K_0(N/m^2)$         | $a_e(-)$    | $b_e(-)$             | $e_0(-)$               | $\sigma_e(N/m^2)$     |
| $2.54 \times 10^{10}$ | $2.1 \times 10^{10}$ | 1.0         | 0.15                 | 0.73                   | $8.5 \times 10^8$     |
| $a_w(m/s)$            | $\alpha_w(-)$        | $S_{ru}(-)$ | $b_a(m^2)$           | $\mu_a(Ns/m^2)$        | $a_s(m^2/N)$          |
| $1.2 \times 10^{-8}$  | 5.0                  | 0.05        | $1.0 \times 10^{-8}$ | $1.846 \times 10^{-5}$ | $-5.0 \times 10^{-7}$ |

Tableau 8.5 — données matérielles d'un sol non-saturé

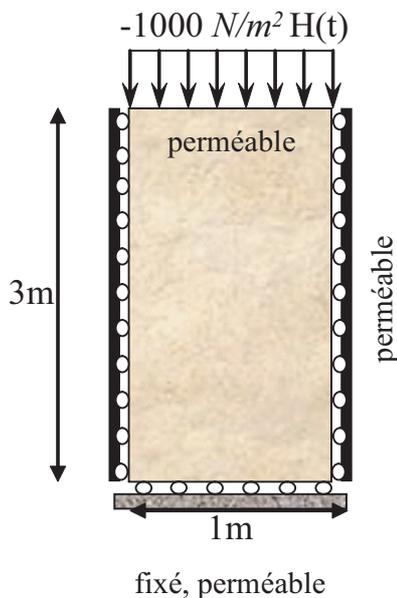


Figure 8.11 — Colonne de sol non-saturé

situés sur chaque niveau sont de même valeur et donc les déplacements des bords droit et gauche sont symétriques. Également, les valeurs absolues des déplacements verticaux diminuent d'une façon régulière en descendant de la surface supérieure jusqu'à la base inférieure.

Afin de comparer avec le cas élastostatique, les valeurs absolues des déplacements verticaux le long de la ligne médiane de la colonne ainsi que celles du cas élastostatique sont tracées dans la figure (8.13). On constate que la concordance est très satisfaisante.

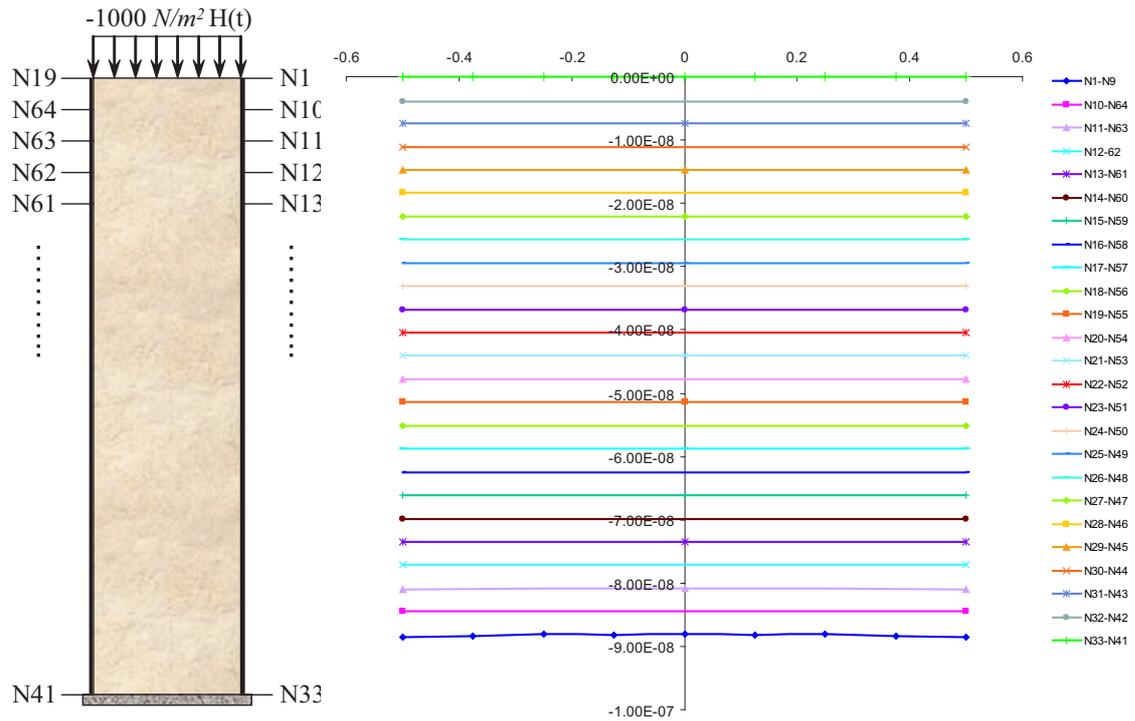


Figure 8.12 — Déplacements verticaux des noeuds situés sur les parois latérales et sur la ligne médiane de la colonne pour les différents niveaux

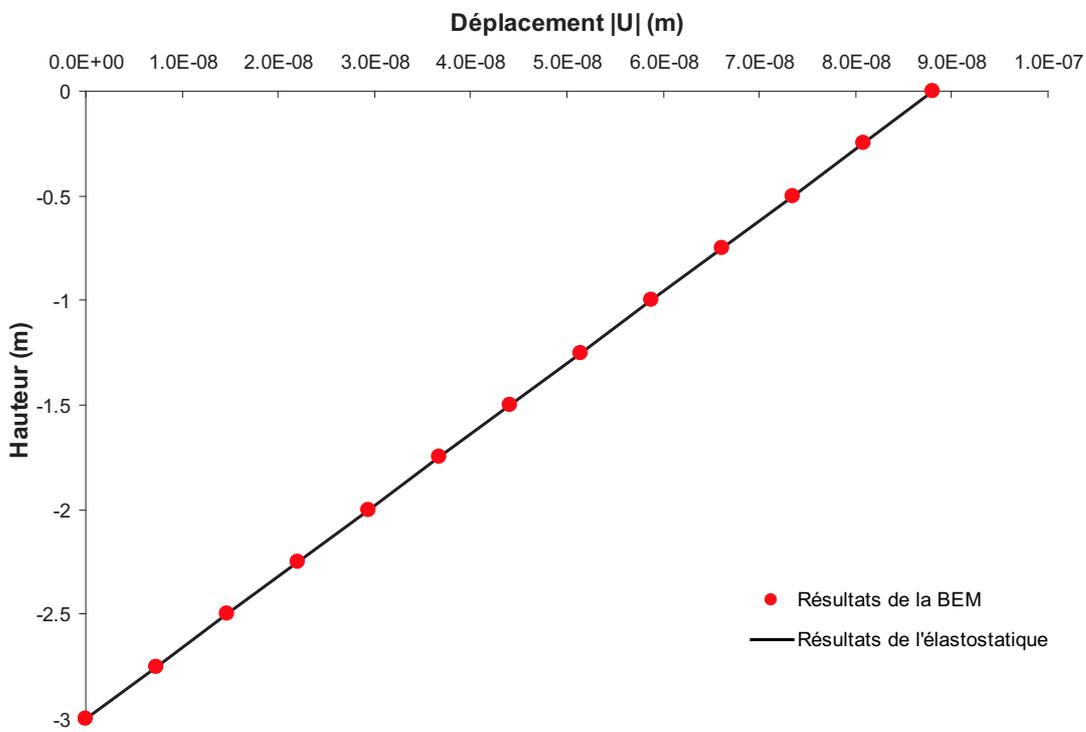


Figure 8.13 — Déplacements verticaux le long de la ligne médiane de la colonne : les résultats de la BEM non-saturée sont comparés avec ceux de l'élastostatique

### 8.3.4 Comparaison avec le cas élastodynamique

Comme expliqué ci-dessus, cette recherche est le premier effort pour développer les formulations concernant le problème de propagation d'ondes 2D dans les sols non-saturés. La complexité du modèle concernant le couplage hydro-mécanique dans les milieux poreux non-saturés soumis aux chargements dynamiques aboutit au fait qu'aucune solution analytique n'est connue. Par conséquent, les résultats obtenus par éléments de frontière pour le modèle dynamique dans les sols non-saturés seront vérifiés partiellement à partir de résultats élastodynamiques. Il s'agit de simulation purement mécanique. Dans ce cas, on bloque les degrés de liberté nodaux relatifs à la pression d'eau et à la pression d'air.

L'échantillon considéré et les conditions aux limites sont comme ceux expliqués dans la section précédente. La charge appliquée est une pression verticale, brutale et constante uniformément répartie sur la surface supérieure.

Le résultat du calcul numérique par éléments de frontière pour le point central de la surface supérieure est comparé à celui élastodynamique. On observe un bon accord entre la solution élastodynamique et la solution numérique résolue par la formulation proposée.

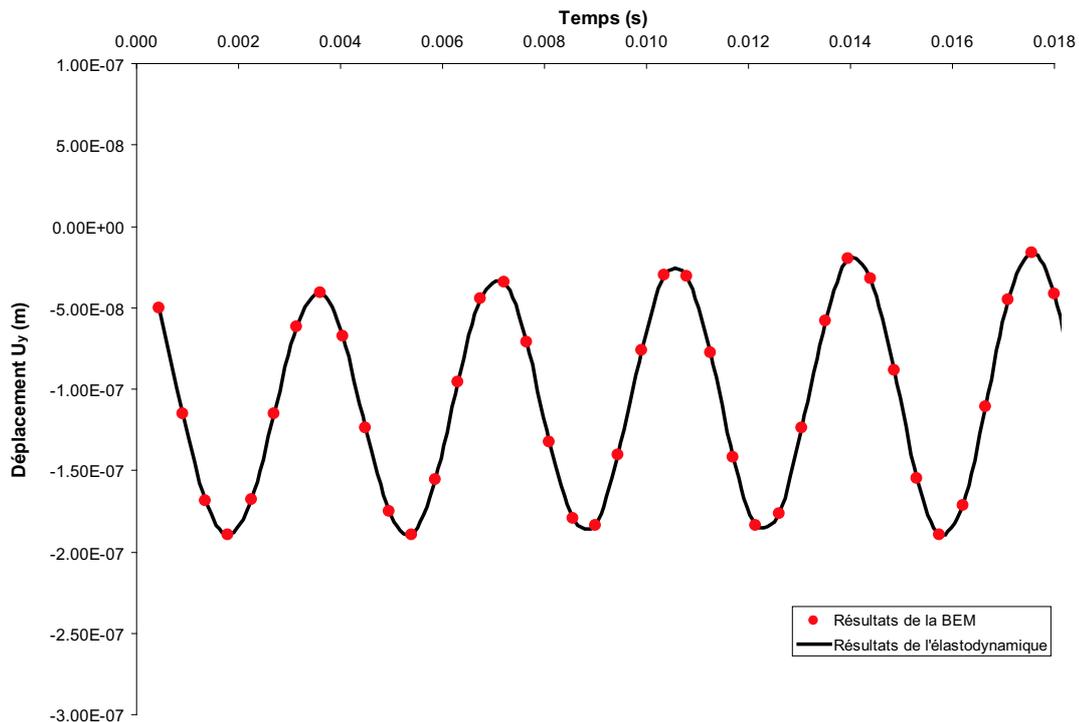


Figure 8.14 — Déplacements verticaux obtenus pour le point central de la surface supérieure de la colonne : les résultats de la BEM non-saturée sont comparés avec ceux de l'élastodynamique



## **Quatrième partie**

### **Application aux Calculs Sismiques**



# CHAPITRE 9

---

## Effets topographiques et sédimentaires sur l'amplification d'un mouvement sismique

CE chapitre vise à caractériser et à quantifier les effets de site dans des configurations bi-dimensionnelles dans le domaine spectral. Il s'agit de prendre en compte les influences combinées de la topographie et de la géologie sur la réponse sismique de vallées alluviales. L'étude paramétrique est réalisée grâce au programme de simulation numérique HYBRID présenté dans le chapitre précédent. Le but recherché est de définir un critère simple combinant les caractéristiques géométriques et les caractéristiques du sol, permettant de prédire l'amplification du spectre de réponse en accélération dans des vallées sédimentaires aussi bien que vides. À cette fin, nous commençons par des généralités sur les effets de sites, puis abordons les différentes méthodes utilisées pour l'étude des effets de site, les phénomènes physiques en jeu et l'influence des différents paramètres à prendre en compte pour les effets de site topographiques et sédimentaires.

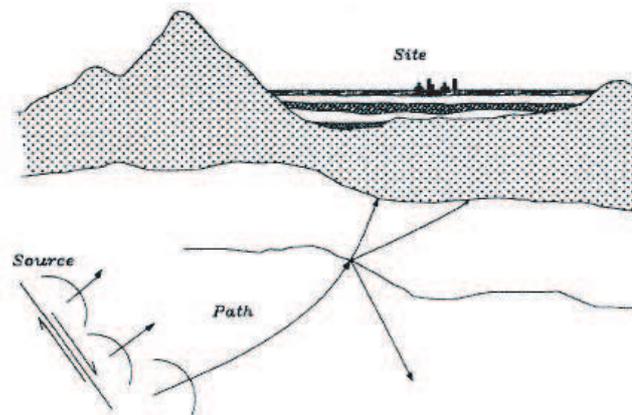
### 9.1 Introduction et bibliographie

#### 9.1.1 Généralité sur les Effets de site

Quand un séisme se produit par la rupture d'une faille en profondeur, les ondes sismiques sont rayonnées par la source et se propagent rapidement dans la croûte terrestre. Durant leur parcours de la source du séisme jusqu'à la surface du sol, les ondes sismiques traversent en grande majorité de la roche. Mais la portion finale de ce voyage est souvent effectuée dans le sol, dont les caractéristiques peuvent beaucoup influencer la nature de la secousse à la surface. Les caractéristiques de la source sismique (par exemple, le moment sismique, la chute de contrainte, le mécanisme, les caractéristiques des fractures et le contenu spectral de l'énergie libérée) peuvent avoir une influence non négligeable sur les effets de site. Le chemin de propagation dépend de l'amplitude des ondes sismiques, du type des ondes et de l'angle d'incidence du champ sismique

sur le site analysé. Le type, la profondeur et la taille de la faille, les propriétés physiques de la croûte et les propriétés géophysiques du sol affleurant se combinent et affectent simultanément la réponse du site. En bref, le mouvement sismique induit en surface d'un site donné dépend de la magnitude du séisme (l'énergie produite par la source), mais aussi du chemin parcouru dans la lithosphère (aléa régional) et des conditions locales (aléa local) (Fig. 9.1).

L'aléa régional (effet de la source et du chemin parcouru) peut être calculé à partir de formules empiriques en connaissant les failles sismogènes et la magnitude maximale possible des séismes qu'elles peuvent engendrer. Dans cette étude nous nous intéressons à l'aléa local (effet de site).



*Figure 9.1* — Facteurs influant sur le signal sismique : Source, chemin et conditions locales

On appelle *effet de site* la modification du mouvement sismique en surface due aux conditions géotechniques et topographiques locales d'un site par rapport au mouvement d'un site voisin correspondant à des conditions de références (la définition la plus courante du site de référence étant le rocher plat). Les rapports des amplitudes spectrales de différents sites (au sommet de la colline et à l'intérieur du bassin sédimentaire) à celui de référence illustre cette définition (figure 9.2).

L'endommagement peut être très variable à l'intérieur d'une zone peu étendue, et des dommages importants peuvent toucher des sites éloignés de la source du séisme. Parfois cela peut être en raison des différents types de construction, mais, dans beaucoup de cas, les conditions topographiques et géologiques du site ont une grande influence sur l'intensité des secousses (Fig. 9.3). C'est la raison pour laquelle on voit souvent un bâtiment lourdement endommagé à côté d'un bâtiment de construction similaire qui n'a pas été affecté.

Plusieurs séismes ont permis de mettre en évidence ce phénomène, le plus célèbre étant le séisme de Michoacan (Mexique), en 1985, de Magnitude 8.1  $M_s$ , qui a causé d'importants dégâts dans la ville de Mexico située à environ 400 km de l'épicentre (Fig. 9.4). L'accélération maximale enregistrée dans la vallée a été multipliée par cinq par rapport à un site proche situé sur le rocher. Une autre preuve est le cas du séisme de Bam (Iran) en 2004 (Fig. 9.5). Ce séisme de magnitude 6.6 sur l'échelle de Richter est d'une extrême violence car le foyer du séisme se trouvait à une profondeur de 10 km, ce qui explique en partie la gravité des dégâts. D'autres

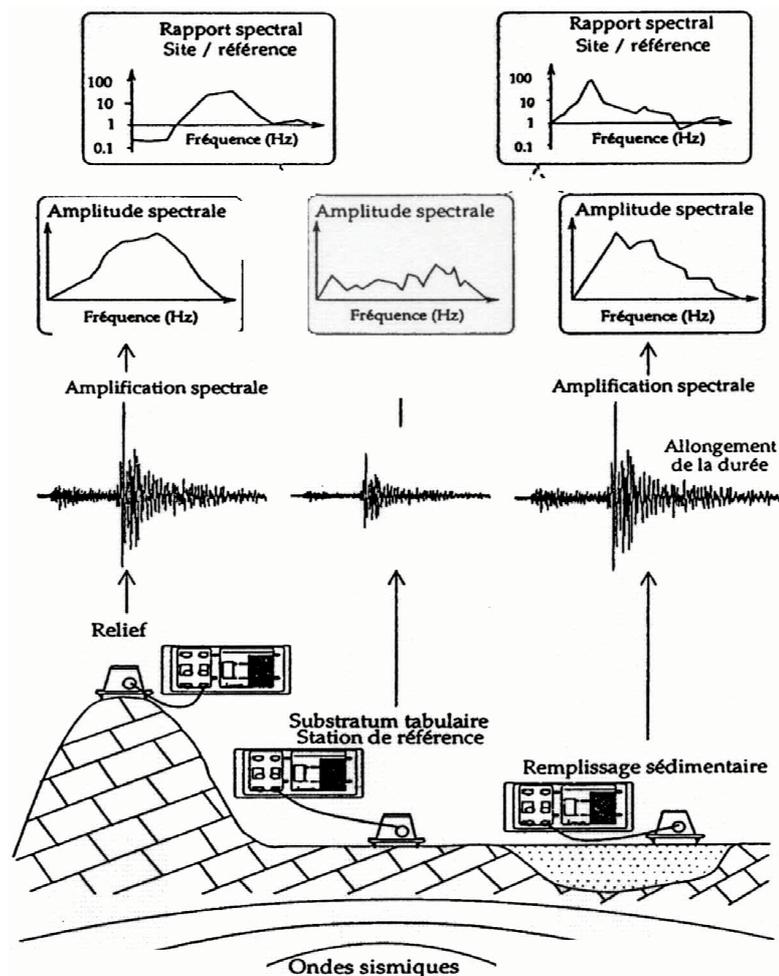


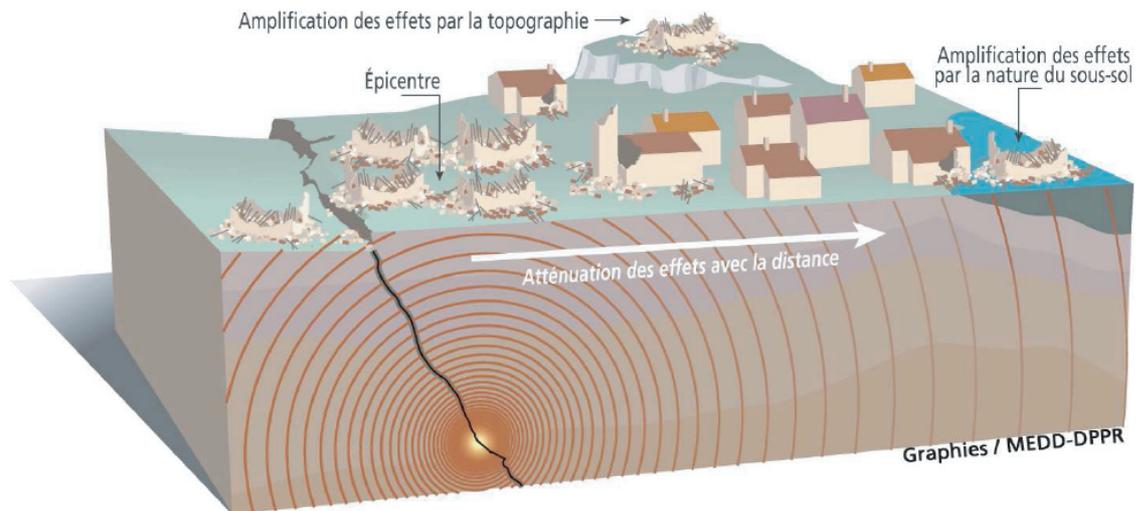
Figure 9.2 — Définition de l'effet de site (extrait de [120]).

exemples célèbres sont les séismes de Loma Prieta en 1989, de Northridge en 1994 où la colline de Tarzana a subit une accélération 2 à 4 fois supérieure aux sites voisins et d'Izmit en 1999.

### 9.1.1.1 Effets de site dans les remplissages sédimentaires

L'influence des caractéristiques géologiques locales du sol sur l'intensité des secousses sismiques et sur l'ampleur des dommages dus aux tremblements de terre est connue depuis de nombreuses années. L'endommagement dû au séisme est généralement plus grand en présence de sédiments mous que sur des affleurements rocheux rigides [5]. L'endommagement associé aux dépôts mous peut causer des augmentations d'intensité locales aussi grandes que 2, ou même 3 degrés sur les échelles MM, MSK (Medvedev-Kàrnik-Sponheuer/européen) ou EMS (l'Échelle Macrosismique européenne).

Plus les sédiments locaux sont mous, plus le signal sismique est amplifié. Pour connaître les propriétés d'amplification d'un site, on peut y mesurer la vitesse des ondes de cisaillement. Les vitesses les plus faibles caractérisent des sols plus mous et donc, les plus grandes amplifications. Par conséquent, les zones où les vitesses de cisaillement sont faibles, (i.e. les vitesses des ondes



**Figure 9.3** — L'amplitude du signal sismique peut être localement amplifiée par la topographie (phénomène appelé « effet de site topographique ») et par la nature des couches géologiques du sous-sol (phénomène appelé « effet de site lithologique »)

S) l'endommagement est généralement plus important. Cependant, la faible vitesse des ondes de cisaillement n'est pas un critère suffisant pour établir la cartographie des zones potentiellement à risque. Le signal sismique est plus influencé par la configuration en bassin sédimentaire (comme la Vallée de San Fernando) que par la simple présence d'alluvions molles près de la surface. Les interactions complexes entre la structure de la cuvette et les ondes sismiques propagées peuvent augmenter l'amplitude et la durée de la secousse sismique. Les réflexions, les réfractations et les diffractations peuvent aboutir à une concentration des ondes à leur arrivée au fond de la cuvette. De plus, les bords des cuvettes peuvent piéger les ondes sismiques incidentes, et peuvent ainsi augmenter la durée des secousses dans le bassin sédimentaire.

Par conséquent, le principal phénomène responsable de l'amplification du mouvement du sol en présence de sédiments mous est le piégeage des ondes sismiques à l'intérieur du bassin en raison du contraste d'impédance entre la couche de sédiments et le lit rocheux. L'impédance est le produit de la vitesse de l'onde sismique par la masse volumique du sol traversé. Dans une modélisation unidimensionnelle, le piégeage dans les strates du sol n'affecte que les ondes volumiques se propageant verticalement dans les couches de surface. Dans les modèles bi- ou tridimensionnels, des hétérogénéités latérales comme des variations d'épaisseur peuvent aussi influencer le piégeage des ondes de surface qui sont diffractées, et réfléchies au bord du bassin (Fig. 9.6). Par conséquent, on distingue généralement des effets de site 1D (*effets de stratigraphie*) et des effets 2D ou 3D (*effets de bassin sédimentaire*).

### Effet de site stratigraphique 1D

Lorsque les variations latérales des propriétés géotechniques sont négligeables, on considère

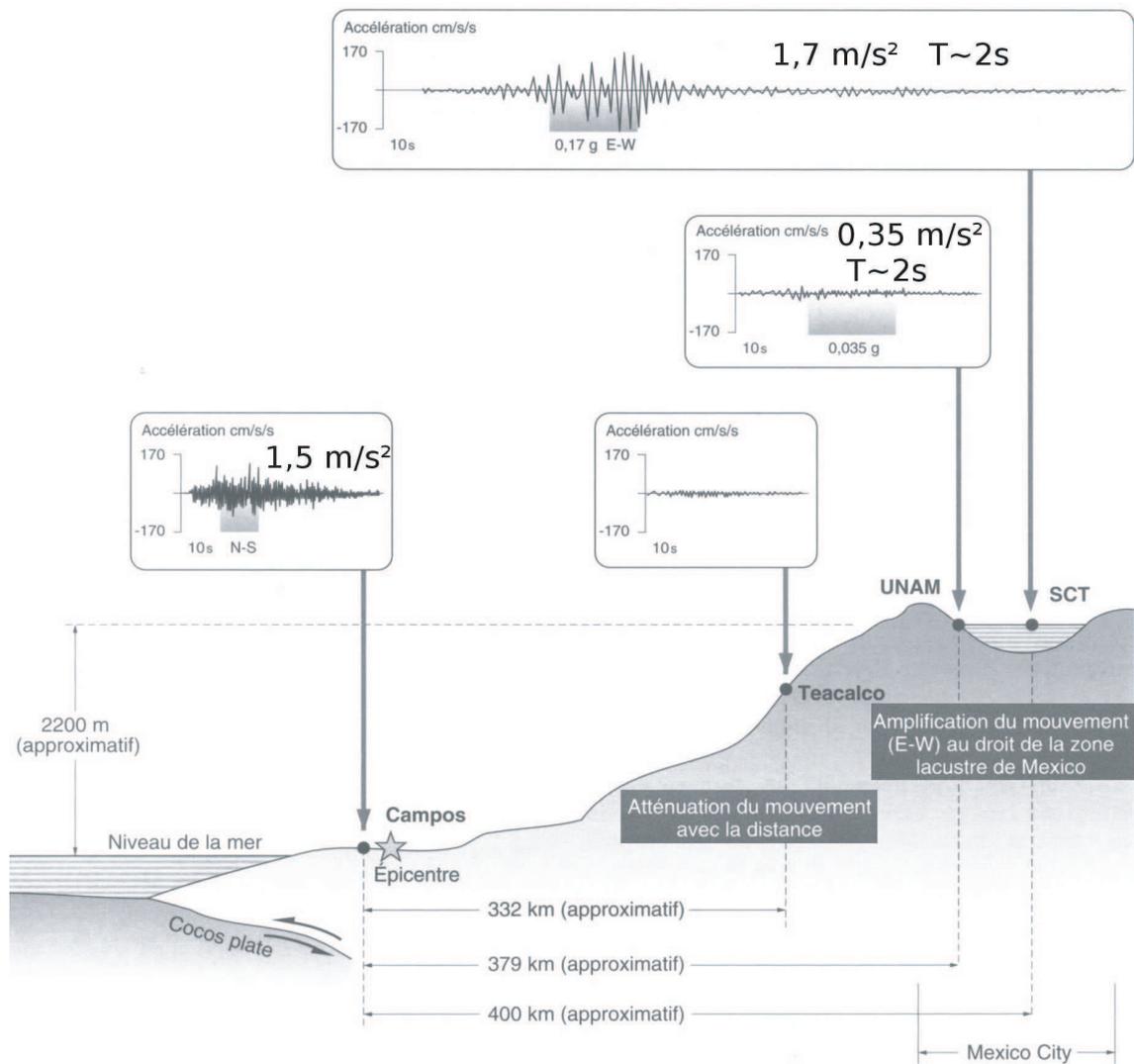


Figure 9.4 — Séisme de Michoacan du 19 septembre 1985



(a) avant le tremblement de terre



(b) après le tremblement de terre

Figure 9.5 — Images de la citadelle de Bam avant et après tremblement de terre

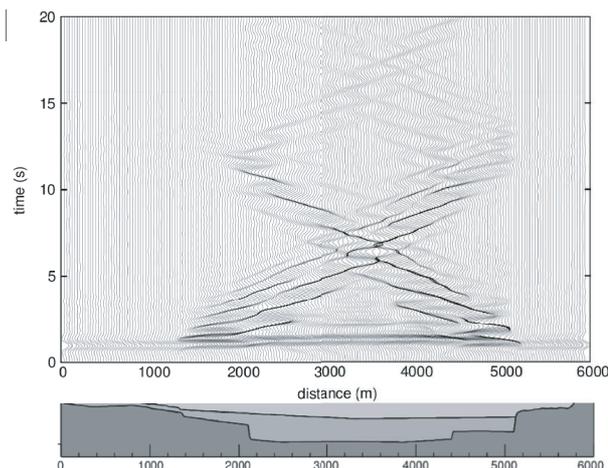


Figure 9.6 — Accélérogramme synthétique montrant l'apparition d'ondes de surface [304]

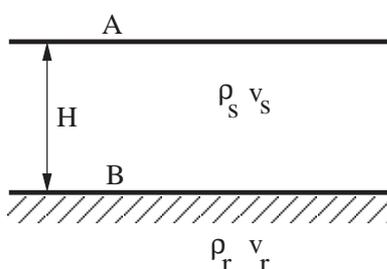


Figure 9.7 — Géométrie de la couche sédimentaire

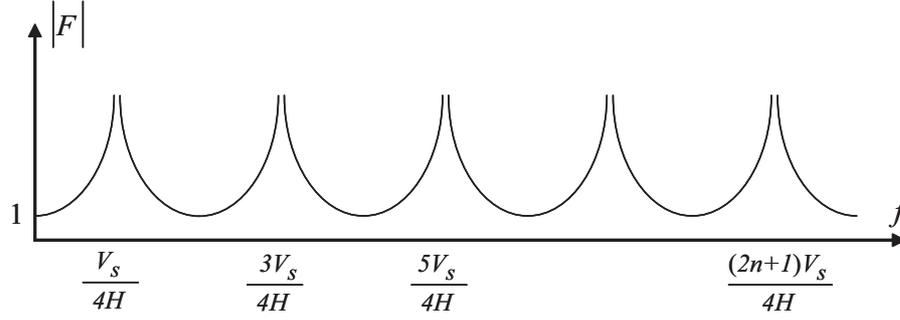
une superposition de couches horizontales, homogènes, d'épaisseur constante sur un substratum rocheux. Comme la rigidité des sols augmente généralement avec la profondeur, les raisismiques tendent à se redresser à chaque interface entre deux couches de sol. Les ondes atteignent finalement la surface sous une incidence quasi verticale. C'est pourquoi la modélisation en colonnes de sol verticales est couramment utilisée. Cette représentation sert de base à tous les codes de calcul qui prennent en compte l'effet de site géologique à l'heure actuelle.

Les principaux résultats de la théorie unidimensionnelle sont résumés dans [262]. Considérons une couche de sédiments d'épaisseur  $H$  au dessus d'un substratum rocheux semi-infini élastique soumis à l'incidence d'une onde SV plane harmonique (Fig. 9.7).

$k_s$  et  $\alpha$  étant respectivement le nombre d'onde relatif au sédiment  $k_s = 2\pi f/v_s$  (dans laquelle  $v_s$  est la vitesse de propagation de l'onde SV et  $f$  désigne la fréquence prédominante de l'excitation) et le rapport d'impédance entre la couche et le substratum rocheux  $(\rho_s v_s)/(\rho_r v_r)$  et en prenant le déplacement du substratum rocheux comme référence, le déplacement superficiel d'un sol non-amorti est amplifié de :

$$\frac{u_A}{u_B} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(k_s H) + \alpha^2 \sin^2(k_s H)}} \quad (9.1)$$

L'amplification maximale du mouvement en surface se produit pour des fréquences caractéris-



**Figure 9.8** — Fréquences de résonance d'une couche sédimentaire non-amortie sur un substratum élastique

tiques de la résonance de la couche superficielle (Fig. 9.8) :

$$f_n = (2n + 1) \frac{v_s}{4H} \quad (9.2)$$

La valeur maximale de l'amplitude aux fréquences de résonance vaut :

$$\left( \frac{u_A}{u_B} \right)_{max} = \frac{1}{\alpha} \quad (9.3)$$

Il faut remplacer  $v$ ,  $k$  et  $\alpha$  respectivement par les grandeurs complexes :

$$v^* = v(1 + i\xi), \quad k^* = k(1 - i\xi), \quad \alpha^* = \frac{\rho_s v_s^*}{\rho_r v_r^*} \quad (9.4)$$

Si le terrain comporte plusieurs matériaux élastiques, on caractérise la couche  $i$  par son épaisseur  $h_i$ , la masse volumique  $\rho_i$ , la rigidité  $G_i$  et l'amortissement  $\xi_i$ . Le déplacement provoqué par une onde de cisaillement qui se propage verticalement est du type :

$$u_i(z = z_i, t) = (A_i \exp(+ik_i^* h_i) + B_i \exp(-ik_i^* h_i)) \exp(i\omega t) \quad (9.5)$$

En écrivant la continuité des contraintes et des déplacements à chaque interface, on trouve :

$$\begin{cases} A_{i+1} = \frac{1}{2} A_i (1 + \alpha_i^*) \exp(+ik_i^* h_i) + \frac{1}{2} B_i (1 - \alpha_i^*) \exp(-ik_i^* h_i) \\ B_{i+1} = \frac{1}{2} A_i (1 - \alpha_i^*) \exp(+ik_i^* h_i) + \frac{1}{2} B_i (1 + \alpha_i^*) \exp(-ik_i^* h_i) \end{cases} \quad (9.6)$$

où  $\alpha_i^* = (\rho_i c_{s i}^*) / (\rho_{i+1} c_{s i+1}^*)$ .

La condition de surface libre donne  $A_1 = B_1$  pour la couche superficielle. Posant  $A_i = a_i(\omega)$  et  $B_i = b_i(\omega)$ , on peut calculer la fonction de transfert entre les couches  $i$  et  $j$  par une démarche récursive :

$$F_{ij}(\omega) = \frac{a_i(\omega) + b_i(\omega)}{a_j(\omega) + b_j(\omega)} \quad (9.7)$$

Bessasson et Kaynia [34] ont étudié l'effet de site provoqué par la présence de lave sur une couche sédimentaire reposant sur un substratum rocheux. La masse volumique de la lave est plus élevée que celle des alluvions. La présence de lave tend donc à augmenter la masse de l'ensemble des couches recouvrant le substratum, et donc à allonger la période fondamentale du site. A contrario, les sédiments se compactent sous le poids de la lave, ce qui augmente la rigidité du sol et diminue la période fondamentale. L'effet de site est donc difficile à prévoir a priori. Le modèle unidimensionnel permet néanmoins de montrer que lorsque l'intensité de la sollicitation sismique augmente [14] :

- la fréquence fondamentale de la colonne de sol diminue (en raison de la dégradation du module de cisaillement du sol avec le niveau de déformation)
- l'amplitude de la réponse décroît (à cause de l'augmentation de l'effet d'amortissement avec la distorsion).

Comme expliqué ci-dessus, deux phénomènes physiques indépendants de la fréquence expliquent l'effet de site géologique *unidimensionnel* [262] :

- lorsque le contraste d'impédance est marqué (i.e.  $\alpha \ll 1$ ) entre les deux milieux, l'amplitude de l'onde réfractée est amplifiée par rapport à celle de l'onde incidente (9.1).
- les ondes sismiques arrivant à la surface se réfléchissent aux interfaces entre différentes couches et restent piégées aux abords de la surface ; de l'énergie est donc piégée à l'intérieur de la couche sédimentaire superficielle.

### **Effet de bassin sédimentaire 2D**

La représentation unidimensionnelle ne peut rendre compte que de phénomènes très locaux. Une modélisation en deux dimensions est nécessaire lorsque les propriétés mécaniques du sol présentent une hétérogénéité latérale ou lorsque l'épaisseur de la couche sédimentaire superficielle varie de façon non négligeable.

Les simulations en 2D donnent des coefficients d'amplification et des durées de réponse plus grands que les calculs en une dimension. Ces différences sont moins significatives lorsque l'on passe d'une géométrie bidimensionnelle à une représentation en trois dimensions. Les problèmes de modélisation spécifiques aux représentations bidimensionnelles concernent la diffraction et les interférences entre les ondes d'une part, et le caractère ouvert de l'espace semi-infini d'autre part [14].

Plusieurs auteurs ont mis en évidence le fait que le mouvement est plus amplifié au centre d'un bassin sédimentaire que si l'on suppose une couche de sol horizontale de même hauteur [125, 69, 241]. Dans certains cas, l'utilisation d'un modèle 2D, même grossier, est préférable à une modélisation 1D très détaillée. On observe que l'amplification est maximale au centre de la vallée pour une fréquence fondamentale. La durée du mouvement est prolongée par rapport à celle du signal incident (Fig. 9.9).

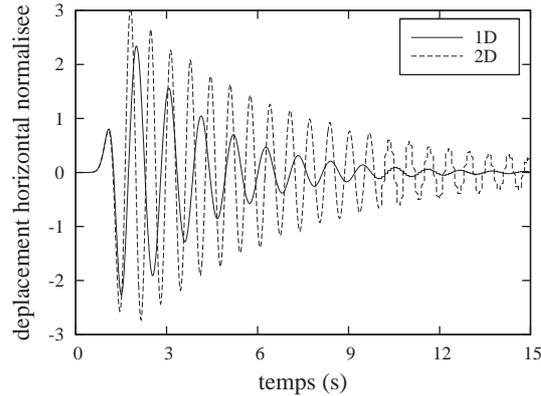


Figure 9.9 — Comparaison des solutions 2D et 1D en domaine temporel [262]

### • Résonance 1D ou résonance 2D

Dans un bassin sédimentaire, les différentes ondes piégées interfèrent et on peut observer des phénomènes de résonance, qui dépendent des caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure. Les ondes sismiques remontant à la surface peuvent être déviées par les petites irrégularités aux interfaces géologiques. Lorsque les ondes traversent une interface courbée, leur vitesse et leur direction changent. Un nouveau changement a lieu à l'interface suivante. L'*effet de convergence* amplifie environ 1.5 fois la secousse à l'endroit où les ondes convergent à la surface. Cet effet est caractéristique de structures géologiques aux propriétés géométriques et géologiques particulières, qui peuvent concentrer l'énergie. L'*effet de divergence* réduit la secousse à environ 0.75 de la valeur du signal véhiculé par l'onde incidente non affectée.

L'un ou l'autre de ces deux effets (piégeage des ondes de volume et génération d'ondes de surface) peut être prépondérant suivant l'élancement de la vallée.

Dans le cas des vallées peu profondes les deux phénomènes sont indépendants alors que pour une vallée profonde, les deux phénomènes peuvent interférer. Un rapport de forme critique  $(H/L)_c$  (rapport de l'épaisseur maximale de la vallée à sa demi-largeur) dépendant du contraste de vitesse  $c_v = v_r/v_s$ , présenté par Bard et Bouchon [24] permet de contrôler le type de résonance d'un bassin sédimentaire soumis à un champ d'ondes SH (Fig. 9.10). Pour les ondes P et SV,  $(H/L)_c$  prend des valeurs différentes [4].

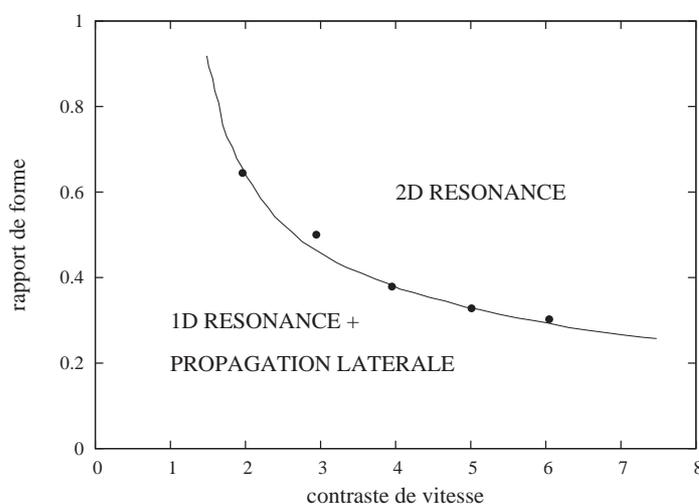
- Si  $(H/L) < (H/L)_c$  : les ondes de surface arrivent plus tard dans la zone centrale de la vallée que les ondes de volume réfléchies ou réfractées. La résonance verticale 1D des ondes de volume et la propagation latérale des ondes de surface influencent le signal sismique séparément. La fréquence de résonance fondamentale de la vallée est alors proche de la fréquence de résonance fondamentale calculée en 1D (9.2) :

$$f_{h0} = \frac{v_s}{4H} \quad (9.8)$$

Les ondes de surface peuvent augmenter considérablement l'amplitude et la durée de la réponse sismique, et rendre le mouvement superficiel spatialement incohérent [14].

- Si  $(H/L) \succ (H/L)_c$  : les deux phénomènes physiques ne se distinguent pas et l'effet de site se traduit par une résonance globale en deux dimensions. Si  $H$  et  $L$  sont du même ordre de grandeur, la longueur des ondes de surface  $\lambda$  est de l'ordre de  $L$ , et des interférences latérales s'ajoutent aux interférences verticales identifiées précédemment.

Des observations [326, 203] sur des vallées instrumentées de rapport de forme 0.2 à 0.3 montrent que ces vallées (considérées comme relativement profondes) ont des modes de résonance spécifiques. En effet la fréquence pour laquelle l'amplification est maximale est la même pour tous les points de la vallée, elle ne dépend donc pas de la hauteur des sédiments au point considéré : il y a donc une fréquence de résonance globale de la vallée différente de la fréquence de résonance d'une couche de sol horizontale de même hauteur.



**Figure 9.10** — Condition d'existence de la résonance 2D dans le cas des ondes SH (d'après [24]).

### • Description du phénomène de résonance 2D

Il existe une fréquence de résonance globale pour la vallée supérieure à celle du cas 1D correspondant. Cette fréquence de résonance 2D ne dépend que de la fréquence de résonance 1D au centre de la vallée en fonction du type d'onde (P, SV ou SH) et du facteur de forme  $H/L$  [24] :

$$\begin{cases} f_0^P &= f_{h0}^P \sqrt{1 + \left(\frac{H}{L}\right)^2} \\ f_0^{SV} &= f_{h0}^{SV} \sqrt{1 + \left(\frac{2.9H}{L}\right)^2} \\ f_0^{SH} &= f_{h0}^{SH} \sqrt{1 + \left(\frac{2H}{L}\right)^2} \end{cases} \quad (9.9)$$

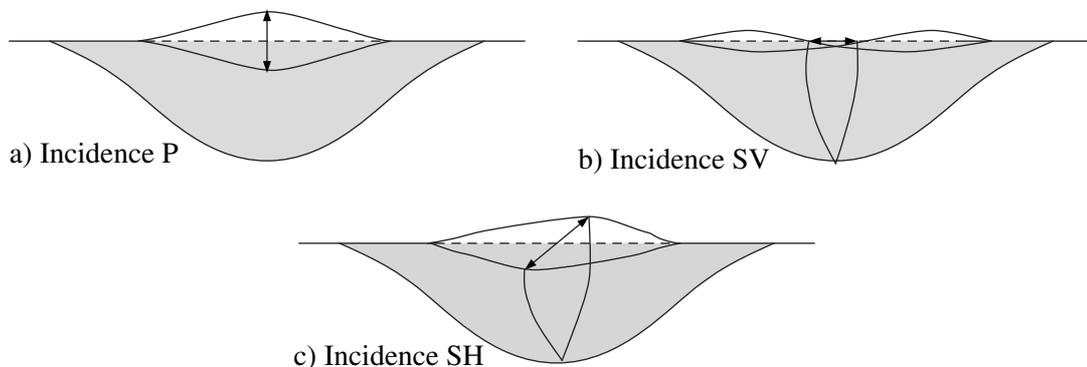
La réponse 2D est plus défavorable que la réponse 1D si l'excitation est riche en hautes fréquences alors que pour une excitation riche en basses fréquences c'est la réponse 1D qui est la plus défavorable [262].

### • Paramètres influençant l'amplification sismique due aux effets bassins sédimentaires

Pour un site modélisé en 2D, le nombre de paramètres qu'on fait varier dépend du type d'effet de site qu'on cherche à caractériser. Nous présentons ci-dessous quelques-uns de ces paramètres fréquemment mentionnés dans la littérature :

○ *Caractéristiques de l'onde incidente*

- *type d'ondes* : La réponse d'une vallée dépend du type d'onde incidente. Sur la figure (9.11) sont montrés les modes de résonance 2D fondamentaux d'une vallée alluviale de forme sinusoïdale : mode de dilatation/compression (cas de l'onde incidente P, figure 9.11a), mode de cisaillement (cas de l'onde incidente SV, figure 9.11b) et mode de cisaillement anti-plan (cas de l'onde incidente SH, figure 9.11c).

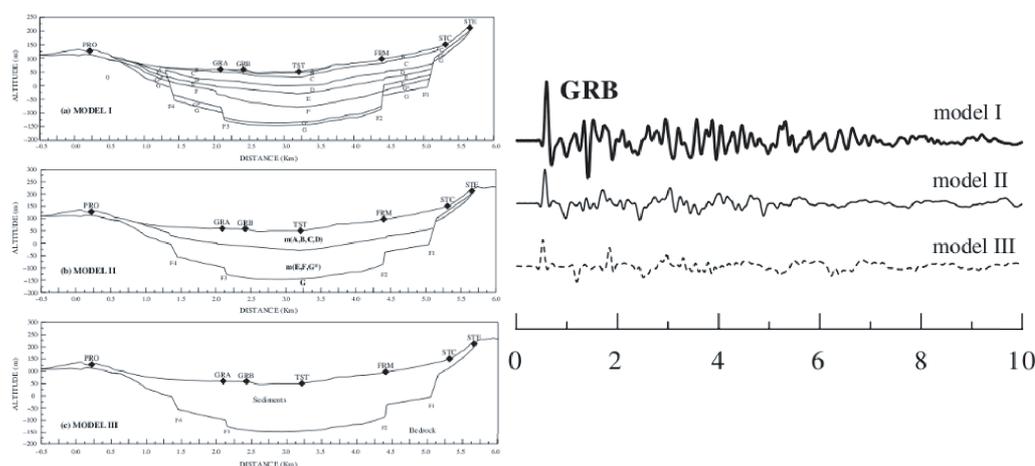


**Figure 9.11** — Modes fondamentaux d'une vallée alluviale en fonction de l'onde incidente (d'après [24]).

- *angle d'incidence* : On considère souvent que l'on a affaire à des ondes à propagation verticale car les ondes réfractées ont tendance à se redresser lorsque la rigidité des couches diminue en allant vers la surface.
  - *contenu fréquentiel de l'excitation* : L'effet d'amplification est maximal lorsque la fréquence dominante  $f_c$  est de l'ordre de  $f_0$ . À basse fréquence (de  $f_c \ll f_0$  jusqu'à  $f_c \approx f_0$ ), l'amplification de la composante horizontale est maximale au centre de la vallée et décroît vers les bords du bassin sédimentaire. Les déplacements sismiques près des bords de la vallée sont presque identiques à ceux qu'on observe en surface de l'espace semi-infini. À haute fréquence (pour  $f_c \gg f_0$ ), l'amplification de la composante horizontale est maximale en-dehors du centre de la vallée. La réponse temporelle du site est complexe ; on distingue plusieurs modes d'ondes de surface.  $f_c$  influence peu la durée de la réponse du site [262].
- *Propriétés des sédiments*
- *contraste d'impédance sédiment/substratum*  $\alpha = (\rho_s v_s) / (\rho_r v_r)$  :  
Il ne modifie pas la fréquence de résonance de la vallée. L'amplification augmente avec le contraste d'impédance [24]. Quand le contraste d'impédance augmente, la durée du

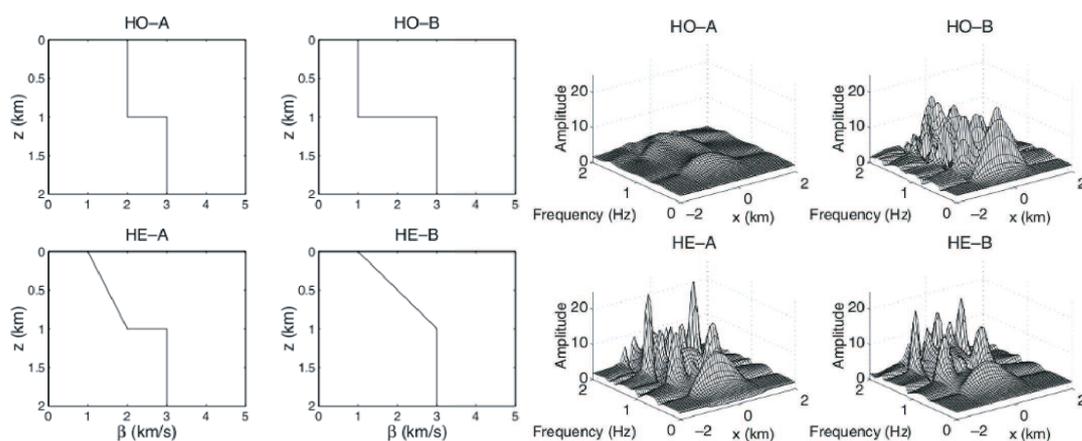
mouvement est allongée [262].

- *hétérogénéité* : Le degré d'hétérogénéité est directement lié à l'amplitude maximale du signal [241]. Le déplacement maximal augmente lorsque le nombre de discontinuités augmente (Fig. 9.12).



**Figure 9.12** — Réponse temporelle en déplacement pour 3 modèles plus ou moins détaillés (d'après [241]).

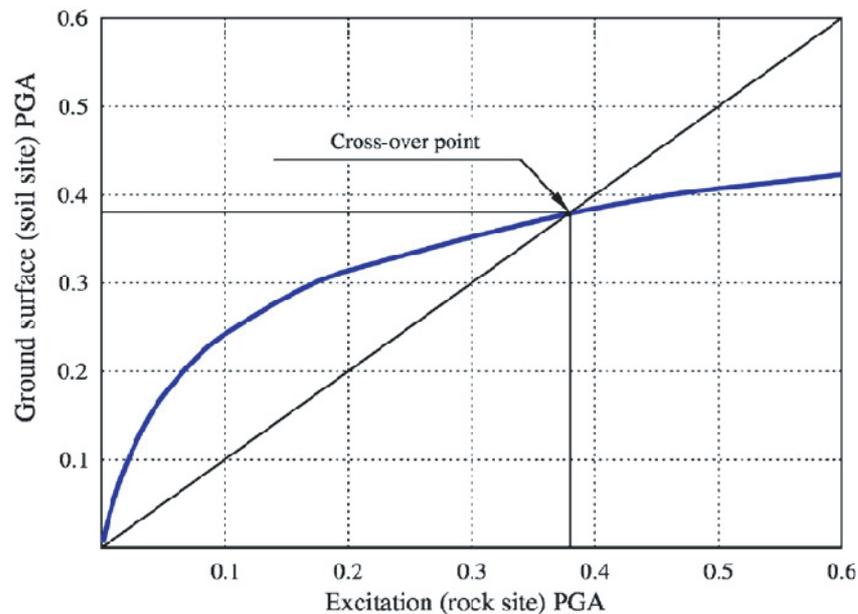
Des études ont été menées [227] pour étudier l'effet d'un gradient de vitesse des ondes de cisaillement en fonction de la profondeur sur la réponse sismique d'un bassin sédimentaire (Fig. 9.13).



**Figure 9.13** — Amplitude des déplacements dans le domaine spacio-fréquentiel pour 4 distributions de vitesses (d'après [227]).

L'hétérogénéité des sédiments affecte essentiellement les hautes fréquences. En effet, pour un milieu hétérogène l'amplitude des déplacements est maximale aux bords du bassin pour les hautes fréquences ce qui peut causer des mouvements différentiels critiques.

- *comportement linéaire/non linéaire* : Le comportement non linéaire du sol dissipe de l'énergie et tend à augmenter l'amortissement apparent et à réduire l'amplification par rapport au cas élastique. Cette réduction est surtout significative pour les courtes périodes [351]. L'énergie dissipée dans le sol augmente avec le niveau d'excitation (PGA) et peut même mener à une atténuation du mouvement en surface pour les périodes courtes pour un niveau de sollicitation élevé (Fig. 9.14).



**Figure 9.14** — Représentation schématique du « cross-over point », limite entre l'amplification et l'atténuation du mouvement en fonction du PGA (d'après [351]).

- *état hydrique* : Dans la majorité des cas le sédiment est supposé sec et modélisé comme un milieu continu. Néanmoins il est intéressant d'étudier la réponse sismique d'un sol saturé ou même non saturé. Les nouveaux paramètres influant sur la réponse sismique d'un bassin sont la porosité, la perméabilité et le degré de saturation du sol. Liang et al. [218] ont étudié la diffraction d'ondes planes SV par une vallée semi-circulaire constituée d'un milieu saturé. Il montre que pour de faibles porosités le comportement du sol saturé est presque identique à celui du sol sec et qu'il est peu affecté par les conditions de drainage. Pour des porosités plus grandes, l'effet des conditions de drainage devient significatif et l'amplitude des déplacements dans un milieu non drainé est plus élevée que dans un milieu drainé. Les pressions de fluides dans les pores augmentent avec la porosité. Nguyen [262] a étudié le comportement sismique des vallées triangulaires remplies par des sols saturés d'eau : le sol a un comportement intermédiaire entre la réponse d'un milieu élastique drainé et non-drainé. De plus il montre que la perméabilité a une influence négligeable sur la réponse sismique de la vallée. En effet, le mouvement du terrain sous la sollicitation sismique est tellement rapide que l'eau interstitielle n'a pas le temps de s'évacuer et que le sol se comporte comme un milieu poreux très peu

perméable. Plus le contenu fréquentiel de l'excitation est riche en hautes fréquences, plus le mouvement en surface du cas saturé est amplifié par rapport au cas élastique drainé, surtout en présence d'un sol de mauvaise qualité.

○ *Caractéristiques géométriques*

- *rapport de forme  $H/L$*  : La profondeur (pour une largeur donnée) contrôle le type de résonance de la vallée : résonance 1D + propagation des ondes de surface si la vallée est allongée, résonance 2D si la vallée est profonde. Le rapport de forme critique est compris entre 0.3 et 0.35 pour les ondes SH, 0.2 et 0.3 pour les ondes SV et 0.5 et 0.6 pour les ondes P. Il dépend aussi du contraste de vitesse [24].

Le rapport de forme joue un rôle important car il affecte la fréquence fondamentale de la vallée. De plus, lorsqu'il augmente, la durée du signal sismique est allongée [262].

Quand le rapport de forme augmente, l'amplification des déplacements horizontaux au centre augmente et la zone d'influence de la vallée augmente [145].

- *angle d'inclinaison* : L'influence de l'angle d'inclinaison est complexe car elle dépend à la fois du rapport de forme  $H/L$  et de la forme de la vallée.

La fonction de l'amplification en fonction de l'angle peut ne pas être monotone [145].

- *forme* : La forme triangulaire est la moins critique et la forme rectangulaire la plus critique.
- *remplissage de la vallée* : Il existe des cas où la vallée n'est pas entièrement remplie par la sédimentation. On peut définir un taux de remplissage  $H_1/H$  où  $H_1$  est la hauteur des sédiments au centre de la vallée. Lorsque celui-ci augmente, l'amplification du déplacement horizontal passe d'un comportement de vallée vide (atténuation au centre de la vallée) à un comportement de vallée pleine (amplification maximale au centre de la vallée) [145] (Fig. 9.15). De plus la durée du mouvement augmente avec l'épaisseur de sédiments [262].

### 9.1.1.2 Effets de site topographiques

En ce qui concerne les vallées vides, les études expérimentales sur les irrégularités topographiques montrent l'existence de variations dans l'amplitude et le contenu fréquentiel de la réponse du sol le long des pentes des collines. En particulier, les dommages subis après les grands séismes sont souvent plus grands sur le sommet qu'à la base de collines.

Les études montrent que l'amplification peut atteindre un facteur 10 ou même plus au sommet de la crête. Mais la valeur de l'amplification varie beaucoup d'une expérience à l'autre. Les différences entre les facteurs d'amplification n'ont jusqu'à maintenant pas été expliquées. Par exemple, pendant le séisme de 1980 en Italie du Sud, en présence d'irrégularités topographiques, des sauts jusqu'à 2° dans l'échelle d'intensité MSK ont été observés.

Les modèles théoriques et numériques prédisent aussi une amplification du signal sismique dans les reliefs convexes (crête des collines, sommet des pentes, falaises et bords des vallées). De

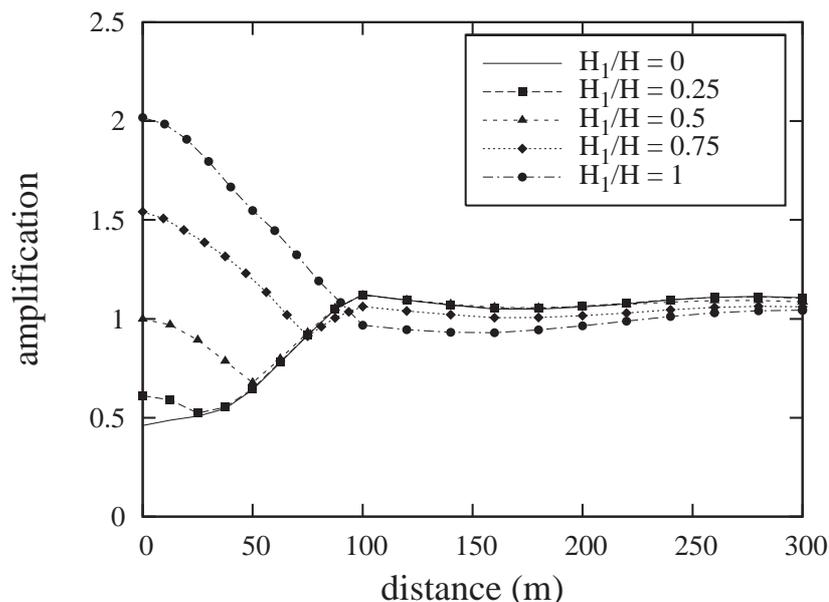


Figure 9.15 — Influence du taux de remplissage sur l'amplification du déplacement horizontal (d'après [262]).

manière analogue, ils prédisent une atténuation pour les configurations géométriques concaves, comme les vallées et les pieds des collines.

Des études sur la montagne Kitherion près de Corinthe (Grèce) [213] et quelques travaux antérieurs [271, 68] suggèrent qu'avec une colline lisse et uniforme de caractéristiques de sol homogènes, l'amplification du mouvement du sol due à l'effet de site topographique est faible. Les principaux résultats obtenus jusqu'à maintenant à propos des effets de site topographiques [165, 125, 128] montrent tout d'abord que cet effet affecte plus les composantes horizontales du mouvement sismique que la composante verticale.

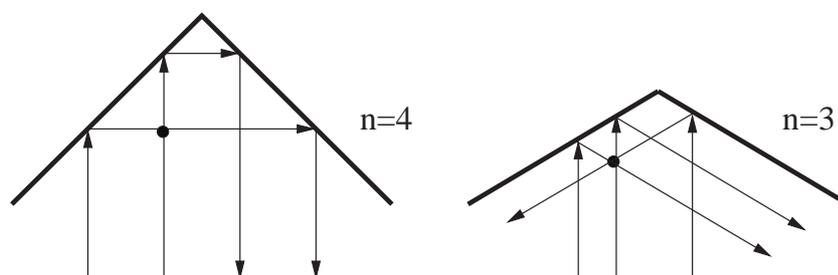
Pedersen et ses collaborateurs [271] ont expliqué que la présence de roches érodées au sommet des collines pouvait renforcer l'effet topographique. Des recherches supplémentaires sur ce thème sont en cours. Deuxièmement, il y a une amplification du mouvement du sol au sommet des collines et une atténuation à la base. Cette amplification dépend de la fréquence et est maximale à une fréquence appelée « fréquence de résonance de la colline ».

Les effets de site topographiques affectant la réponse sismique d'un relief dépendent fortement du contenu fréquentiel de l'excitation. Cette influence est contrôlée par le rapport de la dimension caractéristique du relief par la longueur d'onde du signal incident. En général, plus la fréquence d'excitation est élevée, plus les effets de site topographiques sont significatifs et complexes. Si la fréquence d'excitation est assez basse, le relief peut être considéré comme un petit obstacle ; ainsi, ses effets sur le mouvement du sol peuvent être négligés.

L'effet d'amplification est généralement plus important pour les composantes horizontales, qui sont les plus critiques pour le dimensionnement des bâtiments.

Deux *phénomènes physiques* peuvent expliquer l'effet de site topographique [24] :

- la focalisation des ondes dans les topographies convexes du fait de réflexions multiples à la surface (Fig. 9.16).
- la transformation des ondes de volume en ondes de surface et les interférences entre les différents types d'ondes.



**Figure 9.16** — Réflexions multiples à la surface de collines triangulaires dont l'angle au sommet vaut  $2\pi/n$  (d'après [287]). L'amplification au sommet vaut  $n$

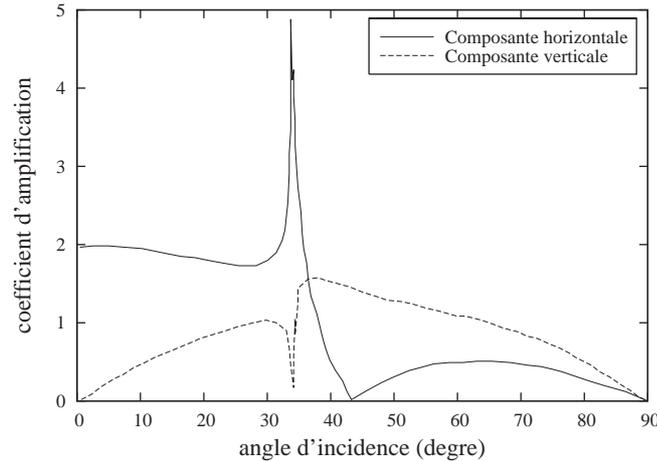
Également, des études paramétriques [262] permettent de mettre en évidence l'influence de différents paramètres sur l'amplification sismique due aux effets topographiques :

○ *Caractéristiques de l'onde incidente*

- *type d'onde* : Le champ d'ondes incidente arrivant à la surface est une combinaison de différents types d'ondes : les ondes de volume (ondes de pression P ou ondes longitudinales et ondes de cisaillement S ou ondes transversales (SH pour le mouvement dans le plan et SV pour le mouvement hors-plan)) et les ondes de surface (Rayleigh ou Love). La vibration en surface est essentiellement due aux ondes transversales et aux ondes de surface. Aux interfaces les ondes P (ou SV) se réfléchissent et créent des ondes P et SV. Les ondes diffractées contiennent des ondes P, SV et des ondes de Rayleigh. Il existe donc des couplages entre ces différents types d'ondes qui rendent le problème complexe. On remarque que l'effet de site est plus accentué dans le cas des ondes SV et P.
- *angle d'incidence* : Comme précédemment on considère en général une onde à incidence verticale.

Le coefficient d'amplification d'une onde arrivant sur une surface plane atteint un maximum local pour une incidence verticale et un pic autour de l'angle d'incidence  $\theta_c$  tel que  $\theta_c = v_P/v_S$  [4] (Fig. 9.17), lorsque les ondes P arrivant à la surface se transforment en ondes de surface. Ce cas peut également correspondre à une onde à incidence verticale sur une surface inclinée.

- *fréquence prédominante de l'onde* : Un signal sismique est multi-fréquentiel avec une gamme de fréquences allant de 0.5 à 10 Hz. Si l'épicentre du séisme est proche, le signal contient essentiellement des hautes fréquences, alors que s'il est plus éloigné (et de magnitude plus élevée pour obtenir un signal de même amplitude), il est plus riche en basses fréquences.



**Figure 9.17** — Amplitudes normalisées des déplacements horizontal et vertical à la surface libre en fonction de l'angle d'incidence (d'après [4])

On peut définir une fréquence adimensionnelle prédominante  $\eta$ , fonction de la fréquence  $f$  ou de la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde incidente, de la vitesse  $v_s$  des ondes de cisaillement dans le sol, de la hauteur  $H$  et de la demi-largeur  $L$  du relief, qui permet de s'affranchir de l'effet d'échelle [262] :

Pentes :

$$\eta = \frac{fH}{v_s} = \frac{H}{\lambda} \quad (9.10)$$

Vallées et collines :

$$\eta = \frac{2fL}{v_s} = \frac{2L}{\lambda} \quad (9.11)$$

Ce paramètre représente le rapport entre la dimension de l'irrégularité et la longueur d'onde incidente. L'amplification est maximale pour les longueurs d'onde comparables à la dimension caractéristique (demi-largeur). Pour les très basses fréquences, l'irrégularité topographique peut être vue comme un petit obstacle, l'effet de site est alors négligeable. Pour les hautes fréquences l'amplification est plus importante, les mouvements différentiels accentués, et la zone d'influence étendue. Le mouvement créé en surface est plus complexe et l'amplification maximale peut intervenir ailleurs qu'au niveau des reliefs convexes. À partir d'une certaine fréquence critique, la valeur maximale du coefficient d'amplification n'évolue plus. Pour un signal sismique réel multifréquentiel, l'effet des basses fréquences compense celui des hautes fréquences ce qui « lisse » le mouvement en surface. Pour les pentes, l'amplification maximale se produit pour  $\eta = 0.2$  avec une amplification d'environ 25% pour les ondes SH et 50% pour les ondes SV [16].

- *Géométrie du relief* : On peut distinguer 3 configurations de base : les collines, les pentes et les vallées (Fig. 9.18).
  - *inclinaison de la pente* : Plus la pente est raide, plus l'effet d'amplification en haut et

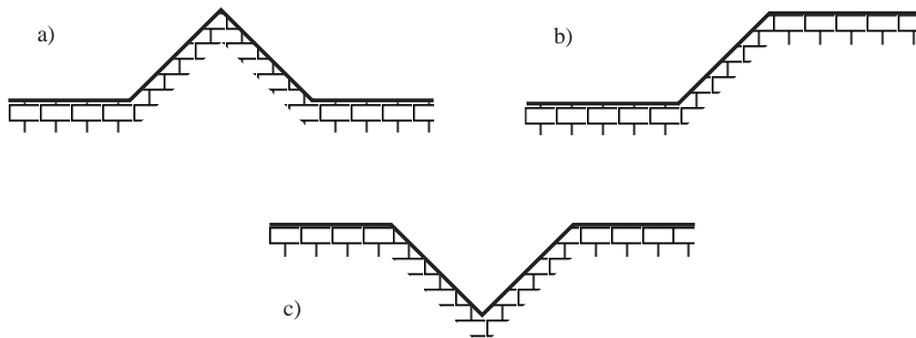


Figure 9.18 — Configurations de base : (a) colline, (b) pente, (c) vallée (d'après [262])

l'effet d'atténuation en bas de la pente sont accentués. Le mouvement différentiel est également accentué sur les surfaces planes autour du relief.

– *forme et profondeur* : Plusieurs configurations idéalisées ont été étudiées telles que des vallées triangulaires, trapézoïdales, circulaires, ellipsoïdales, sinusoïdales, etc.

Pour des dimensions comparables, la forme triangulaire est la moins critique et la forme rectangulaire est la plus critique [147]. Ces résultats sont à mettre en parallèle avec l'influence de l'inclinaison de la pente, une vallée triangulaire ayant une pente plus douce qu'une vallée rectangulaire. Pour une vallée demi-elliptique qui n'a pas une inclinaison constante, on peut considérer son inclinaison moyenne qui se situe entre l'inclinaison d'une vallée triangulaire et d'une vallée rectangulaire. Son comportement se situe également entre les comportements de ces deux types de vallées.

### 9.1.2 Importance des effets de site en ingénierie

Les effets de site locaux jouent un rôle important dans la conception para-sismique. Malgré leur existence évidente, les effets de site locaux ont constitué l'objet d'une discussion dans ces dernières années. Effectivement, les coefficients spécifiques représentant les effets de site locaux ne sont apparus dans les codes de construction des bâtiments que dans les années 1970.

Les codes de dimensionnement parasismiques actuels comme l'Eurocode 8 ou le PS 92/5.2.4 reposent sur des calculs issus de modèles unidimensionnels. Cette méthode permet de mesurer l'influence de la nature et de l'épaisseur de la couche sédimentaire sur la propagation verticale des ondes de volume en multipliant l'accélération spectrale attendue du sol par un coefficient  $S$  dépendant de la raideur des matériaux, de l'épaisseur de la couche de sédiments mous et de la vitesse de l'onde de cisaillement  $v_s$ . En 1992, le *National Council for Earthquake Engineering Research* [247] a proposé d'utiliser un coefficient d'amplification  $F_a$  pour les signaux de courte période et un coefficient  $F_v$  pour les périodes longues.  $F_a$  et  $F_v$  dépendent de la nature du sol et de la célérité  $v_s$ , qui est liée à l'épaisseur de la couche sédimentaire.  $F_a$  et  $F_v$  augmentent avec l'épaisseur de la couche d'alluvions (i.e. lorsque  $v_s$  décroît), et diminuent lorsque l'excitation sismique gagne en intensité. Malheureusement les coefficients  $F_a$  et  $F_v$  sont très sensibles à

la période de la sollicitation. De plus, l'évaluation de ces coefficients requiert de nombreuses données empiriques sur le sol. Le dernier règlement américain, UBC 97, tient compte des effets des non-linéarités du sol [14].

Cependant, ces résultats ne concordent pas avec les estimations fournies par des modélisations bidimensionnelles ou tridimensionnelles comportant l'influence des conditions topographiques et géologiques sur le mouvement sismique et sur le contenu fréquentiel. Lorsque le contraste d'impédance entre le sédiment et le substratum ou la profondeur de la vallée alluviale augmente, la résonance verticale 1D des ondes de volume et la propagation latérale des ondes de surface tendent à intervenir simultanément [24]. Par conséquent, la prise en compte des effets de site dans les codes parasismiques est indispensable.

Afin de dimensionner des bâtiments capables de résister aux séismes, les ingénieurs utilisent une méthode qui consiste à remplacer l'effet du séisme par des forces équivalentes proportionnelles à l'accélération maximale subie par le bâtiment. Cette accélération dépend de la rigidité du bâtiment étudié. Les réglementations parasismiques se basent donc sur un spectre de réponse élastique qui traduit la réponse normalisée en accélération d'un oscillateur amorti à un degré de liberté en fonction de sa période. Ce spectre normalisé constitue l'enveloppe des réponses des différents oscillateurs à divers séismes possibles dans une zone donnée.

La norme européenne EUROCODE 8 définit 5 spectres de réponse élastique à 5% d'amortissement en fonction de 5 types de sol (classes A, B, C, D et E) et pour deux sortes de séisme. Les séismes de catégorie 1 correspondent à des régions sismiques actives, la magnitude est supérieure à 5.5. Les séismes de catégorie 2 représentent les régions de faible sismicité, la magnitude est inférieure à 5.5. Celles-ci sont définies en fonction de  $V_{s,30}$ , la moyenne de la vitesse des ondes de cisaillement dans les 30 premiers mètres :

$$V_{s,30} = \frac{30}{\sum_{i=1}^N \frac{h_i}{V_i}} \quad (9.12)$$

où  $h_i$  et  $V_i$  sont l'épaisseur et la vitesse de l'onde de cisaillement pour la formation numéro  $i$ , sur un total de  $N$  couches présentes sur les 30 premiers mètres de profondeur.

Alors, les sites sont classifiés suivant la valeur de  $V_{s,30}$  comme montré dans le tableau (9.1).

On peut voir sur la figure (9.19) que les caractéristiques du site influencent significativement le spectre. Pour les sols de mauvaise qualité l'accélération maximale à prendre en compte est plus élevée. On remarque surtout que l'accélération est amplifiée par rapport au rocher essentiellement pour des oscillateurs basse fréquence. De plus, les valeurs des périodes « de coin »  $T_b$  et  $T_c$ , sont assez différentes selon les sites et les sols. En examinant la figure 3, on constate que :

- À période égale, plus les couches sont molles, plus l'amplification est élevée (penser au mouvement de l'eau dans un bassin agité, par comparaison au mouvement de la même eau, mais gelée, dans le même bassin).
- L'amplification relative du site D par rapport au site A atteint pratiquement 3 pour des oscillateurs (bâtiments, château d'eau, etc.) de période égale à 1 s.

| Classe de sol | Description du profil stratigraphique  | $V_{s,30}(m/s)$ |
|---------------|--|-----------------|
| A             | Rocher ou autre formation géologique de ce type comportant une couche superficielle d'au plus 5 m de matériau moins résistant  | $\succ 800$     |
| B             | Dépôts raides de sable, de gravier ou d'argile sur-consolidée, d'au moins plusieurs dizaines de mètres d'épaisseur, caractérisés par une augmentation progressive des propriétés mécaniques avec la profondeur                   | 360 – 800       |
| C             | Dépôts profonds de sable de densité moyenne, de gravier ou d'argile moyennement raide, ayant des épaisseurs de quelques dizaines à plusieurs centaines de mètres   | 180 – 360       |
| D             | Dépôts de sol sans cohésion de densité faible à moyenne (avec ou sans couches cohérentes molles) ou comprenant une majorité de sols cohérents mous à fermes  | $\prec 180$     |
| E             | Profil de sol comprenant une couche superficielle d'alluvions avec des valeurs de $V_s$ de classe C ou D et une épaisseur comprise entre 5 m environ et 20 m, reposant sur un matériau plus raide avec $V_{s,30} \succ 800(m/s)$ | -               |

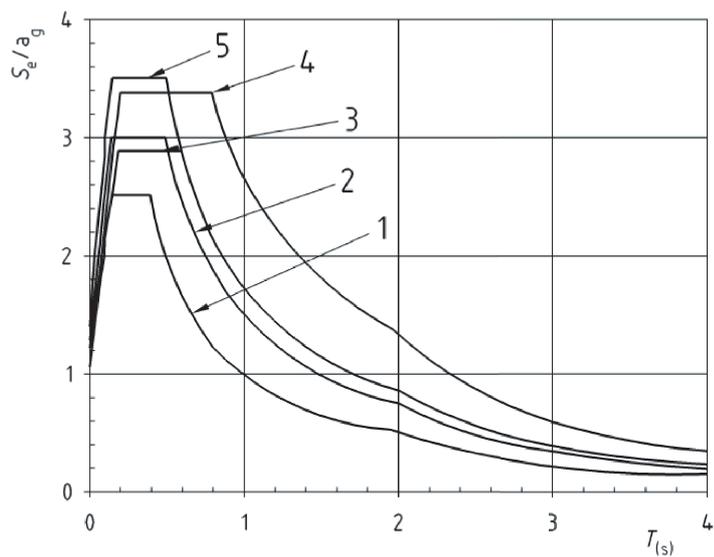
*Tableau 9.1* — Classification des sites

- La période  $T_c$  de « coin » du spectre se déplace vers la droite quand on passe d'un sol rocheux à un sol mou.

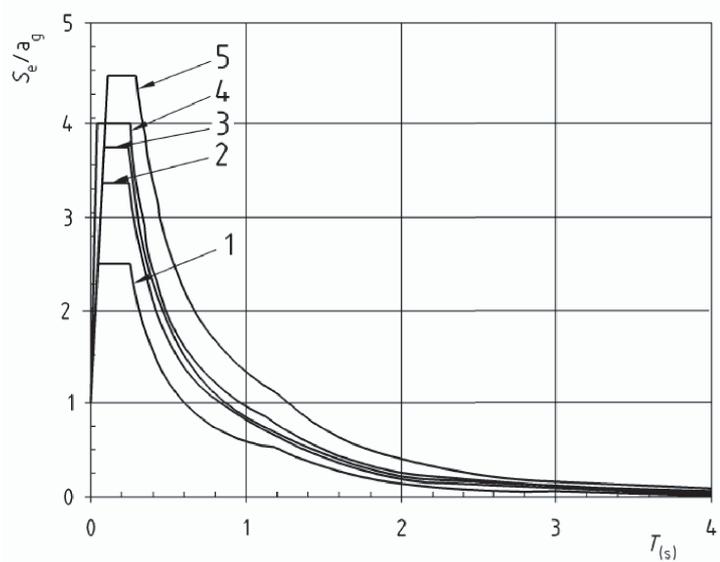
L'EUROCODE 8 conseille pour les structures importantes, des coefficients d'amplification topographiques pour la vérification de la stabilité des pentes pour les buttes et versants longs de hauteur supérieure à 30 m. Ces coefficients sont pris indépendants de la période de vibration. Ils sont considérés comme négligeables pour des inclinaisons moyennes inférieures à  $15^\circ$  et vont de 1.2 à 1.4.

### 9.1.3 Méthodes pour estimer les effets de site

Plusieurs méthodes ont été utilisées pour estimer la réponse sismique des cuvettes. Les observations ou les mesures in-situ sont indispensables pour une meilleure compréhension des effets de site, qui ne sont pas jusqu'à présent complètement compris. Les techniques analytiques peuvent être appliquées seulement pour des géométries simples et des dépôts sédimentaires homogènes. Dans ces cas précis, il est possible de séparer les variables dans les équations du mouvement. Pour les modèles de cuvettes réalistes avec des formes irrégulières et des matériaux de remplissage hétérogènes, les méthodes numériques deviennent essentielles. Les plus largement utilisées sont la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontière. On peut aussi combiner les méthodes des éléments finis et des éléments de fron-



(a) Spectre de Type 1. Séisme lointain de magnitude  $M_s \geq 5.5$



(b) Spectre de Type 2. Séisme de magnitude  $M_s < 5.5$

**Figure 9.19** — Spectres de calcul  $S_e(T)$  de l'EUROCODE 8 pour les tremblements de terre des types 1 et 2.

tière.

### 9.1.3.1 Enregistrement de signaux sismiques

L'enregistrement des séismes donne de nombreux renseignements permettant de mieux comprendre les effets de site. Néanmoins les séismes de grande intensité ne se produisent pas souvent et ne fournissent que peu d'enregistrements. C'est pourquoi des méthodes d'analyse des signaux de faible intensité ont été développées.

**Microtremors (Micro-vibrations)** : Il s'agit des vibrations du sol dues au bruit ambiant (vent, vagues, trafic routier, etc.) composées essentiellement d'ondes de Rayleigh (ondes de surface). L'analyse spectrale de ces signaux montre une corrélation avec les conditions géologiques du site mais la variabilité spatiale et temporelle des sources pose des problèmes pour la comparaison avec un site de référence. La méthode « H/V ratio » (rapport entre le spectre de Fourier des composantes horizontales et verticales des microtremblements en un point) introduite par Nakamura en 1989 [259] permet de s'affranchir du choix d'un site de référence. Cette méthode permet d'obtenir des informations sur la fréquence de résonance et l'amplification sismique en un site. Bien que les preuves scientifiques manquent, cette méthode est très utilisée du fait des bons résultats obtenus et de son moindre coût.

**Séismes de faible intensité** : Il s'agit d'événements sismiques, naturels ou artificiels d'intensité faible à modérée (séismes de faible amplitude, répliques, explosions minières ou nucléaires). Pour estimer les effets de site à partir de ces signaux, il faut s'affranchir des effets de source et de chemin. Si on dispose d'enregistrements à un site de référence situé suffisamment près du site étudié pour qu'on puisse considérer que les effets de source et de chemin soient identiques et non affectés par des effets de site (rocher horizontal), on peut calculer le rapport spectral du mouvement du site étudié au site de référence (Standard Spectral Ratio (SSR) method). Il s'agit de disposer d'un réseau de sites d'enregistrement de plusieurs événements sismiques. Pour le  $i^{\text{ème}}$  site et le  $j^{\text{ème}}$  événement, le spectre d'amplitude en fréquence du mouvement enregistré peut s'écrire de la manière suivante :

$$R_{ij}(f) = E_j(f)P_{ij}(f)S_i(f) \quad (9.13)$$

où  $E_j(f)$  est la fonction de source,  $P_{ij}(f)$  la contribution du chemin parcouru entre la source et le site et  $S_i(f)$  la contribution locale du site.

Si la distance au site de référence est faible comparée à la distance à la source, on peut considérer que les effets de source et de chemin sont indépendants du site. De plus, le site de référence est choisi sans effet de site ( $S_R(f) = 1$ ), l'effet de site au site  $i$  peut donc être estimé de la manière suivante :

$$S_i(f) = \frac{R_{ij}^S(f)}{R_j^R(f)} \quad (9.14)$$

où  $R_{ij}^S(f)$  est le spectre d'amplitude en fréquence du mouvement enregistré au site  $i$  et  $R_j^R(f)$  celui au site de référence. Lorsqu'il n'est pas possible de trouver un site de référence adéquat, il est toujours possible d'appliquer la technique H/V de Nakamura.

**Séismes de forte intensité** : Dans les rares cas où on dispose d'enregistrements de séismes réels de grande intensité, les mêmes techniques peuvent être appliquées, mais dans ce cas, les effets non linéaires sont pris en compte, ce qui n'est pas le cas lors de séismes peu intenses qui ne sollicitent le sol qu'en élasticité.

### 9.1.3.2 Solutions analytiques

Comme le problème d'effets de site est compliqué, il n'existe pas beaucoup de solution analytique. Les solutions existantes ne sont valables que pour des configurations relativement simples. Les problèmes les plus simples concernent la diffraction bidimensionnelle des ondes SH qui peuvent être analysées séparément des autres ondes. En utilisant la séparation des variables, Trifunac [324, 323] a obtenu la solution exacte pour la diffraction des ondes SH par une vallée alluviale et par une vallée vide demi-circulaire. Wong et Trifunac [341, 342] ont trouvé une solution similaire pour le cas d'une vallée alluviale et d'une cuvette vide semi-elliptique. Un résultat très simple a été montré par [287] pour le cas d'une colline triangulaire.

Par contre, pour les problèmes impliquant les ondes SV ou P, les solutions exactes sont difficiles à trouver. Quelques solutions ont été obtenues de manière approximative sous certaines hypothèses simplificatrices. On peut citer le résultat de Lee [214] pour le cas d'une vallée vide semi-sphérique ; cette approche est cependant limitée aux basses fréquences. Sanchez-Sesma [288] a aussi obtenu la réponse d'une colline triangulaire dans quelques configurations particulières.

D'après des études analytiques de Géli et al. [165], la fréquence de résonance fondamentale d'une topographie peut être approximée par  $f = 0.4\beta/l$  dans laquelle  $\beta$  est la vitesse de l'onde S et  $l$  est la demi-largeur de la topographie.

Ces solutions permettent de comprendre les phénomènes physiques en jeu et servent par la suite de base pour valider certaines méthodes numériques.

### 9.1.3.3 Méthodes numériques

Les méthodes numériques sont très utiles dans la conception parasismique, car il est rare d'avoir des enregistrements d'événements sismiques importants effectués au moyen d'un réseau d'instruments dense dans la région étudiée. Nous avons aussi besoin de méthodes efficaces pour estimer la réponse du sol en prévision des séismes suivants, et l'unique moyen d'y parvenir est la modélisation numérique. Ces estimations numériques doivent, cependant, être comparées aux observations dès que cela est possible. C'est une tâche assez difficile, car les méthodes d'esti-

mation de la réponse du sol à partir d'observations sont multiples. Il est quelquefois impossible (par exemple, quand la source n'est pas connue) de modéliser numériquement les estimations dérivées de l'expérience. En raison de la sensibilité des méthodes numériques vis-à-vis des paramètres de source (le mécanisme focal, la profondeur, la distance du récepteur à la source et l'azimut), la simulation doit toujours être accomplie avec les conditions imposées lors des observations. Les simulations numériques bidimensionnelles (2D) montrent que les variations de l'amplification sont très complexes, même dans les vallées simples. Donc, pour améliorer les interprétations quantitatives des observations sur l'amplification locale, il est la plupart du temps nécessaire de considérer des modèles plus complets. Un effort considérable a été fait pour étendre la modélisation des cuvettes à trois dimensions (3D), mais le coût est considérable du point de vue de la mémoire et/ou du temps de calcul.

Les méthodes de simulation numériques permettent d'étudier des géométries arbitraires et des milieux hétérogènes. Il existe une grande diversité de méthodes numériques, chacune ayant un domaine de validité restreint. Le choix de la méthode se fait donc en fonction de l'étude voulue.

**Méthode des différences finies** Cette méthode permet de modéliser des cuvettes géométriquement complexes remplies de matériaux extrêmement hétérogènes mais demande une forte capacité de calcul, par exemple [8], [50] en 2D et [129] en 3D.

**Méthode des éléments finis (FEM)** Très utilisée, cette méthode est adaptée pour modéliser un comportement inélastique, non-linéaire et hétérogène. Le problème de la prise en compte de la radiation d'ondes vers l'infini dans les problèmes dynamiques faisant intervenir un domaine semi-infini peut être résolu en introduisant des éléments infinis ou des frontières absorbantes. Cette méthode demande elle aussi une forte capacité de calcul, par exemple [228, 306, 322].

**Méthode des éléments de frontière (BEM)** Cette méthode est adaptée aux calculs de propagation d'ondes dans les milieux ouverts car sa principale caractéristique est que les conditions de radiation sont satisfaites automatiquement. De plus, si la vallée se compose de couches horizontales et homogènes, seulement la frontière de la cuvette a besoin d'être considérée. Mais, si la matière dans la cuvette est extrêmement hétérogène, l'application de la méthode des éléments de frontière devient embarrassante. Cette méthode est utilisée par plusieurs chercheurs, par exemple [51, 24, 198, 289, 194, 263, 196, 308].

**Méthodes hybrides** Pour pallier à ces limites, des méthodes hybrides ont été développées, par exemple en couplant les éléments finis et les éléments frontières, par exemple [255, 35, 195].

## 9.2 Spectre de réponse spécifique d'un site

La réponse sismique d'un bâtiment dépend des caractéristiques du tremblement de terre. Les accélérogrammes donnent une mesure de l'excitation incidente subie par le sol. Un accélérogramme contient deux composantes horizontales et une composante verticale. Idéalement, un bâtiment peut-être conçu en fonction d'un accélérogramme représentant un événement sismique dont la probabilité d'occurrence est connue. Mais en réalité, comme expliqué ci-dessus, la réponse sismique d'un bâtiment ne dépend pas seulement du signal incident, mais aussi des caractéristiques locales du site où la structure est implantée. On utilise donc d'autres méthodes pour déterminer les réponses maximales des bâtiments. La méthode la plus courante et la plus facile à utiliser de nos jours est le spectre de réponse sismique. G.W. Housner a défini le concept de spectre de réponse sismique. M.A.Biot (1932) présente le spectre de réponse comme un outil pratique pour caractériser des mouvements sismiques.

Le spectre de réponse fournit un outil convenable pour résumer la réponse maximale de tous les systèmes linéaires à un degré de liberté possibles. Le spectre de réponse est un graphe représentant la valeur maximale d'une grandeur caractéristique de la réponse (comme le déplacement, la vitesse ou l'accélération) en fonction de la période naturelle de vibration du système  $T_n$  ou en fonction de la fréquence cyclique  $f_n$ . Pour chaque spectre, l'oscillateur à un degré de liberté a un rapport amortissement fixé  $\xi$  (Fig. 9.20).

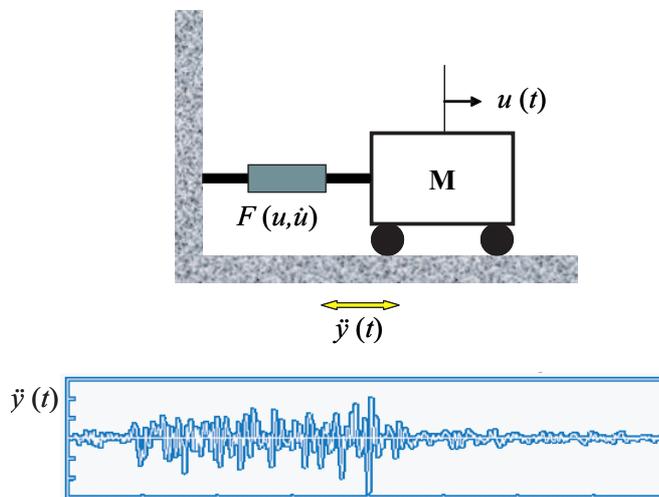


Figure 9.20 — Oscillateur à 1 degré de liberté

Pour couvrir la gamme des valeurs d'amortissement rencontrées dans les structures réelles, il est donc nécessaire de superposer plusieurs graphes, correspondant chacun à une valeur d'amortissement particulière. Tracer le spectre de réponse en fréquence ou en période relève d'un choix personnel. Les deux options ne présentent pas de différence conceptuelle. Nous avons choisi de tracer les courbes de réponse en fonction de la période, parce que les ingénieurs préfèrent utiliser la période naturelle plutôt que la fréquence naturelle, la période de vibration étant un

concept plus familier.

### 9.2.1 Équation du mouvement

Pour un oscillateur simple à 1 degré de liberté, l'équation du mouvement sismique est :

$$\begin{cases} M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -M\ddot{y}_g \\ \ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u = -\ddot{y}_g(t) \end{cases} \quad (9.15)$$

où  $\omega^2 = K/M$  est la pulsation propre,  $f = \omega/2\pi$  est la fréquence propre,  $T = 1/f = 2\pi/\omega$  est la période propre,  $\xi = C/(2\sqrt{KM}) = C/(2M\omega)$  est l'amortissement critique et  $-M\ddot{y}_g \equiv P_{eff}(t)$  est le chargement effectif.

Il existe deux techniques principales pour résoudre l'équation ci-dessus (9.15) :

1. par une résolution classique,
2. par une intégrale de Duhamel.

Une approche célèbre pour résoudre les équations différentielles linéaires consiste à représenter la force appliquée comme un train d'impulsions. La réponse du système à une force appliquée  $P(t)$  au temps  $t$ , est obtenue en additionnant les réponses à toutes les impulsions subies jusqu'à l'instant  $t$ . L'intégrale de Duhamel fournit une méthode alternative à la solution classique si la force appliquée  $P(t)$  est définie analytiquement par une fonction simple. L'intégrale à calculer est évaluée analytiquement. Pour les excitations complexes qui sont définies seulement par des valeurs numériques discrètes de  $P(t)$ , l'intégrale de Duhamel peut être évaluée par une méthode numérique.

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{y}(\tau) \exp(-\xi\omega_n(t-\tau)) \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau \quad (9.16)$$

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{y}(\tau) \frac{\exp(\xi\omega_n\tau)}{\exp(\xi\omega_n t)} (\sin(\omega_D t) \cos(\omega_D \tau) - \sin(\omega_D \tau) \cos(\omega_D t)) d\tau \quad (9.17)$$

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_D} \left\{ \frac{\sin(\omega_D t)}{\exp(\xi\omega_n t)} \int_0^t \ddot{y}(\tau) \exp(\xi\omega_n \tau) \cos(\omega_D \tau) d\tau - \frac{\cos(\omega_D t)}{\exp(\xi\omega_n t)} \int_0^t \ddot{y}(\tau) \exp(\xi\omega_n \tau) \sin(\omega_D \tau) d\tau \right\} \quad (9.18)$$

Pour une valeur fixée de  $\xi$ , la courbe représentant

$$S_D = u_0(T_n, \xi) = \max_t |u(t, T_n, \xi)| \quad (9.19)$$

en fonction de  $T_n$  est appelée spectre de réponse en déplacement.

Le spectre de réponse en pseudo-accélération est la courbe de  $S_A$  définie par

$$S_A = \omega_n^2 S_D = \left( \frac{2\pi}{T_n} \right)^2 S_D \quad (9.20)$$

en fonction de  $T_n$  pour une valeur fixée du coefficient d'amortissement.

Dans cette étude, l'intégrale de Duhamel (9.18) est résolue numériquement en utilisant la formule d'intégration Gauss-Legendre. Pour une valeur d'amortissement fixe ( $\xi = 5\%$ ), on calcule pour chaque période  $T_n = 2\pi/\omega_n$  le déplacement maximal observé en fonction du temps  $S_D(T_n)$  et on en déduit ensuite le spectre de réponse élastique en pseudo-accélération  $S_A(T_n)$ .

## 9.3 Modélisation numérique

### 9.3.1 Type de sollicitation

Les composantes horizontales du déplacement du sol générées par la propagation et la diffraction des ondes de cisaillement sont les plus critiques pour le dimensionnement des bâtiments. En effet, comme les bâtiments courants sont dimensionnés pour reprendre les charges verticales, l'effet du séisme ne rajoute qu'une variation des charges verticales négligeable. De plus, l'amplification de ces composantes horizontales est plus importante.

Les ondes réfractées ont tendance à se redresser lorsque la rigidité des couches diminue en allant vers la surface, on considère donc une *incidence verticale*.

On utilise un signal synthétique de type Ricker (Fig. 9.21) tel que :

$$u(t) = A_0(a^2 - 0.5) \exp(-a^2) \quad (9.21)$$

dans laquelle  $A_0 = 1$ ,  $t_s = t_p = 0.5s$  et  $a = \pi(t - t_s)/t_p$ .

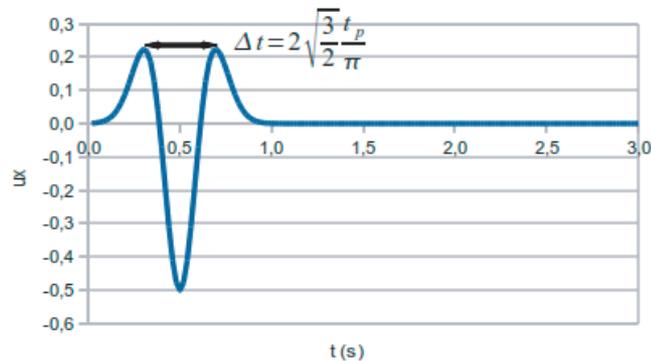
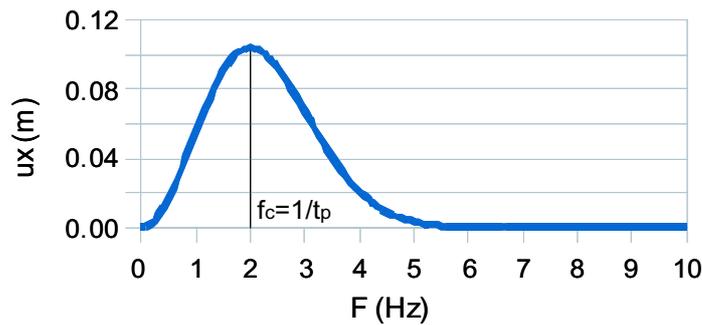


Figure 9.21 — Signal de Ricker d'ordre 2

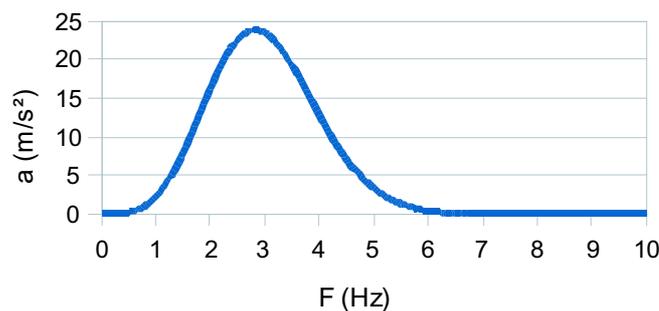
Il s'agit d'un signal multifréquentiel de fréquence prédominante 2 Hz ayant un contenu fréquentiel significatif de 1 à 5 Hz (Fig. 9.22).

### 9.3.2 Propriétés des matériaux

L'éventuelle couche sédimentaire est constituée d'un matériau unique et homogène. Dans la modélisation adoptée, le lit rocheux et la couche alluviale obéissent à une loi de comporte-



(a) Transformée de Fourier du signal de Ricker en déplacement



(b) Transformée de Fourier du signal de Ricker en accélération

**Figure 9.22** — Transformée de Fourier du signal de Ricker

ment élastique linéaire. Les caractéristiques mécaniques et physiques choisies pour les différents types de sol sont présentées dans le Tableau (9.2). Les différents coefficients présentés

|                   | $E$<br>(MPa) | $K$<br>(MPa) | $\nu$<br>(-) | $G$<br>(MPa) | $\gamma$<br>(kN/m <sup>3</sup> ) | $\rho$<br>(Kg/m <sup>3</sup> ) | $v_s$<br>(m/s) | Impédance ( $\alpha$ )<br>(-) |
|-------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------------------------------|--------------------------------|----------------|-------------------------------|
| <b>Substratum</b> | 6720.0       | 11200.0      | 0.4          | 2400.0       | 24.0                             | $2.45 \times 10^3$             | 1000.0         | 1.0                           |
| <b>Sédiments</b>  | 382.0        | 318.0        | 0.3          | 147.0        | 16.0                             | 1.63                           | 300.0          | 0.2                           |
|                   | 899.5        | 749.6        | 0.3          | 346.0        | 16.0                             | 1.63                           | 465.0          | 0.3                           |
|                   | 1527.0       | 1272.0       | 0.3          | 587.0        | 16.0                             | 1.63                           | 600.0          | 0.4                           |
|                   | 2385.0       | 1988.0       | 0.3          | 917.0        | 16.0                             | 1.63                           | 750.0          | 0.5                           |

**Tableau 9.2** — Caractéristiques des matériaux utilisés dans nos calculs

sont les suivants :

$E$  : Module d'élasticité,

$K$  : Module de compressibilité,

$\nu$  : Coefficient de poisson,

$G$  : Module de cisaillement,

$\gamma$  : Poids volumique,

$\rho$  : Masse volumique,

$v_s$  : Vitesse de propagation des ondes de cisaillement dans le sol,

$\alpha$  : Rapport d'impédance entre la couche de sol et le substratum rocheux  $(\rho_s v_s)/(\rho_r v_r)$ , dans laquelle  $\rho_s$ ,  $v_s$ ,  $\rho_r$  et  $v_r$  sont respectivement les masses volumiques et vitesses des ondes de cisaillement dans la couche de sédiment et le substratum rocheux.

### 9.3.3 Caractéristiques géométriques

Les formes étudiées sont le triangle, le trapèze, le rectangle, l'ellipse et l'ellipse tronquée (Fig. 9.23). Les vallées sont caractérisées par leur demi-largeur en surface  $L$ , leur demi-largeur à la base  $L_1$ , leur profondeur  $H$  et la hauteur de sédiments  $H_1$ . On appelle  $S_1$  la surface de la section occupée par les sédiments et  $S$  la surface de la vallée. Également, pour les vallées triangulaires, trapézoïdales et rectangulaires  $A$  est l'angle formé par la pente du relief par rapport à l'horizontale, alors que pour les configurations ellipsoïdales et ellipsoïdales tronquées,  $A$  est l'angle entre la tangente au coin en haut de vallée et la ligne horizontale.

La valeur de la demi-largeur à la base  $L_1$  pour les vallées trapézoïdales et ellipsoïdales tronquées est fixée à  $40m$ . La valeur de la demi-largeur en surface  $L$  est fixée à  $100m$  pour toutes les vallées. Les calculs sont effectués pour les rapports de forme  $H/L = 0.2, 0.4, 0.6, 1.0$  et pour les taux de remplissage  $H_1/H = 0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ .

On utilise respectivement des maillages de type quadratique à 3 noeuds pour les éléments de frontière et de type quadrangulaire à 8 noeuds pour les éléments finis. Par exemple, le maillage réalisé pour une vallée trapézoïdale avec  $H/L = 0.4$  et  $H_1/H = 0.75$  est montré sur la figure (9.24).

### 9.3.4 Méthode d'étude

Pour cette étude nous avons choisi de nous intéresser à l'influence des conditions topographiques et géologiques sur le spectre de réponse en accélération afin d'aboutir à un critère directement exploitable par les ingénieurs, permettant de prédire l'amplification du spectre de réponse en accélération dans des vallées vides et sédimentaires.

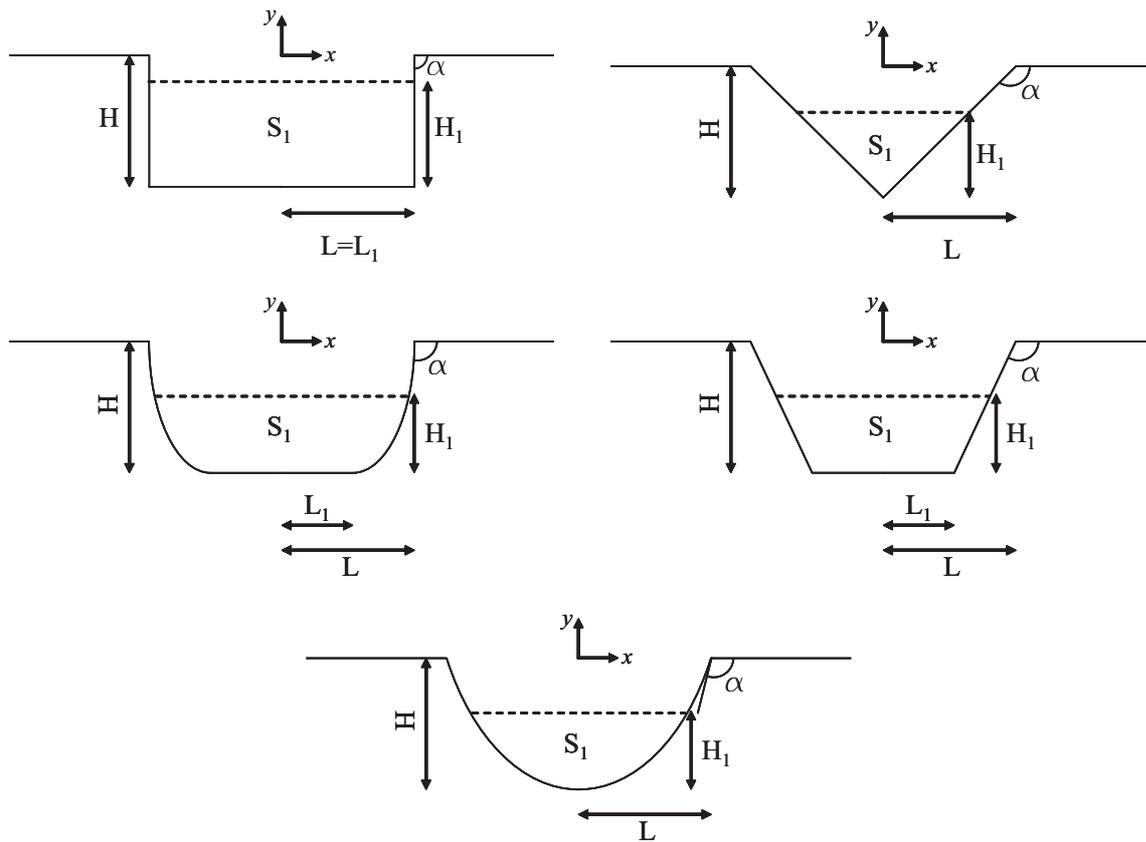
Nous avons donc calculé, pour chacun des cas étudiés, le spectre de réponse élastique à 5% d'amortissement.

Le site de référence est une station éloignée de l'épicentre, qui ne subit pas d'effet de site (effets topographiques et géologiques). À cette fin, la référence est prise comme étant l'onde incidente multipliée par un facteur 2 (amplification d'une onde sur une surface libre).

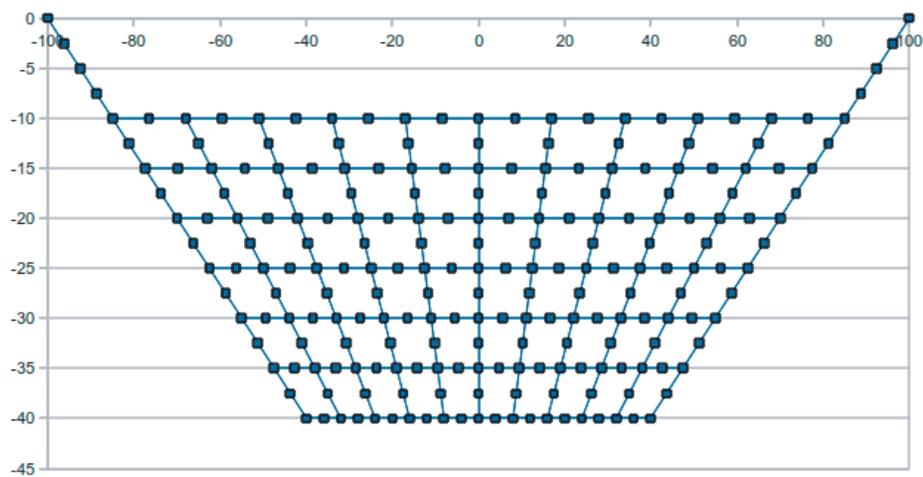
On définit le rapport spectral  $SR$  comme le maximum du rapport entre la pseudo-accélération  $SA$  et la pseudo-accélération du spectre de Ricker  $SA_R$ .

On définit la période d'amplification du site  $T_s$  comme la période de l'oscillateur pour laquelle  $SR$  est maximum.

Par exemple, pour une couche de sol unidimensionnelle de hauteur  $H = 40m$  avec un contraste



**Figure 9.23** — Configurations des vallées étudiées : (a) rectangle ;(b) triangle ;(c) ellipse tronquée ;(d) trapèze ;(e) ellipse



**Figure 9.24** — Exemple de maillage pour une vallée trapézoïdale avec  $H/L = 0.4$  et  $H_1/H = 0.75$

d'impédance  $\alpha = 0.3$ , on a (Figs. 9.25 et 9.26) :

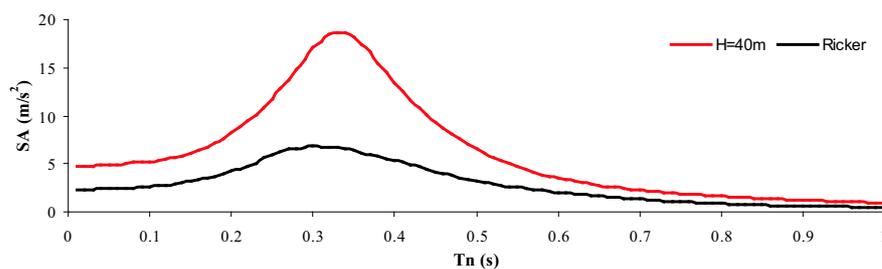


Figure 9.25 — Comparaison du spectre étudié et du spectre de référence

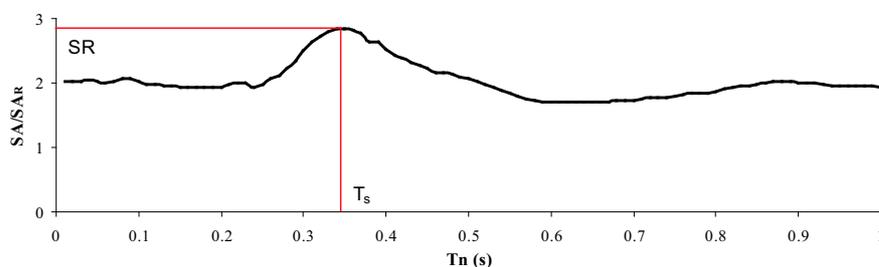


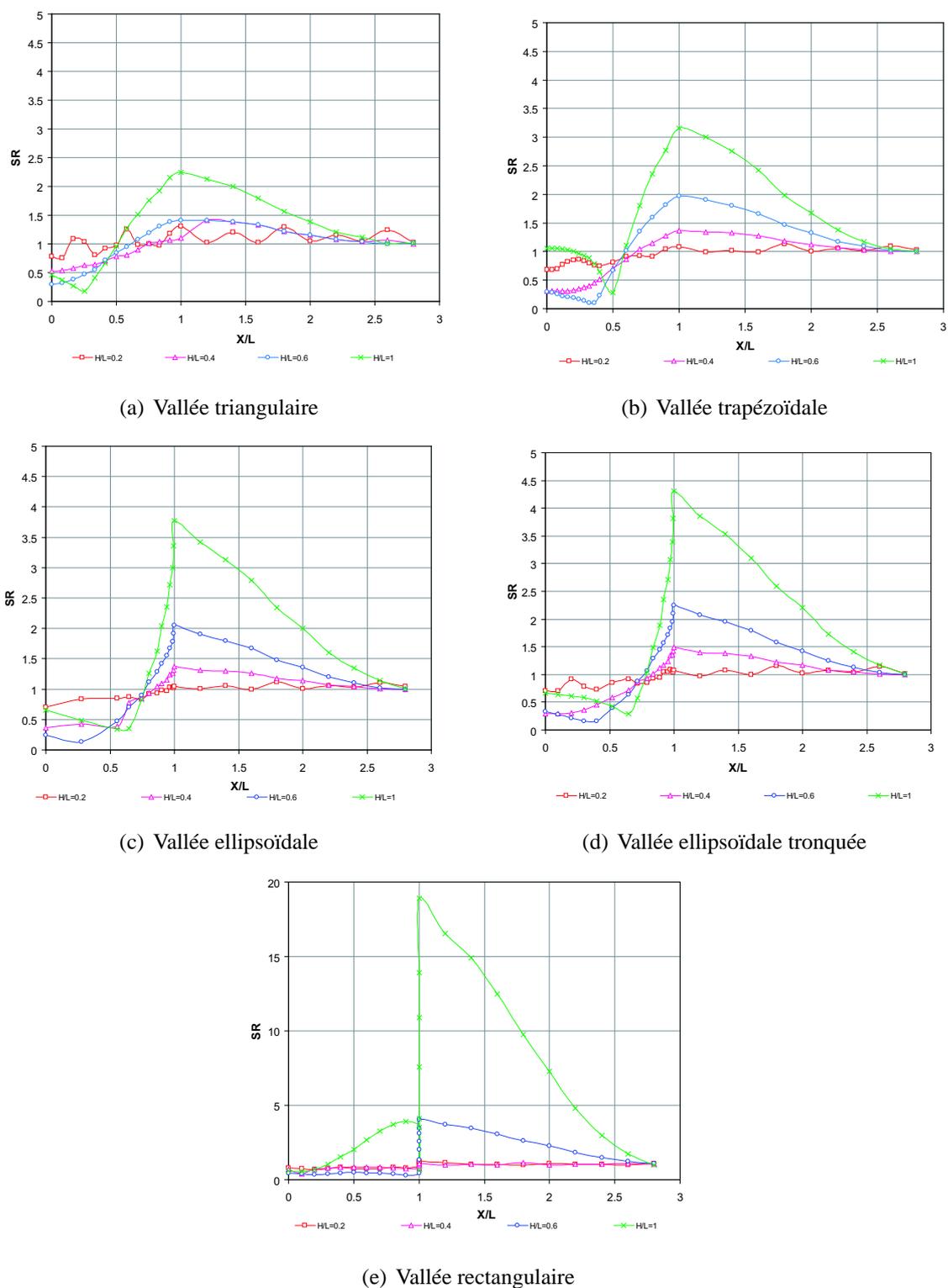
Figure 9.26 — Méthode de calcul de  $T_s$  et de  $SR$

## 9.4 Étude de l'effet de site topographique dans les vallées vides

Comme nous l'avons déjà vu, l'effet topographique n'est pas négligeable. Pour prendre en compte cet effet dans les règlements parasismiques, on doit comprendre le comportement de chaque vallée soumise à des ondes sismiques, en différents points géométriques.

Pour un type de vallée vide donné (Fig. 9.23), on choisit 20 points géométriques servant de stations d'observation pour étudier l'effet topographique. On trace les courbes de spectre de réponse en accélération au point d'observation et au site de référence. On trace également la courbe du rapport spectral obtenue par la division des deux spectres précédents. On obtient un triplet de courbes pour chaque point d'observation choisi et pour chaque type de vallée. Par exemple, dans l'annexe (D) on a présenté ces courbes le long des vallées avec  $H$  fixé à  $100m$ . Ces points représentent des stations d'observation particulièrement intéressantes du point de vue de l'ingénierie sismique.

Pour trouver le point le plus critique, on trace la courbe du « rapport spectral en fonction de la variable adimensionnelle  $x/L$  » pour les différentes vallées (Fig. 9.27). On trouve que [160] :



**Figure 9.27** — Courbes du « rapport spectral en fonction de la variable adimensionnelle  $x/L$  » pour les différentes vallées vides

1. en général, pour les points d'ordonnée inférieure à celle du point situé à mi-pente, il existe une atténuation de la réponse spectrale en accélération,

2. dans toutes les figures, on note une amplification de la réponse spectrale en accélération pour tous les points des reliefs situés entre la station à mi-pente et le coin supérieur de la vallée. Au point d'abscisse adimensionnelle  $x/L = 1$ , on a la plus forte amplification.

Dans le paragraphe précédent, on a étudié le rapport spectral en différents points pour chaque vallée. On peut maintenant quantifier les atténuations et amplifications du rapport spectral d'une topographie donnée. Les figures (9.28), (9.29), (9.30) et (9.31) représentent le spectre de réponse en accélération de différentes vallées aux points d'abscisses  $x/L = 0$ ,  $x/L = coin$ ,  $x/L = mi - pente$  et  $x/L = 1$ . En comparant ces courbes, on peut voir les mêmes résultats [160] :

1. en général dans toutes les courbes, de  $x/L = 0$  à  $x/L = 1$ , l'accélération spectrale tend à augmenter,
2. aux points d'abscisses  $x/L = 0$  et  $x/L = coin$ , il existe une atténuation,
3. en montant sur la pente, l'atténuation se transforme en amplification,
4. l'amplification maximale est atteinte au point d'abscisse  $x/L = 1$ . Ce point est le plus critique pour l'analyse sismique. Donc dans la suite, on s'appuiera sur les résultats obtenus pour ce point.

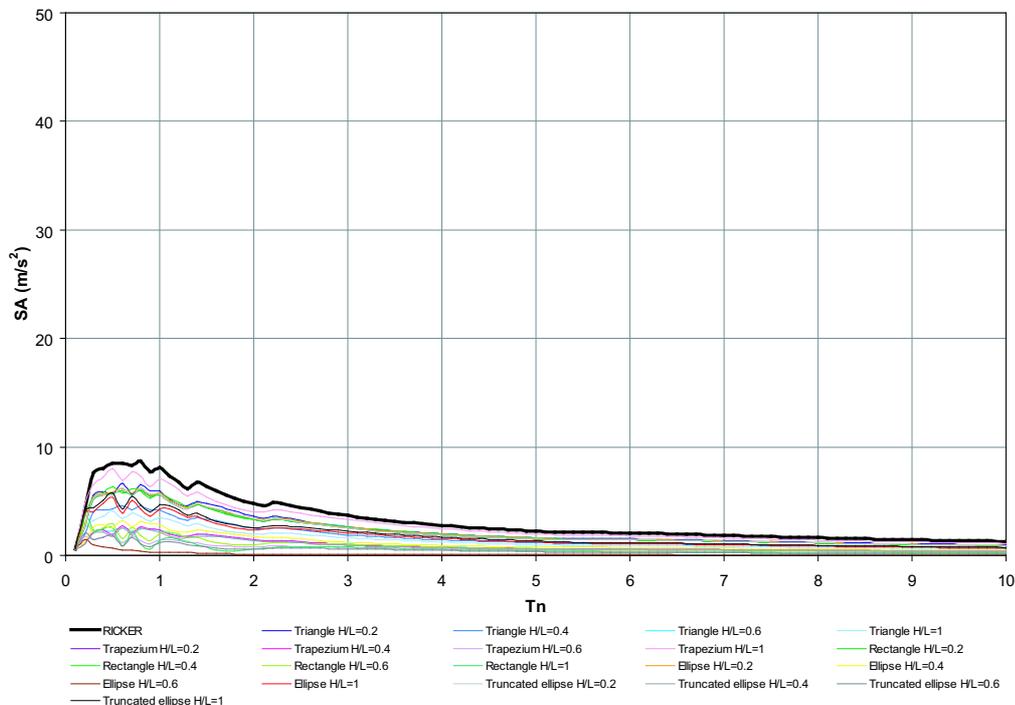


Figure 9.28 — Spectres de réponse en accélération au point central ( $x/L = 0$ )

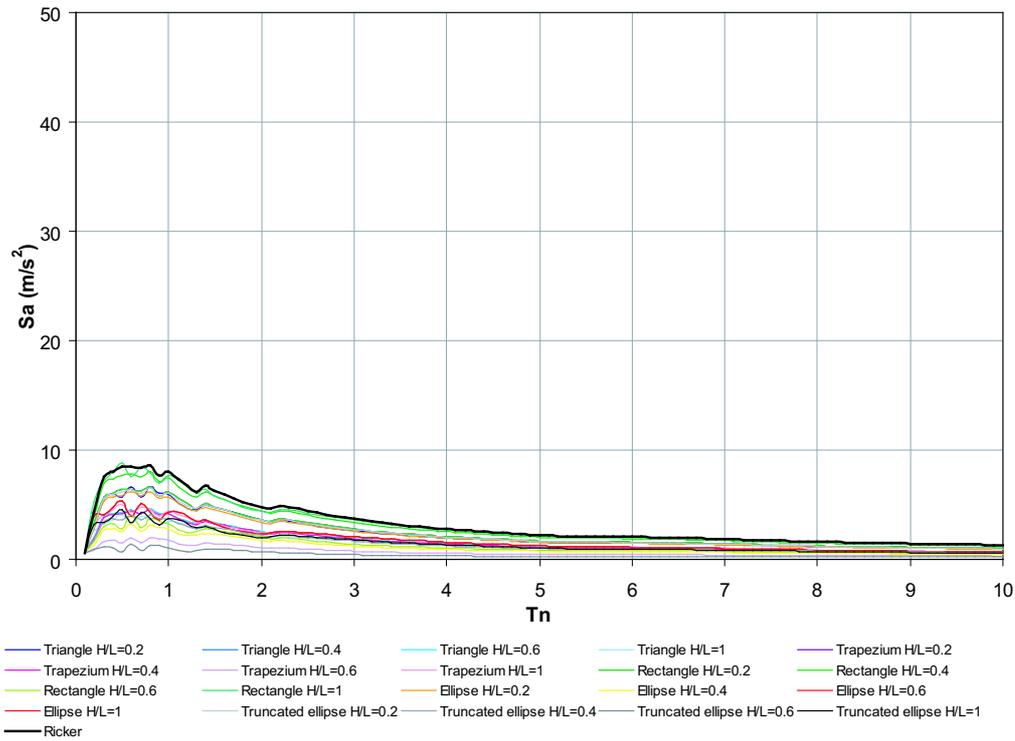


Figure 9.29 — Spectres de réponse en accélération au pied de la pente

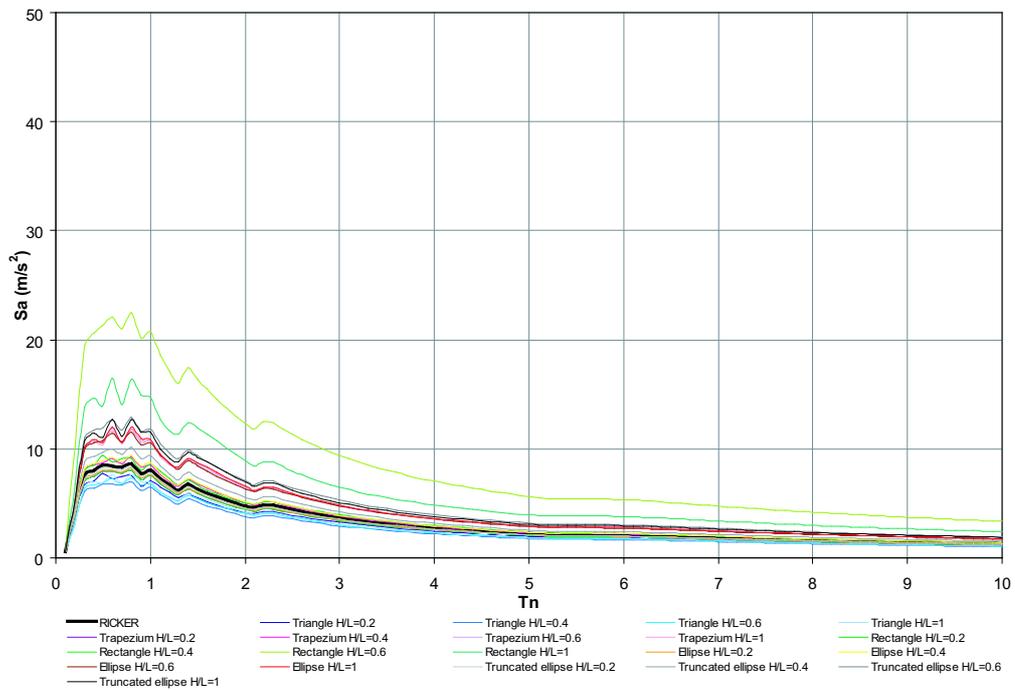


Figure 9.30 — Spectres de réponse en accélération au pied situé à mi-pente

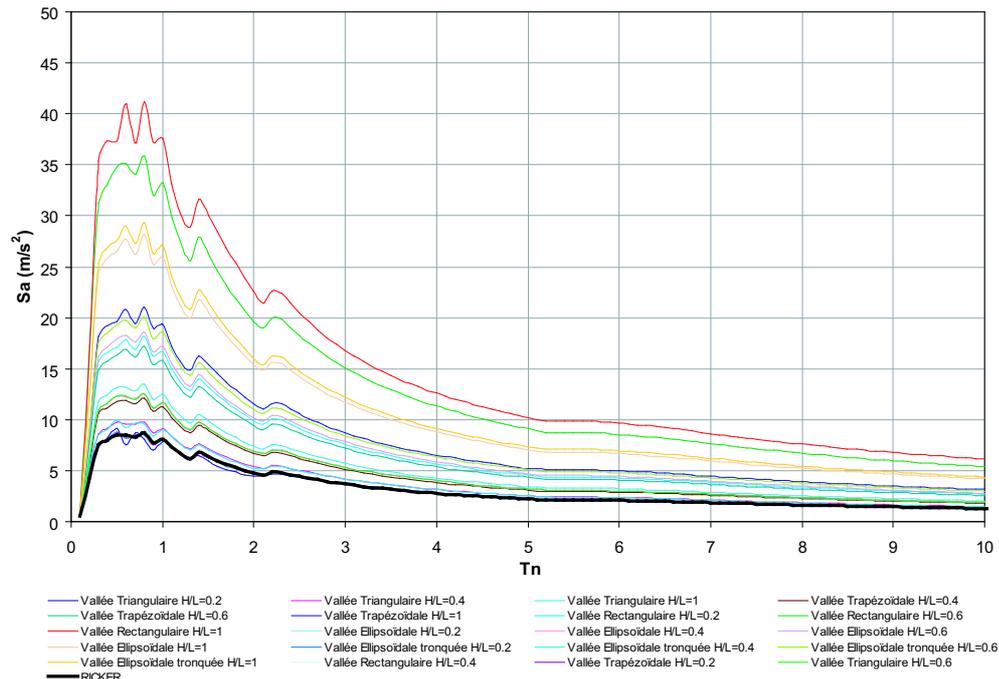


Figure 9.31 — Spectres de réponse en accélération au sommet de la pente

### 9.4.1 Domaine d'influence de l'effet topographique dans les vallées vides

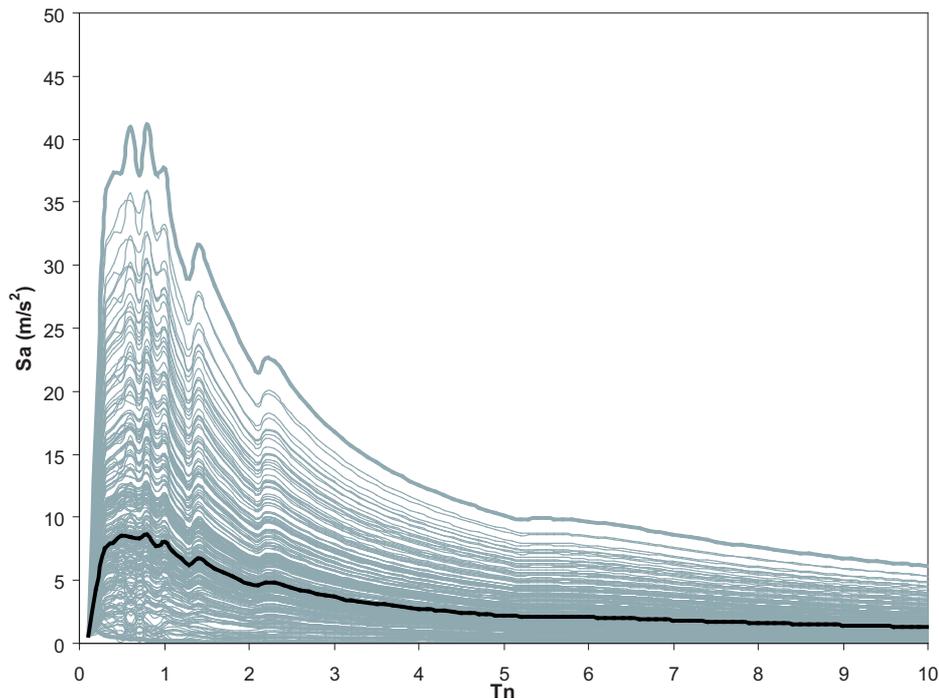
Si toutes les courbes de spectre de réponse en accélération des différents points de vallées sont établies sur une seule figure, le domaine d'influence des effets topographiques dans les vallées vides peut être déterminé (Fig. 9.32).

### 9.4.2 Quantification de l'effet topographique dans les vallées vides

Comme on le voit dans la figure (9.31), si la valeur de  $H/L$  augmente, l'accélération spectrale croît. Si on compare les courbes de toutes les configurations étudiées, il est difficile de trouver une corrélation entre les caractéristiques de la topographie et l'amplification de la réponse sismique du site.

#### 9.4.2.1 Géométries non-courbes (triangle, trapèzes et rectangles)

Dans un premier temps, on élimine les courbes relatives à l'ellipse et à l'ellipse tronquée (Fig. 9.33). Le tableau (9.3) établit une relation entre les paramètres géométriques des configurations restantes et le classement des amplifications sismiques calculées. Le classement 1 correspond à la plus forte amplification.



**Figure 9.32** — Domaine d'influence des effets topographiques sur les réponses sismiques des vallées vides. Le spectre de Ricker est représenté en noir et les lignes grises sont les spectres de réponse en accélération des différents points d'observation des vallées vides.

| Classement | Forme     | Dimension (H/L) | Surface (S)          | Angle (A) | S/A   |
|------------|-----------|-----------------|----------------------|-----------|-------|
| 1          | Rectangle | 1               | 20,000m <sup>2</sup> | 90°       | 222.2 |
| 2          | Rectangle | 0.6             | 12,000m <sup>2</sup> | 90°       | 133.3 |
| 3          | Trapèze   | 1               | 14,000m <sup>2</sup> | 120°      | 116.7 |
| 4          | Rectangle | 0.4             | 8,000m <sup>2</sup>  | 90°       | 88.8  |
| 5          | Triangle  | 1               | 10,000m <sup>2</sup> | 135°      | 74.07 |
| 6          | Trapèze   | 0.6             | 8,400m <sup>2</sup>  | 135°      | 62.2  |
| 7          | Triangle  | 0.6             | 6,000m <sup>2</sup>  | 150°      | 40.0  |
| 7          | Trapèze   | 0.4             | 5,600m <sup>2</sup>  | 146°      | 38.4  |
| 8          | Triangle  | 0.4             | 4,000m <sup>2</sup>  | 158°      | 44.4  |
| 8          | Rectangle | 0.2             | 4,000m <sup>2</sup>  | 90°       | 25.3  |
| 9          | Triangle  | 0.2             | 2,000m <sup>2</sup>  | 169°      | 17.3  |
| 9          | Trapèze   | 0.2             | 2,800m <sup>2</sup>  | 162°      | 11.8  |

**Tableau 9.3** — Classement de courbes

Il y a une relation très claire entre le paramètre de « Surface/Angle » et le classement (la vallée triangulaire caractérisée par le rapport de forme  $H/L = 0.4$  est une exception, mais de faible importance). Donc, on peut considérer que les courbes de spectre de réponse sont indépendantes

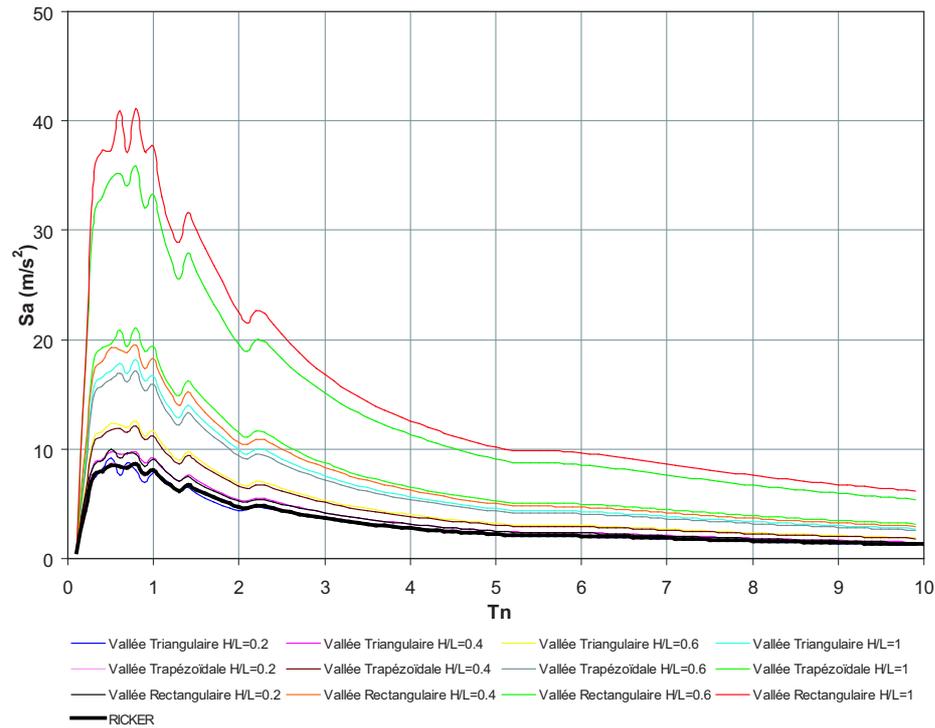


Figure 9.33 — Spectres de réponse en accélération au sommet de la pente pour les géométries non-courbes (triangle, trapèzes et rectangles).

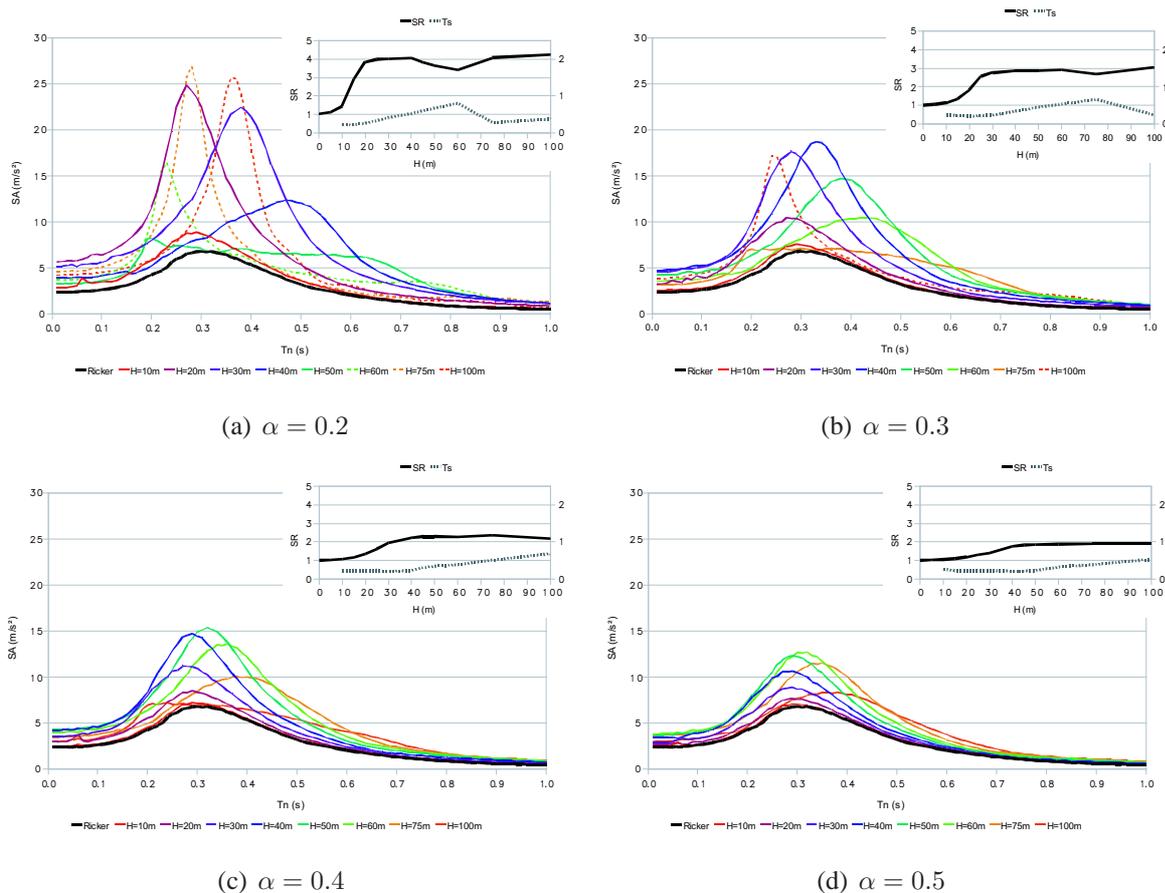
de la forme de la vallée. On peut ainsi modéliser l'effet de site topographique subi par les différentes configurations uniquement avec le paramètre *Surface/Angle* ( $S/A$ ) [160].

#### 9.4.2.2 Géométries courbes (ellipses et ellipses tronquées)

Dans un second temps, on étudie toutes les formes géométriques envisagées à  $H/L$  fixé (9.31). La modélisation de l'effet de site topographique pour les configurations courbes (ellipse et ellipse tronquée) est désormais possible. Pour chaque valeur de  $H/L$ , le spectre de réponse croît avec le paramètre *Surface/Angle*. On note de plus que le comportement des formes courbes (ellipse et ellipse tronquée) est intermédiaire : les courbes spectrales sont toujours situées entre celles des vallées rectangulaires et celles des vallées trapézoïdales [160].

## 9.5 Étude des effets combinés topographiques et géologiques dans les bassins sédimentaires 2D

Comme expliqué ci-dessus, les codes de dimensionnement parasismiques actuels reposent sur des calculs issus de modèles unidimensionnels. L'objectif de cette section est d'étudier l'effet combiné des caractéristiques géométriques et du contraste d'impédance des sédiments par



**Figure 9.34** — Effet de la hauteur sur le spectre de réponse des couches de sol unidimensionnelles

rapport au substratum  $\alpha$  sur le spectre de réponse élastique en accélération.

## 9.5.1 Cas d'une couche de sol unidimensionnelle

### 9.5.1.1 Période du site $T_s$

On veut étudier l'influence de la hauteur de sédiments et des propriétés de ceux-ci sur le spectre de réponse dans le cas d'une couche unidimensionnelle afin d'adopter une démarche généralisable ensuite au cas bidimensionnel.

On étudie la réponse d'une couche de sol unidimensionnelle pour  $\alpha$  variant de 0.2 à 0.5 (Tab. 9.2) et  $H$  de 10 à 100m.

On s'intéresse tout d'abord à la période du pic d'amplification  $T_s$ . On observe que lorsque  $H$  augmente pour  $\alpha$  fixé, on observe d'abord un décalage du pic vers des périodes plus élevées. Si on augmente encore  $H$ , pour des valeurs de  $\alpha$  faibles, on observe ensuite un retour du pic vers de faibles périodes (Fig. 9.34).

De même, lorsque  $\alpha$  diminue pour  $H$  fixé on a un décalage du pic vers des périodes plus élevées

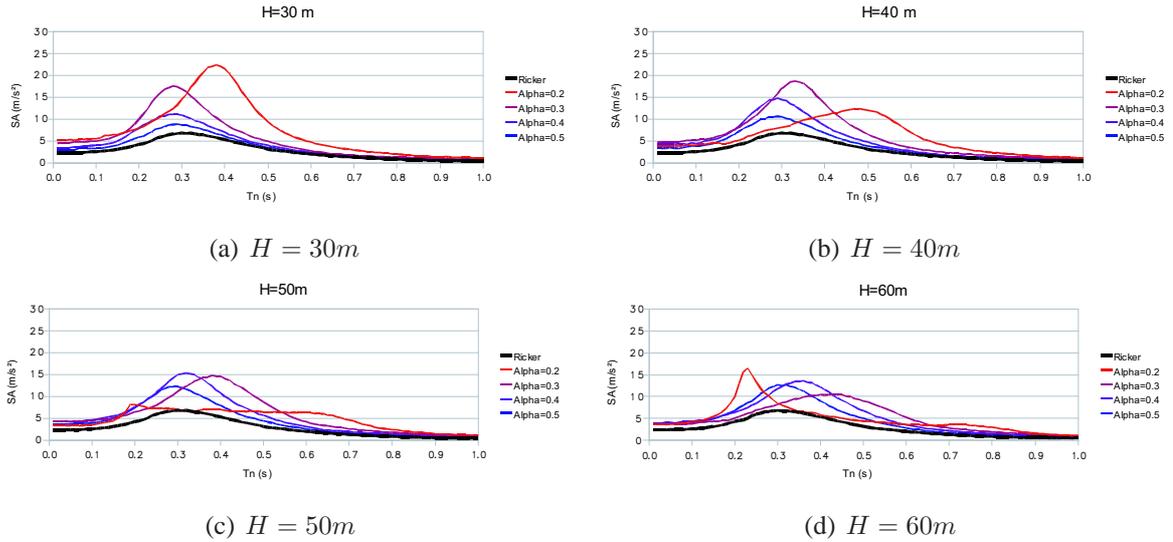


Figure 9.35 — Effet du contraste d'impédance sur le spectre de réponse des couches de sol unidimensionnelles

(Fig. 9.35).

Si on suppose que l'amplification maximale se produit pour la période du spectre de réponse correspondant à la fréquence de résonance de la couche de sol on a :

$$T_s = \frac{1}{f_n} = \frac{4H}{v_s} = \frac{4\rho_s}{\rho_r v_r} \frac{H}{\alpha} = 0.0027 \frac{H}{\alpha} \tag{9.22}$$

On trace  $T_s$  en fonction de  $H/\alpha$  pour les cas où l'amplification est significative et on compare les points obtenus grâce à HYBRID avec le modèle théorique  $T_s = 0.0027H/\alpha$ . Pour  $H/\alpha$  compris entre 65 et 300, les données issues du calcul sont très proches du modèle théorique (Fig. 9.36) :

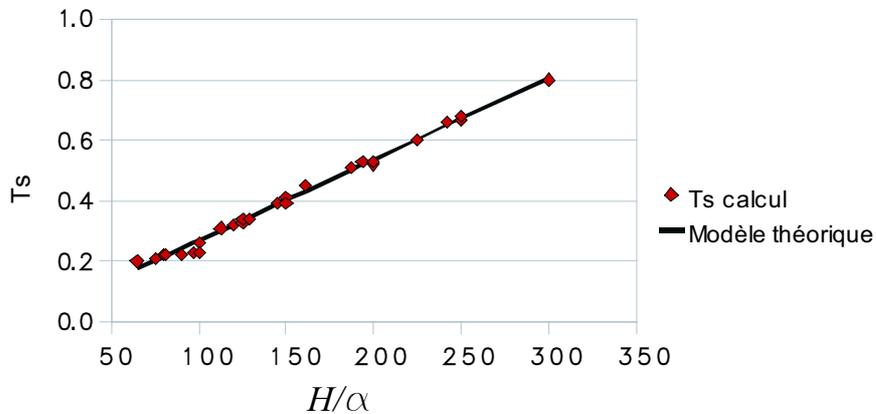


Figure 9.36 — Détermination de  $T_s$  en fonction de  $H/\alpha$

Si on définit pour chaque point l'erreur relative en pourcentage  $e_i(\%) = \frac{(T_s^{calcul} - T_s^{modle})}{T_s^{modle}}$ , l'erreur relative maximale en pourcentage est  $e_{imax}(\%) = \max |e_i(\%)| = 15.3\%$  et l'erreur relative moyenne en pourcentage est  $\bar{e}_i(\%) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |e_i(\%)| = 3.9\%$ .

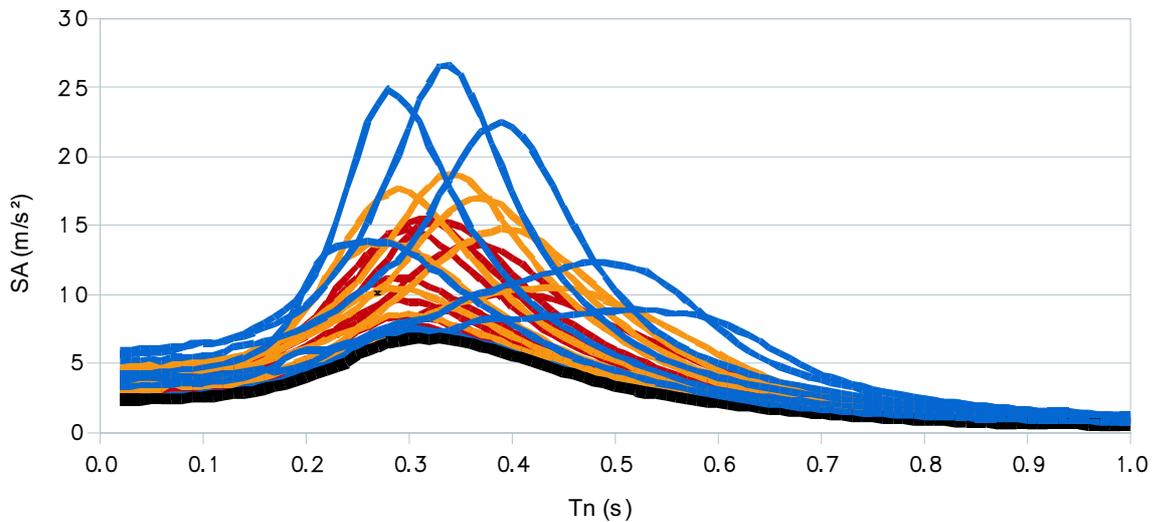
Ces valeurs de  $H/\alpha$  correspondent à des fréquences de résonance de la couche de sol allant de 1.2 à 5.8 Hz.

On remarque que ces fréquences sont celles contenues dans le signal de Ricker. Pour des fréquences plus élevées ( $H/\alpha$  plus faible) non contenues dans le signal de Ricker, l'amplification est très faible ce qui ne permet pas de déterminer correctement la période  $T_s$ .

Les fréquences plus basses ( $H/\alpha$  plus élevé) correspondent à l'observation du retour de la période du site vers les périodes faibles. On peut donc supposer que ces fréquences étant peu présentes dans le signal incident, la couche de sol résonne selon un mode de résonance plus élevé. Pour la suite de notre étude nous écarterons ces cas.

La corrélation avec la théorie étant très bonne, cela permet de valider le modèle de calcul.

### 9.5.1.2 Rapport spectral



**Figure 9.37** — Spectres de réponse en accélération de couches de sol unidimensionnelles pour  $H/\alpha < 225$  (en noir Ricker, en bleu  $\alpha = 0.2$ , en jaune  $\alpha = 0.3$ , en rouge  $\alpha = 0.4$ )

On observe que pour une même période  $T_s$ , l'amplitude des spectres diminue lorsque  $\alpha$  augmente (Fig. 9.37) et lorsque  $H$  augmente (ces deux paramètres étant liés par la relation  $T_s = 0.0027H/\alpha$ ).

On veut représenter sur un même graphique les rapports spectraux des différentes couches de sol pour pouvoir estimer le rapport spectral à partir des valeurs de  $\alpha$  et de  $H$  (Fig. 9.38).

On choisit de représenter en abscisse le paramètre  $H/\alpha$  qui gouverne la période de pic  $T_s$  et

en ordonnée le paramètre  $(SR - 1)H$ . Le paramètre  $(SR - 1)$  permet une bonne visualisation de l'amplification ou de la non-amplification. En effet, lorsqu'il n'y a pas d'amplification  $(SR - 1) = 0$ .

On multiplie ensuite ce paramètre par  $H$  pour prendre en compte le fait que le rapport spectral diminue lorsque  $H$  augmente pour une période donnée.

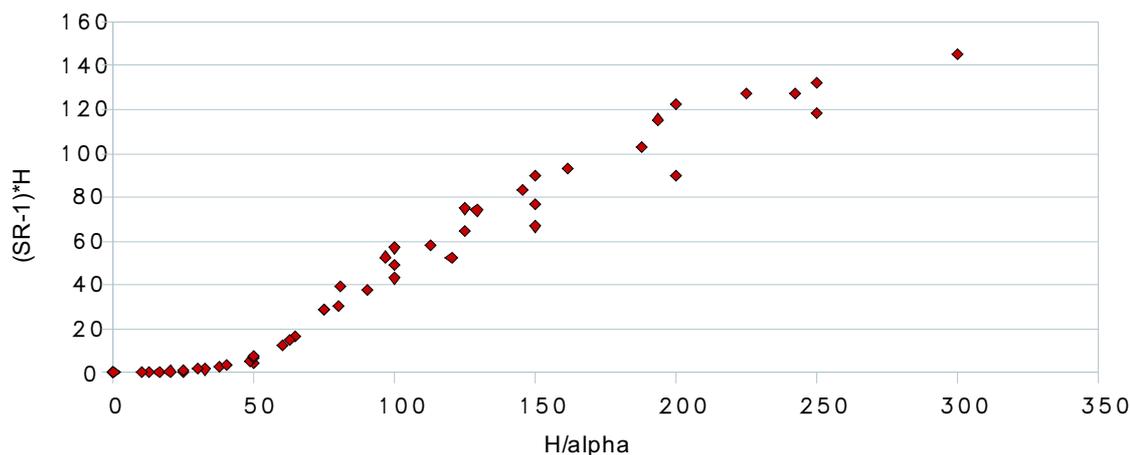


Figure 9.38 — Évolution du paramètre  $(SR - 1)H$  en fonction du paramètre  $H/\alpha$

## 9.5.2 Cas bidimensionnel

### 9.5.2.1 Vallées pleines

Ici, les réponses en accélération des vallées pleines sont comparées aux réponses de colonnes de sol unidimensionnelles. La hauteur de la colonne 1D de référence est choisie égale à l'épaisseur de la couche sédimentaire à l'aplomb du point d'observation considéré dans la vallée pleine. Pour étudier seulement l'influence de la bidimensionnalité sur la réponse du site, on néglige l'effet du contraste d'impédance et on continue le calcul avec le rapport d'impédance sédiment/substratum  $\alpha$  fixé à 0.3. Les caractéristiques géométriques des vallées ont été exposées auparavant. On suppose que les vallées sont complètement remplies par une unique couche sédimentaire homogène.

Pour un type de vallée pleine donné, on choisit 13 points superficiels servant de stations d'observation pour étudier les effets combinés de la topographie et des sédiments. On trace les spectres de réponse en accélération pour chaque point d'observation et pour la station de référence. On trace également la courbe du rapport spectral obtenu par la normalisation des spectres observés par le spectre de référence. On obtient un triplet de courbes pour chaque point d'observation choisi et pour chaque type de vallée. Ces points représentent des stations d'observation particulièrement intéressantes du point de vue de l'ingénierie sismique. Par exemple, on a présenté

dans l'annexe E ces courbes sur les points de surface des vallées avec  $H$  fixé à  $100m$ . Pour savoir le comportement de chaque vallée sous sollicitation sismique, on trace le rapport spectral en fonction de la variable adimensionnelle  $x/L$  pour les différentes vallées (Fig. 9.39). On trouve que [160] :

1. toutes les courbes sont constituées de deux parties. Une partie décroissante du point central ( $x/L = 0$ ) jusqu'à un point d'abscisse comprise entre  $x/L = 0.5$  et  $x/L = 1$ , et une partie croissante entre le point intermédiaire d'abscisse  $x/L = 0.5$  et le sommet de la pente  $x/L = 1$ . Pour la première partie, c'est évident que si on s'éloigne du point central, l'amplitude décroît [145]. La partie croissante de la courbe montre la prédominance de l'effet topographique sur les pentes du relief recouvertes de sédiment. Dans la partie centrale de la vallée, l'effet sédimentaire unidimensionnel contrôle la réponse locale du site. Sur les pentes du bassin sédimentaire, la présence d'alluvions ne fait qu'atténuer l'amplification topographique dominante.
2. sur quasiment toutes les courbes, l'amplification maximale est atteinte au point central de la vallée  $x/L = 0$ . Donc ce point est le plus critique. Par conséquent, dans la suite, on s'intéresse à la modélisation des effets combinés au centre des vallées. Les figures (9.40), (9.41) et (9.42) représentent le spectre de réponse en accélération de différentes vallées aux points superficiels d'abscisses  $x/L = 0$ ,  $x/L = \text{coin inférieur}$  et  $x/L = \text{mi-pente}$ . En comparant ces courbes, on observe les mêmes tendances que précédemment : si on s'éloigne du point central de la vallée, l'amplitude de la réponse en accélération décroît.

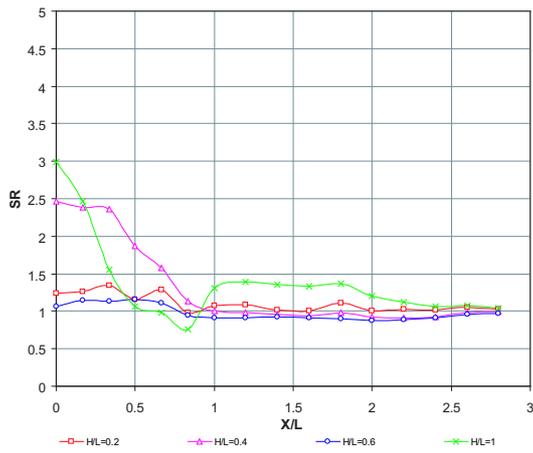
### Comparaison des effets combinés et 1D dans les vallées pleines

Comme on le voit dans la figure (9.40), les courbes forment un groupe très compact. Pour avoir une meilleure lisibilité des résultats, on considère seulement les sept courbes donnant les plus fortes amplifications. Dans le tableau (9.4), la courbe  $n^{\circ}1$  correspond à la plus forte amplification de la réponse spectrale en accélération.

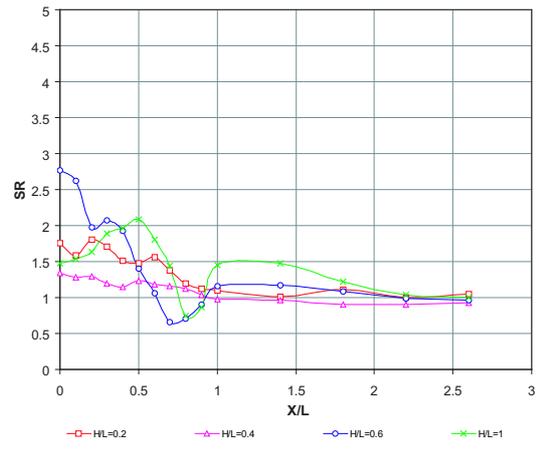
| Classement | Forme            | Dimension (H/L) | Surface (S) | Hauteur (H) | H/S   |
|------------|------------------|-----------------|-------------|-------------|-------|
| 1          | Rectangle        | 1               | $20,000m^2$ | 100         | 0.005 |
| 2          | Ellipse tronquée | 1               | $15,700m^2$ | 100         | 0.006 |
| 3          | Rectangle        | 0.6             | $12,000m^2$ | 60          | 0.005 |
| 4          | Ellipse          | 1               | $15,708m^2$ | 100         | 0.006 |
| 5          | Ellipse tronquée | 0.6             | $9,055m^2$  | 60          | 0.006 |
| 6          | Trapèze          | 0.6             | $8,400m^2$  | 60          | 0.007 |
| 7          | Triangle         | 0.4             | $4,000m^2$  | 40          | 0.01  |

Tableau 9.4 — Classement de courbes de l'effet combiné

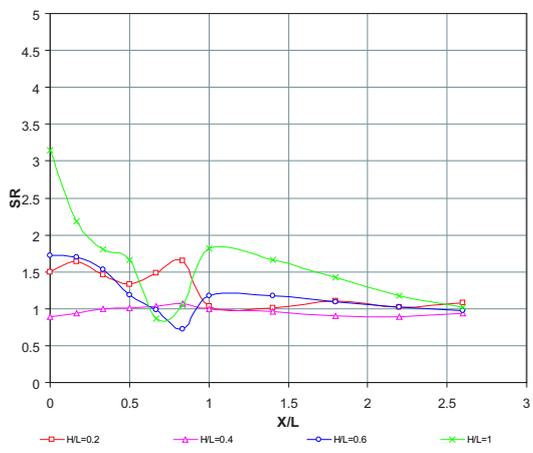
On présente dans le tableau (9.4) un paramètre de « Hauteur/Surface ( $H/S$ ) ». On considère que



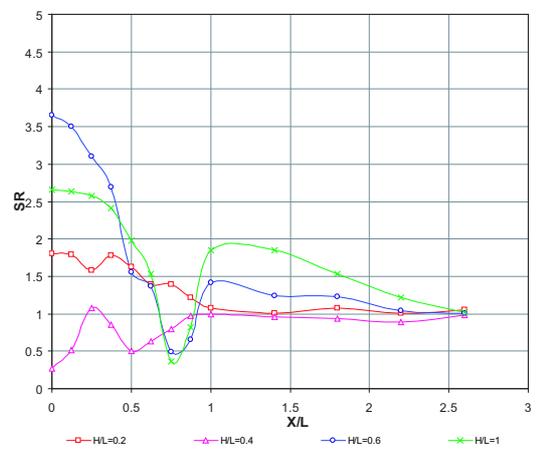
(a) Vallée triangulaire



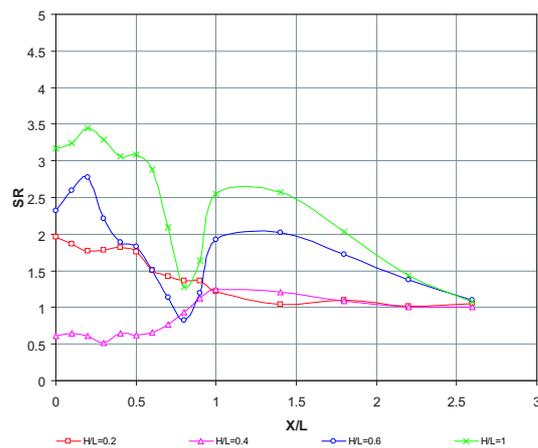
(b) Vallée trapézoïdale



(c) Vallée ellipsoïdale



(d) Vallée ellipsoïdale tronquée



(e) Vallée rectangulaire

Figure 9.39 — Courbes du « rapport spectral en fonction de la variable adimensionnelle  $x/L$  » pour les différentes vallées pleines

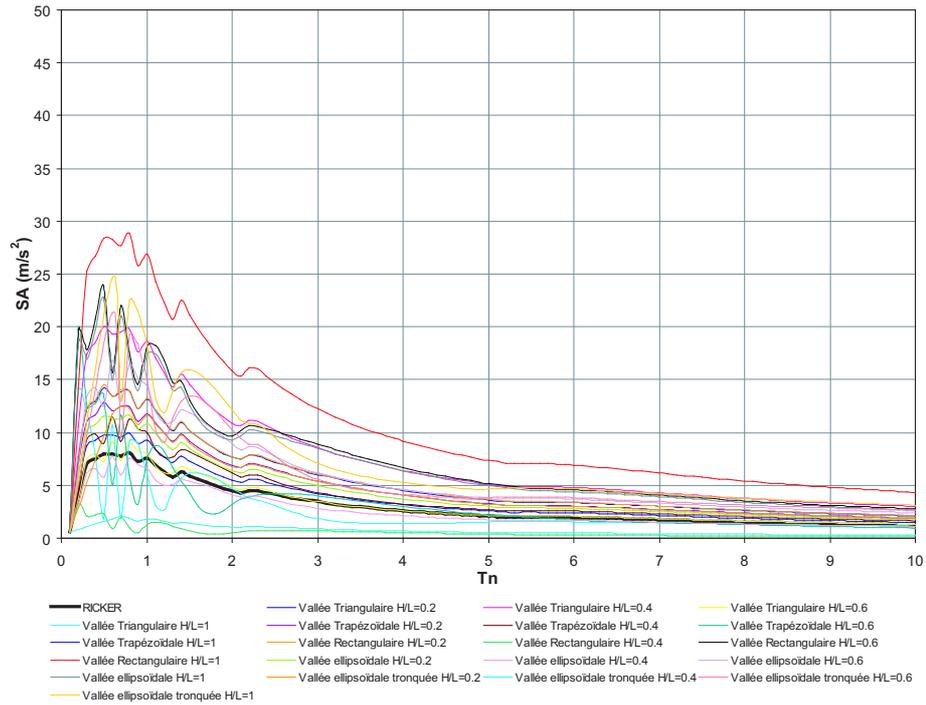


Figure 9.40 — Spectres de réponse en accélération au point central des vallées pleines

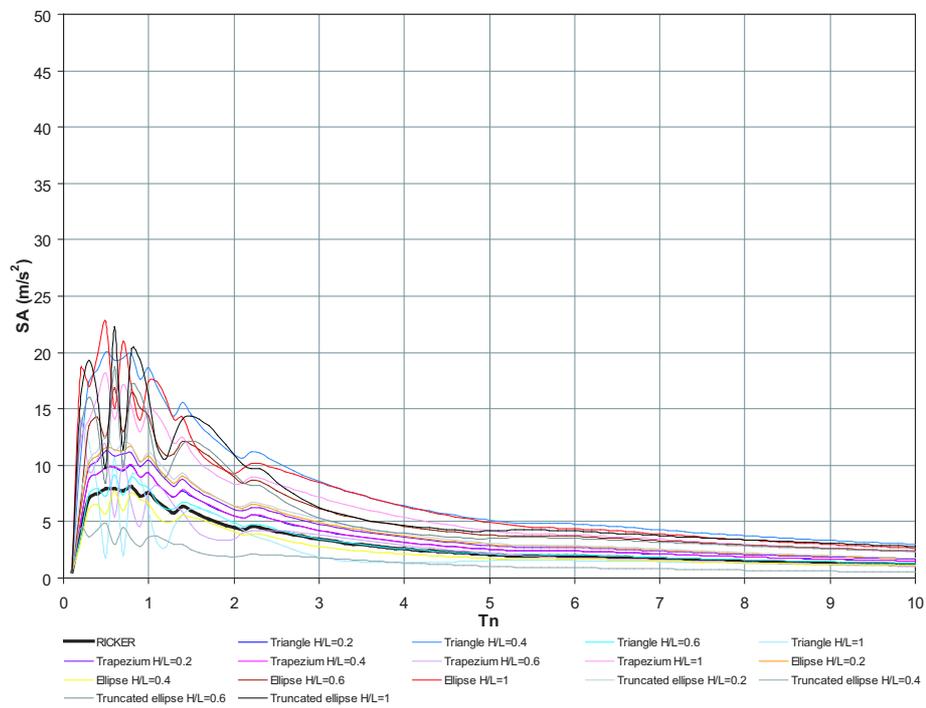


Figure 9.41 — Spectres de réponse en accélération au pied de la pente des vallées pleines

si  $H/S$  diminue, l'amplification augmente. La vallée rectangulaire caractérisée par le rapport de forme  $H/S = 0.6$  est une exception, mais de faible importance. Il est important de noter

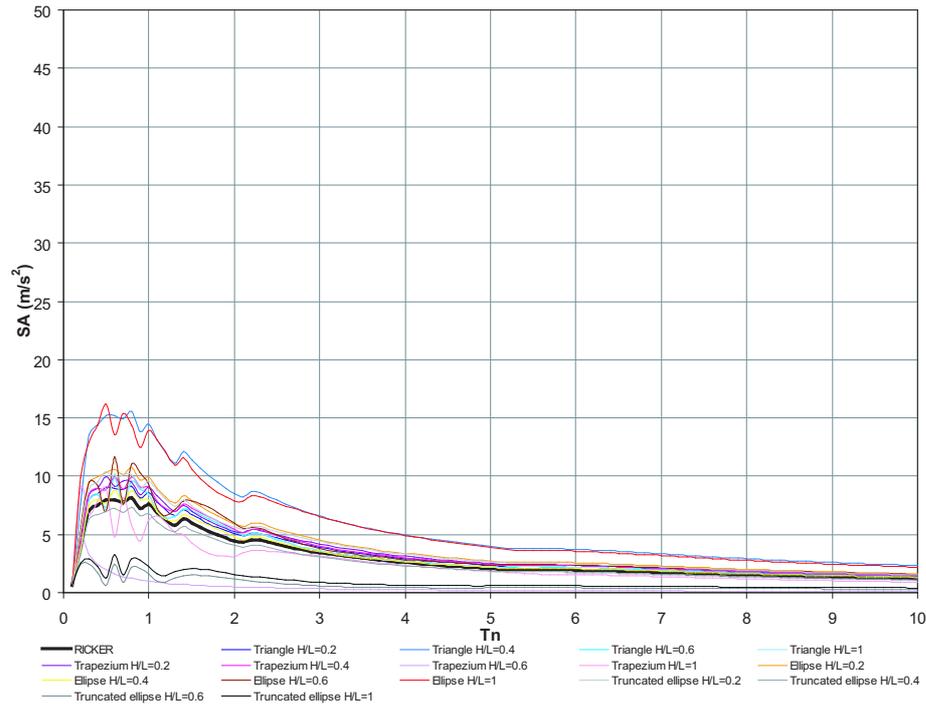


Figure 9.42 — Spectres de réponse en accélération au point situé à mi-pente

que :

$$\frac{H}{S} \propto \frac{1}{L} \tag{9.23}$$

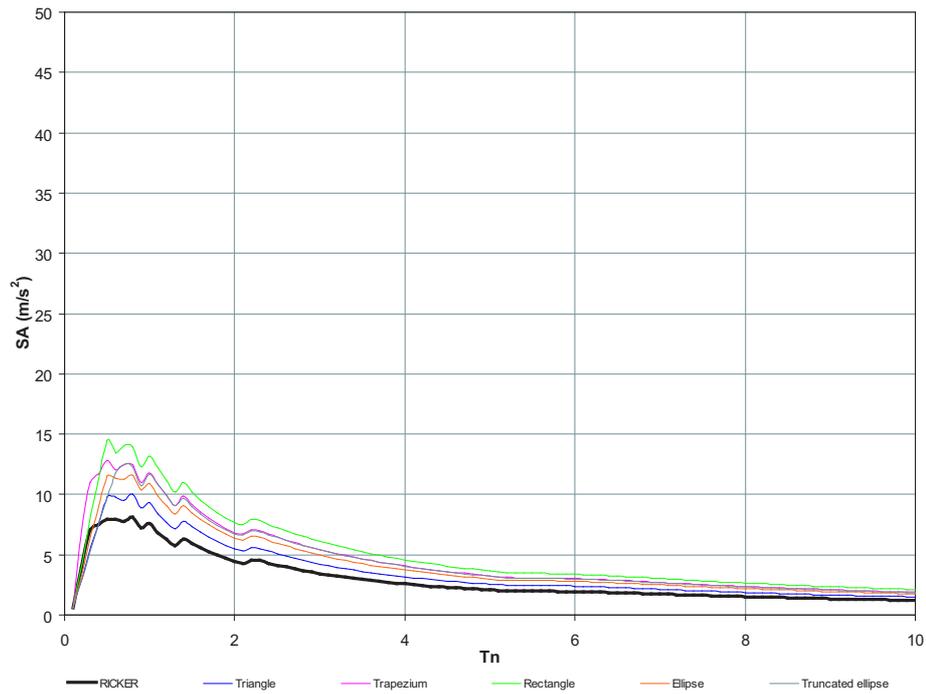
Autrement dit :

$$\frac{H}{S} \downarrow \Rightarrow \frac{1}{L} \downarrow \Rightarrow L \uparrow \Rightarrow \text{amplification} \uparrow \tag{9.24}$$

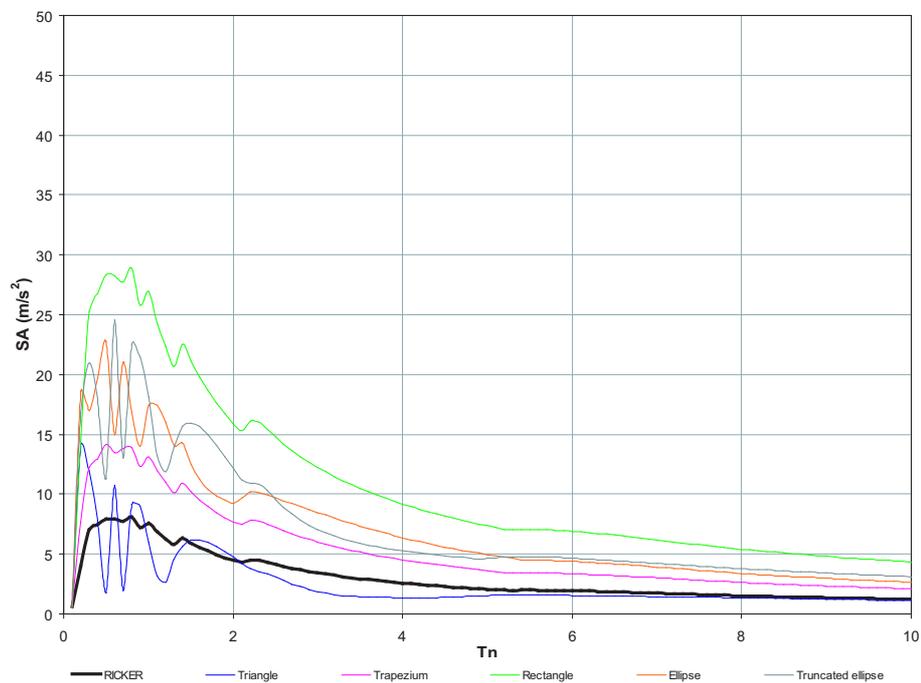
Cela veut dire que, au point fixé  $x/L = 0$ , quand  $L$  augmente, l'amplification augmente. D'autre part, au point fixé  $x/L = 0$ , si la valeur de la hauteur est constante, avec l'augmentation de la largeur en surface, l'influence de l'effet topographique dans une vallée pleine disparaît et donc l'effet combiné se transforme en effet géologique 1D.

Pour vérifier ce résultat, on compare les vallées caractérisées par la même profondeur, mais par des surfaces  $S$  différentes. Dans ce cas, faire varier  $S$  en maintenant  $H$  constante revient à faire varier  $L$  à  $H$  fixé. On trace les courbes pour les valeurs de  $H$  égales à 20 et 100 qui sont les valeurs minimale et maximale de la hauteur (Figs. 9.43 et 9.44). Alors, on arrive au même résultat : si  $S$  augmente, l'amplification de la réponse en accélération au centre de la vallée augmente. Une question se pose : sur un point éloigné de l'effet topographique, si la valeur de  $L$  tend vers  $\infty$ , est-ce que les courbes représentant les effets combinés 2D tendent vers les courbes caractérisant l'effet 1D ?

Pour répondre à cette question, les réponses en accélération de vallées pleines sont comparées aux réponses de colonnes de sol unidimensionnelles. La hauteur de la colonne 1D de référence est choisie égale à l'épaisseur de la couche sédimentaire à l'aplomb du point d'observation considéré dans la vallée pleine (Figs. 9.45, 9.46, 9.47, 9.48). En comparant les différentes



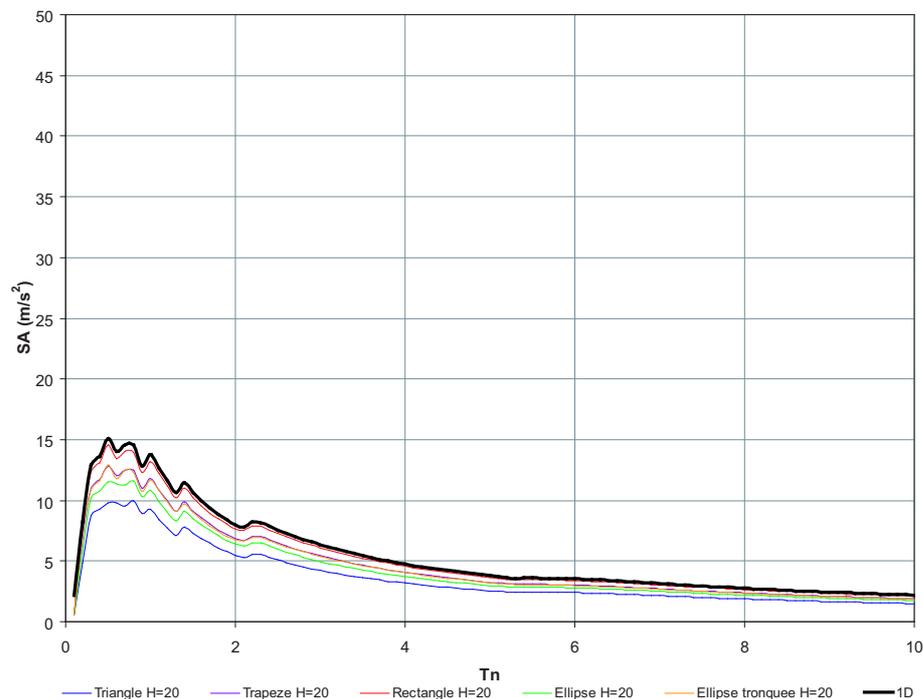
*Figure 9.43* — Spectres de réponse en accélération pour H=20m



*Figure 9.44* — Spectres de réponse en accélération pour H=100m

courbes, on trouve que sur un point éloigné de l'effet topographique, si la valeur de  $L$  va vers  $\infty$ , les courbes de l'effet combiné tendent vers la courbe caractéristique de l'effet 1D. Alors,

dans ce point, l'effet 1D est prédominant.



*Figure 9.45* — Comparaison des réponses en accélération des vallées pleines et des réponses de colonnes de sol 1D au point central pour H=20m

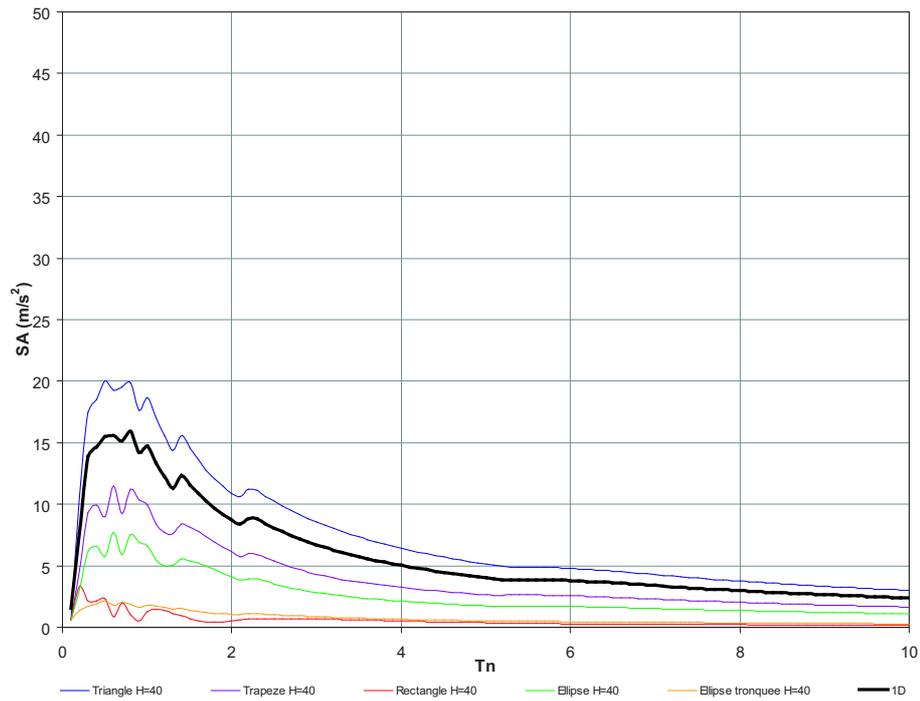
### 9.5.2.2 Vallées semi-pleines

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude des effets de taux de remplissage (Fig. 9.23) et de contraste d'impédance des sédiments par rapport au substratum  $\alpha$  (Tab. 9.2) sur le spectre de réponse en accélération. Les formes de vallée étudiées se limitent aux configurations triangulaire et trapézoïdale.

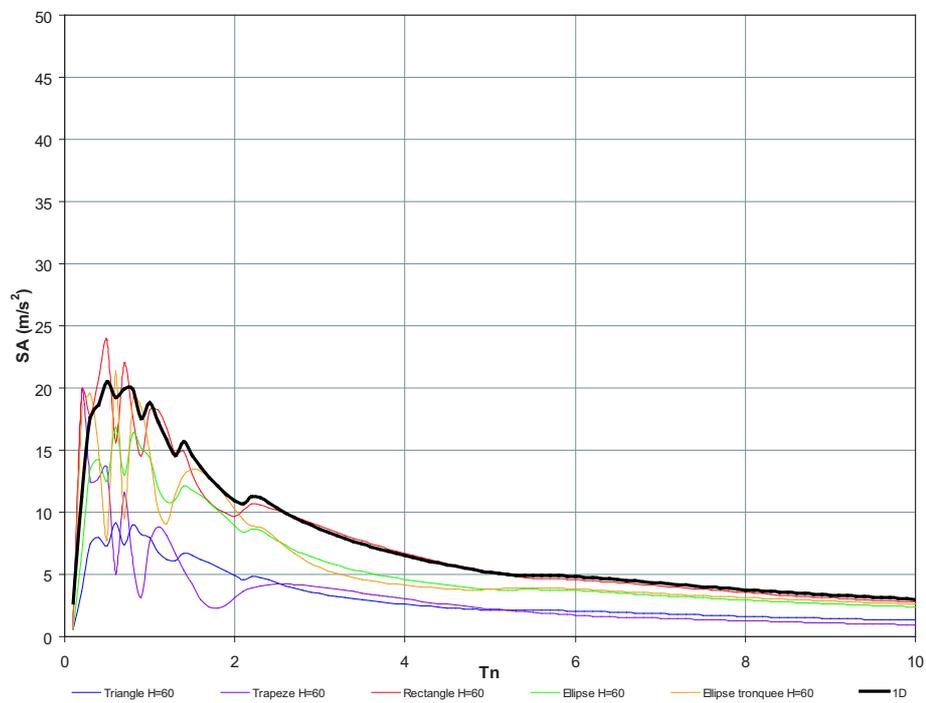
#### Évolution spatiale

Dans un premier temps, on trace le rapport spectral en fonction de la position du point considéré (Figs. 9.49 et 9.50).

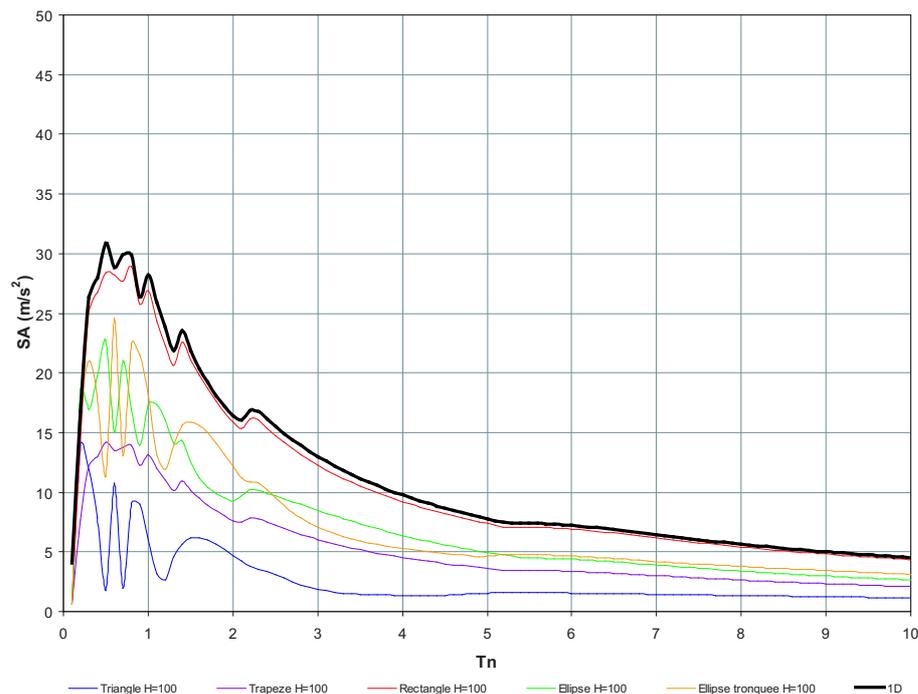
On peut remarquer que l'on passe d'un comportement de vallée vide avec une amplification maximale au bord de la vallée à un comportement de vallée pleine avec une amplification maximale au centre de la vallée. Pour une vallée remplie au quart, on remarque que le comportement est le même que celui d'une vallée vide. Pour les taux de remplissage intermédiaires, on a un maximum local au bord de la vallée, un maximum local au centre de la vallée et un minimum au point de contact entre les sédiments et le substratum. On observe également une décroissance



**Figure 9.46** — Comparaison des réponses en accélération des vallées pleines et des réponses de colonnes de sol 1D au point central pour H=40m



**Figure 9.47** — Comparaison des réponses en accélération des vallées pleines et des réponses de colonnes de sol 1D au point central pour H=60m



**Figure 9.48** — Comparaison des réponses en accélération des vallées pleines et des réponses de colonnes de sol 1D au point central pour  $H=100\text{m}$

du rapport spectral lorsque l'on s'éloigne de la vallée (Fig. 9.51).

Nous étudierons par la suite ces deux points spécifiques : le point de contact sédiments/substratum et le centre de la vallée ( $x/L = 0$ ).

### Point de contact sédiments/substratum

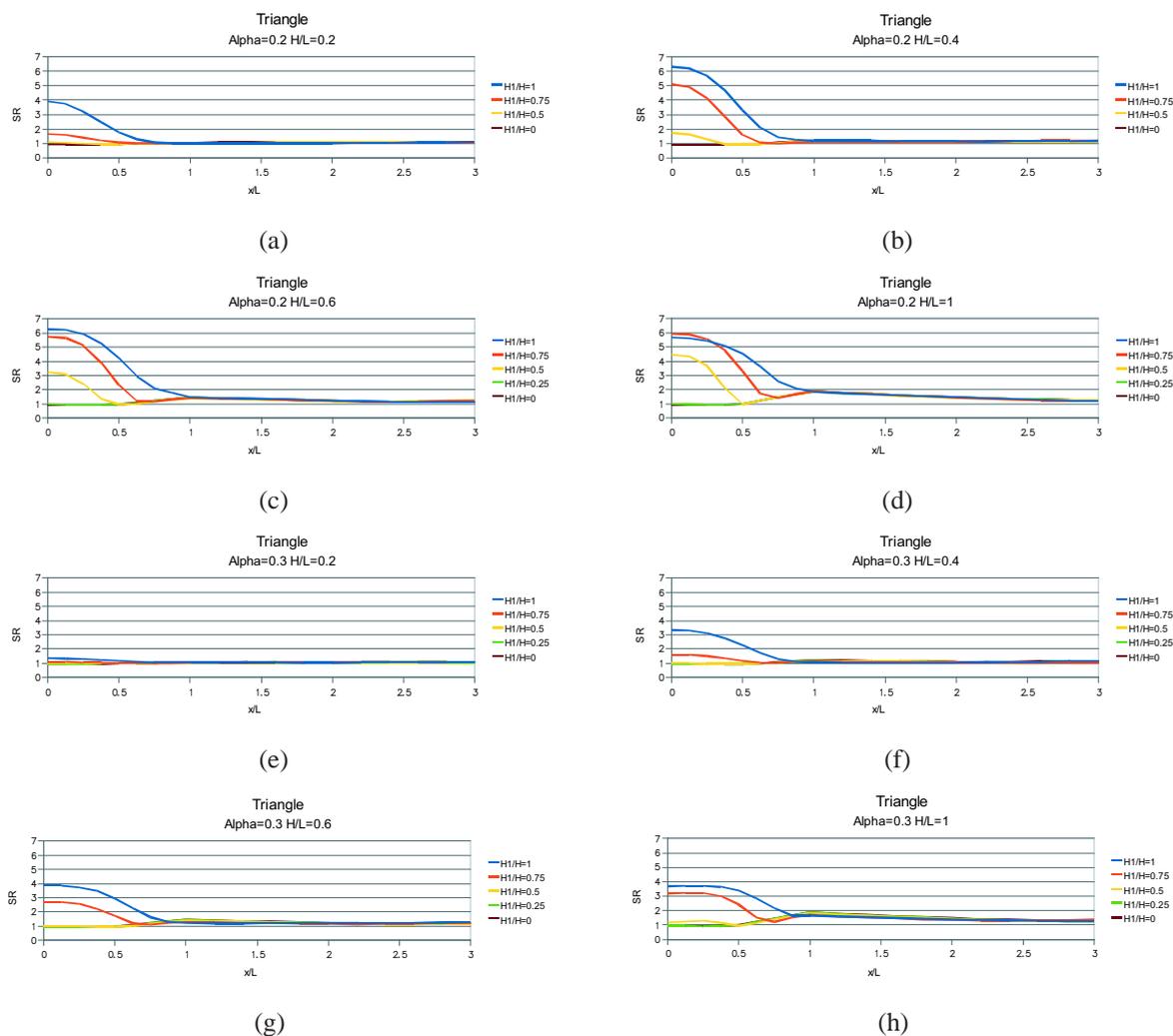
Au point de contact entre les sédiments et le substratum, on remarque que le rapport spectral est toujours inférieur au rapport spectral de la vallée vide correspondante (effet topographique). On peut donc ne considérer, dans les zones où le rocher affleure, que l'effet topographique d'une vallée vide et se placer ainsi dans le sens de la sécurité.

On vérifie autant sur les cas des vallées profondes que peu profondes, pleines ou remplies au quart que le spectre de la vallée vide est toujours supérieur au spectre de la vallée contenant des sédiments (Fig. 9.52).

### Point central de la vallée

Pour les différentes configurations étudiées, l'enveloppe des spectres obtenus au point central de la vallée est établi sur la figure (9.53).

On observe que certains spectres sont légèrement atténués pour les périodes basses du fait de



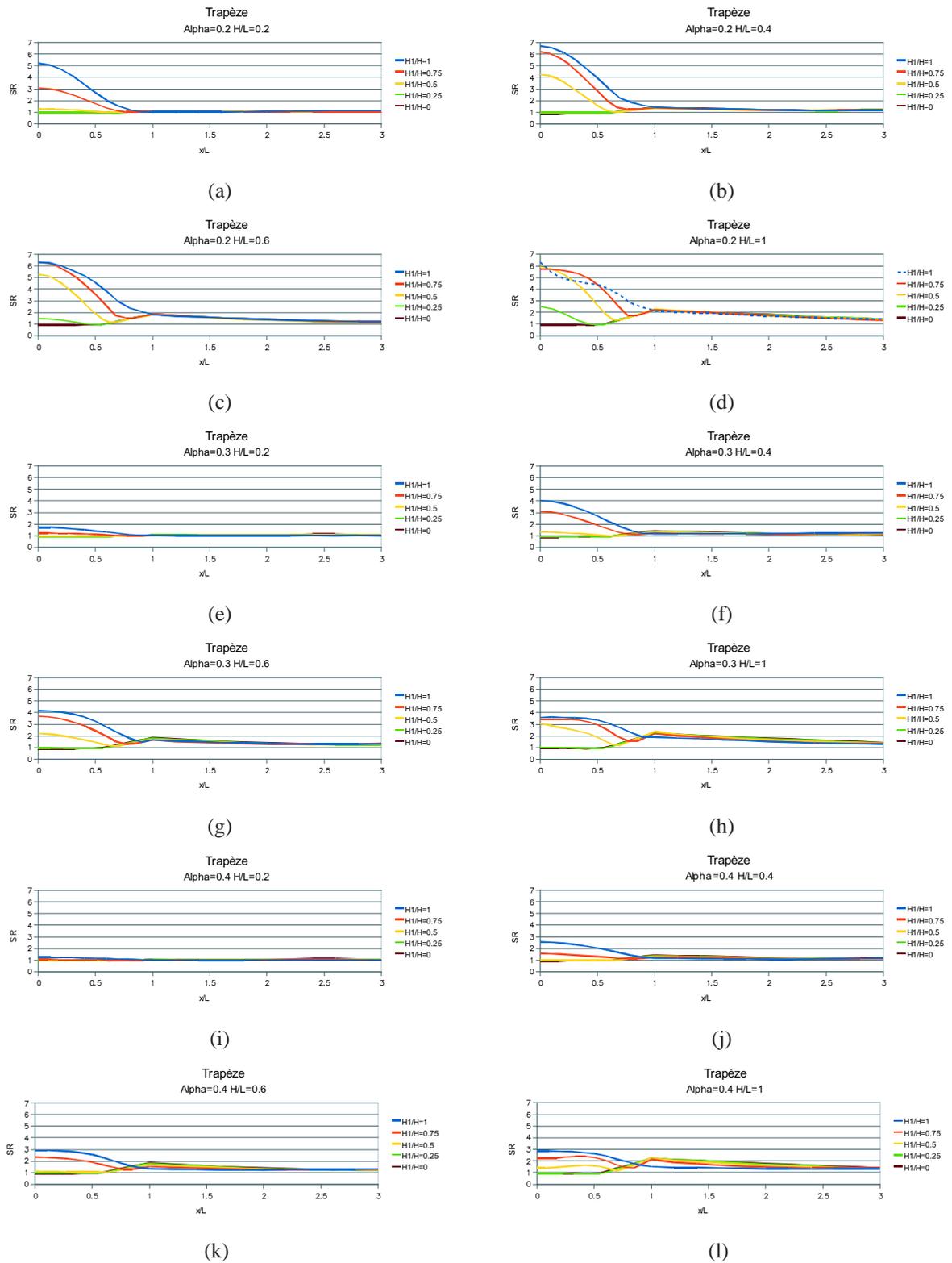
**Figure 9.49** — Rapport spectral en fonction de l'abscisse du point considéré pour les configurations triangulaires de vallées, différentes caractéristiques de sol et différents taux de remplissage.

l'effet topographique mais l'effet d'amplification des spectres amplifiés est néanmoins nettement plus marqué. C'est pourquoi nous nous intéresserons uniquement aux effets d'amplification.

### Période du site

En suivant la même démarche que pour une couche de sol unidimensionnelle, on vise à définir un critère permettant de caractériser la période de site  $T_s$  pour les configurations pour lesquelles l'amplification est significative.

On propose d'étudier l'évolution de la période du site en fonction du paramètre  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$  qui permet de combiner les caractéristiques du sol (paramètre  $\alpha$ ) et les caractéristiques géométriques (paramètre  $S_1$ ) comme montré dans la figure (9.54).



**Figure 9.50** — Rapport spectral en fonction de l'abscisse du point considéré pour les configurations trapézoïdales de vallées, différentes caractéristiques de sol et différents taux de remplissage.

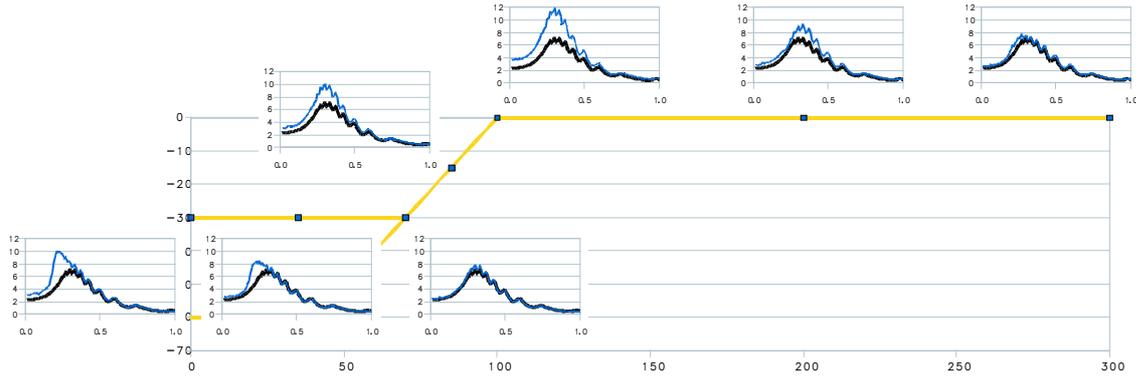


Figure 9.51 — Évolution du spectre de réponse le long d'une vallée trapézoïdale ( $H/L = 0.6$ ,  $H_1/H = 0.5$ ,  $\alpha = 0.3$ ) (Spectre de Ricker en noir)

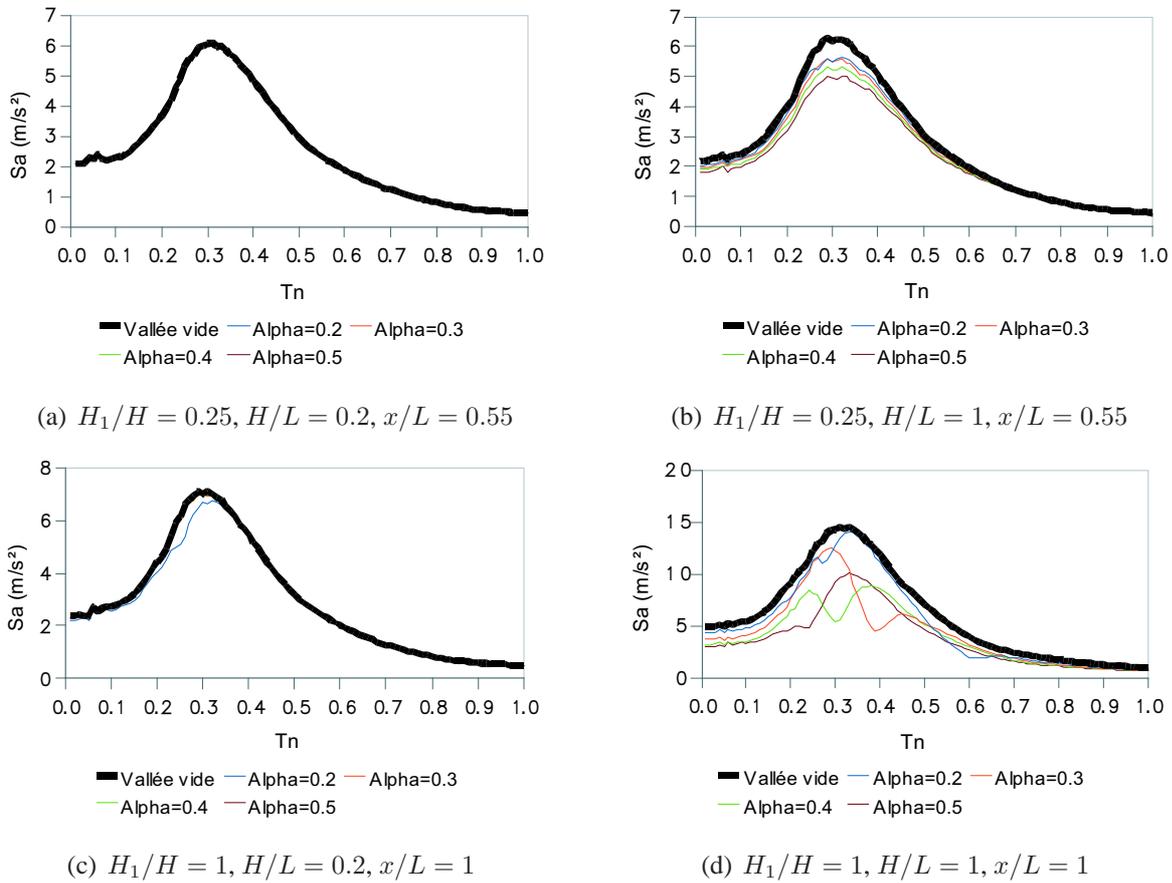


Figure 9.52 — Point de contact sédiments / substratum

Les différentes valeurs du paramètre  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$  pour toutes les configurations étudiées sont présentées en annexe F.

On se place dans le cas où  $13000 < S_1/\alpha\sqrt{\alpha} < 120000$ . Pour  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha} < 13000$  l'amplification n'est pas suffisante pour pouvoir déterminer une période  $T_s$  représentative. Pour  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha} > 120000$ , on écarte le cas correspondant à : ( $H/L = 1$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $H_1/H = 1$  et

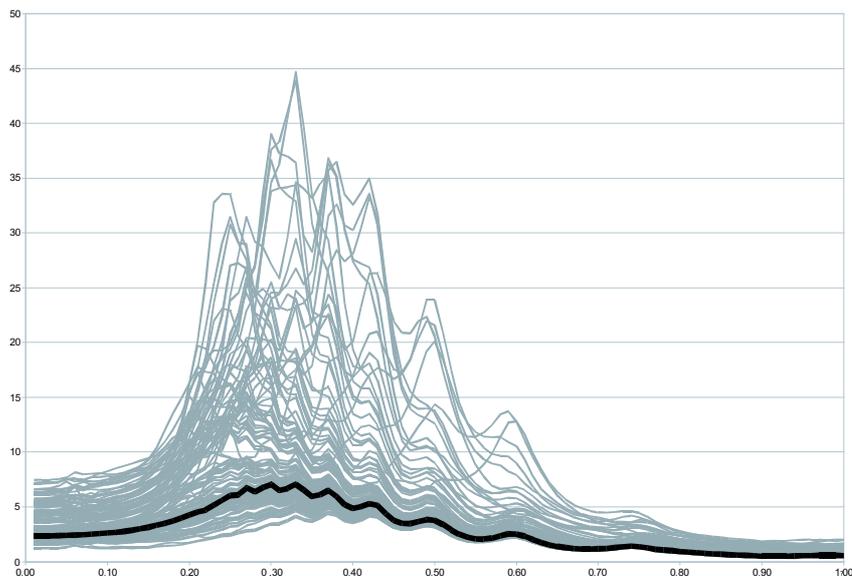


Figure 9.53 — Enveloppe des spectres obtenus en faisant varier les caractéristiques géométriques et les paramètres du sol. Le spectre de Ricker est représenté en noir.

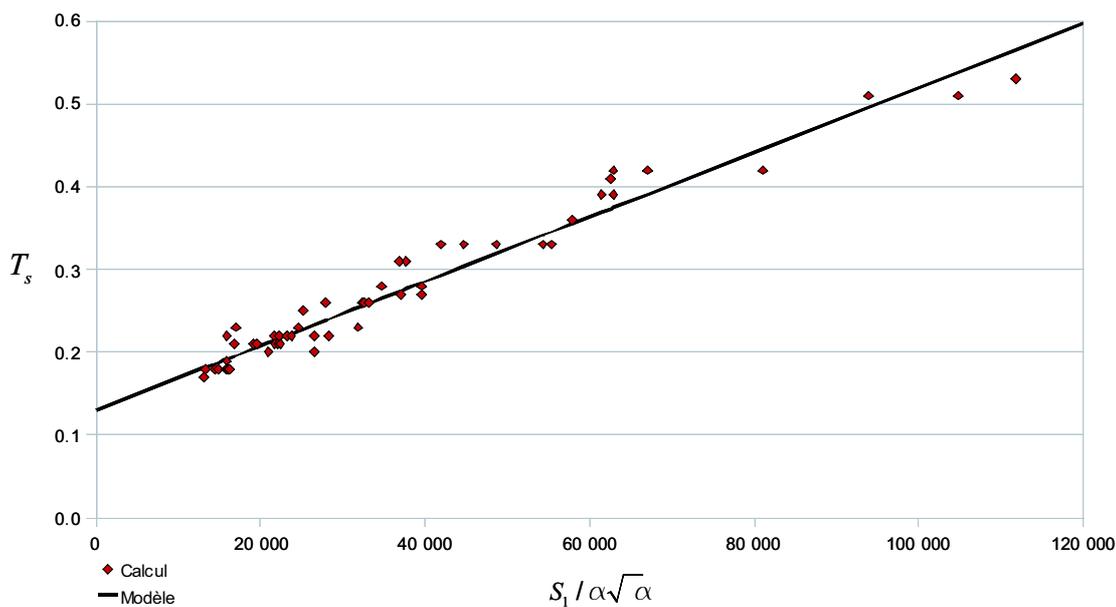


Figure 9.54 — Évolution de la période du site en fonction de  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$  pour les formes trapézoïdales et triangulaires

$S_1/\alpha\sqrt{\alpha} = 156000$ ) pour lequel on observe un retour du pic vers les basses périodes. On observe une évolution à tendance linéaire de  $T_s$  en fonction de  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$ .

### Rapport spectral

Pour une couche de sol unidimensionnelle, on a observé que pour une même période les spectres sont plus élevés pour les sols mous ( $\alpha$  plus faible). Par analogie avec le cas 1D, on propose de représenter  $(SR - 1)S_1$  en fonction du paramètre  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$  qui gouverne la période d'amplification du site  $T_s$  (Fig. 9.55).

On obtient pour les formes triangulaires et trapézoïdales les points suivants après avoir écarté le cas correspondant aux valeurs des différents paramètres suivantes :  $H/L = 1$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $H_1/H = 1$ ,  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha} = 156000$  ; ce cas correspondant au retour vers les basses fréquences de la période  $T_s$  que nous avons déjà observé dans le cas unidimensionnel.

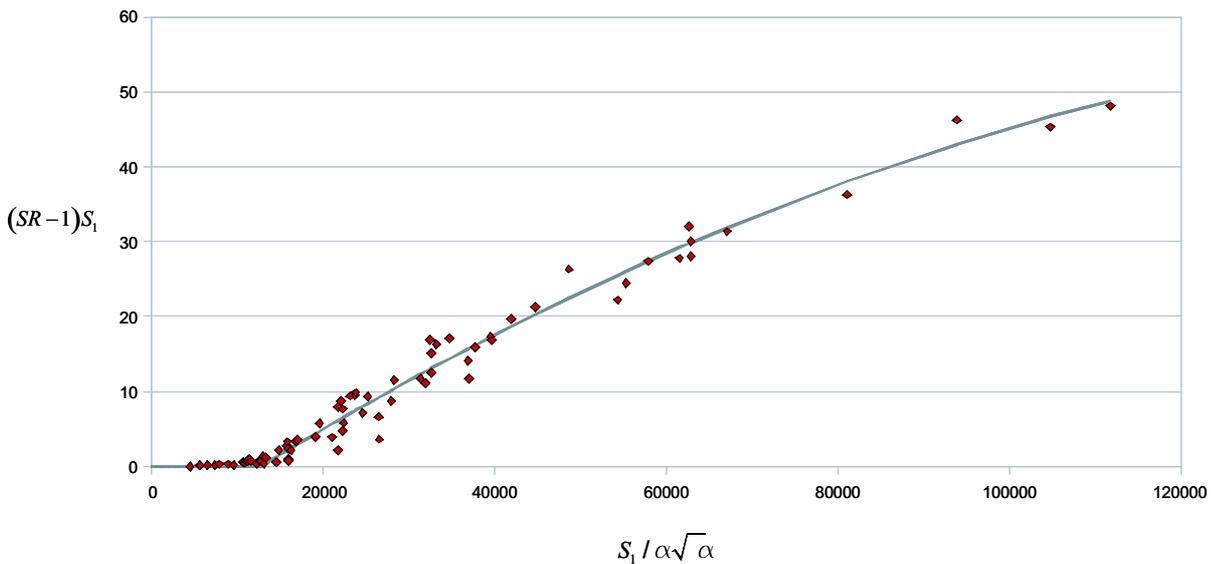


Figure 9.55 — Évolution du paramètre  $(SR - 1)S_1$  en fonction du paramètre  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$

On observe que l'amplification peut être considérée comme négligeable jusqu'à un seuil tel que  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha} = 13000$ . L'évolution de  $(SR - 1)S_1$  en fonction de  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$  montre ensuite une tendance parabolique.

À partir de ces courbes on peut maintenant, en connaissant les caractéristiques géométriques de la vallée  $S_1$  et les caractéristiques du sol  $\alpha$ , calculer le coefficient  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$ . À partir de ce coefficient on peut estimer, par lecture sur les courbes précédemment fournies la période du pic  $T_s$  ainsi que le coefficient  $(SR - 1)S_1$  et par déduction la valeur du rapport spectral  $SR$ .

## 9.6 Conclusion

S'il n'est pas encore pris en compte dans la réglementation parasismique, de nombreuses études ont montré l'importance de l'effet de bassin 2D sur le mouvement sismique. En effet, celui-ci donne souvent lieu à un accroissement de l'amplification du signal sismique par rapport au cas 1D. De plus on observe un allongement de la durée du signal sismique.

Le but recherché dans ce chapitre a été de définir un critère simple combinant les caractéristiques

géométriques et les caractéristiques du sol, permettant de prédire l'amplification du spectre de réponse en accélération dans des vallées sédimentaires aussi bien que vides.

Comme on l'a vu dans la section (9.4), il existe un critère géométrique permettant d'estimer l'effet topographique dans les vallées vides bidimensionnelles. L'effet topographique est directement lié au paramètre *Surface/Angle* ( $S/A$ ), et est indépendant de la forme de la vallée.

Dans la section (9.5.1) on a retrouvé que dans le cas d'une couche de sol unidimensionnelle, on retrouve les mêmes résultats que la solution analytique connue pour une couche de sol soumise à une onde de cisaillement harmonique. En effet, le spectre de réponse en accélération connaît son amplification maximale pour la période d'oscillateur correspondant à la fréquence de résonance d'une couche de sol.

Dans la section (9.5.2.1), on a vu que la réponse sismique de chaque vallée pleine dépend de la position du point d'observation. Entre  $x/L = 0$  et  $x/L = 0.5$ , l'effet sédimentaire est prépondérant. Pour  $x/L$  compris entre 0.5 et 1, l'effet topographique tend à amplifier la réponse spectrale en accélération, et la présence de sédiments sur les pentes de la vallée ne fait qu'atténuer cet effet topographique dominant. On a aussi vérifié que la réponse sismique maximale des vallées alluviales pleines (effet 2D) était atteinte au point central de la vallée ( $x/L = 0$ ). Cette station d'observation est la moins influencée par l'effet topographique en ce qui concerne les points superficiels à l'intérieur de la vallée pleine. On constate que si la valeur de  $L$  tend vers l'infini, les courbes caractéristiques de la réponse 2D (effets topographique et sédimentaire combinés) tendent vers les spectres de réponse obtenus en 1D (effet sédimentaire). Et donc, l'effet 1D devient prédominant.

Également, dans la section (9.5.2.2) on a observé qu'en augmentant le taux de remplissage, on passe d'un comportement de vallée vide à un comportement de vallée pleine.

Maintenant, deux questions se posent :

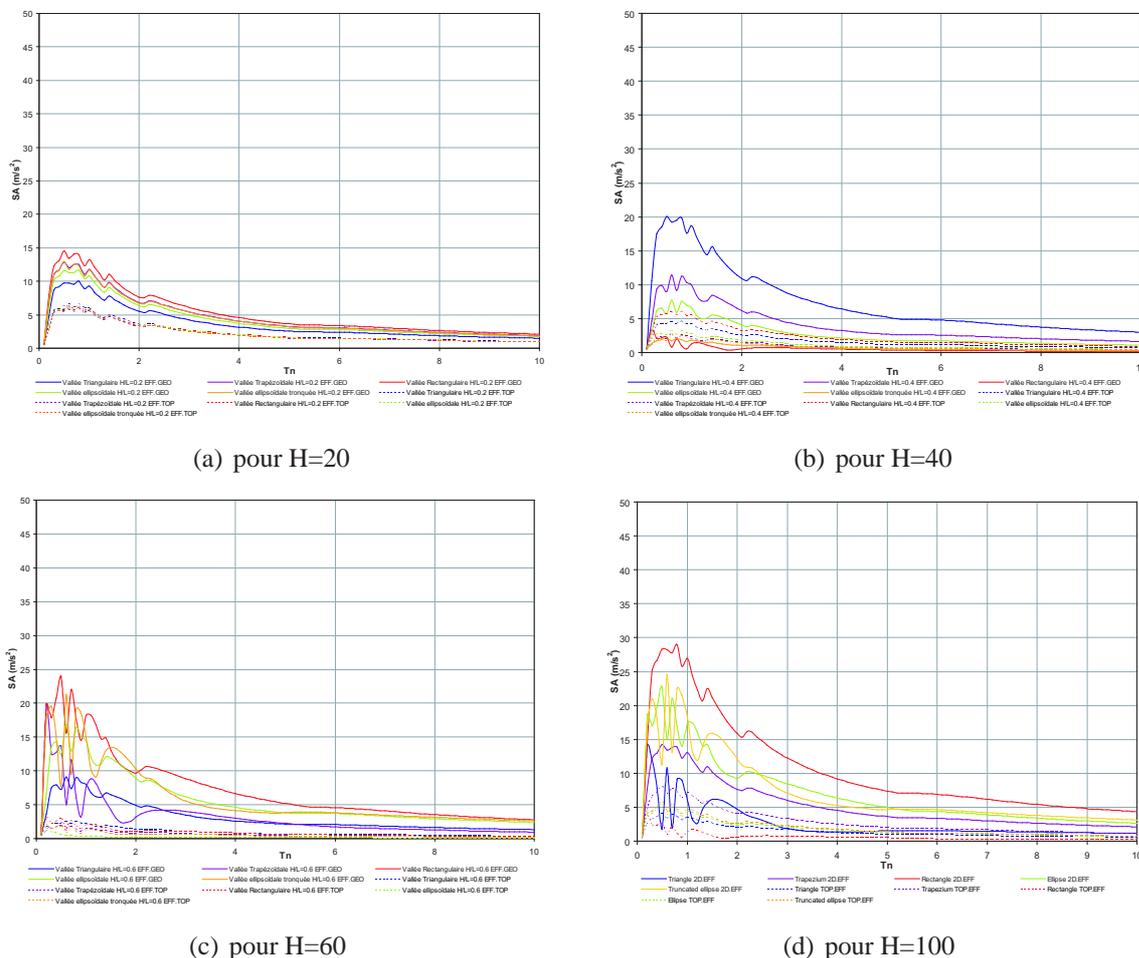
1. Est-ce qu'on peut définir un critère clair pour estimer l'effet topographique dans une vallée vide ?
2. Est-ce qu'on peut définir un critère clair pour estimer l'effet combiné aux différents points à la surface d'une vallée sédimentaire ?

### **9.6.1 Définition d'un critère clair pour l'effet topographique dans une vallée vide**

Comme on l'a présenté ci-dessus, on peut classer les spectres de réponse en accélération selon un critère géométrique unique : le rapport *Surface/Angle* ( $S/A$ ). En utilisant la figure (9.33), et en faisant une régression entre les valeurs minimale et maximale du paramètre  $S/A$ , on peut trouver le spectre de réponse en accélération d'une vallée quelconque.

## 9.6.2 Définition d'un critère clair pour l'effet combiné aux différents points superficiels d'une vallée sédimentaire

En ce qui concerne les vallées sédimentaires pleines, nous tentons de définir un critère permettant de déterminer l'effet de site prépondérant à la surface. D'après la section (9.4), concernant l'effet topographique, la réponse spectrale en accélération est atténuée pour tous les points d'ordonnée inférieure à celle du point situé à mi-pente. Mais dans la section (9.5.2.1), concernant les effets de site combinés dans les vallées sédimentaires pleines, on a vu que dans la zone centrale (première partie), il existe une amplification de la réponse sismique. Donc, dans la zone centrale l'effet sédimentaire domine l'effet topographique, qui aurait tendance à atténuer la réponse. On peut vérifier ce constat dans les figures (9.56) à (9.57).



**Figure 9.56** — Comparaison entre l'effet topographique et l'effet combiné dans les vallées pleines au centre de la vallée  $x/L = 0$

On a également observé qu'au point central, les spectres caractéristiques des effets combinés 2D tendaient vers les courbes obtenues par des simulations unidimensionnelles. Ce constat rejoint la conclusion précédente : l'effet sédimentaire est toujours dominant au centre des vallées

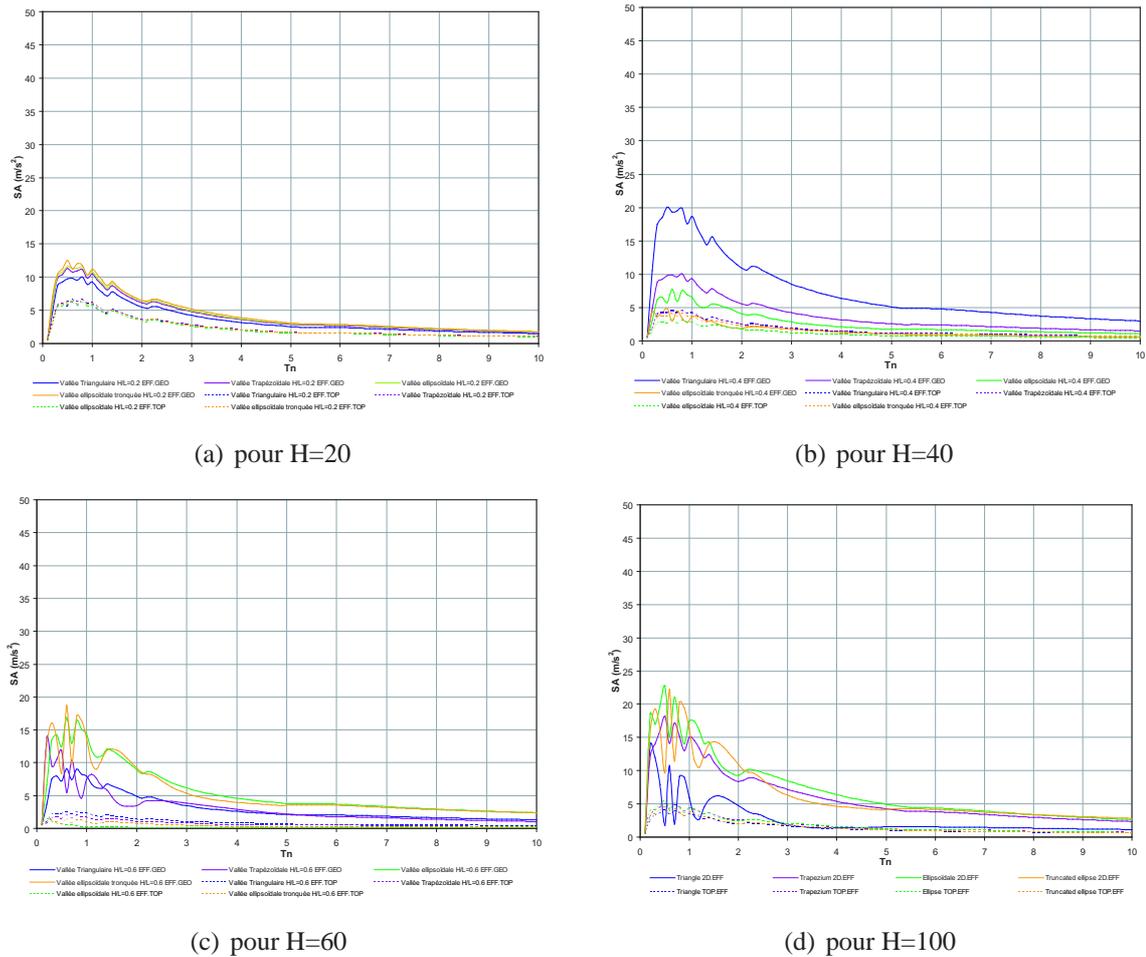
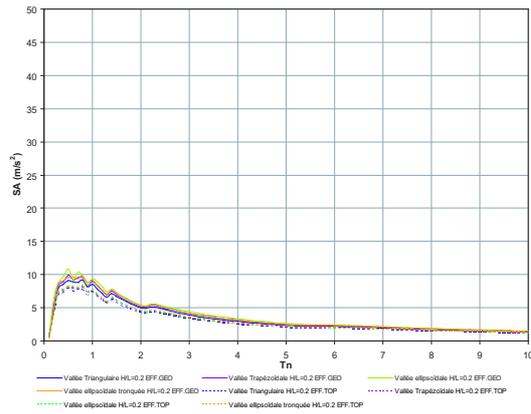


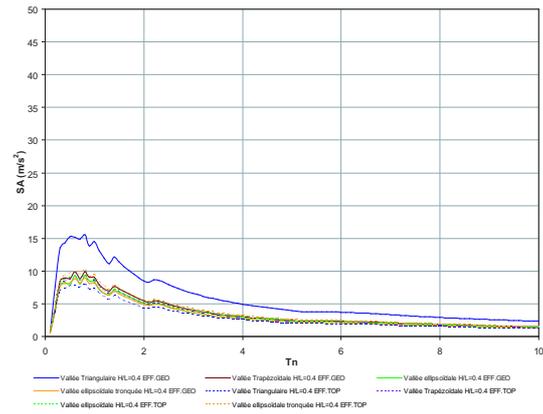
Figure 9.57 — Comparaison entre l'effet topographique et l'effet combiné dans les vallées pleines au pied de la pente

alluviales. Si nous comparons l'effet topographique et l'effet géologique sur le point à mi-pente (Fig. 9.58), on peut voir que l'effet topographique est légèrement prédominant par rapport à l'effet géologique. Le point à mi-pente constitue donc une bonne zone de transition : à partir de ce point, jusqu'au bord de la vallée ( $x/L = 1$ ), l'effet topographique devient prédominant (la prépondérance des effets de site s'inverse). En conclusion, dans la zone centrale (du point  $x/L = 0$  à  $x/L = mi - pente$ ), on peut utiliser les résultats de l'analyse unidimensionnelle (comme dans les règlements parasismiques actuels). Et dans la zone latérale, on peut estimer la réponse spectrale des vallées sédimentaires à partir des spectres caractéristiques de l'effet topographique, présentés dans la section (9.4).

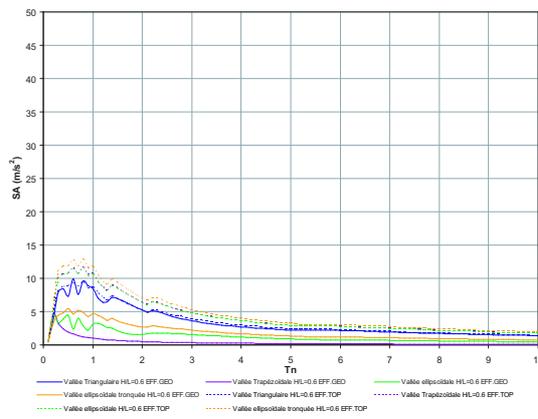
En ce qui concerne les vallées sédimentaires partiellement remplies, on a observé qu'au centre de la vallée, il y a une évolution à tendance linéaire de la période d'amplification maximale  $T_s$  en fonction du paramètre  $S_1\alpha\sqrt{\alpha}$ . Ce paramètre permet de combiner les caractéristiques du sol et les caractéristiques géométriques de la vallée. Au centre de la vallée on peut estimer le rapport spectral  $SR$  à partir de la courbe présentant l'évolution de  $(SR - 1)S_1$  en fonction de



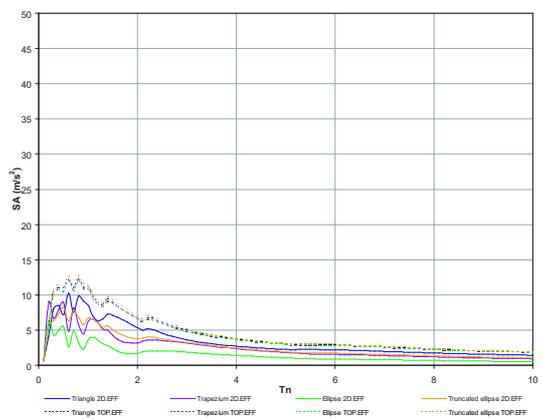
(a) pour H=20



(b) pour H=40



(c) pour H=60



(d) pour H=100

**Figure 9.58** — Comparaison entre l’effet topographique et l’effet combiné dans les vallées pleines au point situé à mi-pente

$S_1\alpha\sqrt{\alpha}$  (Fig. 9.55).

---

## Conclusions et Perspectives

CE travail de recherche se situe dans le cadre du développement de la méthode des Éléments de frontière (BEM) pour les milieux poreux multiphasiques. À l'heure actuelle, l'application de la BEM aux problèmes des milieux poreux non-saturés est encore limitée, car l'expression analytique exacte de la solution fondamentale n'a pas été obtenue, ni dans le domaine fréquentiel ni dans le domaine temporel. Ceci provient de la complexité du système d'équations régissant le comportement des milieux poreux non-saturés.

Les développements de la BEM pour les sols non-saturés effectués au cours de cette thèse sont basés sur les modèles thermo-hydro-mécanique (THHM) et hydro-mécanique (HHM) présentés dans la première partie de ce mémoire. Ces modèles phénoménologiques sont obtenus en se basant sur la théorie de la poromécanique et les acquis expérimentaux. Par conséquent, quelques phénomènes microscopiques qui se manifestent au niveau macroscopique dans les expérimentations sont automatiquement considérés. Autrement dit, ces modèles sont multi-échelles. Un de ces phénomènes est la pression capillaire de la succion qui a été prise en compte au niveau du Volume Élémentaire de Référence (VER). Quant à la théorie de la poromécanique, ces modèles sont obtenus dans le cadre du modèle mathématique présenté par Gatmiri [143] et Gatmiri et al. [150] en utilisant la contrainte nette «  $\sigma - p_a$  », la succion «  $p_a - p_w$  » et la température «  $T$  » (dans le cas non-isotherme) comme des variables d'état indépendantes. Dans ce modèle, l'effet de déformation sur la distribution de succion et de température dans le squelette solide ainsi que l'effet réciproque sont inclus par l'intermédiaire d'une formulation des surfaces d'état en indice des vides «  $e$  » et en degré de saturation «  $S_r$  ». Quant à la modélisation du comportement dynamique des sols non-saturés, on a utilisé la notion «  $\mathbf{u} - p_w - p_a$  ». Le système final des équations de champs concernant le comportement dynamique des sols non-saturés est fondé sur des hypothèses simplificatrices dans lesquelles les accélérations relatives de l'eau et de l'air par rapport au squelette solide sont négligées.

Après avoir présenté les modèles THHM et HHM, on a réussi à établir, pour la première fois, les équations intégrales de frontière et les solutions fondamentales associées pour des sols non-saturés soumis aux chargements suivants :

- *quasi-statiques isothermes*. Les solutions fondamentales sont obtenues dans le domaine de Laplace pour le cas 2D [237].

- *quasi-statiques non-isothermes*. Les solutions fondamentales sont dérivées pour les deux cas 2D et 3D dans le domaine de Laplace. Comme les transformées inverses des fonctions qui forment les solutions dans le domaine de Laplace peuvent se trouver analytiquement, on a fait un effort pour obtenir les formes explicites des solutions fondamentales dans le domaine temporel [161, 231, 232, 235, 239].
- *dynamiques*. Les solutions fondamentales sont trouvées pour les deux cas 2D et 3D dans le domaine de Laplace [233, 234, 238, 240].

Comme montré dans la partie 2, les équations intégrales de frontière sont obtenues en approchant le point source  $\xi$  vers la frontière  $\Gamma$ . Par conséquent, afin de déterminer des inconnues de frontière, il est nécessaire de connaître le comportement des solutions fondamentales lorsque  $r = |\xi - x|$  tend vers zéro, autrement dit, quand le point d'intégration  $x$  s'approche du point de collocation  $\xi$ . Alors, le développement en série par rapport à la variable  $r = |\xi - x|$  a été effectué pour montrer les singularités de ces solutions dans la limite  $r \rightarrow 0$ . Également, les solutions fondamentales dérivées ont été vérifiées analytiquement avec les cas simplifiés élastodynamique, élastostatique, poroélastostatique et thermo-hydro-mécanique à l'état stationnaire existant dans la littérature. Pendant la dérivation de l'équation intégrale de frontière, plusieurs abréviations correspondant aux termes adjoints ont été apparus. Les formes explicites de ces termes ont été dérivées également en introduisant les solutions fondamentales obtenues et leurs dérivées partielles. Finalement, quelques exemples de solutions fondamentales ont été calculées pour visualiser leurs comportements principaux.

Dans une autre étape, les équations intégrales de frontière dans lesquelles les solutions fondamentales obtenues sont les fonctions noyaux, ont été traitées par la méthode des éléments de frontière (BEM). Comme le changement de la succion dans les sols non-saturés mène aux changements des valeurs de l'indice des vides, du degré de saturation en eau et des coefficients de perméabilité à l'eau et à l'air, donc la nature du comportement physique des sols non-saturés par rapport au temps est non-linéaire. Ceci nécessite un développement de la BEM dans le domaine temporel. Comme il semble être difficile d'obtenir les solutions fondamentales pour les sols non-saturés explicitement dans le domaine temporel, on a développé les formulations de la BEM en se basant sur la *méthode quadrature de convolution* (MQC). Dans cette approche, les intégrales temporelles de convolution sont déterminées par la transformée de Laplace des solutions fondamentales et par une méthode multipas linéaire. Les intégrales spatiales ont été aussi évaluées à l'aide des techniques numériques.

Une fois la discrétisation dans le temps et dans l'espace effectuée, un système d'équations algébriques a été établi en utilisant la *méthode de collocation* pour construire une solution approchée du problème original. Selon cette méthode, les équations intégrales doivent être exactement vérifiées aux points de collocation à tout instant. En pratique, la collocation se fait à tous les noeuds d'interpolation, c'est-à-dire que les points de collocation coïncident avec ces derniers. Dans cette étude, selon le cas étudié on a  $i$  degrés de liberté pour chaque noeud

du problème :  $i = 3 (u_1, u_2, p_w)$  pour les sols saturés et  $i = 4 (u_1, u_2, p_w, p_a)$  pour les sols non-saturés. Ceci aboutit à  $i$  équations intégrales pour chaque noeud du problème.

Afin d'assembler le système d'équations algébriques, l'évaluation numérique des intégrales sur les éléments isoparamétriques a été traitée en fonction de la présence du point source  $\xi$  dans le même élément que celui du point d'observation  $x$ . Dans le cas des intégrales non-singulières ou régulières, on a utilisé les méthodes de quadrature de Gauss. Un traitement spécial dit la *méthode de subdivision des éléments* [210, 312] a été appliqué lorsque l'intégrande varie brutalement quand le point de collocation s'approche de l'élément. Dans cette méthode, le but est de développer un critère qui assure à peu près la même précision d'intégration partout, sans tenir compte de la proximité du point de collocation  $\xi$ . Dans le cas des intégrales singulières ou impropres, la technique dite la « *translation du corps rigide* » a été utilisée pour la détermination des intégrales en valeur principale de Cauchy [73, 101].

Les formulations d'éléments de frontière (BEM) pour les problèmes de propagation d'ondes 2D ainsi que pour les problèmes de consolidation dans les milieux poreux saturés et non-saturés ont été implémentées dans le code de calcul « HYBRID ». Ce code, initialement écrit par Gatmiri et amélioré et modifié par Kamalian [193] et Nguyen [262], est développé en utilisant la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments de frontière (BEM). Ceci est fait de telle sorte que chaque partie, FEM ou BEM, peut être appliquée séparément ou elles peuvent être couplées l'une avec l'autre pour analyser des problèmes plus complexes. Des variables de stockage dynamique ont été ajoutées pour les besoins des formulations intégrées dans le code de calcul. La validation des développements effectués dans la partie de la BEM du code de calcul HYBRID a été traitée en réalisant plusieurs cas test.

Ayant intégrées les formulations de BEM pour les problèmes de propagation d'ondes ainsi que pour les problèmes de consolidation dans les milieux poreux saturés et non-saturés, il nous semble avoir fourni à l'heure actuelle un premier code de calcul aux éléments de frontière (BEM) qui modélise les différents problèmes dans les sols secs, saturés et non-saturés [236, 237].

L'application du code HYBRID aux calculs d'effets de site sismiques est abordée dans la dernière partie de ce mémoire [160, 159].

La communauté des ingénieurs est consciente que la réponse d'un site à une sollicitation sismique dépend de la topographie et des caractéristiques géotechniques locales. Mais malheureusement, les règlements d'ingénierie actuels reposent sur des calculs issus de modèles unidimensionnels. Cette démarche ne donne pas de solution complète tenant compte de l'influence des conditions topographiques et géologiques sur l'amplitude et le contenu fréquentiel de la réponse sismique.

Cette étude a donc permis de caractériser et de quantifier les effets de site dans des configurations bidimensionnelles, dans le domaine spectral. L'objectif a été d'aboutir à un résultat

directement exploitable par les ingénieurs. Nous avons considéré des vallées bidimensionnelles de configurations triangulaire, trapézoïdale, rectangulaire, ellipsoïdale et ellipsoïdale tronquée avec le rapport de forme  $H/L$  inférieur à 1 et avec différents taux de remplissage. Les remplissages sédimentaires dans les vallées étudiées ont un rapport d'impédance  $\alpha$  supérieur à 0.2. À l'aide du code de calcul HYBRID, on a calculé les déplacements horizontaux à la surface des vallées soumises à une onde de Ricker de type SV se propageant verticalement. Les résultats ont été ensuite convertis sous forme de spectres de réponse en pseudo-accélération.

Pour les vallées vides, on peut classer les spectres de réponse en accélération selon un critère géométrique unique : le rapport « Surface/Angle ( $S/A$ ) ». En effet, en utilisant les spectres obtenus par simulation numérique, et en faisant une régression entre les valeurs minimale et maximale du paramètre  $S/A$ , on peut trouver le spectre de réponse en accélération d'une vallée vide de topographie quelconque.

Par conséquent, pour évaluer l'influence de la bidimensionnalité dans la réponse en accélération de vallées pleines, les réponses de bassins alluviaux sont comparées aux réponses de colonnes de sol unidimensionnelles. On constate que le point central de la vallée donne la réponse la plus éloignée du spectre caractéristique de l'effet topographique. De plus, l'amplification de la réponse sismique y est maximale : c'est le point critique. Au centre de la vallée, l'effet 1D est prédominant et si la valeur de la surface de la vallée tend vers l'infini, les spectres relatifs à l'effet combiné tendent vers la courbe caractéristique de l'effet 1D.

Nous avons tenté de définir un critère permettant de déterminer l'effet de site prépondérant à la surface d'une vallée pleine : dans la zone centrale de la vallée, c'est-à-dire entre le point central et le point situé à mi-pente, on peut utiliser les résultats de l'analyse unidimensionnelle (comme dans les règlements parasismiques actuels). Dans la zone latérale, entre le point situé à mi-pente et le bord de la vallée, on peut estimer la réponse spectrale des vallées sédimentaires à partir des spectres caractéristiques de l'effet topographique.

En ce qui concerne les vallées sédimentaires partiellement remplies, on a observé qu'au centre de la vallée, il y a une évolution à tendance linéaire de la période d'amplification maximale  $T_s$  en fonction du paramètre  $S_1\alpha\sqrt{\alpha}$ . Ce paramètre permet de combiner les caractéristiques du sol et les caractéristiques géométriques de la vallée. Au centre de la vallée on peut estimer le rapport spectral  $SR$  à partir de la courbe présentant l'évolution de  $(SR - 1)S_1$  en fonction de  $S_1\alpha\sqrt{\alpha}$ .

Nous pouvons envisager plusieurs perspectives pour la suite de ce travail :

- sur le plan théorique :
  - transformer les solutions fondamentales dynamiques obtenues dans le domaine de Laplace dans ce travail explicitement en domaine temporel, même s'il faudra prendre des hypothèses simplificatrices.
- sur le plan numérique :
  - étudier la stabilité numérique des formulations de la BEM basées sur la *méthode quadrature de convolution* (MQC) établies pour les problèmes de propagation d'ondes

- ainsi que pour les problèmes de consolidation dans les milieux poreux saturés et non-saturés.
- approfondir l'effet de succion sur les réponses en déplacement, en pression d'eau et en pression d'air des sols non-saturés soumis aux chargements quasi-statique et dynamique.
  - implémenter les équations intégrales de frontières en utilisant les solutions fondamentales dynamiques 3D obtenues comme les fonctions noyaux, dans le code de calcul HYBRID pour couvrir le problème de propagation d'ondes 3D dans les milieux poreux multiphasiques.
  - implémenter les équations intégrales de frontières en utilisant les solutions fondamentales thermo-hydro-mécaniques 2D et 3D obtenues comme les fonctions noyaux, dans le code de calcul HYBRID pour modéliser les différents aspects liés aux problèmes du transfert couplé de l'humidité et de la chaleur dans les milieux poreux multiphasiques (par exemple, les problèmes concernant le stockage des déchets radioactifs dans les formations géologiques) par la méthode des éléments de frontière.
  - sur le plan de l'application (effets de site sismiques) :
    - étendre ces travaux dans les vallées sédimentaires partiellement remplies, d'une part à des vallées de formes différentes (par exemple rectangulaire ou ellipsoïdale), d'autre part à des sols plus mous. En effet, des rapports d'impédance supérieurs à 0.2 ne permettent pas de prendre en compte des sols aussi mous que celui de la vallée de Mexico ( $V_s \prec 100 \text{ m/s}$ ).
    - faire varier la fréquence prise égale à 2 Hz dans ce travail, afin d'étudier son influence sur l'amplification spectrale dans les vallées vides, sédimentaires pleines et sédimentaires partiellement remplies.



## A

# Détail du calcul des solutions fondamentales pour les sols non-saturés soumis aux chargements dynamiques

## A.1 Dérivées partielles de $\Phi(r, s)$

### solution 2D

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)} + \frac{\lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} + \frac{\lambda_3^2 K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_4^2 K_0(\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)} \right]$$

$$\nabla^4 \Phi = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\lambda_1^4 K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)} + \frac{\lambda_2^4 K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} + \frac{\lambda_3^4 K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_4^4 K_0(\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)} \right]$$

$$\nabla^6 \Phi = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\lambda_1^6 K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)} + \frac{\lambda_2^6 K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} + \frac{\lambda_3^6 K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_4^6 K_0(\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)} \right]$$

En considérant que

$$\partial_i [K_0(\lambda_k r)] = -\lambda_k r_{,i} K_1(\lambda_k r)$$

$$\partial_i \partial_j [K_0(\lambda_k r)] = \left\{ r_{,i} r_{,j} \lambda_k^2 K_0(\lambda_k r) + \left( \frac{2r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}}{r} \right) \lambda_k K_1(\lambda_k r) \right\}$$



$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{\lambda_3^5 K_1(\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_4^5 K_1(\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)} \\
 & + r_{,i} r_{,j} \left[ \frac{\lambda_1^6 K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)} + \frac{\lambda_2^6 K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} + \right. \\
 & \left. \frac{\lambda_3^6 K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_4^6 K_0(\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)} \right]
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

### solution 3D

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{4\pi r} \left[ \frac{\lambda_1^2 \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_2^2 \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \right. \\
 \left. \frac{\lambda_3^2 \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} + \frac{\lambda_4^2 \exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\nabla^4 \Phi = \frac{1}{4\pi r} \left[ \frac{\lambda_1^4 \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_2^4 \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \right. \\
 \left. \frac{\lambda_3^4 \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} + \frac{\lambda_4^4 \exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\nabla^6 \Phi = \frac{1}{4\pi r} \left[ \frac{\lambda_1^6 \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_2^6 \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \right. \\
 \left. \frac{\lambda_3^6 \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} + \frac{\lambda_4^6 \exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\partial_{,i} \Phi = \frac{-r_{,i}}{4\pi r^2} \left[ \frac{(1 + r\lambda_1) \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{(1 + r\lambda_2) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \right. \\
 \left. \frac{(1 + r\lambda_3) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} + \frac{(1 + r\lambda_4) \exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\partial_{,i} \nabla^2 \Phi = \frac{-r_{,i}}{4\pi r^2} \left[ \frac{\lambda_1^2 (1 + r\lambda_1) \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_2^2 (1 + r\lambda_2) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \right. \\
 \left. \frac{\lambda_3^2 (1 + r\lambda_3) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} + \frac{\lambda_4^2 (1 + r\lambda_4) \exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\partial_{,i} \nabla^4 \Phi = \frac{-r_{,i}}{4\pi r^2} \left[ \frac{\lambda_1^4 (1 + r\lambda_1) \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_2^4 (1 + r\lambda_2) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \right. \\
 \left. \frac{\lambda_3^4 (1 + r\lambda_3) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} + \frac{\lambda_4^4 (1 + r\lambda_4) \exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\partial_{,i} \partial_{,j} \Phi = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left( \frac{3r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}}{r^3} \right) \left[ \frac{(1 + r\lambda_1) \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{(1 + r\lambda_2) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{(1 + r\lambda_3) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} + \frac{(1 + r\lambda_4) \exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{r_{,i}r_{,j}}{r} \left[ \frac{\lambda_1^2 \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_2^2 \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\lambda_3^2 \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} + \frac{\lambda_4^2 \exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} \right] \Big\} \\
\partial_{,i}\partial_{,j}\nabla^2\Phi &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \left( \frac{3r_{,i}r_{,j} - \delta_{ij}}{r^3} \right) \left[ \frac{\lambda_1^2(1+r\lambda_1)\exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_2^2(1+r\lambda_2)\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \frac{\lambda_3^2(1+r\lambda_3)\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} + \frac{\lambda_4^2(1+r\lambda_4)\exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} \right] \\
& + \frac{r_{,i}r_{,j}}{r} \left[ \frac{\lambda_1^4 \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_2^4 \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\lambda_3^4 \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} + \frac{\lambda_4^4 \exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} \right] \Big\} \\
\partial_{,i}\partial_{,j}\nabla^4\Phi &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \left( \frac{3r_{,i}r_{,j} - \delta_{ij}}{r^3} \right) \left[ \frac{\lambda_1^4(1+r\lambda_1)\exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_2^4(1+r\lambda_2)\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \frac{\lambda_3^4(1+r\lambda_3)\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} + \frac{\lambda_4^4(1+r\lambda_4)\exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} \right] \\
& + \frac{r_{,i}r_{,j}}{r} \left[ \frac{\lambda_1^6 \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_2^6 \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\lambda_3^6 \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)} + \frac{\lambda_4^6 \exp(-\lambda_4 r)}{(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)} \right] \Big\}
\end{aligned}$$

## A.2 Coefficients des termes adjoints $C_i^{mn}$

$$C_1^{sS} = \frac{1 - (\lambda + \mu) \Lambda^2}{\mu \rho s^2} \frac{(\lambda_1^2 - K_{ss1}^2)(\lambda_1^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)}$$

$$C_2^{sS} = \frac{1 - (\lambda + \mu) \Lambda^2}{\mu \rho s^2} \frac{(\lambda_2^2 - K_{ss1}^2)(\lambda_2^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)}$$

$$C_3^{sS} = \frac{1 - (\lambda + \mu) \Lambda^2}{\mu \rho s^2} \frac{(\lambda_3^2 - K_{ss1}^2)(\lambda_3^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)}$$

$$C_4^{sS} = \frac{1 - (\lambda + \mu) \Lambda^2}{\mu \rho s^2} \frac{(\lambda_4^2 - K_{ss1}^2)(\lambda_4^2 - K_{ss2}^2)}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_4^2 - \lambda_1^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)}$$

$$C_1^{sW} = \frac{(S_w - \rho_w k_w s) s}{(\lambda + 2\mu) k_w (\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \left( \lambda_2^2 - \frac{(C_{wa}(S_a - \rho_a k_a s) - C_{aa}(S_w - \rho_w k_w s)) s}{k_a (S_w - \rho_w k_w s)} \right)$$

$$C_2^{sW} = \frac{(S_w - \rho_w k_w s) s}{(\lambda + 2\mu) k_w (\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \left( \lambda_3^2 - \frac{(C_{wa}(S_a - \rho_a k_a s) - C_{aa}(S_w - \rho_w k_w s)) s}{k_a (S_w - \rho_w k_w s)} \right)$$

$$C_3^{sW} = \frac{(S_w - \rho_w k_w s) s}{(\lambda + 2\mu) k_w (\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} \left( \lambda_4^2 - \frac{(C_{wa}(S_a - \rho_a k_a s) - C_{aa}(S_w - \rho_w k_w s)) s}{k_a (S_w - \rho_w k_w s)} \right)$$

$$C_1^{sA} = \frac{(S_a - \rho_a k_a s) s}{(\lambda + 2\mu) k_a (\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \left( \lambda_2^2 - \frac{(C_{wa}(S_w - \rho_w k_w s) - C_{ww}(S_a - \rho_a k_a s)) s}{k_w (S_a - \rho_a k_a s)} \right)$$

$$C_2^{sA} = \frac{(S_a - \rho_a k_a s) s}{(\lambda + 2\mu) k_a (\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \left( \lambda_3^2 - \frac{(C_{wa}(S_w - \rho_w k_w s) - C_{ww}(S_a - \rho_a k_a s)) s}{k_w (S_a - \rho_a k_a s)} \right)$$

$$C_3^{sA} = \frac{(S_a - \rho_a k_a s) s}{(\lambda + 2\mu) k_a (\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} \left( \lambda_4^2 - \frac{(C_{wa}(S_w - \rho_w k_w s) - C_{ww}(S_a - \rho_a k_a s)) s}{k_w (S_a - \rho_a k_a s)} \right)$$

$$C_1^{wS} = -\frac{F^s}{(\lambda + 2\mu) (\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \left( \lambda_2^2 - \frac{(C_{wa}(1 - F^s) - F^s C_{aa}) s}{F^s k_a} \right)$$

$$C_2^{wS} = -\frac{F^s}{(\lambda + 2\mu) (\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \left( \lambda_3^2 - \frac{(C_{wa}(1 - F^s) - F^s C_{aa}) s}{F^s k_a} \right)$$

$$C_3^{wS} = -\frac{F^s}{(\lambda + 2\mu) (\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} \left( \lambda_4^2 - \frac{(C_{wa}(1 - F^s) - F^s C_{aa}) s}{F^s k_a} \right)$$

$$C_1^{wW} = \frac{1}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} (\lambda_2^2 - K_w^2) (\lambda_2^2 - \Lambda_w^2)$$

$$C_2^{wW} = \frac{1}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} (\lambda_3^2 - K_w^2) (\lambda_3^2 - \Lambda_w^2)$$

$$C_3^{wW} = \frac{1}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} (\lambda_4^2 - K_w^2) (\lambda_4^2 - \Lambda_w^2)$$

$$C_1^{wA} = \frac{s}{(\lambda + 2\mu) k_a} \frac{-\left((\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_a - \rho_a k_a s) F^s\right) \lambda_2^2 + \rho C_{wa} s^2}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)}$$

$$C_2^{wA} = \frac{s}{(\lambda + 2\mu) k_a} \frac{-\left((\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_a - \rho_a k_a s) F^s\right) \lambda_3^2 + \rho C_{wa} s^2}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)}$$

$$C_3^{wA} = \frac{s}{(\lambda + 2\mu) k_a} \frac{-\left((\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_a - \rho_a k_a s) F^s\right) \lambda_4^2 + \rho C_{wa} s^2}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)}$$

$$C_1^{aS} = -\frac{(1 - F^s)}{(\lambda + 2\mu) (\lambda_4^2 - \lambda_2^2) (\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \left( \lambda_2^2 - \frac{(C_{ww}(1 - F^s) - F^s C_{wa}) s}{-(1 - F^s) k_w} \right)$$

$$C_2^{aS} = -\frac{(1 - F^s)}{(\lambda + 2\mu) (\lambda_4^2 - \lambda_3^2) (\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \left( \lambda_3^2 - \frac{(C_{ww}(1 - F^s) - F^s C_{wa}) s}{-(1 - F^s) k_w} \right)$$

$$C_3^{aS} = -\frac{(1 - F^s)}{(\lambda + 2\mu) (\lambda_3^2 - \lambda_4^2) (\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} \left( \lambda_4^2 - \frac{(C_{ww}(1 - F^s) - F^s C_{wa}) s}{-(1 - F^s) k_w} \right)$$

$$C_1^{aW} = \frac{s}{(\lambda + 2\mu) k_w} \frac{-\left((\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_w - \rho_w k_w s) (1 - F^s)\right) \lambda_2^2 + \rho C_{wa} s^2}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)}$$

$$C_2^{aW} = \frac{s}{(\lambda + 2\mu) k_w} \frac{-\left((\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_w - \rho_w k_w s) (1 - F^s)\right) \lambda_3^2 + \rho C_{wa} s^2}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)}$$

$$C_3^{aW} = \frac{s}{(\lambda + 2\mu) k_w} \frac{-\left((\lambda + 2\mu) C_{wa} + (S_w - \rho_w k_w s) (1 - F^s)\right) \lambda_4^2 + \rho C_{wa} s^2}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)}$$

$$C_1^{aA} = \frac{1}{(\lambda_4^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} (\lambda_2^2 - K_a^2) (\lambda_2^2 - \Lambda_a^2)$$

$$C_2^{aA} = \frac{1}{(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} (\lambda_3^2 - K_a^2) (\lambda_3^2 - \Lambda_a^2)$$

$$C_3^{aA} = \frac{1}{(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2)} (\lambda_4^2 - K_a^2) (\lambda_4^2 - \Lambda_a^2)$$

---

## Détail du calcul des solutions fondamentales pour les sols non-saturés soumis aux chargements quasi-statiques

### B.1 Dérivées partielles de $\phi(r, s)$ et $\Phi(r, s)$

$$\nabla^2(\Phi) = \frac{1}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left( K_0(\lambda_1 r) - K_0(\lambda_2 r) \right)$$

$$\nabla^4(\Phi) = \frac{1}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left( \lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r) - \lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) \right)$$

$$\partial_\alpha(\Phi) = \frac{-r, \alpha}{2\pi} \left( \frac{K_1(\lambda_1 r)}{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{1}{r\lambda_1^2\lambda_2^2} + \frac{K_1(\lambda_2 r)}{\lambda_2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \right)$$

$$\partial_\alpha \nabla^2(\Phi) = \frac{-r, \alpha}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left( \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) - \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \right)$$

$$\partial_\alpha \nabla^4(\Phi) = \frac{-r, \alpha}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left( \lambda_1^3 K_1(\lambda_1 r) - \lambda_2^3 K_1(\lambda_2 r) \right)$$

$$\partial_\alpha \partial_\beta \Phi = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{r, \alpha r, \beta}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} (K_2(\lambda_1 r) - K_2(\lambda_2 r)) - \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left( \frac{K_1(\lambda_1 r)}{r\lambda_1} - \frac{K_1(\lambda_2 r)}{r\lambda_2} \right) + \left( \frac{2r, \alpha r, \beta - \delta_{\alpha\beta}}{r^2} \right) \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right)$$

$$\partial_\alpha \partial_\beta \nabla^2(\Phi) = \frac{1}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \left( r, \alpha r, \beta (\lambda_1^2 K_2(\lambda_1 r) - \lambda_2^2 K_2(\lambda_2 r)) - \delta_{\alpha\beta} \left( \frac{\lambda_1 K_1(\lambda_1 r)}{r} - \frac{\lambda_2 K_1(\lambda_2 r)}{r} \right) \right)$$

$$\partial_\alpha \phi = \frac{1}{2\pi\mu(\lambda + 2\mu)\rho_a\rho_w k'_w k'_a} \times \left( \frac{-r_{,\alpha} K_1(\lambda_1 r)}{\lambda_1^3(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{r_{,\alpha}}{r\lambda_1^4(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{x_\alpha}{2\lambda_1^2\lambda_2^2} \left( \frac{1}{2} - \ln(r) \right) + \frac{-r_{,\alpha} K_1(\lambda_2 r)}{\lambda_2^3(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \frac{r_{,\alpha}}{r\lambda_2^4(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \right)$$

$$\partial_\alpha \partial_\beta \phi = \frac{1}{2\pi\mu(\lambda + 2\mu)\rho_a\rho_w k'_w k'_a} \times \left( \begin{aligned} & \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{\lambda_1^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[ \frac{1}{r^2\lambda_1^2} - \frac{1}{r\lambda_1} K_1(\lambda_1 r) \right] + r_{,\alpha} r_{,\beta} \frac{1}{\lambda_1^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[ K_2(\lambda_1 r) - \frac{2}{r^2\lambda_1^2} \right] \\ & - \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{\lambda_2^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[ \frac{1}{r^2\lambda_2^2} - \frac{1}{r\lambda_2} K_1(\lambda_2 r) \right] - r_{,\alpha} r_{,\beta} \frac{1}{\lambda_2^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[ K_2(\lambda_2 r) - \frac{2}{r^2\lambda_2^2} \right] \\ & - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2\lambda_1^2\lambda_2^2} \ln(r) - \frac{r_{,\alpha} r_{,\beta}}{2\lambda_1^2\lambda_2^2} \end{aligned} \right)$$

---

# Détail du calcul des solutions fondamentales pour les sols non-saturés soumis aux chargements non-isothermes quasi-statiques

## C.1 Coefficients de l'équation du déterminant $D_m$

$$D_1 = a_2 \left( \begin{array}{l} a_{20} \left( (a_4 a_7 - a_3 a_8) a_{16} + (-a_5 a_7 + a_3 a_9) a_{15} + (a_5 a_8 - a_4 a_9) a_{14} \right) + \\ a_{21} \left( -a_5 a_8 a_{13} + a_4 a_9 a_{13} - a_4 a_6 a_{16} + (a_1 + a_2) (a_8 a_{16} - a_9 a_{15}) + a_5 a_6 a_{15} \right) + \\ a_{22} \left( a_5 a_7 a_{13} - a_3 a_9 a_{13} + a_3 a_6 a_{16} - a_5 a_6 a_{14} + (a_1 + a_2) (a_9 a_{14} - a_7 a_{16}) \right) + \\ a_{23} \left( -a_4 a_7 a_{13} + a_3 a_8 a_{13} - a_3 a_6 a_{15} + a_4 a_6 a_{14} + (a_1 + a_2) (a_7 a_{15} - a_8 a_{14}) \right) \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= a_2 \left( \begin{aligned} &a_{20} \left( a_4(a_{10}a_{16} + a_7a_{19} - a_{12}a_{14} - a_9a_{17}) + a_3(a_{12}a_{15} + a_9a_{18} - a_{11}a_{16} - a_8a_{19}) \right. \\ &\quad \left. + a_5(a_{11}a_{14} + a_8a_{17} - a_{10}a_{15} - a_7a_{18}) \right) + \\ &a_{21} \left( a_5(a_6a_{18} - a_{11}a_{13}) + a_4(a_{12}a_{13} - a_6a_{19}) + (a_1 + a_2)(a_{11}a_{16} + a_8a_{19} - a_{12}a_{15} \right. \\ &\quad \left. - a_9a_{18}) \right) + \\ &a_{22} \left( a_5(a_{10}a_{13} - a_6a_{17}) + a_3(a_6a_{19} - a_{12}a_{13}) + (a_1 + a_2)(a_{12}a_{14} + a_9a_{17} - a_{10}a_{16} \right. \\ &\quad \left. - a_7a_{19}) \right) + \\ &a_{23} \left( a_4(a_6a_{17} - a_{10}a_{13}) + a_3(a_{11}a_{13} - a_6a_{18}) + (a_1 + a_2)(a_{10}a_{15} + a_7a_{18} - a_{11}a_{14} \right. \\ &\quad \left. - a_8a_{17}) \right) + \\ &a_{24} \left( a_5(a_6a_{15} - a_8a_{13}) + a_4(a_9a_{13} - a_6a_{16}) + (a_1 + a_2)(a_8a_{16} - a_9a_{15}) \right) + \\ &a_{25} \left( a_5(a_7a_{13} - a_6a_{14}) + a_3(a_6a_{16} - a_9a_{13}) + (a_1 + a_2)(a_9a_{14} - a_7a_{16}) \right) + \\ &a_{26} \left( a_4(a_6a_{14} - a_7a_{13}) + a_3(a_8a_{13} - a_6a_{15}) + (a_1 + a_2)(a_7a_{15} - a_8a_{14}) \right) \end{aligned} \right) \\
D_3 &= a_2 \left( \begin{aligned} &a_{20} \left( a_4(a_{10}a_{19} - a_{12}a_{17}) + a_3(a_{12}a_{18} - a_{11}a_{19}) + a_5(a_{11}a_{17} - a_{10}a_{18}) \right) + \\ &a_{23}(a_2 + a_1)(a_{10}a_{18} - a_{11}a_{17}) + \\ &a_{26} \left( a_4(a_6a_{17} - a_{10}a_{13}) + a_3(a_{11}a_{13} - a_6a_{18}) + (a_2 + a_1)(a_{10}a_{15} + a_7a_{18} - a_{11}a_{14} \right. \\ &\quad \left. - a_8a_{17}) \right) \\ &+ a_{22}(a_2 + a_1)(a_{12}a_{17} - a_{10}a_{19}) + a_{21}(a_2 + a_1)(a_{11}a_{19} - a_{12}a_{18}) + \\ &a_{25} \left( a_5(a_{10}a_{13} - a_6a_{17}) + a_3(a_6a_{19} - a_{12}a_{13}) + (a_2 + a_1)(a_{12}a_{14} + a_9a_{17} - a_{10}a_{16} \right. \\ &\quad \left. - a_7a_{19}) \right) + \\ &a_{24} \left( a_5(a_6a_{18} - a_{11}a_{13}) + a_4(a_{12}a_{13} - a_6a_{19}) + (a_2 + a_1)(a_{11}a_{16} + a_8a_{19} - a_{12}a_{15} \right. \\ &\quad \left. - a_9a_{18}) \right) \end{aligned} \right) \\
D_4 &= a_2(a_2 + a_1) \left( a_{26}(a_{10}a_{18} - a_{11}a_{17}) + a_{25}(a_{12}a_{17} - a_{10}a_{19}) + a_{24}(a_{11}a_{19} - a_{12}a_{18}) \right)
\end{aligned}$$

## C.2 Coefficients des éléments de la matrice des cofacteurs $B_i$

$$B_1 = \left( \begin{aligned} &a_{20}(a_{16}(a_4a_7 - a_3a_8) + a_{15}(-a_7a_5 + a_3a_9) + a_{14}(a_8a_5 - a_4a_9)) + \\ &a_{21}(-a_5a_8a_{13} + a_4a_9a_{13} + a_2a_8a_{16} - a_4a_6a_{16} + a_1a_8a_{16} - a_2a_9a_{15} + a_5a_6a_{15} - a_1a_9a_{15}) + \\ &a_{22}(a_5a_7a_{13} - a_3a_9a_{13} - a_2a_7a_{16} + a_3a_6a_{16} - a_1a_7a_{16} + a_2a_9a_{14} - a_5a_6a_{14} + a_1a_9a_{14}) + \\ &a_{23}(-a_4a_7a_{13} + a_3a_8a_{13} + a_{15}a_2a_7 - a_{15}a_3a_5 + a_{15}a_1a_7 - a_2a_8a_{14} + a_4a_6a_{14} - a_1a_8a_{14}) \end{aligned} \right)$$

$$B_2 = \left( \begin{array}{l} a_{20} \left( \begin{array}{l} a_{16}(a_4a_{10} - a_3a_{11}) + a_{19}(a_4a_7 - a_3a_8) + a_{15}(-a_{10}a_5 + a_3a_{12}) + \\ a_{18}(-a_7a_5 + a_3a_9) + a_{14}(a_{11}a_5 - a_4a_{12}) + a_{17}(a_8a_5 - a_4a_9) \end{array} \right) + \\ a_{23} \left( \begin{array}{l} -a_4a_{13}a_{10} + a_3a_{11}a_{13} + a_{15}a_2a_{10} + a_{15}a_1a_{10} + a_{18}a_2a_7 - a_{18}a_3a_5 \\ + a_{18}a_1a_7 - a_2a_{11}a_{14} - a_1a_{11}a_{14} - a_2a_8a_{17} + a_4a_6a_{17} - a_1a_8a_{17} \end{array} \right) + \\ a_{26} \left( \begin{array}{l} -a_4a_7a_{13} + a_3a_8a_{13} + a_{15}a_2a_7 - a_{15}a_3a_5 + a_{15}a_1a_7 - a_2a_8a_{14} + a_4a_6a_{14} \\ - a_1a_8a_{14} \end{array} \right) + \\ a_{25} \left( \begin{array}{l} a_5a_7a_{13} - a_3a_9a_{13} - a_2a_7a_{16} + a_3a_6a_{16} - a_1a_7a_{16} + a_2a_9a_{14} - a_5a_6a_{14} \\ + a_1a_9a_{14} \end{array} \right) + \\ a_{21} \left( \begin{array}{l} -a_5a_{13}a_{11} + a_4a_{12}a_{13} + a_2a_{11}a_{16} + a_1a_{11}a_{16} + a_2a_8a_{19} - a_4a_6a_{19} \\ + a_1a_8a_{19} - a_2a_{12}a_{15} - a_1a_{12}a_{15} - a_2a_9a_{18} + a_5a_6a_{18} - a_1a_9a_{18} \end{array} \right) + \\ a_{24} \left( \begin{array}{l} -a_5a_8a_{13} + a_4a_9a_{13} + a_2a_8a_{16} - a_4a_6a_{16} + a_1a_8a_{16} - a_2a_9a_{15} + a_5a_6a_{15} \\ - a_1a_9a_{15} \end{array} \right) + \\ a_{22} \left( \begin{array}{l} a_5a_{13}a_{10} - a_3a_{12}a_{13} - a_2a_{10}a_{16} - a_1a_{10}a_{16} - a_2a_7a_{19} + a_3a_6a_{19} - a_1a_7a_{19} \\ + a_2a_{12}a_{14} + a_1a_{12}a_{14} + a_2a_9a_{17} - a_5a_6a_{17} + a_1a_9a_{17} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$B_3 = \left( \begin{array}{l} a_{20}((a_4a_{10} - a_3a_{11})a_{19} + (-a_{10}a_5 + a_3a_{12})a_{18} + (a_{11}a_5 - a_4a_{12})a_{17}) + \\ a_{21}(a_1 + a_2)(a_{11}a_{19} + a_{12}a_{18}) + a_{22}(a_1 + a_2)(-a_{10}a_{19} + a_{12}a_{17}) + \\ a_{23}(a_1 + a_2)(a_{10}a_{18} - a_{11}a_{17}) + \\ a_{26} \left( \begin{array}{l} -a_4a_{13}a_{10} + a_3a_{11}a_{13} + (a_1 + a_2)(a_{10}a_{15} + a_7a_{18} - a_{11}a_{14} - a_8a_{17}) \\ - a_3a_6a_{18} + a_4a_6a_{17} \end{array} \right) + \\ a_{25} \left( \begin{array}{l} a_5a_{13}a_{10} - a_3a_{12}a_{13} - (a_1 + a_2)(a_{10}a_{16} + a_7a_{19} - a_{12}a_{14} - a_9a_{17}) \\ + a_3a_6a_{19} - a_5a_6a_{17} \end{array} \right) + \\ a_{24} \left( \begin{array}{l} -a_5a_{13}a_{11} + a_4a_{12}a_{13} + (a_1 + a_2)(a_{11}a_{16} + a_8a_{19} + a_{12}a_{15} + a_9a_{18}) \\ - a_4a_6a_{19} - a_5a_6a_{18} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$B_4 = (a_1 + a_2)(a_{26}(a_{18}a_{10} - a_{11}a_{17}) + a_{25}(-a_{10}a_{19} + a_{12}a_{17}) + a_{24}(a_{11}a_{19} - a_{12}a_{18}))$$

$$B_5 = \left( \begin{array}{l} a_{23}(a_{15}(a_3a_6 - a_1a_7) + a_{14}(-a_4a_6 + a_1a_8) + a_{13}(a_4a_7 - a_3a_8)) + \\ a_{22}(a_{16}(-a_3a_6 + a_1a_7) + a_{14}(a_5a_6 - a_1a_9) + a_{13}(-a_5a_7 + a_3a_9)) + \\ a_{21}(a_{16}(a_4a_6 - a_1a_8) + a_{15}(-a_5a_6 + a_1a_9) + a_{13}(a_5a_8 - a_4a_9)) + \\ a_{20}(a_{16}(-a_4a_7 + a_3a_8) + a_{15}(a_7a_5 - a_3a_9) + a_{14}(-a_8a_5 + a_4a_9)) \end{array} \right)$$

$$B_6 = \left( \begin{array}{l} a_{23} \left( \begin{array}{l} -a_{15}a_1a_{10} + a_{18}(a_3a_6 - a_1a_7) + a_{14}a_1a_{11} + a_{17}(-a_4a_6 + a_1a_8) \\ + a_{13}(a_4a_{10} - a_3a_{11}) \end{array} \right) + \\ a_{26}(a_{15}(a_3a_6 - a_1a_7) + a_{14}(-a_4a_6 + a_1a_8) + a_{13}(a_4a_7 - a_3a_8)) + \\ a_{22} \left( \begin{array}{l} a_{16}a_1a_{10} + a_{19}(-a_3a_6 + a_1a_7) - a_{14}a_1a_{12} + a_{17}(a_5a_6 - a_1a_9) \\ + a_{13}(-a_5a_{10} + a_3a_{12}) \end{array} \right) + \\ a_{25}(a_{16}(-a_3a_6 + a_1a_7) + a_{14}(a_5a_6 - a_1a_9) + a_{13}(-a_5a_7 + a_3a_9)) + \\ a_{21} \left( \begin{array}{l} -a_{16}a_1a_{11} + a_{19}(a_4a_6 - a_1a_8) + a_{15}a_1a_{12} + a_{18}(-a_5a_6 + a_1a_9) \\ + a_{13}(a_5a_{11} - a_4a_{12}) \end{array} \right) + \\ a_{24}(a_{16}(a_4a_6 - a_1a_8) + a_{15}(-a_5a_6 + a_1a_9) + a_{13}(a_5a_8 - a_4a_9)) + \\ a_{20} \left( \begin{array}{l} a_{16}(-a_4a_{10} + a_3a_{11}) + a_{19}(-a_4a_7 + a_3a_8) + a_{15}(a_{10}a_5 - a_3a_{12}) \\ + a_{18}(a_7a_5 - a_3a_9) + a_{14}(-a_{11}a_5 + a_4a_{12}) + a_{17}(-a_8a_5 + a_4a_9) \end{array} \right) \end{array} \right) +$$

$$B_7 = \left( \begin{array}{l} a_{23}(-a_{18}a_1a_{10} + a_{17}a_1a_{11}) + \\ a_{26}(-a_{15}a_1a_{10} + a_{18}(a_3a_6 - a_1a_7) + a_{14}a_1a_{11} + a_{17}(-a_4a_6 + a_1a_8) + a_{13}(a_4a_{10} - a_3a_{11})) + \\ a_{22}(a_{19}a_1a_{10} - a_{17}a_1a_{12}) + \\ a_{25}(a_{16}a_1a_{10} + a_{19}(-a_3a_6 + a_1a_7) - a_{14}a_1a_{12} + a_{17}(a_5a_6 - a_1a_9) + a_{13}(-a_5a_{10} + a_3a_{12})) + \\ a_{21}(-a_1a_{11}a_{19} + a_{18}a_1a_{12}) + \\ a_{24}(-a_{16}a_1a_{11} + a_{19}(a_4a_6 - a_1a_8) + a_{15}a_1a_{12} + a_{18}(-a_5a_6 + a_1a_9) + a_{13}(a_5a_{11} - a_4a_{12})) + \\ a_{20}(a_{19}(-a_4a_{10} + a_3a_{11}) + a_{18}(a_{10}a_5 - a_3a_{12}) + a_{17}(-a_{11}a_5 + a_4a_{12})) \end{array} \right)$$

$$B_8 = a_1(a_{26}(-a_{18}a_{10} + a_{17}a_{11}) + a_{25}(a_{19}a_{10} - a_{17}a_{12}) + a_{24}(-a_{11}a_{19} + a_{18}a_{12}))$$

$$B_9 = a_2(a_{23}(-a_3a_{15} + a_4a_{14}) + a_{22}(a_3a_{16} - a_5a_{14}) + a_{21}(-a_4a_{16} + a_5a_{15}))$$

$$B_{10} = a_2 \left( \begin{array}{l} a_{21}(-a_4a_{19} + a_5a_{18}) + a_{22}(a_3a_{19} - a_5a_{17}) + a_{23}(-a_3a_{18} + a_4a_{17}) \\ + a_{24}(-a_4a_{16} + a_5a_{15}) + a_{25}(a_3a_{16} - a_5a_{14}) + a_{26}(-a_3a_{15} + a_4a_{14}) \end{array} \right)$$

$$B_{11} = a_2(a_{24}(-a_4a_{19} + a_5a_{18}) + a_{25}(a_3a_{19} - a_5a_{17}) + a_{26}(-a_3a_{18} + a_4a_{17}))$$

$$B_{12} = a_2(a_{23}(-a_4a_7 + a_3a_8) + a_{22}(a_5a_7 - a_3a_9) + a_{21}(-a_5a_8 + a_4a_9))$$

$$B_{13} = a_2 \left( \begin{array}{l} a_{23}(-a_4a_{10} + a_3a_{11}) + a_{26}(-a_4a_7 + a_3a_8) + a_{22}(a_5a_{10} - a_3a_{12}) + a_{25}(a_5a_7 - a_3a_9) + \\ a_{21}(-a_5a_{11} + a_4a_{12}) + a_{24}(-a_5a_8 + a_4a_9) \end{array} \right)$$

$$B_{14} = a_2(a_{26}(-a_4a_{10} + a_3a_{11}) + a_{25}(a_5a_{10} - a_3a_{12}) + a_{24}(-a_5a_{11} + a_4a_{12}))$$

$$B_{15} = a_2(a_{16}(a_4a_7 - a_3a_8) + a_{15}(-a_5a_7 + a_3a_9) + a_{14}(a_5a_8 - a_4a_9))$$

$$B_{16} = a_2 \left( \begin{array}{l} a_{16}(a_4a_{10} - a_3a_{11}) + a_{19}(a_4a_7 - a_3a_8) + a_{15}(-a_5a_{10} + a_3a_{12}) + a_{18}(-a_5a_7 + a_3a_9) + \\ a_{14}(a_5a_{11} - a_4a_{12}) + a_{17}(a_5a_8 - a_4a_9) \end{array} \right)$$

$$B_{17} = a_2(a_{19}(a_4a_{10} - a_3a_{11}) + a_{18}(-a_5a_{10} + a_3a_{12}) + a_{17}(a_5a_{11} - a_4a_{12}))$$

$$B_{18} = a_2(a_{13}a_{23}a_8 - a_{13}a_{22}a_9 - a_{15}a_{23}a_6 + a_{20}a_{15}a_9 + a_{22}a_{16}a_6 - a_{20}a_{16}a_8)$$

$$B_{19} = a_2 \begin{pmatrix} -a_{12}a_{13}a_{22} + a_{11}a_{13}a_{23} + a_{19}a_{22}a_6 - a_{18}a_{23}a_6 - a_{19}a_{20}a_8 + a_{13}a_{26}a_8 + a_{18}a_{20}a_9 \\ -a_{13}a_{25}a_9 + a_{12}a_{20}a_{15} - a_{15}a_{26}a_6 + a_{25}a_{16}a_6 - a_{20}a_{16}a_{11} \end{pmatrix}$$

$$B_{20} = a_2(a_{12}a_{18}a_{20} - a_{11}a_{19}a_{20} - a_{12}a_{13}a_{25} + a_{11}a_{13}a_{26} + a_{19}a_{25}a_6 - a_{18}a_{26}a_6)$$

$$B_{21} = a_2(a_{20}(a_4a_{16} - a_5a_{15}) + a_{23}(-a_4a_{13} + (a_1 + a_2)a_{15}) + a_{22}(a_5a_{13} - (a_1 + a_2)a_{16}))$$

$$B_{22} = a_2 \begin{pmatrix} a_{20}(a_4a_{19} - a_5a_{18}) + a_{23}(a_1 + a_2)a_{18} + a_{26}(-a_4a_{13} + (a_1 + a_2)a_{15}) \\ -a_{22}(a_1 + a_2)a_{19} + a_{25}(a_5a_{13} - (a_1 + a_2)a_{16}) \end{pmatrix}$$

$$B_{23} = a_2(a_1 + a_2)(a_{26}a_{18} - a_{25}a_{19})$$

$$B_{24} = a_2(a_{20}(a_5a_8 - a_4a_9) + a_{23}(a_4a_6 - (a_1 + a_2)a_8) + a_{22}(-a_5a_6 + (a_1 + a_2)a_9))$$

$$B_{25} = a_2 \begin{pmatrix} a_{20}(a_5a_{11} - a_4a_{12}) - a_{23}(a_1 + a_2)a_{11} + a_{26}(a_4a_6 - (a_1 + a_2)a_8) \\ +a_{22}(a_1 + a_2)a_{12} + a_{25}(-a_5a_6 + (a_1 + a_2)a_9) \end{pmatrix}$$

$$B_{26} = a_2(a_1 + a_2)(-a_{26}a_{11} + a_{25}a_{12})$$

$$B_{27} = a_2(a_{13}(-a_5a_8 + a_4a_9) + a_{16}(a_8(a_1 + a_2) - a_4a_6) + a_{15}(a_5a_6 - (a_1 + a_2)a_9))$$

$$B_{28} = a_2 \begin{pmatrix} a_{13}(-a_5a_{11} + a_4a_{12}) + a_{16}(a_1 + a_2)a_{11} + a_{19}(a_8(a_1 + a_2) - a_4a_6) \\ -a_{15}(a_1 + a_2)a_{12} + a_{18}(a_5a_6 - (a_1 + a_2)a_9) \end{pmatrix}$$

$$B_{29} = a_2(a_1 + a_2)(a_{19}a_{11} - a_{18}a_{12})$$

$$B_{30} = a_2(-a_{13}a_{23}a_7 + a_{13}a_{21}a_9 - a_{16}a_{21}a_6 + a_{20}a_{16}a_7 + a_{23}a_{14}a_6 - a_{20}a_{14}a_9)$$

$$B_{31} = a_2 \begin{pmatrix} a_{12}a_{13}a_{21} - a_{10}a_{13}a_{23} - a_{19}a_{21}a_6 + a_{17}a_{23}a_6 + a_{19}a_{20}a_7 - a_{13}a_{26}a_7 - a_{17}a_{20}a_9 \\ +a_{13}a_{24}a_9 + a_{16}a_{20}a_{10} - a_{16}a_{24}a_6 + a_{26}a_{14}a_6 - a_{20}a_{14}a_{12} \end{pmatrix}$$

$$B_{32} = a_2(-a_{12}a_{17}a_{20} + a_{10}a_{19}a_{20} + a_{12}a_{13}a_{24} - a_{10}a_{13}a_{26} - a_{19}a_{24}a_6 + a_{17}a_{26}a_6)$$

$$B_{33} = a_2(a_{20}(-a_{16}a_3 + a_{14}a_5) + a_{23}(-(a_1 + a_2)a_{14} + a_3a_{13}) + a_{21}(-a_5a_{13} + (a_1 + a_2)a_{16}))$$

$$B_{34} = a_2 \left( \begin{array}{l} a_{20}(-a_3a_{19} + a_{17}a_5) - a_{23}(a_1 + a_2)a_{17} + a_{26}(-(a_1 + a_2)a_{14} + a_3a_{13}) + a_{21}(a_1 + a_2)a_{19} \\ + a_{24}(-a_5a_{13} + (a_1 + a_2)a_{16}) \end{array} \right)$$

$$B_{35} = a_2(a_1 + a_2)(-a_{26}a_{17} + a_{24}a_{19})$$

$$B_{36} = a_2(a_{20}(-a_5a_7 + a_3a_9) + a_{23}((a_1 + a_2)a_7 - a_3a_6) + a_{21}(a_5a_6 - (a_1 + a_2)a_9))$$

$$B_{37} = a_2 \left( \begin{array}{l} a_{20}(-a_5a_{10} + a_3a_{12}) + a_{23}(a_1 + a_2)a_{10} + a_{26}((a_1 + a_2)a_7 - a_3a_6) - a_{21}(a_1 + a_2)a_{12} + \\ a_{24}(a_5a_6 - (a_1 + a_2)a_9) \end{array} \right)$$

$$B_{38} = a_2(a_1 + a_2)(a_{26}a_{10} - a_{24}a_{12})$$

$$B_{39} = a_2(a_{13}(a_5a_7 - a_3a_9) + a_{16}(-(a_1 + a_2)a_7 + a_3a_6) + a_{14}(-a_5a_6 + (a_1 + a_2)a_9))$$

$$B_{40} = a_2 \left( \begin{array}{l} a_{13}(a_5a_{10} - a_3a_{12}) - a_{16}(a_1 + a_2)a_{10} + a_{19}(-(a_1 + a_2)a_7 + a_3a_6) + a_{14}(a_1 + a_2)a_{12} + \\ a_{17}(-a_5a_6 + (a_1 + a_2)a_9) \end{array} \right)$$

$$B_{41} = a_2(a_1 + a_2)(-a_{19}a_{10} + a_{17}a_{12})$$

$$B_{42} = a_2(a_{13}a_{22}a_7 - a_{13}a_{21}a_8 - a_{14}a_{22}a_6 + a_{20}a_{14}a_8 + a_{21}a_{15}a_6 - a_{20}a_{15}a_7)$$

$$B_{43} = a_2 \left( \begin{array}{l} -a_{11}a_{13}a_{21} + a_{10}a_{13}a_{22} + a_{18}a_{21}a_6 - a_{17}a_{22}a_6 - a_{18}a_{20}a_7 + a_{13}a_{25}a_7 + a_{17}a_{20}a_8 \\ -a_{13}a_{24}a_8 + a_{11}a_{20}a_{14} - a_{14}a_{25}a_6 + a_{24}a_{15}a_6 - a_{20}a_{15}a_{10} \end{array} \right)$$

$$B_{44} = a_2(a_{11}a_{17}a_{20} - a_{10}a_{18}a_{20} - a_{11}a_{13}a_{24} + a_{10}a_{13}a_{25} + a_{18}a_{24}a_6 - a_{17}a_{25}a_6)$$

$$B_{45} = a_2(a_{20}(a_{15}a_3 - a_{14}a_4) + a_{22}((a_1 + a_2)a_{14} - a_3a_{13}) + a_{21}(a_4a_{13} - (a_1 + a_2)a_{15}))$$

$$B_{46} = a_2 \left( \begin{array}{l} a_{20}(a_3a_{18} - a_{17}a_4) + a_{22}(a_1 + a_2)a_{17} + a_{25}((a_1 + a_2)a_{14} - a_3a_{13}) - a_{21}(a_1 + a_2)a_{18} + \\ a_{24}(a_4a_{13} - (a_1 + a_2)a_{15}) \end{array} \right)$$

$$B_{47} = a_2(a_1 + a_2)(a_{25}a_{17} - a_{24}a_{18})$$

$$B_{48} = a_2(a_{20}(a_4a_7 - a_3a_8) + a_{22}(-(a_1 + a_2)a_7 + a_3a_6) + a_{21}(-a_4a_6 + (a_1 + a_2)a_8))$$

$$B_{49} = a_2 \left( \begin{array}{l} a_{20}(a_4a_{10} - a_3a_{11}) - a_{22}(a_1 + a_2)a_{10} + a_{25}(-(a_1 + a_2)a_7 + a_3a_6) + a_{21}(a_1 + a_2)a_{11} + \\ a_{24}(-a_4a_6 + (a_1 + a_2)a_8) \end{array} \right)$$

$$B_{50} = a_2(-a_{25}(a_1 + a_2)a_{10} + a_{24}(a_1 + a_2)a_{11})$$

$$B_{51} = a_2(a_{13}(-a_4a_7 + a_3a_8) + a_{15}((a_1 + a_2)a_7 - a_3a_6) + a_{14}(a_4a_6 - (a_1 + a_2)a_8))$$

$$B_{52} = a_2 \left( \begin{array}{l} a_{13}(-a_4a_{10} + a_3a_{11}) + a_{15}(a_1 + a_2)a_{10} + a_{18}((a_1 + a_2)a_7 - a_3a_6) \\ -a_{14}(a_1 + a_2)a_{11} + a_{17}(a_4a_6 - (a_1 + a_2)a_8) \end{array} \right)$$

$$B_{53} = a_2(a_1 + a_2)(a_{18}a_{10} - a_{17}a_{11})$$

### C.3 Application de la matrice d'opérateur $B^{co}$ à la solution scalaire $\phi(r, s)$

**solutions 2D :**

$$\tilde{G}_{\alpha\beta}(r, s) = \left( \begin{array}{l} \delta_{\alpha\beta}(B_1s^3\nabla^2 + B_2s^2\nabla^4 + B_3s\nabla^6 + B_4\nabla^8) + B_5s^3\partial_\alpha\partial_\beta + B_6s^2\nabla^2\partial_\alpha\partial_\beta \\ + B_7s\nabla^4\partial_\alpha\partial_\beta + B_8\nabla^6\partial_\alpha\partial_\beta \end{array} \right) \phi$$

$$\tilde{G}_{\alpha w}(r, s) = (B_9s^2\nabla^2\partial_\alpha + B_{10}s\nabla^4\partial_\alpha + B_{11}\nabla^6\partial_\alpha) \phi$$

$$\tilde{G}_{\alpha a}(r, s) = (B_{12}s^2\nabla^2\partial_\alpha + B_{13}s\nabla^4\partial_\alpha + B_{14}\nabla^6\partial_\alpha) \phi$$

$$\tilde{G}_{\alpha T}(r, s) = (B_{15}s^2\nabla^2\partial_\alpha + B_{16}s\nabla^4\partial_\alpha + B_{17}\nabla^6\partial_\alpha) \phi$$

$$\tilde{G}_{w\beta}(r, s) = (B_{18}s^3\nabla^2\partial_\beta + B_{19}s^2\nabla^4\partial_\beta + B_{20}s\nabla^6\partial_\beta) \phi$$

$$\tilde{G}_{ww}(r, s) = (B_{21}s^2\nabla^4 + B_{22}s\nabla^6 + B_{23}s\nabla^8) \phi$$

$$\tilde{G}_{wa}(r, s) = (B_{24}s^2\nabla^4 + B_{25}s\nabla^6 + B_{26}\nabla^8) \phi$$

$$\tilde{G}_{wT}(r, s) = (B_{27}s^2\nabla^4 + B_{28}s\nabla^6 + B_{29}\nabla^8) \phi$$

$$\tilde{G}_{a\beta}(r, s) = (B_{30}s^3\nabla^2\partial_\beta + B_{31}s^2\nabla^4\partial_\beta + B_{32}s\nabla^6\partial_\beta) \phi$$

$$\tilde{G}_{aw}(r, s) = (B_{33}s^2\nabla^4 + B_{34}s\nabla^6 + B_{35}\nabla^8) \phi$$

$$\tilde{G}_{aa}(r, s) = (B_{36}s^2\nabla^4 + B_{37}s\nabla^6 + B_{38}\nabla^8) \phi$$

$$\tilde{G}_{aT}(r, s) = (B_{39}s^2\nabla^4 + B_{40}s\nabla^6 + B_{41}\nabla^8) \phi$$

$$\tilde{G}_{T\beta}(r, s) = (B_{42}s^3\nabla^2\partial_\beta + B_{43}s^2\nabla^4\partial_\beta + B_{44}s\nabla^6\partial_\beta) \phi$$

$$\tilde{G}_{Tw}(r, s) = (B_{45}s^2\nabla^4 + B_{46}s\nabla^6 + B_{47}\nabla^8) \phi$$

$$\tilde{G}_{Ta}(r, s) = (B_{48}s^2\nabla^4 + B_{49}s\nabla^6 + B_{50}\nabla^8) \phi$$

$$\tilde{G}_{TT}(r, s) = (B_{51}s^2\nabla^4 + B_{52}s\nabla^6 + B_{53}\nabla^8) \phi$$

où

$$\nabla^2(\phi) = \frac{1}{2\pi p D_4} \left( \frac{K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1^2} + \frac{K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^2} + \frac{K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3^2} \right)$$

$$\nabla^4(\phi) = \frac{1}{2\pi p D_4} \left( \frac{K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right)$$

$$\nabla^6(\phi) = \frac{1}{2\pi p D_4} \left( \frac{\lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3^2 K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right)$$

$$\nabla^8(\phi) = \frac{1}{2\pi p D_4} \left( \frac{\lambda_1^4 K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^4 K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3^4 K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right)$$

$$\partial_\alpha(\phi) = -\frac{1}{2\pi p D_4} \frac{x_\alpha}{r} \left( \frac{K_1(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1^3} + \frac{K_1(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^3} + \frac{K_1(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3^3} \right)$$

$$\nabla^2\partial_\alpha(\phi) = -\frac{1}{2\pi p D_4} \frac{x_\alpha}{r} \left( \frac{K_1(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1} + \frac{K_1(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2} + \frac{K_1(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3} \right)$$

$$\nabla^4\partial_\alpha(\phi) = -\frac{1}{2\pi p D_4} \frac{x_\alpha}{r} \left( \frac{\lambda_1 K_1(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2 K_1(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3 K_1(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right)$$

$$\nabla^6\partial_\alpha(\phi) = -\frac{1}{2\pi p D_4} \frac{x_\alpha}{r} \left( \frac{\lambda_1^3 K_1(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^3 K_1(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3^3 K_1(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right)$$

$$\partial_\alpha\partial_\beta(\phi) = \frac{1}{2\pi p D_4} \frac{1}{r^3} \times \left( r x_\alpha x_\beta \left[ \frac{K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1^2} + \frac{K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^2} + \frac{K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3^2} \right] + (2x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}) \left[ \frac{K_1(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1^3} + \frac{K_1(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^3} + \frac{K_1(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3^3} \right] \right)$$

$$\nabla^2 \partial_\alpha \partial_\beta (\phi) = \frac{1}{2\pi p D_4} \frac{1}{r^3} \times \left( \begin{array}{l} r x_\alpha x_\beta \left[ \frac{K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right] \\ + (2x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \left[ \frac{K_1(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1} + \frac{K_1(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2} \right. \\ \left. + \frac{K_1(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3} \right] \end{array} \right)$$

$$\nabla^4 \partial_\alpha \partial_\beta (\phi) = \frac{1}{2\pi p D_4} \frac{1}{r^3} \times \left( \begin{array}{l} r x_\alpha x_\beta \left[ \frac{\lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3^2 K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right] \\ + (2x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \left[ \frac{\lambda_1 K_1(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2 K_1(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \right. \\ \left. + \frac{\lambda_3 K_1(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right] \end{array} \right)$$

$$\nabla^6 \partial_\alpha \partial_\beta (\phi) = \frac{1}{2\pi p D_4} \frac{1}{r^3} \times \left( \begin{array}{l} r x_\alpha x_\beta \left[ \frac{\lambda_1^4 K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^4 K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3^4 K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right] \\ + (2x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \left[ \frac{\lambda_1^3 K_1(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^3 K_1(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \right. \\ \left. + \frac{\lambda_3^3 K_1(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right] \end{array} \right)$$

**solutions 3D :**

$$\tilde{G}_{\alpha\beta}(r, s) = \left( \begin{array}{l} \delta_{\alpha\beta} (B_1 s^3 \nabla^4 + B_2 s^2 \nabla^6 + B_3 s \nabla^8 + B_4 \nabla^{10}) + B_5 s^3 \nabla^2 \partial_\alpha \partial_\beta + B_6 s^2 \nabla^4 \partial_\alpha \partial_\beta \\ + B_7 s \nabla^6 \partial_\alpha \partial_\beta + B_8 \nabla^8 \partial_\alpha \partial_\beta \end{array} \right) \phi$$

$$\tilde{G}_{\alpha w}(r, s) = (B_9 s^2 \nabla^4 \partial_\alpha + B_{10} s \nabla^6 \partial_\alpha + B_{11} \nabla^8 \partial_\alpha) \phi$$

$$\tilde{G}_{\alpha a}(r, s) = (B_{12} s^2 \nabla^4 \partial_\alpha + B_{13} s \nabla^6 \partial_\alpha + B_{14} \nabla^8 \partial_\alpha) \phi$$

$$\tilde{G}_{\alpha T}(r, s) = (B_{15} s^2 \nabla^4 \partial_\alpha + B_{16} s \nabla^6 \partial_\alpha + B_{17} \nabla^8 \partial_\alpha) \phi$$

$$\tilde{G}_{w\beta}(r, s) = (B_{18} s^3 \nabla^4 \partial_\beta + B_{19} s^2 \nabla^6 \partial_\beta + B_{20} s \nabla^8 \partial_\beta) \phi$$

$$\tilde{G}_{ww}(r, s) = (B_{21} s^2 \nabla^6 + B_{22} s \nabla^8 + B_{23} \nabla^{10}) \phi$$

$$\tilde{G}_{wa}(r, s) = (B_{24}s^2\nabla^6 + B_{25}s\nabla^8 + B_{26}\nabla^{10})\phi$$

$$\tilde{G}_{wT}(r, s) = (B_{27}s^2\nabla^6 + B_{28}s\nabla^8 + B_{29}\nabla^{10})\phi$$

$$\tilde{G}_{a\beta}(r, s) = (B_{30}s^3\nabla^4\partial_\beta + B_{31}s^2\nabla^6\partial_\beta + B_{32}s\nabla^8\partial_\beta)\phi$$

$$\tilde{G}_{aw}(r, s) = (B_{33}s^2\nabla^6 + B_{34}s\nabla^8 + B_{35}\nabla^{10})\phi$$

$$\tilde{G}_{aa}(r, s) = (B_{36}s^2\nabla^6 + B_{37}s\nabla^8 + B_{38}\nabla^{10})\phi$$

$$\tilde{G}_{aT}(r, s) = (B_{39}s^2\nabla^6 + B_{40}s\nabla^8 + B_{41}\nabla^{10})\phi$$

$$\tilde{G}_{T\beta}(r, s) = (B_{42}s^3\nabla^4\partial_\beta + B_{43}s^2\nabla^6\partial_\beta + B_{44}s\nabla^8\partial_\beta)\phi$$

$$\tilde{G}_{Tw}(r, s) = (B_{45}s^2\nabla^6 + B_{46}s\nabla^8 + B_{47}\nabla^{10})\phi$$

$$\tilde{G}_{Ta}(r, s) = (B_{48}s^2\nabla^6 + B_{49}s\nabla^8 + B_{50}\nabla^{10})\phi$$

$$\tilde{G}_{TT}(r, s) = (B_{51}s^2\nabla^6 + B_{52}s\nabla^8 + B_{53}\nabla^{10})\phi$$

où

$$\nabla^2(\phi) = \frac{1}{4\pi p D_4 r} \left( \frac{\exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1^4} + \frac{\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^4} + \frac{\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3^4} \right)$$

$$\nabla^4(\phi) = \frac{1}{4\pi p D_4 r} \left( \frac{\exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1^2} + \frac{\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^2} + \frac{\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3^2} \right)$$

$$\nabla^6(\phi) = \frac{1}{4\pi p D_4 r} \left( \frac{\exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right)$$

$$\nabla^8(\phi) = \frac{1}{4\pi p D_4 r} \left( \frac{\lambda_1^2 \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^2 \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3^2 \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right)$$

$$\nabla^{10}(\phi) = \frac{1}{4\pi p D_4 r} \left( \frac{\lambda_1^4 \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^4 \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3^4 \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right)$$

$$\partial_\alpha(\phi) = -\frac{1}{4\pi p D_4 r^2} \frac{x_\alpha}{r} \left( \frac{(1+r\lambda_1)\exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1^6} + \frac{(1+r\lambda_2)\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^6} + \frac{(1+r\lambda_3)\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3^6} \right)$$

$$\nabla^2\partial_\alpha(\phi) = -\frac{1}{4\pi p D_4 r^2} \frac{x_\alpha}{r} \left( \frac{(1+r\lambda_1)\exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1^4} + \frac{(1+r\lambda_2)\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^4} + \frac{(1+r\lambda_3)\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3^4} \right)$$

$$\nabla^4 \partial_\alpha (\phi) = -\frac{1}{4\pi p D_4 r^2} \frac{x_\alpha}{r} \times \left( \frac{(1+r\lambda_1) \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1^2} + \frac{(1+r\lambda_2) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^2} + \frac{(1+r\lambda_3) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3^2} \right)$$

$$\nabla^6 \partial_\alpha (\phi) = -\frac{1}{4\pi p D_4 r^2} \frac{x_\alpha}{r} \times \left( \frac{(1+r\lambda_1) \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{(1+r\lambda_2) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{(1+r\lambda_3) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right)$$

$$\nabla^8 \partial_\alpha (\phi) = -\frac{1}{4\pi p D_4 r^2} \frac{x_\alpha}{r} \times \left( \frac{(1+r\lambda_1) \lambda_1^2 \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{(1+r\lambda_2) \lambda_2^2 \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{(1+r\lambda_3) \lambda_3^2 \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right)$$

$$\partial_\alpha \partial_\beta (\phi) = \frac{1}{4\pi p D_4 r^5} \times \left( r^2 x_\alpha x_\beta \left[ \frac{\exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1^4} + \frac{\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^4} + \frac{\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3^4} \right] + (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \left[ \frac{(1+r\lambda_1) \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1^6} + \frac{(1+r\lambda_2) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^6} + \frac{(1+r\lambda_3) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3^6} \right] \right)$$

$$\nabla^2 \partial_\alpha \partial_\beta (\phi) = \frac{1}{4\pi p D_4 r^5} \times \left( r^2 x_\alpha x_\beta \left[ \frac{\exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1^2} + \frac{\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^2} + \frac{\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3^2} \right] + (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \left[ \frac{(1+r\lambda_1) \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1^4} + \frac{(1+r\lambda_2) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^4} + \frac{(1+r\lambda_3) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3^4} \right] \right)$$

$$\nabla^4 \partial_\alpha \partial_\beta (\phi) = \frac{1}{4\pi p D_4 r^5} \times \left( r^2 x_\alpha x_\beta \left[ \frac{\exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right] + (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \left[ \frac{(1+r\lambda_1) \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\lambda_1^2} + \frac{(1+r\lambda_2) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\lambda_2^2} + \frac{(1+r\lambda_3) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\lambda_3^2} \right] \right)$$

$$\nabla^6 \partial_\alpha \partial_\beta (\phi) = \frac{1}{4\pi p D_4 r^5} \times$$

$$\left( \begin{array}{l} r^2 x_\alpha x_\beta \left[ \frac{\lambda_1^2 \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^2 \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3^2 \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right] \\ + (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \left[ \frac{(1+r\lambda_1) \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{(1+r\lambda_2) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \right. \\ \left. + \frac{(1+r\lambda_3) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right] \end{array} \right)$$

$$\nabla^8 \partial_\alpha \partial_\beta (\phi) = \frac{1}{4\pi p D_4} \frac{1}{r^5} \times$$

$$\left( \begin{array}{l} r^2 x_\alpha x_\beta \left[ \frac{\lambda_1^4 \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^4 \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3^4 \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right] \\ + (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \left[ \frac{(1+r\lambda_1) \lambda_1^2 \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{(1+r\lambda_2) \lambda_2^2 \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \right. \\ \left. + \frac{(1+r\lambda_3) \lambda_3^2 \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right] \end{array} \right)$$

## C.4 Fonctions intermédiaires $\Omega_{kl}^{nD}$

**solutions 2D :**

$$\Omega_{11}^{2D} = s^2 \left[ \frac{K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \lambda_1^2} + \frac{K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \lambda_2^2} + \frac{K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \lambda_3^2} \right]$$

$$\Omega_{12}^{2D} = s \left[ \frac{K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\Omega_{13}^{2D} = \left[ \frac{\lambda_1^2 K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3^2 K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\Omega_{14}^{2D} = \frac{1}{s} \left[ \frac{\lambda_1^4 K_0(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^4 K_0(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3^4 K_0(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\Omega_{21}^{2D} = s^2 \left[ \frac{K_1(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \lambda_1^3} + \frac{K_1(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \lambda_2^3} + \frac{K_1(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \lambda_3^3} \right]$$

$$\Omega_{22}^{2D} = s \left[ \frac{K_1(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \lambda_1} + \frac{K_1(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \lambda_2} + \frac{K_1(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \lambda_3} \right]$$

$$\Omega_{23}^{2D} = \left[ \frac{\lambda_1 K_1(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2 K_1(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3 K_1(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\Omega_{24}^{2D} = \frac{1}{s} \left[ \frac{\lambda_1^3 K_1(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^3 K_1(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3^3 K_1(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\Omega_{25}^{2D} = s \left( \frac{\lambda_1 K_1(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2 K_1(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3 K_1(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right)$$

$$\Omega_{26}^{2D} = \left( \frac{\lambda_1^3 K_1(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^3 K_1(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3^3 K_1(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right)$$

$$\Omega_{27}^{2D} = s^2 \left( \frac{K_1(\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \lambda_1} + \frac{K_1(\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \lambda_2} + \frac{K_1(\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \lambda_3} \right)$$

**solutions 3D :**

$$\Omega_{11}^{3D} = s^2 \left[ \frac{\exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \lambda_1^2} + \frac{\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \lambda_2^2} + \frac{\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \lambda_3^2} \right]$$

$$\Omega_{12}^{3D} = s \left[ \frac{\exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\Omega_{13}^{3D} = \left[ \frac{\lambda_1^2 \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^2 \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3^2 \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\Omega_{14}^{3D} = \frac{1}{s} \left[ \frac{\lambda_1^4 \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^4 \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3^4 \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\Omega_{21}^{3D} = s^2 \left[ \frac{(1 + r\lambda_1) \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \lambda_1^4} + \frac{(1 + r\lambda_2) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \lambda_2^4} + \frac{(1 + r\lambda_3) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \lambda_3^4} \right]$$

$$\Omega_{22}^{3D} = s \left[ \frac{(1 + r\lambda_1) \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \lambda_1^2} + \frac{(1 + r\lambda_2) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \lambda_2^2} + \frac{(1 + r\lambda_3) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \lambda_3^2} \right]$$

$$\Omega_{23}^{3D} = \left[ \frac{(1 + r\lambda_1) \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{(1 + r\lambda_2) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{(1 + r\lambda_3) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\Omega_{24}^{3D} = \frac{1}{s} \left[ \frac{(1 + r\lambda_1) \lambda_1^2 \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{(1 + r\lambda_2) \lambda_2^2 \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{(1 + r\lambda_3) \lambda_3^2 \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\Omega_{25}^{3D} = s \left[ \frac{(1 + r\lambda_1) \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{(1 + r\lambda_2) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{(1 + r\lambda_3) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\Omega_{26}^{3D} = \left[ \frac{(1 + r\lambda_1) \lambda_1^2 \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} + \frac{(1 + r\lambda_2) \lambda_2^2 \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} + \frac{(1 + r\lambda_3) \lambda_3^2 \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \right]$$

$$\Omega_{27}^{3D} = s^2 \left[ \frac{(1 + r\lambda_1) \exp(-\lambda_1 r)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \lambda_1^2} + \frac{(1 + r\lambda_2) \exp(-\lambda_2 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \lambda_2^2} + \frac{(1 + r\lambda_3) \exp(-\lambda_3 r)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \lambda_3^2} \right]$$

## C.5 Fonctions intermédiaires $\psi_{kl}^{nD}$

**solutions 2D :**

$$\psi_{11}^{2D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{11}^{2D} \} = \left( \frac{m_4}{m_1} \Lambda_0(\sqrt{m_1}r, t) + \frac{m_5}{m_2} \Lambda_0(\sqrt{m_2}r, t) + \frac{m_6}{m_3} \Lambda_0(\sqrt{m_3}r, t) \right)$$

$$\psi_{12}^{2D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{12}^{2D} \} = \left( m_4 \Lambda_0(\sqrt{m_1}r, t) + m_5 \Lambda_0(\sqrt{m_2}r, t) + m_6 \Lambda_0(\sqrt{m_3}r, t) \right)$$

$$\psi_{13}^{2D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{13}^{2D} \} = \left( m_4 m_1 \Lambda_0(\sqrt{m_1}r, t) + m_5 m_2 \Lambda_0(\sqrt{m_2}r, t) + m_6 m_3 \Lambda_0(\sqrt{m_3}r, t) \right)$$

$$\psi_{14}^{2D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{14}^{2D} \} = \left( m_4 m_1^2 \Lambda_0(\sqrt{m_1}r, t) + m_5 m_2^2 \Lambda_0(\sqrt{m_2}r, t) + m_6 m_3^2 \Lambda_0(\sqrt{m_3}r, t) \right)$$

$$\psi_{21}^{2D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{21}^{2D} \} = \left( \frac{m_4}{m_1 \sqrt{m_1}} \Lambda_1(\sqrt{m_1}r, t) + \frac{m_5}{m_2 \sqrt{m_2}} \Lambda_1(\sqrt{m_2}r, t) + \frac{m_6}{m_3 \sqrt{m_3}} \Lambda_1(\sqrt{m_3}r, t) \right)$$

$$\psi_{22}^{2D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{22}^{2D} \} = \left( \frac{m_4}{\sqrt{m_1}} \Lambda_1(\sqrt{m_1}r, t) + \frac{m_5}{\sqrt{m_2}} \Lambda_1(\sqrt{m_2}r, t) + \frac{m_6}{\sqrt{m_3}} \Lambda_1(\sqrt{m_3}r, t) \right)$$

$$\psi_{23}^{2D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{23}^{2D} \} = \left( m_4 \sqrt{m_1} \Lambda_1(\sqrt{m_1}r, t) + m_5 \sqrt{m_2} \Lambda_1(\sqrt{m_2}r, t) + m_6 \sqrt{m_3} \Lambda_1(\sqrt{m_3}r, t) \right)$$

$$\psi_{24}^{2D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{24}^{2D} \} = \left( m_4 m_1 \sqrt{m_1} \Lambda_1(\sqrt{m_1}r, t) + m_5 m_2 \sqrt{m_2} \Lambda_1(\sqrt{m_2}r, t) + m_6 m_3 \sqrt{m_3} \Lambda_1(\sqrt{m_3}r, t) \right)$$

$$\psi_{25}^{2D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{25}^{2D} \} = \left( m_4 \sqrt{m_1} \Lambda_2(\sqrt{m_1}r, t) + m_5 \sqrt{m_2} \Lambda_2(\sqrt{m_2}r, t) + m_6 \sqrt{m_3} \Lambda_2(\sqrt{m_3}r, t) \right)$$

$$\psi_{26}^{2D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{26}^{2D} \} = \left( m_4 m_1 \sqrt{m_1} \Lambda_2(\sqrt{m_1}r, t) + m_5 m_2 \sqrt{m_2} \Lambda_2(\sqrt{m_2}r, t) + m_6 m_3 \sqrt{m_3} \Lambda_2(\sqrt{m_3}r, t) \right)$$

$$\psi_{27}^{2D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{27}^{2D} \} = \left( \frac{m_4}{\sqrt{m_1}} \Lambda_2(\sqrt{m_1}r, t) + \frac{m_5}{\sqrt{m_2}} \Lambda_2(\sqrt{m_2}r, t) + \frac{m_6}{\sqrt{m_3}} \Lambda_2(\sqrt{m_3}r, t) \right)$$

avec

$$m_4 = \frac{1}{(m_2 - m_1)(m_3 - m_1)}$$

$$m_5 = \frac{1}{(m_1 - m_2)(m_3 - m_2)}$$

$$m_6 = \frac{1}{(m_1 - m_3)(m_2 - m_3)}$$

**solutions 3D :**

$$\psi_{11}^{3D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{11}^{3D} \} = \left( \frac{1}{m_4 m_1} \Lambda_0(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{1}{m_5 m_2} \Lambda_0(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{1}{m_6 m_3} \Lambda_0(\sqrt{m_3} r, t) \right)$$

$$\psi_{12}^{3D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{12}^{3D} \} = \left( \frac{1}{m_4} \Lambda_0(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{1}{m_5} \Lambda_0(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{1}{m_6} \Lambda_0(\sqrt{m_3} r, t) \right)$$

$$\psi_{13}^{3D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{13}^{3D} \} = \left( \frac{m_1}{m_4} \Lambda_0(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{m_2}{m_5} \Lambda_0(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{m_3}{m_6} \Lambda_0(\sqrt{m_3} r, t) \right)$$

$$\psi_{14}^{3D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{14}^{3D} \} = \left( \frac{m_1^2}{m_4} \Lambda_0(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{m_2^2}{m_5} \Lambda_0(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{m_3^2}{m_6} \Lambda_0(\sqrt{m_3} r, t) \right)$$

$$\psi_{21}^{3D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{21}^{3D} \} = \left( \frac{1}{m_4 m_1^2} \Lambda_1(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{1}{m_5 m_2^2} \Lambda_1(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{1}{m_6 m_3^2} \Lambda_1(\sqrt{m_3} r, t) \right) \\ + \left( \frac{r}{m_4 \sqrt{m_1^3}} \Lambda_3(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{r}{m_5 \sqrt{m_2^3}} \Lambda_3(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{r}{m_6 \sqrt{m_3^3}} \Lambda_3(\sqrt{m_3} r, t) \right)$$

$$\psi_{22}^{3D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{22}^{3D} \} = \left( \frac{1}{m_4 m_1} \Lambda_1(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{1}{m_5 m_2} \Lambda_1(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{1}{m_6 m_3} \Lambda_1(\sqrt{m_3} r, t) \right) \\ + \left( \frac{r}{m_4 \sqrt{m_1}} \Lambda_3(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{r}{m_5 \sqrt{m_2}} \Lambda_3(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{r}{m_6 \sqrt{m_3}} \Lambda_3(\sqrt{m_3} r, t) \right)$$

$$\psi_{23}^{3D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{23}^{3D} \} = \left( \frac{1}{m_4} \Lambda_1(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{1}{m_5} \Lambda_1(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{1}{m_6} \Lambda_1(\sqrt{m_3} r, t) \right) \\ + \left( \frac{r \sqrt{m_1}}{m_4} \Lambda_3(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{r \sqrt{m_2}}{m_5} \Lambda_3(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{r \sqrt{m_3}}{m_6} \Lambda_3(\sqrt{m_3} r, t) \right)$$

$$\psi_{24}^{3D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{24}^{3D} \} = \left( \frac{m_1}{m_4} \Lambda_1(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{m_2}{m_5} \Lambda_1(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{m_3}{m_6} \Lambda_1(\sqrt{m_3} r, t) \right) \\ + \left( \frac{r \sqrt{m_1^3}}{m_4} \Lambda_3(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{r \sqrt{m_2^3}}{m_5} \Lambda_3(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{r \sqrt{m_3^3}}{m_6} \Lambda_3(\sqrt{m_3} r, t) \right)$$

$$\psi_{25}^{3D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{25}^{3D} \} = \left( \frac{1}{m_4} \Lambda_0(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{1}{m_5} \Lambda_0(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{1}{m_6} \Lambda_0(\sqrt{m_3} r, t) \right) \\ + \left( \frac{r \sqrt{m_1}}{m_4} \Lambda_2(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{r \sqrt{m_2}}{m_5} \Lambda_2(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{r \sqrt{m_3}}{m_6} \Lambda_2(\sqrt{m_3} r, t) \right)$$

$$\psi_{26}^{3D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{26}^{3D} \} = \left( \frac{m_1}{m_4} \Lambda_0(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{m_2}{m_5} \Lambda_0(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{m_3}{m_6} \Lambda_0(\sqrt{m_3} r, t) \right) \\ + \left( \frac{r \sqrt{m_1^3}}{m_4} \Lambda_2(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{r \sqrt{m_2^3}}{m_5} \Lambda_2(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{r \sqrt{m_3^3}}{m_6} \Lambda_2(\sqrt{m_3} r, t) \right)$$

$$\psi_{27}^{3D} = \mathcal{L}^{-1} \{ \Omega_{27}^{3D} \} = \left( \frac{1}{m_4 m_1} \Lambda_0(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{1}{m_5 m_2} \Lambda_0(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{1}{m_6 m_3} \Lambda_0(\sqrt{m_3} r, t) \right) \\ + \left( \frac{r}{m_4 \sqrt{m_1}} \Lambda_2(\sqrt{m_1} r, t) + \frac{r}{m_5 \sqrt{m_2}} \Lambda_2(\sqrt{m_2} r, t) + \frac{r}{m_6 \sqrt{m_3}} \Lambda_2(\sqrt{m_3} r, t) \right)$$

avec

$$m_4 = \frac{1}{(m_2 - m_1)(m_3 - m_1)}$$

$$m_5 = \frac{1}{(m_1 - m_2)(m_3 - m_2)}$$

$$m_6 = \frac{1}{(m_1 - m_3)(m_2 - m_3)}$$

# ANNEXE D

## Triplet de courbes $SA$ , $SA_R$ et $SR$ pour les différentes vallées vides

Le triplet de courbes  $SA$ ,  $SA_R$  et  $SR$  pour les différentes vallées vides sont comme suit :

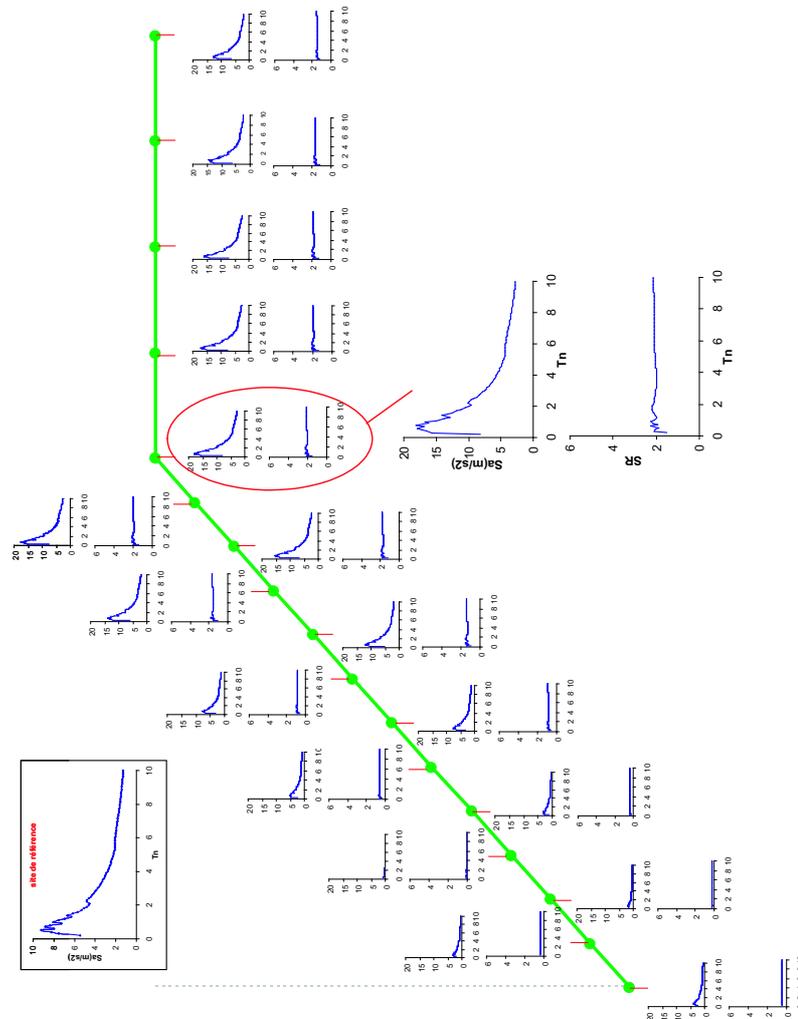


Figure D.1 — Les courbes  $SA$ ,  $SA_R$  et  $SR$  pour les stations d'observation le long de la vallée triangulaire avec la hauteur  $H = 100m$

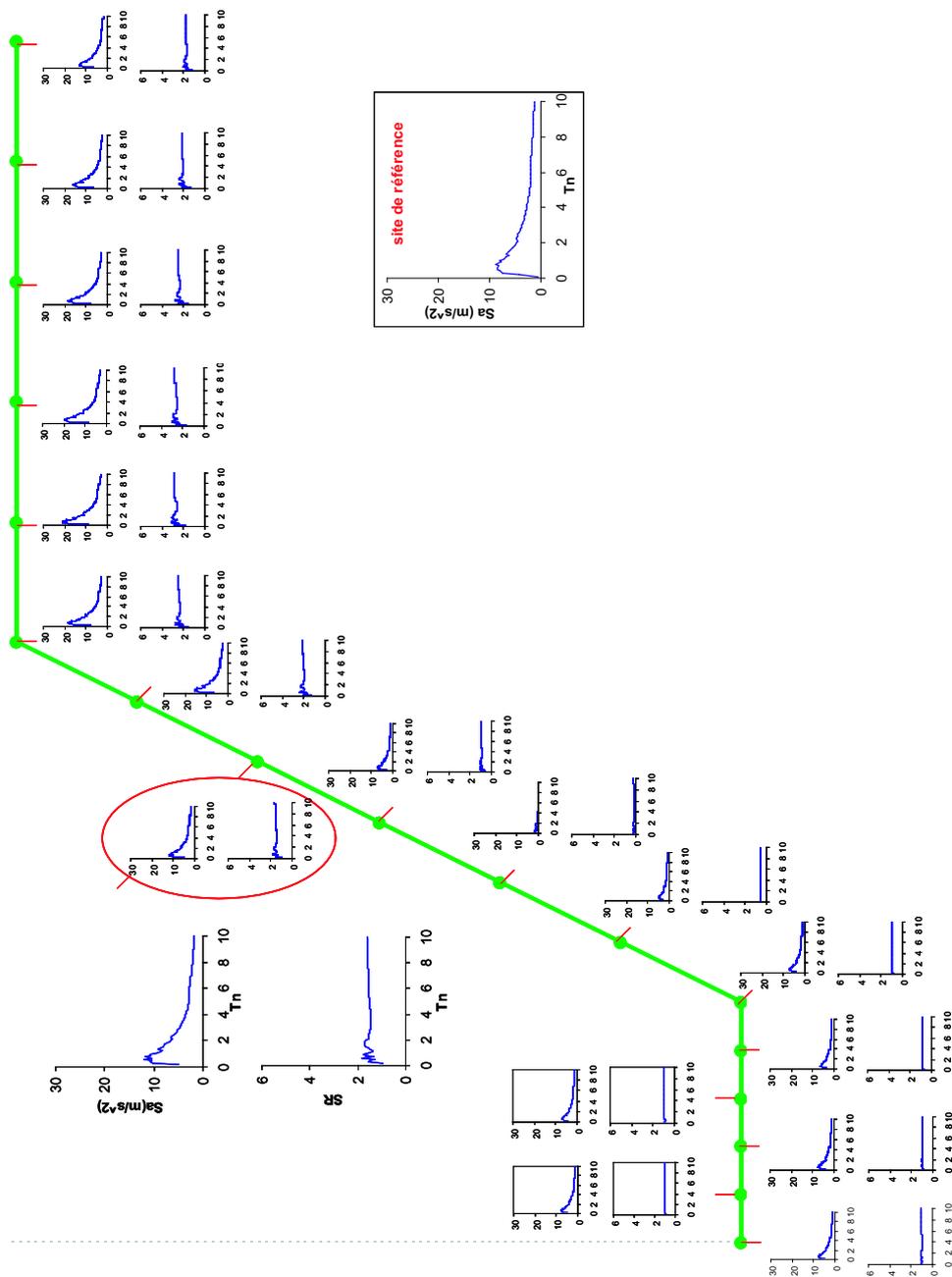


Figure D.2 — Les courbes  $SA$ ,  $SA_R$  et  $SR$  pour les stations d'observation le long de la vallée trapézoïdale avec la hauteur  $H = 100m$

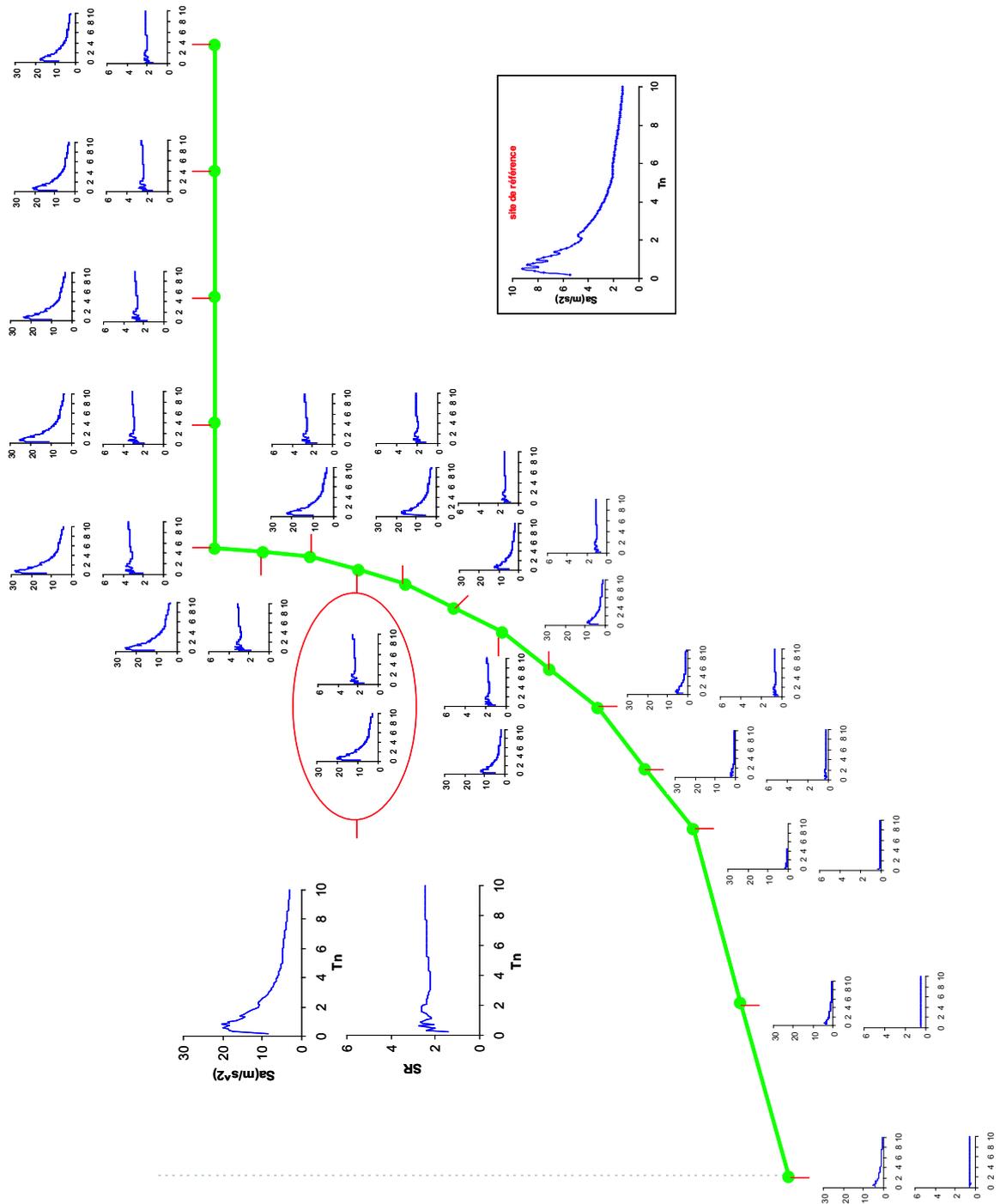


Figure D.3 — Les courbes  $SA$ ,  $SA_R$  et  $SR$  pour les stations d'observation le long de la vallée ellipsoïdale avec la hauteur  $H = 100m$

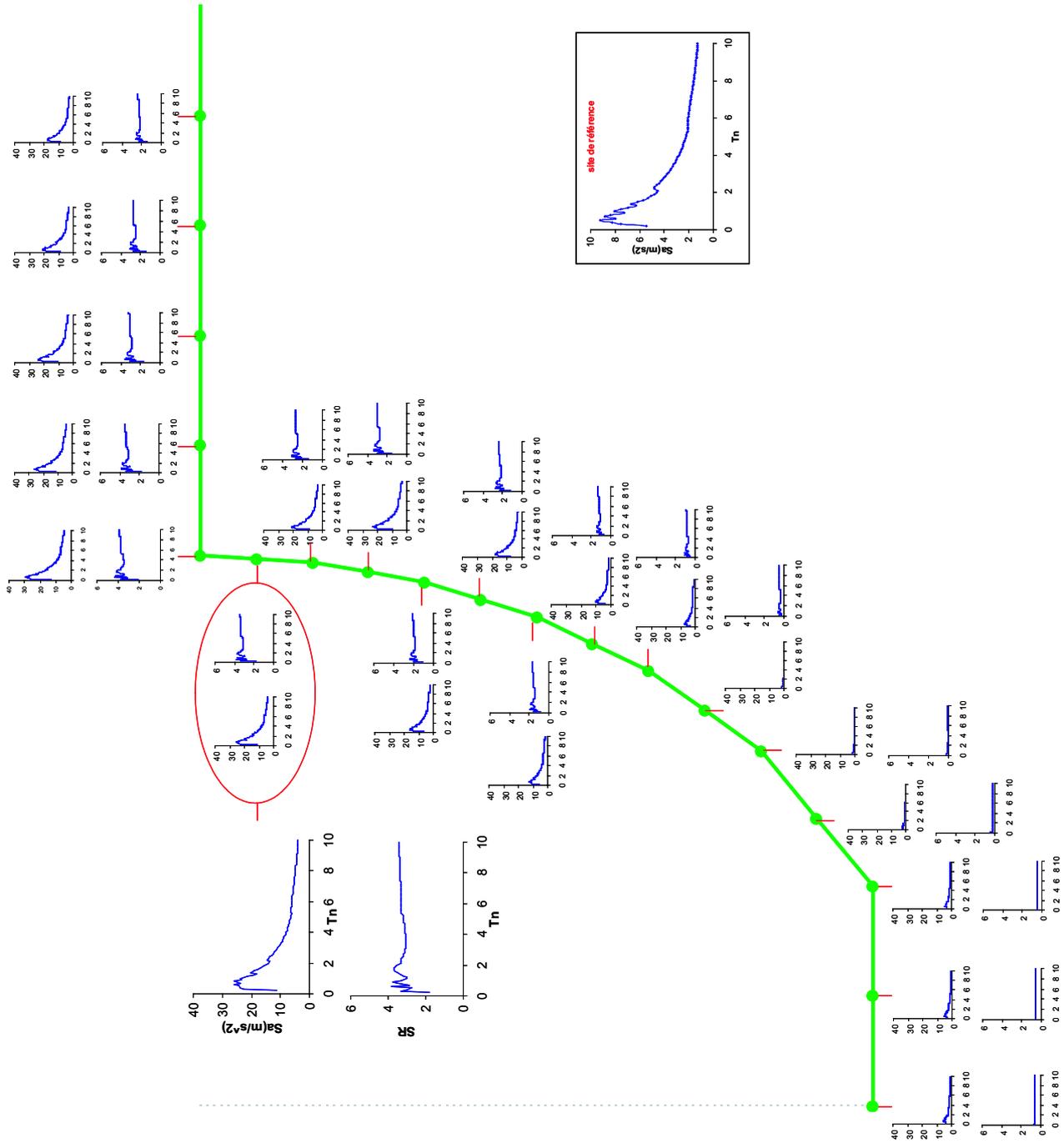


Figure D.4 — Les courbes  $SA$ ,  $SA_R$  et  $SR$  pour les stations d'observation le long de la vallée *ellipsoïdale tronquée* avec la hauteur  $H = 100m$

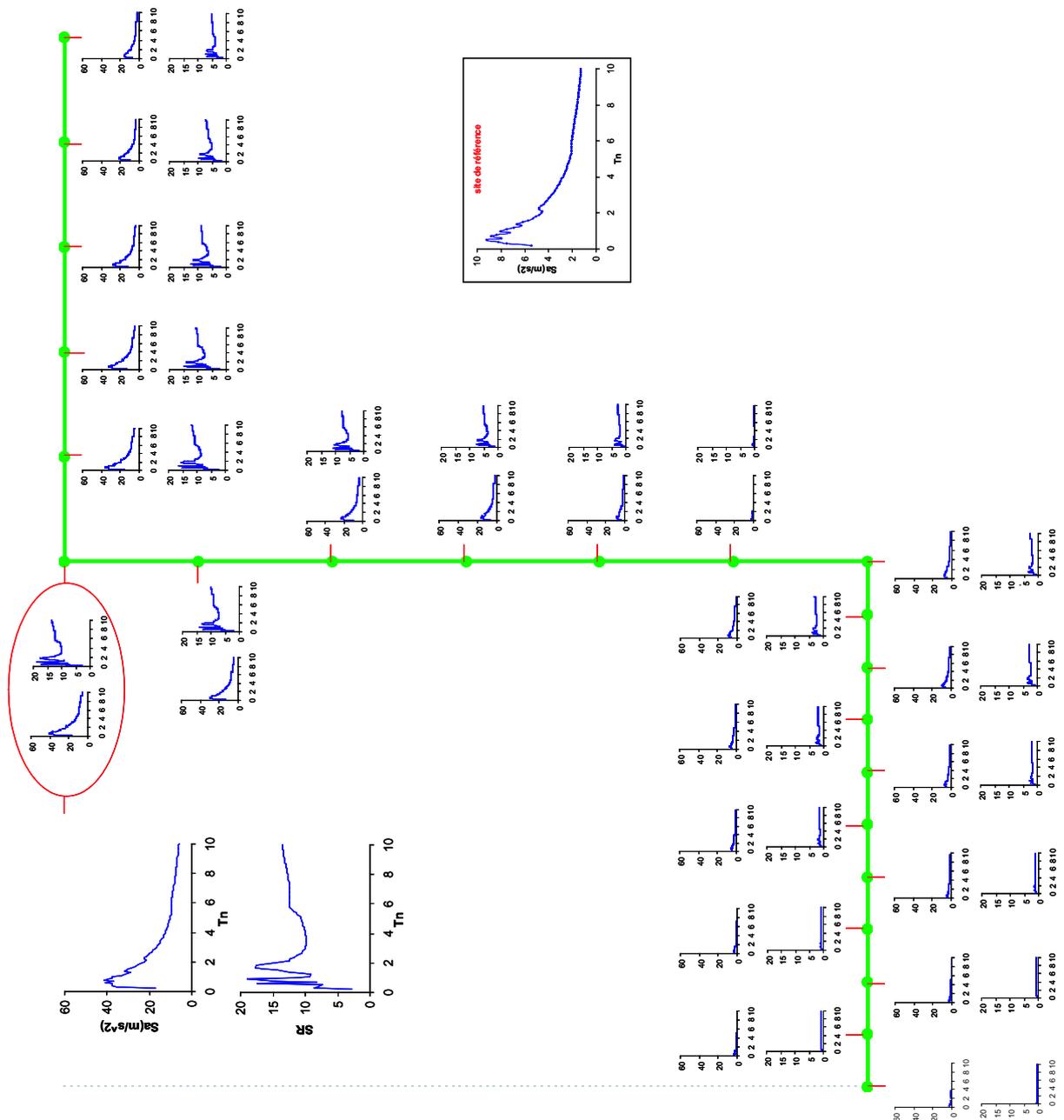


Figure D.5 — Les courbes  $SA$ ,  $SA_R$  et  $SR$  pour les stations d'observation le long de la vallée rectangulaire avec la hauteur  $H = 100m$



# Triplet de courbes $SA$ , $SA_R$ et $SR$ pour les différentes vallées pleines

Le triplet de courbes  $SA$ ,  $SA_R$  et  $SR$  pour les différentes vallées pleines sont comme suit :

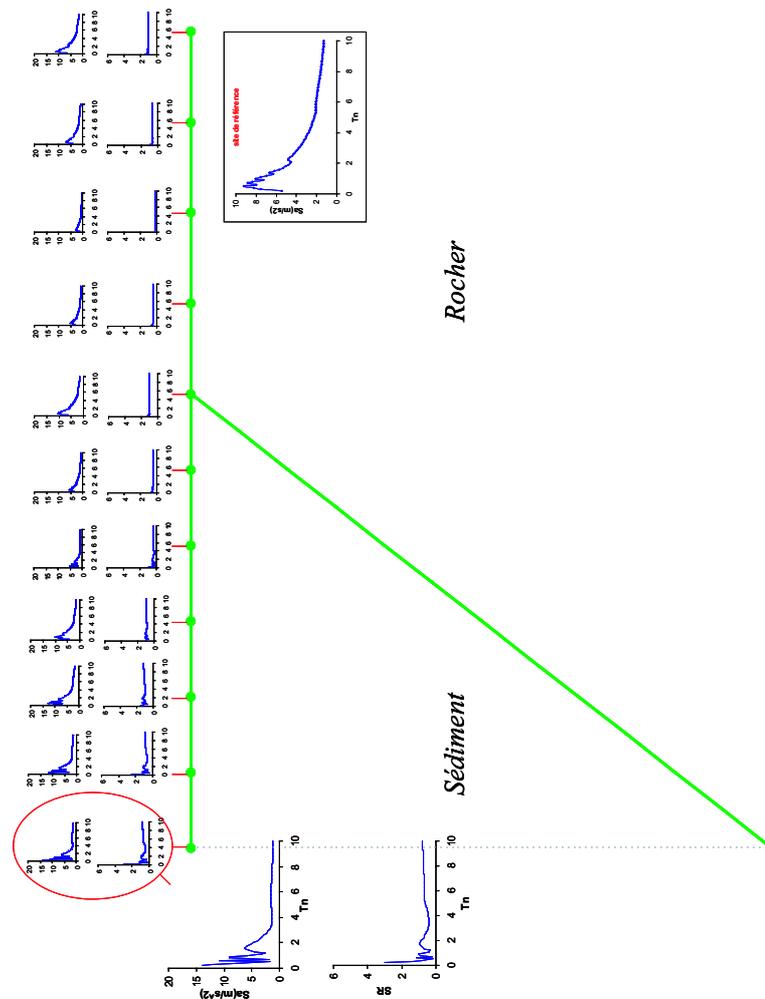


Figure E.1 — Les courbes  $SA$ ,  $SA_R$  et  $SR$  pour les stations d'observation sur la surface de la vallée pleine *triangulaire* avec la hauteur  $H = 100m$

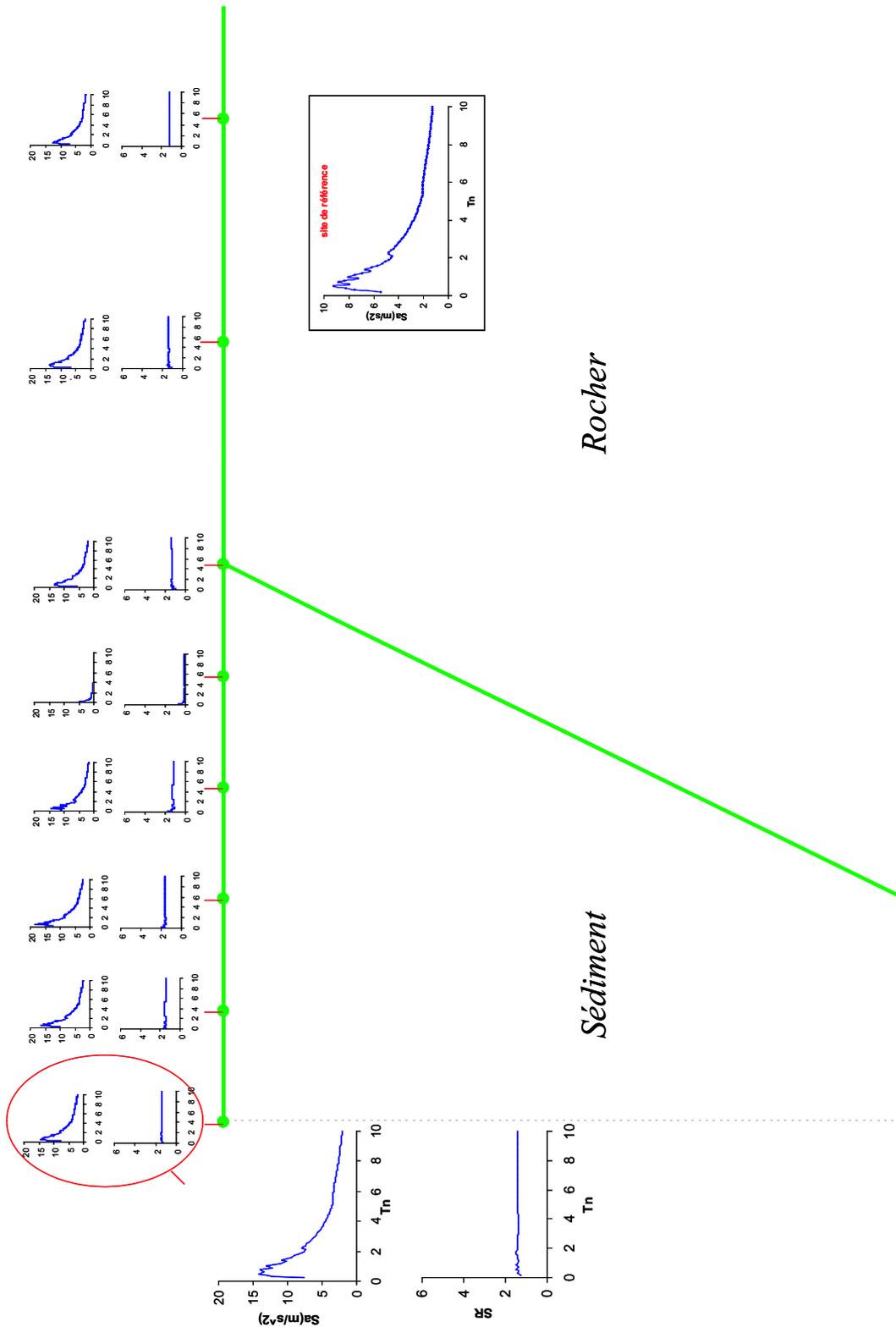


Figure E.2 — Les courbes  $SA$ ,  $SA_R$  et  $SR$  pour les stations d'observation sur la surface de la vallée pleine trapézoïdale avec la hauteur  $H = 100\text{m}$

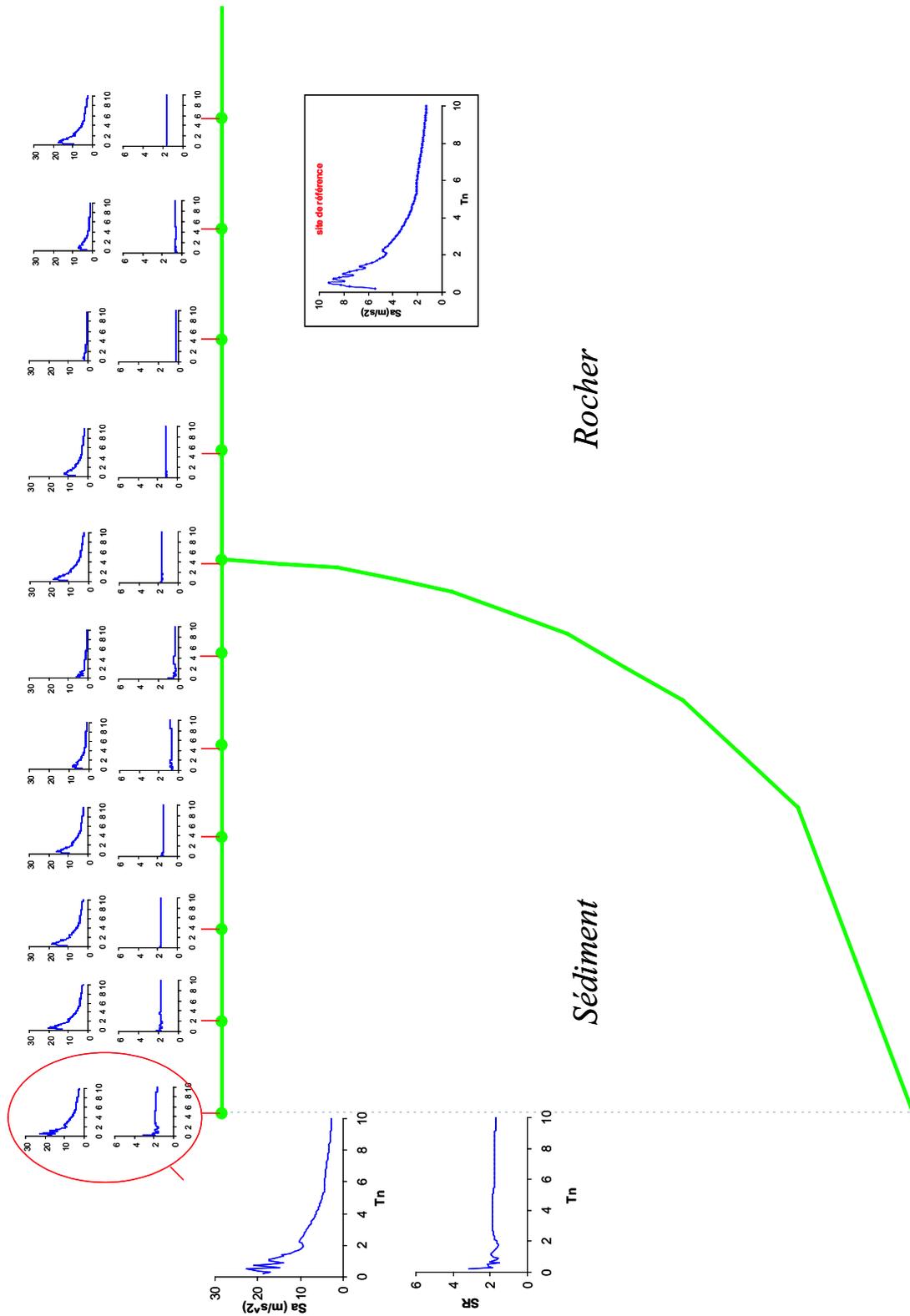


Figure E.3 — Les courbes  $SA$ ,  $SA_R$  et  $SR$  pour les stations d'observation sur la surface de la vallée pleine ellipsoïdale avec la hauteur  $H = 100m$

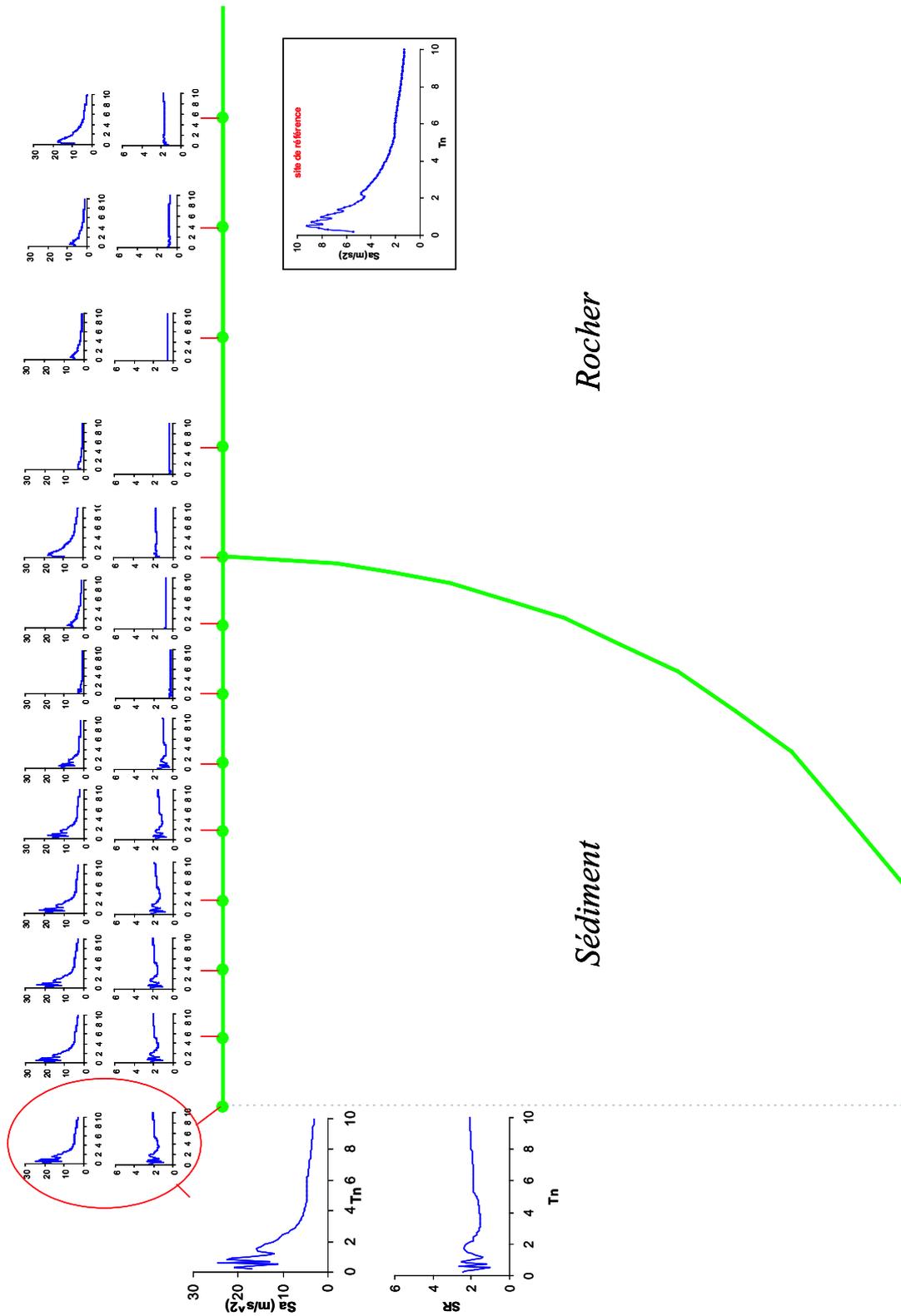


Figure E.4 — Les courbes  $SA$ ,  $SA_R$  et  $SR$  pour les stations d'observation sur la surface de la vallée pleine *ellipsoïdale tronquée* avec la hauteur  $H = 100m$

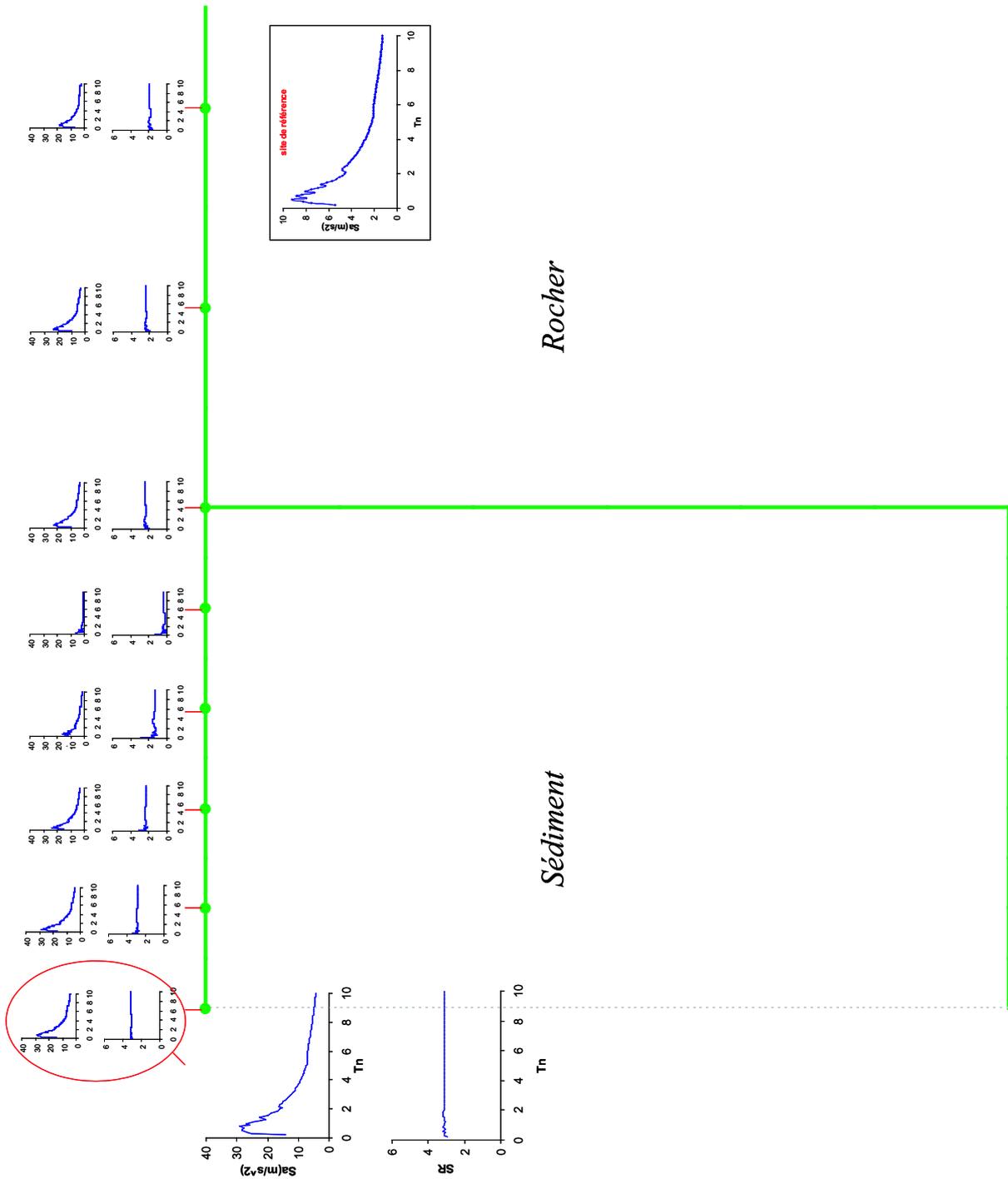


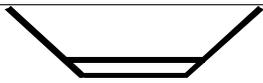
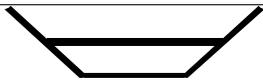
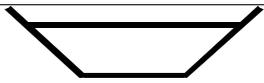
Figure E.5 — Les courbes  $SA$ ,  $SA_R$  et  $SR$  pour les stations d'observation sur la surface de la vallée pleine rectangulaire avec la hauteur  $H = 100m$



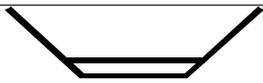
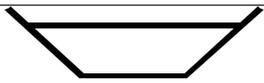
## Valeurs du paramètre

## $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$ pour les différentes configurations étudiées

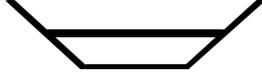
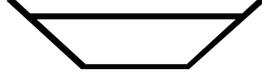
Les valeurs du paramètre  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$  pour les différentes configurations étudiées sont comme suit :

| H(m) |  |  |  |  |
|------|---|---|--|---|
| 20   | 5311  | 12298   | 20963  | 31305   |
| 40   | 10621   | 24597   | 41926  | 62610   |
| 60   | 15932   | 36895   | 62889  | 93915   |
| 100  | 26553   | 61492   | 104816   | 156525  |

**Tableau F.1** — Valeurs du paramètre  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$  pour des vallées trapézoïdales de diverses dimensions et taux de remplissage pour  $\alpha = 0.2$

| H(m) |  |  |  |  |
|------|---|---|--|---|
| 20   | 2752  | 6373  | 10863  | 16222   |
| 40   | 5504  | 12746   | 21726  | 32445   |
| 60   | 8256  | 19119   | 32590  | 48667   |
| 100  | 13760   | 31865   | 54316  | 81112   |

**Tableau F.2** — Valeurs du paramètre  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$  pour des vallées trapézoïdales de diverses dimensions et taux de remplissage pour  $\alpha = 0.3$

| H(m) |  |  |  |  |
|------|---|---|--|---|
| 20   | 1878  | 4348  | 7412   | 11068   |
| 40   | 3755  | 8696  | 14823  | 22136   |
| 60   | 5633  | 13044   | 22235  | 33204   |
| 100  | 9388  | 21741   | 37058  | 55340   |

**Tableau F.3** — Valeurs du paramètre  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$  pour des vallées trapézoïdales de diverses dimensions et taux de remplissage pour  $\alpha = 0.4$

| H(m) |  |  |  |  |
|------|---|---|--|---|
| 20   | 1344  | 3111  | 5303   | 7920  |
| 40   | 2687  | 6223  | 10607  | 15839   |
| 60   | 4031  | 9334  | 15910  | 23759   |
| 100  | 6718  | 15556   | 26517  | 39598   |

**Tableau F.4** — Valeurs du paramètre  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$  pour des vallées trapézoïdales de diverses dimensions et taux de remplissage pour  $\alpha = 0.5$

| H(m) |  |  |  |  |
|------|---|---|--|---|
| 20   | 1398  | 5590  | 12578  | 22361   |
| 40   | 2795  | 11180   | 25156  | 44721   |
| 60   | 4193  | 16771   | 37734  | 67082   |
| 100  | 6988  | 27951   | 62889  | 111803  |

**Tableau F.5** — Valeurs du paramètre  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$  pour des vallées triangulaires de diverses dimensions et taux de remplissage pour  $\alpha = 0.2$

| H(m) |  |  |  |  |
|------|---|---|--|---|
| 20   | 724   | 2897  | 6518   | 11587   |
| 40   | 1448  | 5794  | 13036  | 23175   |
| 60   | 2173  | 8691  | 19554  | 34762   |
| 100  | 3621  | 14484   | 32590  | 57937   |

**Tableau F.6** — Valeurs du paramètre  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$  pour des vallées triangulaires de diverses dimensions et taux de remplissage pour  $\alpha = 0.3$

| H(m) |  |  |  |  |
|------|---|---|--|---|
| 20   | 494   | 1976  | 4447   | 7906  |
| 40   | 988   | 3953  | 8894   | 15811   |
| 60   | 1482  | 5929  | 13341  | 23717   |
| 100  | 2471  | 9882  | 22235  | 39528   |

**Tableau F.7** — Valeurs du paramètre  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$  pour des vallées triangulaires de diverses dimensions et taux de remplissage pour  $\alpha = 0.4$

| H(m) |  |  |  |  |
|------|---|---|--|---|
| 20   | 354   | 1414  | 3182   | 5657  |
| 40   | 707   | 2828  | 6364   | 11314   |
| 60   | 1061  | 4243  | 9546   | 16971   |
| 100  | 1768  | 7071  | 15910  | 28284   |

**Tableau F.8** — Valeurs du paramètre  $S_1/\alpha\sqrt{\alpha}$  pour des vallées triangulaires de diverses dimensions et taux de remplissage pour  $\alpha = 0.5$



---

# Bibliographie

- [1] ABRAMOWITZ, M., AND STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards, Washington DC, 1965.
- [2] AHMAD, S., AND BANERJEE, P. Multi-domain BEM for two-dimensional problems of elastodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26 (1988), 891–911.
- [3] AITCHISON, G. D. Relationships of moisture stress and effective stress functions in unsaturated soils. In *Pore Pressure and Suction in Soils* (Butterworths, London, UK., 1960), pp. 47–52.
- [4] AKI, K. Local site effect on ground motion. *Von Thun, J.L. (Ed.), Earthquake Engineering and Soil Dynamics. II. Recent Advances in Ground Motion Evaluation, American Society of Civil Engineering Geotechnical Special Publication 20* (1988), 103–155.
- [5] AKI, K., AND IRIKURA, K. Characterization and mapping of earthquake shaking for seismic zonation. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Seismic Zonation, EERI* (1991), vol. 1, pp. 61–96.
- [6] ALONSO, E., BATTLE, F., GENS, A., AND LLORET, A. Consolidation analysis of partially saturated soils. Application to earth dam construction. *Proceedings of the 6th International Conference on Numerical Methods in Geotechnics. Innsbruck* (1988), 1303–1308.
- [7] ALONSO, E., GENS, A., AND JOSA, A. A constitutive model for partially saturated soils. *Géotechnique* 40(3) (1990), 405–430.
- [8] ALTERMAN, Z. S., AND KARAL, F. C. Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods. *Bulletin of the Seismological Society of America* 58 (1968), 367–398.
- [9] ANTES, H. A boundary element procedure for transient wave propagations in two-dimensional isotropic elastic media. *Finite Elements in Analysis and Design* 1 (1985), 313–322.

- [10] ANTES, H., AND JÄGER, M. *Computational Mechanics, Theory and Applications*, vol. 2. Heidelberg, Springer-Verlag, 1995, ch. On stability and efficiency of 3D acoustic BE procedures for moving noise sources, pp. 3056–3061.
- [11] ANTES, H., AND PANAGIOTOPOULOS, P. The boundary integral approach to static and dynamic contact problems : Equality and inequality methods. In *International Series of Numerical Mathematics*, vol. 108. Birkhäuser, Basel, 1992.
- [12] ANTES, H., SCHANZ, M., AND ALVERMANN, S. Dynamic analyses of frames by integral equations for bars and timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration* 276(3-5) (2004), 807–836.
- [13] ARBHABHIRAMA, A., AND KRIDAKORN, C. Steady downward flow to a water table. *Water Resources Research* 4 (1968), 1249–1257.
- [14] ARSON, C. Amplifications sismiques dues aux effets de site. rapport de projet d’initiation à la recherche effectué sous la direction de B. Gatmiri, CERMES, ENPC, 2005.
- [15] ARSON, C. *Etude théorique et numérique de l’endommagement thermo-hydro-mécanique des milieux poreux non saturés (Supervised by B. Gatmiri)*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech, 2009.
- [16] ASHFORD, S., SITAR, N., LYSMER, J., AND DENG, N. Topographic effects on the seismic response of steep slopes. *Bulletin of the seismological society of America* 87 (1997), 701–709.
- [17] AVERJANOV, S. F. About permeability of subsurface soils in case of incomplete saturation. *Engineering Collections* 7 (1950).
- [18] BADMUS, T., CHENG, A.-D., AND GRILLI, S. A Laplace-transform-based three-dimensional BEM for poroelasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (1) (1993), 67–85.
- [19] BANERJEE, P., AND AHMAD, S. *Advanced Topics in Boundary Element Analysis*. AMD-Vol. 72, ASME, New York, 1985, ch. Advanced three-dimensional dynamic analysis boundary element methods, pp. 65–82.
- [20] BANERJEE, P., AHMAD, S., AND WANG, H. *Industrial Applications of Boundary Element Methods, Developments in Boundary Element Methods*. Elsevier, London, 1989, ch. Advanced development of BEM for elastic and inelastic dynamic analysis of solids, pp. 77–117.
- [21] BANERJEE, P., WILSON, R., AND MILLER, N. *Advanced Topics in Boundary Element Analysis*. AMD-Vol. 72, ASME, New York, 1985, ch. Development of a large BEM system for three-dimensional inelastic analysis, pp. 1–20.
- [22] BANERJEE, P. K. *The Boundary Element Methods in Engineering*. McGraw-Hill Book Company : England, 1994.

- [23] BANNERJEE, P. K., AND BUTTERFIELD, R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. McGraw-Hill, London, New York, 1981.
- [24] BARD, P. Y., AND BOUCHON, M. the two-dimensional resonance of sediment-filled valleys. *Bulletin of the Seismological Society of America* 75 (1985), 519–541.
- [25] BARDEN, L. Consolidation of compacted and unsaturated clays. *Géotechnique* 15(3) (1965), 267–286.
- [26] BARDEN, L., MADEDOR, A., AND SIDES, G. Volume change characteristics of unsaturated clays. *Journal of soil mechanics and foundation engineering, ASCE* 95 (1969), 33–51.
- [27] BARDEN, L., AND PAVLAKIS, G. Air and water permeability of compacted and unsaturated cohesive soil. *Journal of Soil Science* 22(3) (1971), 302–318.
- [28] BATHE, K. J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [29] BEER, G. *Programming the Boundary Element Method*. Wiley : England, 2001.
- [30] BEER, G., AND WATSON, J. *Introduction to finite and boundary element methods for engineers*. John Wiley & son, 1992.
- [31] BERRYMAN, J. G. *Wave Propagation and Inversion*. SIAM, Philadelphia, 1992, ch. Waves In Partially Saturated Porous Media, pp. 1–25.
- [32] BESKOS, D. Boundary element methods in dynamic analysis. *Applied Mechanics Reviews* 40 (1987), 1–23.
- [33] BESKOS, D. Boundary element methods in dynamic analysis : Part II (1986-1996). *Applied Mechanics Reviews* 50(3) (1997), 149–197.
- [34] BESSASON, B., AND KAYNIA, A. Site amplification in lava rock on soft sediments. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 22 (2002), 525–540.
- [35] BIELAK, J., MACCAMY, R. C., MCGHEE, D. S., AND BARRY, A. Unified symmetric bemfem for site effects on ground motion-SH waves. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 117(10) (1991), 2265–2285.
- [36] BIOT, M. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics* 12 (1941a), 155–164.
- [37] BIOT, M. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal of Applied Physics* 26 (1955), 182–185.
- [38] BIOT, M. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material. *Journal of Applied Mechanics* 23(1) (1956), 91–96.
- [39] BIOT, M. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I : Low frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America* 28 (1956), 168–178.

- [40] BIOT, M. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics* 33 (1962), 1482–1498.
- [41] BIOT, M. A. The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II : Higher frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America* 28(2) (1956), 179–191.
- [42] BIOT, M. A. Theory of finite deformations of porous solids. *Indiana University Mathematics Journal* 21 (1972), 597–620.
- [43] BISHOP, A. W. The principle of effective stress. *Tek. Ukebl* 39 (1959), 859–863.
- [44] BISHOP, A. W., ALPAN, I., BLIGHT, G. E., AND DONALD, I. B. Factors controlling the strength of partly saturated cohesive soils. In *Conference Shear Strength Cohesive Soils. American Society of Civil Engineers, New York* (1960), pp. 503–532.
- [45] BISHOP, A. W., AND BLIGHT, G. E. Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils. *Géotechnique* 13(3) (1963), 177–197.
- [46] BISHOP, A. W., AND DONALD, I. B. The experimental study of partly saturated soil in the triaxial apparatus. In *5th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Paris* (Paris, 1961), vol. 1, pp. 13–21.
- [47] BLIGHT, G. E. A study of effective stresses for volume change. In *moisture equilibria and moisture changes in soils beneath covered areas* (Sydney, Butterworths, 1965), pp. 259–269.
- [48] BOLZON, G., SCHREFLER, B., AND ZIENKIEWICZ, O. Elastoplastic soil constitutive laws generalized to partially saturated states. *Geotechnique* 46(2) (1996), 279–289.
- [49] BONNET, G. Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range. *Journal of the Acoustical Society of America* 82(5) (1987), 1758–1762.
- [50] BOORE, D. M. *Methods in computational physics*, vol. 11. B. A. Bolt. Academic Press, New York, 1972, ch. Finite difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials, pp. 1–37.
- [51] BOUCHON, M., AND AKI, K. Discrete wavenumber representation of seismic source wavefield. *Bulletin of the Seismological Society of America* 67 (1977), 259–277.
- [52] BOUTIN, C., BONNET, G., AND BARD, P. Y. Green functions and associated sources in infinite and stratified media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 90 (1987), 521–550.
- [53] BOUYOUCOS, G. J. Effect of temperature on thermomovement of water vapor and capillary moisture in soils. *Journal of Agricultural Research* 5 (1915), 141–172.
- [54] BOWEN, R. *Theory of mixtures*. Vol.III, Academic Press, New York, 1976.
- [55] BOWEN, R. Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. *International Journal of Engineering Science* 18 (1980), 1129–1148.

- [56] BOWEN, R. M. Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. *International Journal of Engineering Science* 20(6) (1982), 697–735.
- [57] BREBBIA, C., AND DOMINGUEZ, J. *Boundary Element : an Introductory Course*. Computational Mechanics ; 2 edition, 1992.
- [58] BROOKS, R. H., AND COREY, A. T. Hydraulic properties of porous media. *Hydrology Papers, Colorado State University* 3 (1964).
- [59] BRUTSAERT, N. The permeability of a porous medium determined from certain probability laws for pore size distribution. *Water Resources Research* 4 (1968), 425–434.
- [60] BUCKINGHAM, J. B. Studies of the movement of soil moisture. *U.S.D.A. Bureau of soils* 38 (1907).
- [61] BURLAND, J. B. Effective stress in partly saturated soils. *Géotechnique* 14 (1964), 64–68.
- [62] BURLAND, J. B. Some aspects of the mechanical behavior of partly saturated soils. In *moisture equilibria and moisture changes in soils beneath covered areas* (Sydney, Butterworths, 1965), pp. 270–278.
- [63] BURRIDGE, R., AND KELLER, J. Poroelasticity equations derived from microstructure. *Journal of the Acoustical Society of America* 70 (1981), 1140–1146.
- [64] BURRIDGE, R., AND VARGAS, C. A. The fundamental solution in dynamic poroelasticity. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 58 (1979), 61–90.
- [65] CARCIONE, J., CAVALLINI, F., SANTOS, J., RAVAZZOLI, C., AND GAUZELLINO, P. Wave propagation in partially saturated porous media : simulation of a second slow wave. *Wave Motion* 39(3) (2004), 227–240.
- [66] CASSEL, D. K., NIELSEN, D. R., AND BIGGAR, J. Soil-water movement in response to imposed temperature gradients. *Soil Science Society of America Journal* 33 (1969), 493–500.
- [67] CHAUDOUET, A., AND AFZALI, M. *CASTOR 3D : three dimensional boundary element analysis computer code, Boundary Elements*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [68] CHAVEZ-GARCIA, F., SANCHEZ, L., AND HATZFELD, D. Topographic site effects and HVNR. a comparison between observation and theory. *Bulletin of the Seismological Society of America* 86 (1996), 1559–1573.
- [69] CHAVEZ-GARCIA, F. J., AND FACCIOLI, E. Complex site effects and building codes : Making the leap. *Journal of seismology* 4 (2000), 23–40.
- [70] CHEN, J. Time domain fundamental solution to Biot’s complete equations of poroelasticity : Part I two-dimensional solution. *International Journal of Solids and Structures* 31(10) (1994), 1447–1490.

- [71] CHEN, J. Time domain fundamental solution to Biot's complete equations of poroelasticity : Part II three-dimensional solution. *International Journal of Solids and Structures* 31(2) (1994), 169–202.
- [72] CHEN, J. *Fundamental Solutions and Boundary Element Formulations for Dynamic Problems of Poroelasticity and Thermoelasticity*. PhD thesis, University at Buffalo, State University of New York, September 1992.
- [73] CHEN, J., AND DARGUSH, G. Boundary element method for dynamic poroelastic and thermoelastic analyses. *International Journal of Solids and Structures* 32(15) (1995), 2257–2278.
- [74] CHENG, A.-D., BADMUS, T., AND BESKOS, D. Integral equation for dynamic poroelasticity in frequency domain with BEM solution. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 117(5) (1991), 1136–1157.
- [75] CHENG, A.-D., AND DETOURNAY, E. A direct boundary element method for plane strain poroelasticity. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 12(5) (1988), 551–572.
- [76] CHENG, A.-D., AND DETOURNAY, E. On singular integral equation and fundamental solutions of poroelasticity. *International Journal of Solids and Structures* 35(34-35) (1998), 4521–4555.
- [77] CHENG, A.-D., AND LIGGETT, J. Boundary integral equation method for linear poroelasticity with applications to fracture propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 20(2) (1984), 279–296.
- [78] CHENG, A.-D., AND LIGGETT, J. Boundary integral equation method for linear poroelasticity with applications to soil consolidation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 20 (2) (1984), 255–278.
- [79] CHENG, A.-D., AND PREDELEANU, M. Transient boundary element formulation for linear poroelasticity. *Applied Mathematical Modelling* 11 (1987), 285–390.
- [80] CHENG, A.-D., SIDAURUK, P., AND ABOUSLEIMAN, Y. Approximate inversion of the laplace transform. *Mathematica Journal* 4(2) (1994), 76–82.
- [81] CHILDS, E. C., AND COLLIS-GEORGE, N. The permeability of porous materials. *Proceedings of the Royal Society* 201 (1950), 392–405.
- [82] CLEARY, M. P. Fundamental solutions for a fluid-saturated porous solid. *International Journal of Solids and Structures* 13 (1977), 785–806.
- [83] CODA, H., AND VENTURINI, W. Three-dimensional transient BEM analysis. *Computers & Structures* 56 (5) (1995), 751–768.
- [84] COLEMAN, B., AND NOLL, W. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 13 (1963), 168–178.

- [85] COLEMAN, J. D. Stress-strain relations for partially saturated soils. *Géotechnique* 12(4) (1962), 348–350.
- [86] COREY, A. T. The interrelation between gas and oil relative permeabilities. *Producer's Monthly* 19(1) (1954).
- [87] COREY, A. T. Measurement of water and air permeability in unsaturated soil. *Proceedings - Soil Science Society of America* 21(1) (1957), 7–10.
- [88] COUSSY, O. *Mechanics of Porous Continua*. Wiley Ltd., New York, 1995.
- [89] COUSSY, O. *Poromechanics*. Wiley Ltd., 2004.
- [90] COUSSY, O., AND DANGLA, P. *Mécanique des sols non saturés*. Hermès, Paris, 2002, ch. Approche énergétique du comportement des sols non saturés, pp. 137–174.
- [91] CRONEY, D., AND COLEMAN, J. D. Soil thermodynamics applied to movement of moisture in road foundation. *7th International Congress for Applied Mechanics Proceedings* 3 (1948), 163–177.
- [92] CRONEY, D., COLEMAN, J. D., AND BLACK, W. P. M. Movement and distribution of water in relation to highway design and performance. *Highway Research Board Special report* 40 (1958), Washington.
- [93] CRUSE, T. An improved boundary integral equation method for three-dimensional elastic stress analysis. *Computer and structure* 4 (1974), 741–754.
- [94] CRUSE, T. A. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem, I. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 22 (1968), 244–259.
- [95] CRUSE, T. A. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem, II. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 22 (1968), 341–355.
- [96] CRUSE, T. A., AND AITHA, R. Non-singular boundary integral equation implementation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (1993), 237–254.
- [97] CUI, Y., AND DELAGE, P. Sols non saturés - applications au calcul des ouvrages. Tech. rep., Techniques de l'Ingénieur, traité Construction, 2003.
- [98] CUI, Y., DELAGE, P., AND SULTAN, N. *Unsaturated soils*, vol. 2. Balkema, Rotterdam, 1995, ch. An elasto-plastic model for compacted soils, pp. 703–709.
- [99] DAKSHANAMURTHY, V., AND FREDLUND, D. G. A mathematical model for predicting moisture flow in an unsaturated soil under hydraulic and temperature gradients. *Water Resources Research* 17(3) (1981), 714–722.
- [100] DARCY, H. *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. Dalmont, Paris, 1856.
- [101] DARGUSH, G., AND BANERJEE, P. A time domain boundary element method for poroelasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 28 (1989), 2423–2449.

- [102] DAVEY, K., AND HINDUJA, S. An improved procedure for solving transient heat conduction problems using the boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 28 (1989), 2293–2306.
- [103] DE BOER, R. *Theory of Porous Media*. Springer : Berlin, 2000.
- [104] DE BOER, R., AND EHLERS, W. A historical review of the formulation of porous media theories. *Acta Mechanica* 74 (1988), 1–8.
- [105] DE BOER, R., AND EHLERS, W. The development of the concept of effective stresses. *Acta Mechanica* 83 (1990), 77–92.
- [106] DE HOOG, F., KNIGHT, J. H., AND STOKES, A. N. An improved method for numerical inversion of laplace transforms. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 3 (1982), 357–366.
- [107] DE VRIES, D. A. Simultaneous transfer of heat and moisture in porous medium. *Transactions of the American Geophysical Union* 39(5) (1958), 909–916.
- [108] DE VRIES, D. A. Thermal properties of soils, the physics of plant environment. *Van Wijk WR ed., North-Holland Pub. Co., Amsterdam 210-235* (1963).
- [109] DEGHAN, K., AND GATMIRI, B. Applying a new fast numerical method to elastodynamic transient kernels in hybrid wave propagation analysis. In *Proceedings 6th Conference on Structural Dynamics-EURODYN, Paris, France* (2005), Millpress, Rotterdam, pp. 1879–1884.
- [110] DELAGE, P., AND CUI, Y. J. *L'eau dans les sols non saturés*. Techniques de l'ingénieur, traité construction, C 301-1, 2000.
- [111] DELESSE, M. Pour déterminer la composition des roches. *Annales des mines* 4(13) (1848), 379–388.
- [112] DERESIEWICZ, H. Effect of boundaries on waves in a thermoelastic solid : Reflection of plane waves from a plane boundary. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8(3) (1960), 164–172.
- [113] DETOURNAY, E., AND CHENG, A. H.-D. *Fundamentals of poroelasticity, vol. II. Comprehensive rock engineering : principles, practice & projects*. Pergamon, 1993, ch. 5, pp. 113–171.
- [114] DIEBELS, S. AND EHLERS, W. Dynamic analysis of a fully saturated porous medium accounting for geometrical and material non-linearities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39 (1996), 81–97.
- [115] DIRKSEN, C. Water movement and frost heaving in unsaturated soil without an external source of water. *Ph.D. Thesis, Cornell University* (1964).
- [116] DOMINGUEZ, J. Dynamic stiffness of rectangular foundations. Tech. rep., Final Rpt., NSF-RANN Grant No. ENV77-18339, Massachusetts Inst. of Technology, Boston, 1978.

- [117] DOMINGUEZ, J. Response of embedded foundations to travelling waves. Tech. rep., Report R78-24, Department of Civil Engineering, MIT, Cambridge, MA, 1978.
- [118] DOMINGUEZ, J. Boundary element approach for dynamic poroelastic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 35(2) (1992), 307–324.
- [119] DUNCAN, J., AND CHANG, C. Y. Non-linear analysis of stress and strain in soils. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, American Society of Civil Engineers* 96(SM5) (1970), 1629–1653.
- [120] DUVAL, A.-M. Utilisation de la méthode du bruit de fond. In *Risques sismiques : aléa et vulnérabilité à différentes échelles* (Paris, France, 21 Novembre 2003), Laboratoire Centrale des Ponts et Chaussées, pp. 37–62.
- [121] EDLEFSEN, N. E., AND ANDERSON, A. B. C. Thermodynamics of soil moisture. *Hilgardia* 15 (1943), 31–288.
- [122] EHLERS, W. Compressible, incompressible and hybrid two-phase models in porous media theories. *ASME : AMD-Vol. 158* (1993), 25–38.
- [123] EHLERS, W., AND KUBIK, J. On finite dynamic equations for fluid-saturated porous media. *Acta Mechanica* 105 (1994), 101–117.
- [124] EWEN, J., AND THOMAS, H. Heating unsaturated medium sand. *Géotechnique* 39(3) (1989), 455–470.
- [125] FACCIOLI, E. Seismic amplification in the presence of geological and topographic irregularities. In *Proceedings of the second International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics, St. Louis, Missouri, Univ. of Missouri-Rolla* (1991), S. Prakash, Ed., pp. 1779–1797.
- [126] FAROUKI, O. T. *Thermal properties of soils*. Trans Tech Publications, Germany, 1986.
- [127] FIEDLER, C. *Boundary Element Technology IX*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1995, ch. A new regularization method for computing interior displacements and stresses in 3D-BEM, pp. 287–297.
- [128] FINN, W. Geotechnical engineering aspects of seismic microzonation. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Seismic Zonation, Stanford, California, Oakland CA* (1991), E.E.R.I., Ed., pp. 199–250.
- [129] FRANKEL, A. Three-dimensional simulations of ground motions in the san bernardino valley, california, for hypothetical earthquakes on the san andreas fault. *Bulletin of the Seismological Society of America* 83 (1993), 1020–1041.
- [130] FREDLUND, D. Second canadian colloquium : Appropriate concepts and technology for saturated soils. *Canadian Geotechnical Journal* 16 (1979), 121–139.
- [131] FREDLUND, D., AND MORGENSTERN, N. Constitutive relation for volume change in unsaturated soils. *Canadian Geotechnical Journal* 13(3) (1976), 261–276.

- [132] FREDLUND, D., N.R., M., AND R.A., W. The shear strength of unsaturated soils. *Canadian Geotechnical Journal* 15(3) (1977), 313–321.
- [133] FREDLUND, D. G., AND RAHARDJO, H. *Soil mechanics for unsaturated soils*. John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [134] GALLIPOLI, D., GENS, A., SHARMA, R., AND VAUNAT, J. An elasto-plastic model for unsaturated soil incorporating the effects of suction and degree of saturation on mechanical behaviour. *Geotechnique* 53(1) (2003), 123–135.
- [135] GARDNER, W. R. Some steady state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water-table. *Soil Science* 85(4) (1958), 228–232.
- [136] GARDNER, W. R. Dynamic aspects of water availability to plants. *Soil Science* 89 (1960), 63–73.
- [137] GATMIRI, B. A simplified finite element analysis of wave-induced effective stress and pore pressures in permeable sea beds. *Géotechnique* 40(1) (1990), 15–30.
- [138] GATMIRI, B. Wave induced stresses and pore pressures in sloping seabeds. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 15(5) (1991), 333–355.
- [139] GATMIRI, B. Evolution du code U-Dam ; description détaillée et mode d’emploi. *Rapport du CERMES, ENPC* (1992).
- [140] GATMIRI, B. Response of cross-anisotropic sea bed to ocean waves. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE* 118(9) (1992), 1295–1314.
- [141] GATMIRI, B. Validation du code U-Dam. *Rapport du CERMES, ENPC* (1993).
- [142] GATMIRI, B. Surfaces d’états et déformation des barrages en remblai avec drains sous pression négative. *Rapport du CERMES, ENPC* (1994).
- [143] GATMIRI, B. Analysis of fully coupled behaviour of unsaturated porous medium under stress, suction and temperature gradient. *Final report of CERMES-EDF* (1997).
- [144] GATMIRI, B. Thermo-hydro-mécanique des sols saturés et non saturés dans le code-aster. *Rapport du CERMES, ENPC* (2000).
- [145] GATMIRI, B., AND ARSON, C. Seismic site effects by an optimized 2D BE/FE method II. quantification of site effects in two-dimensional sedimentary valleys. *Soil dynamics and earthquake engineering* 28 (2008), 646–661.
- [146] GATMIRI, B., AND ARSON, C.  $\theta$ -stock, a powerful tool for thermohydrromechanical behaviour and damage modelling of unsaturated porous media. *Computers and Geotechnics* 35(6) (2008), 890–915.
- [147] GATMIRI, B., ARSON, C., AND NGUYEN, K. Seismic site effects by an optimized 2D BE/FE method I. theory, numerical optimization and application to topographical irregularities. *Soil dynamics and earthquake engineering* 28 (2008), 632–645.

- [148] GATMIRI, B., AND DELAGE, P. AND NANDA, A. Consolidation des sols non saturés : simulation des essais au laboratoire-application aux barrages en remblai. *Rapport du CERMES-ENPC* (1992).
- [149] GATMIRI, B., AND DELAGE, P. A new void ratio state surface formulation for the nonlinear elastic constitutive modelling of unsaturated soil : Code U-Dam. *Proceedings of the 1st International conference on Unsaturated soils, Paris, France* (1995), 1049–1056.
- [150] GATMIRI, B., DELAGE, P., AND CERROLAZA, M. Udam : A powerful finite element software for the analysis of unsaturated porous media. *Advances in Engineering Software* 29(1) (1998), 29–43.
- [151] GATMIRI, B., AND HOOR, A. Effect of excavation on the thermo-hydro-mechanical behaviour of a geological barrier. *Physics and Chemistry of the Earth* 32 (2007), 947–956.
- [152] GATMIRI, B., AND JABBARI, E. Three-dimensional time-independent green functions for unsaturated soils. In *Proceedings of the 5th International Conference on Boundary Element Techniques, Lisbon* (2004), pp. 223–227.
- [153] GATMIRI, B., AND JABBARI, E. Two-dimensional time-independent Green functions for unsaturated soils. In *Proceedings of the 5th International Conference on Boundary Element Techniques, Lisbon* (2004), pp. 217–221.
- [154] GATMIRI, B., AND JABBARI, E. Time-domain Green's functions for unsaturated soils. part I : Two-dimensional solution. *International Journal of Solids and Structures* 42 (2005), 5971–5990.
- [155] GATMIRI, B., AND JABBARI, E. Time-domain Green's functions for unsaturated soils. part II : Three-dimensional solution. *International Journal of Solids and Structures* 42 (2005), 5991–6002.
- [156] GATMIRI, B., AND JENAB-VOSSOUGH, B. Effects of heat convection and phase changes on heat and fluid transfer in unsaturated porous media. In *Heat Transfer* (2000).
- [157] GATMIRI, B., AND KAMALIAN, M. Transient BIE and fundamental solutions of dynamic poroelasticity. In *7th International Symposium Numerical Models in Geomechanics (NUMOG VII), Graz, Austria* (1999), P. Pande and Schweiger, Eds., pp. 249–254.
- [158] GATMIRI, B., AND KAMALIAN, M. On the fundamental solution of dynamic poroelastic boundary integral equations in time domain. *International Journal of Geomechanics* 2(4) (2002), 381–398.
- [159] GATMIRI, B., LE PENSE, S., AND MAGHOUL, P. A multi-scale seismic response of two-dimensional sedimentary valleys due to the combined effects of topography and geology. *Journal of Multiscale Modelling, submitted* (2010).

- [160] GATMIRI, B., MAGHOUL, P., AND ARSON, C. Site-specific spectral response of seismic movement due to geometrical and geotechnical characteristics of sites. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 29 (2009), 51–70.
- [161] GATMIRI, B., MAGHOUL, P., AND DUHAMEL, D. Two-dimensional transient fundamental solutions of multiphase porous media in frequency and time domains. *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010), 595–610.
- [162] GATMIRI, B., AND NGUYEN, K. V. Time 2D fundamental solution for saturated porous media with incompressible fluid. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 21(3) (2005), 119–132.
- [163] GAWIN, D., P., B., AND B.A., S. Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 20 (1995), 969–987.
- [164] GEISER, F., LALOU, L., AND VULLIET, L. Modelling the behaviour of unsaturated silt. experimental evidence and theoretical approaches in unsaturated soils. In *Proceedings of an International Workshop, Trento* (2000), pp. 155–175.
- [165] GÉLI, L., BARD, P., AND JULLIEN, B. the effect of topography on earthquake ground motion : a review and new results. *Bulletin of the Seismological Society of America* 78 (1988), 42–63.
- [166] GENS, A. Effective stresses. First MUSE School : Fundamentals of Unsaturated Soils, Barcelona, 1-2 June, 2005.
- [167] GENS, A. *Unsaturated Soils*. Balkema, Paris, 1995, ch. Constitutive modelling : application to compacted soils, pp. 1179–1200.
- [168] GENS, A., ALONSO, E., AND DELAGE, P. Computer modeling and applications to unsaturated soils. *Unsaturated Soil Engineering Practice, Geotechnical Special Publication* (ed. Houston, S.L. and Fredlund, D.G.), Reston : ASCE 68 (1997), 299–330.
- [169] GERAMINEGAD, M., AND SAXENA, S. A coupled thermoelastic model for saturated-unsaturated porous medium. *Géotechnique* 36(4) (1986), 539–550.
- [170] GOUDA, K. R. S., AND WINTERKORN, H. F. Theoretical and experimental exploration of the practical possibilities of electroosmosis. *Final Report on Beach Sand Stabilization Research* 5 (1949).
- [171] GRAY, W. G., AND HASSANIZADEH, S. M. Unsaturated flow theory including interfacial phenomena. *Water Resources Research* 27(8) (1991), 1855–1863.
- [172] GREEN, A., AND NAGHDI, P. A dynamical theory of interacting continua. *International journal of engineering Science* 3 (1965), 231–241.
- [173] GUIGIANI, M., AND CASALINI, P. Direct computation of cauchy principal value integrals in advanced boundary elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24 (1987), 1711–1720.

- [174] GURR, C. G., MARSHALL, T. J., AND HUTTON, J. T. Movement of water in soil due to a temperature gradient. *Soil Science* 74 (1952), 335–345.
- [175] HABIBAGAH, K. Temperature effect and the concept of effective void ratio. *Indian Geotechnical Journal* 1 (1977), 14–34.
- [176] HARDIN, B., AND DRNEVICH, V. Shear modulus and damping in soils : Design equations and curves. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, American Society of Civil Engineers* 98(SM7) (1972), 667–692.
- [177] HASSANIZADEH, S. M., AND GRAY, W. G. . General conservation equations for multiphase systems : 1. averaging procedure. *Advances in Water Resources* 2 (1979), 131–144.
- [178] HASSANIZADEH, S. M., AND GRAY, W. G. . General conservation equations for multiphase systems : 3. constitutive theory for porous media flow. *Advances in Water Resources* 3 (1980), 25–40.
- [179] HASSANIZADEH, S. M., AND GRAY, W. G. Mechanics and thermodynamics of multiphase flow in porous media including interphase boundaries. *Advances in Water Resources* 13(4) (1990), 169–186.
- [180] HEMMATI, S., GATMIRI, B., CUI, Y., AND VINCENT, M. Implementation of a tree roots water uptake model in a finite element code tetra-stock. In *17th International conference on soil mechanics and geotechnical engineering, Egypt* (2009).
- [181] HILLEL, D. *Fundamentals of soil physics*. Academic Press, Inc., New York, 1980.
- [182] HÖRMANDER, L. *Linear Partial Differential Operators*. Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [183] HOULSBY, G. The work input to an unsaturated granular material. *Géotechnique* 47(1) (1997), 193–196.
- [184] HUTTER, K., LALOU, L., AND VULLIET, L. Thermodynamically based mixture models of saturated and unsaturated soils. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials* 4 (1999), 295–338.
- [185] IRMAY, S. On the hydraulic conductivity of unsaturated soils, transactions. *American Geophysical Union* 35 (1954), 785–943.
- [186] JABBARI, E., AND GATMIRI, B. Thermo-poro-elastostatic green functions for unsaturated soils. *International Journal of Computer Modelling in Engineering and Sciences* 18(1) (2007), 31–43.
- [187] JENAB-VOSSOUGH, B. *Etude numérique de la modélisation thermo-élasto-plastique des sols non saturés (Supervised by B. Gatmiri)*. PhD thesis, 2000.
- [188] JENNINGS, J. A revised effective stress law for use in the prediction of the behavior of unsaturated soils. In *Pore Pressures and Suctions in Soils* (Butterworths, London, UK., 1961), pp. 26–30.
- [189] JENNINGS, J. E., AND BURLAND, J. B. Limitations to the use of effective stresses in partly saturated soils. *Géotechnique* 12(2) (1962), 125–144.

- [190] JOMMI, C. Remarks on the constitutive modelling of unsaturated soils. experimental evidence and theoretical approaches in unsaturated soils. In *Proceedings of an International Workshop, Trento* (2000), pp. 139–153.
- [191] JOMMI, C., AND DI PRISCO, C. Un semplice approccio teorico per la modellazione del comportamento meccanico di terreni granulari parzialmente saturi. In *Conference Il ruolo dei fluidi nei problemi di ingegneria geotecnica, Mondovi* (1994), pp. 167–188.
- [192] JOSA, A., BALMACEDA, A., GENS, A., AND ALONSO, E. An elastoplastic model for partially saturated soil exhibiting a maximum of collapse. In *3rd international conference on computational plasticity, Barcelona* (1992), vol. 1, pp. 815–826.
- [193] KAMALIAN, M. *Time Domain Two-Dimensional Hybrid FEM/BEM Dynamic Analysis Of Nonlinear Saturated Porous Media (Supervised by B. Gatmiri)*. PhD thesis, Civil Engineering Department, School of Engineering, Tehran University, 2001.
- [194] KAMALIAN, M., GATMIRI, B., SOHRABI-BIDAR, A., AND KHALAJ, A. Amplification pattern of 2D semi-sine shaped valleys subjected to vertically propagating incident waves. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 23(9) (2007), 871–887.
- [195] KAMALIAN, M., JAFARI, M., SOHRABI, A., RAZMKHAH, A., AND GATMIRI, B. Time-domain two-dimensional site response analysis of non-homogeneous topographic structures by a hybrid FE/BE method. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering* 26(8) (2006), 753–765.
- [196] KAMALIAN, M., JAFARI, M., SOHRABI BIDAR, A., AND RAZMKHAH, A. Seismic response of 2D semi-sine shaped hills to vertically propagating incident waves : Amplification patterns and engineering applications. *Earthquake Spectra* 24(2) (2008), 405–430.
- [197] KARABALIS, D., AND RIZOS, D. *Boundary Element Techniques in Geomechanics*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993, ch. Dynamic Analysis of 3-D Foundations, pp. 177–208.
- [198] KAWASE, H. Time-domain response of a semi-circular canyon for incident SV, P, and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method. *Bulletin of the Seismological Society of America* 78 (1988), 1415–1423.
- [199] KAYE, G. W. C., AND LABY, T. H. *Tables of physical and chemical constants*. 1973.
- [200] KAYNIA, A. M., AND BANERJEE, P. K. Fundamental solutions of Biot's equations of dynamic poroelasticity. *International Journal of Engineering Science* 31(5) (1993), 817–830.
- [201] KHALILI, N., GEISER, F., AND BLIGHT, G. E. Effective stress in unsaturated soils : review with new evidence. *International Journal of Geomechanics* 4(2) (2004), 115–126.
- [202] KHALILI, N., AND KHABBAZ, M. A unique relationship for  $X$  for the determination of the shear strength of unsaturated soils. *Géotechnique* 48(5) (1998), 681–687.

- [203] KING, J. L., AND TUCKER, B. E. Observed variations of earthquake motion over a sediment-filled valley. *Bulletin of the seismological society of america* 74 (1984), 137–152.
- [204] KOHGO, Y., NAKANO, M., AND MIYAZAKI, T. Theoretical aspects of constitutive modelling for unsaturated soils. *Soils and Foundations* 33(4) (1993), 49–63.
- [205] KOVACS, G. Seepage hydraulic. *Elsevier, Amsterdam* (1981).
- [206] KRISCHER, D., AND ROHANALTER, H. Warmelertung und dampfdiffusion in feuchten gutern. *Ver. Dt. Ing. Forschungsh* (1940).
- [207] KUPRADZE, V. *Potential Methods in the Theory of Elasticity*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.
- [208] KUPRADZE, V., GEGELIA, T., BASHELEISHVILI, M., AND BURCHULADZE, T. *Three-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity*. North-Holland, Netherlands, 1979.
- [209] LACHAT, J. C. *A further development of the boundary integral technique for elastostatics*. PhD thesis, University Of Southampton, 1975.
- [210] LACHAT, J. C., AND WATSON, J. O. Effective numerical treatment of boundary integral equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 10 (1976), 991–1006.
- [211] LAMBE, T. W., AND WHITMAN, R. V. *Soil mechanics*. John Wiley & Sons : Inc., New York., 1969.
- [212] LEBEDEFF, A. F. The movement of ground and soil waters. *Proceedings of the 1st International Congress of Soil science I* (1927), 459–494.
- [213] LEBRUN, B., HATZFELD, D., BARD, P., AND BOUCHON, M. Experimental study of the ground motion on a large scale topographic hill at kitherion (Greece). *Journal of Seismology* 3 (1999), 1–15.
- [214] LEE, V. W. A note on the scattering of elastic plane waves by a hemispherical canyon. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 1 (1982), 122–129.
- [215] LEWIS, R., AND SCHREFLER, B. *The Finite Element Method in the Deformation and Consolidation of Porous Media*. Wiley, Chichester., 1987.
- [216] LI, X., AND ZIENKIEWICZ, O. C. Multiphase flow in deforming porous media and finite element solutions. *Computers and Structures* 45(2) (1992), 211–227.
- [217] LI, X. S. Tensorial nature of suction in unsaturated granular soil. In *16th ASCE Engineering Mechanics Conference. July 16-18, 2003, University of Washington, Seattle* (2003).
- [218] LIANG, J., BA, Z., AND LEE, V. Diffraction of plane SV waves by a shallow circular-arc canyon in a saturated poroelastic half-space. *Soil dynamics and earthquake engineering* 26 (2006), 582–610.

- [219] LLORET, A., AND ALONSO, E. State surfaces for partially saturated soils. *Proceedings 11th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, San Francisco 2* (1985), 557–562.
- [220] LLORET, A., AND ALONSO, E. E. Consolidation of unsaturated soils including swelling and collapse behaviour. *Géotechnique* 30(4) (1980), 449–477.
- [221] LORET, B., AND KHALILI, N. An effective stress elastic-plastic model for unsaturated porous media. *Mechanics of Materials* 34 (2002), 97–116.
- [222] LUBICH, C. Convolution quadrature and discretized operational calculus, I. *Numerische Mathematik* 52 (1988), 129–145.
- [223] LUBICH, C. Convolution quadrature and discretized operational calculus, II. *Numerische Mathematik* 52 (1988), 413–425.
- [224] LUBICH, C. On the multistep time discretization of linear initial-boundary value problems and their boundary integral equations. *Numerische Mathematik* 67 (1994), 365–390.
- [225] LUBICH, C., AND SCHNEIDER, R. Time discretisation of parabolic boundary integral equations. *Numerische Mathematik* 63 (1992), 455–481.
- [226] LUNARDINI, V. J. *Heat transfer with freezing and thawing*. Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [227] LUZON, F., RAMIREZ, L., SANCHEZ-SESMA, F., AND POSADAS, A. Simulation of the seismic response of sedimentary basins with vertical constant-gradient velocity for incident SH waves. *Pure and applied geophysics* 161 (2004), 1533–1547.
- [228] LYSMER, J., AND DRAKE, L. A. the propagation of Love waves across nonhorizontally layered structures. *Bulletin of the Seismological Society of America* 61 (1971), 1233–1252.
- [229] LYSMER, J., AND KUHLEMAYER, R. Finite dynamic model for infinite media. *J. Eng. Mech. ASCE* 95 (1969), 859–877.
- [230] MACLEAN, D. J., AND M., G. P. Moisture movement occurring in soil due to the existence of a temperature gradient. *Road research Lab., D.S.I.R. England Note RN/761*.
- [231] MAGHOUL, P., GATMIRI, B., AND DUHAMEL, D. Two-dimensional thermo-poro-mechanic fundamental solution for unsaturated soils. In *9th International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques, Seville, Spain, 9-11 July* (2008), pp. 371–380.
- [232] MAGHOUL, P., GATMIRI, B., AND DUHAMEL, D. 3D transient fundamental solution of multiphase porous media under heating. In *4th Biot Conference on Poromechanics, New York, USA, 8-10 June* (2009), pp. 911–916.
- [233] MAGHOUL, P., GATMIRI, B., AND DUHAMEL, D. Boundary integral equations in frequency domain for the dynamic behaviour analysis of unsaturated soils. In *10th International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques, Athens, Greece, 22-24 July* (2009).

- [234] MAGHOUL, P., GATMIRI, B., AND DUHAMEL, D. Boundary integral formulation and two-dimensional fundamental solutions for dynamic behaviour analysis of unsaturated soils. *International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering* (2009), Submitted.
- [235] MAGHOUL, P., GATMIRI, B., AND DUHAMEL, D. Transient boundary integral equations of unsaturated poroelastic media under heating. In *1st International Symposium on Computational Geomechanics (ComGeo I), Juan-les-Pins, France, 29 April-1 May 2009* (2009), pp. 476–485.
- [236] MAGHOUL, P., GATMIRI, B., AND DUHAMEL, D. A boundary element formulation based on the convolution quadrature method for the dynamic behaviour analysis of the unsaturated soils. *Journal of Multiscale Modeling, submitted for publication* (2010).
- [237] MAGHOUL, P., GATMIRI, B., AND DUHAMEL, D. A boundary element formulation based on the convolution quadrature method for the quasi-static behaviour analysis of the unsaturated soils. In *11th International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques, Berlin, Germany, 12-14 July* (2010).
- [238] MAGHOUL, P., GATMIRI, B., AND DUHAMEL, D. Three-dimensional fundamental solution for the dynamic behaviour analysis of multiphase porous media. In *4th European Conference on Computational Mechanics, Paris, France, 16-21 May* (2010).
- [239] MAGHOUL, P., GATMIRI, B., AND DUHAMEL, D. Three dimensional transient thermo-hydro-mechanical fundamental solutions of unsaturated soils. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 34 (2010), 297–329.
- [240] MAGHOUL, P., GATMIRI, B., AND DUHAMEL, D. Two-dimensional fundamental solution for the dynamic behaviour analysis of multiphase porous media. In *5th International Conference on Unsaturated soils, Barcelona, Spain, 6-8 September* (2010).
- [241] MAKRA, K., CHAVEZ-GARCIA, F. J., RAPTAKIS, D., AND PITILAKIS, K. Parametric analysis of the seismic response of a 2D sedimentary valley : implications for code implementations of complete site effects. *Soil dynamics and earthquake engineering* 25 (2005), 303–315.
- [242] MANOLIS, G., AND BESKOS, D. Integral formulation and fundamental solutions of dynamic poro-elasticity and thermoelasticity. *Acta Mechanica* 76 (1989), 89–104.
- [243] MANOLIS, G., AND BESKOS, D. Corrections and additions to the paper "integral formulation and fundamental solutions of dynamic poroelasticity and thermoelasticity". *Acta Mechanica* 83 (1990), 223–226.
- [244] MANSUR, W., AND BREBBIA, C. A. *Boundary Elements*. Springer-Verlag, Berlin, 1983, ch. Transient elastodynamics using a time-stepping technique, pp. 677–698.
- [245] MANSUR, W. J. *A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method*. PhD thesis, University of Southampton, 1983.

- [246] MANSUR, W. J., CARRER, J. A. M., AND SIQUEIRA, E. F. N. Time discontinuous linear traction approximation in time-domain BEM scalar wave propagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 42(4) (1998), 667–683.
- [247] MARTIN, G. R., AND DOBRY, R. Earthquake site response and seismic code provisions. *NCEER Bulletin* 8(4) (1994), 1–6.
- [248] MATYAS, E. L. Air and water permeability of compacted soils. permeability and capillary of soils. *ASTM STP 417 American Society for Testing and Materials* 2 (1967), 160–175.
- [249] MATYAS, E. L., AND RADHAKRISHNA, H. S. Volume change characteristics of partially saturated soils. *Géotechnique* 18(4) (1968), 432–448.
- [250] MI, Y., AND ALIABADI, M. H. A Taylor expansion algorithm for integration of 3D near-hypersingular integrals. *Communications in Applied Numerical Methods in Engineering* 12 (1996), 51–62.
- [251] MILLY, P. C. D. Moisture and heat transport in hysteretic, inhomogeneous porous media : A matric heat-based formulation and a numerical model. *Water Resources Research* 18(3) (1982), 489–498.
- [252] MITCHELL, J. K., AND SOGA, K. *Fundamentals of Soil Behaviour*. Wiley, New York, 2005.
- [253] MODARESSI, A., AND ABOU-BEKR, N. A. unified approach to model the behavior of saturated and unsaturated soils. *Computer Methods and Advances in Geomechanics. Balkema : Morgantown* (1994), 1507–1513.
- [254] MOHAMED, A. M. O., YONG, R. N., AND CHEUNG, S. C. H. Temperature dependence of soil water potential. *ASTM Geotechnical Testing Journal* 15(4) (1992), 330–339.
- [255] MOSSESIAN, T., AND DRAVINSKI, M. Application of a hybrid method for scattering of P, SV, and Rayleigh waves by near-surface irregularities. *Bulletin of the Seismological Society of America* 77 (1987), 1784–1803.
- [256] MUALEM, Y. Hysteretic models for prediction of the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resources Research* 12 (6) (1976), 1248–1254.
- [257] MURALEETHARAN, K. K., AND WEI, C. F. Dynamic behavior of unsaturated porous media : Governing equations using the theory of mixtures with interfaces (TMI). *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 23 (1999), 1579–1608.
- [258] MURALEETHARAN, K. K., AND WEI, C. F. U-DYSAC2 :unsaturated dynamic soil analysis code for 2-dimensional problems. *Computer Code, University of Oklahoma, Norman* (1999b).
- [259] NAKAMURA, Y. A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using microtremor on the ground surface. In *Quarterly Report of Railway Technical Research Institute (RTRI)*, vol. 30. 1989.

- [260] NARAYANAN, G., AND BESKOS, D. Numerical operational methods for time-dependent linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 18 (1982), 1829–1854.
- [261] NARDINI, D., AND BREBBIA, C. *Boundary Element Methods in Engineering*. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1982, ch. A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements.
- [262] NGUYEN, K. V. *Etude des effets de site dus aux conditions topographiques et géotechniques par une méthode hybride éléments finis/éléments frontières (supervised by B. Gatmiri)*. PhD thesis, Centre de Recherche et d'Enseignement en Mécanique des Sols (CERMES), ENPC, 2005.
- [263] NGUYEN, K. V., AND GATMIRI, B. Evaluation of seismic ground motion induced by topographic irregularity. *Soil dynamics and earthquake engineering* 27(2) (2007), 183–188.
- [264] NGUYEN, K. V., AND GATMIRI, B. Numerical implementation of fundamental solution for solving 2d transient poroelastodynamic problems. *Wave Motion* 44(3) (2007), 137–152.
- [265] NIELSEN, D. R., G. M. T. V., AND BIGGAR, J. W. Water flow and solute transport processes in the unsaturated zone. *Water Resources Research* 22(9) (1986), 895–1085.
- [266] NORRIS, A. N. Radiation from a point source and scattering theory in a fluid-saturated porous solid. *Journal of the Acoustical Society of America* 77(6) (1985), 2012–2023.
- [267] NOWACKI, W. Green functions for a thermoelastic medium (quasi-static problem). *Bull. Inst. Polit. Jasi, Serie Noua* 12 (1966), 83–92.
- [268] OLIVELLA, S. Non-isothermal multiphase flow of brine and gas through saline media. *Doctoral thesis, Dept. of Geotech. Engrg., Universitat Politecnica Catalunya, Barcelona, Spain* (1995).
- [269] OLIVELLA, S., CARRERA, J., GENS, A., AND ALONSO, E. E. Non-isothermal multiphase flow of brine and gas through saline medium. *Transport in Porous Media* 15 (1994), 271–293.
- [270] PARTRIDGE, P., BREBBIA, C., AND WROBEL, L. *Computational Mechanics Publications*. Applied Science, Elsevier, Berlin, 1992, ch. The Dual Reciprocity Boundary Element Method.
- [271] PEDERSEN, H., SANCHEZ-SESMA, F., AND CAMPILLO, M. Three dimensional scattering by two-dimensional topographies. *Bulletin of the Seismological Society of America* 84 (1994), 1169–1183.
- [272] PEIRCE, A., AND SIEBRITS, E. Stability analysis and design of time-stepping schemes for general elastodynamic boundary element models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40(2) (1997), 319–342.

- [273] PENMAN, H. L. Gas and vapour movement in soil. *Journal of Agricultural Science* 30 (1940), 437–462.
- [274] PHILIP, J. R., AND DE VRIES, D. A. Moisture movement in porous materials under temperature gradients. *Transactions of the American Geophysical Union* 38 (1957), 222–232.
- [275] PITTS, D. R., AND SISSOM, L. *Heat Transfer : Theory and Problems*. McGraw-Hill, 1977.
- [276] PLONA, T. Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies. *Applied Physics Letters* 36 (1980), 259–261.
- [277] POLLOCK, D. W. Simulation of fluid flow and energy transport processes associated with high-level radioactive waste disposal in unsaturated alluvium. *Water Resources Research* 22(5) (1986), 765–775.
- [278] PREECE, R. J. The measurement and calculation of physical properties of cable bedding sands, part 2 : specific thermal capacity, thermal conductivity and temperature ratio across air filled pores. 1975.
- [279] PREVOST, J. Mechanics of continuous porous media. *International Journal of Engineering Science* 18 (1980), 787–800.
- [280] PREVOST, J. Nonlinear transient phenomena in saturated porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 20 (1982), 3–18.
- [281] PREVOST, J. A simple plasticity theory for frictional cohesionless soils. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 1 (1985), 9–17.
- [282] RAVICHANDRAN, N. Fully coupled finite element model for dynamics of partially saturated soils. *International Journal of Soil Dynamique and Earthquake Engineering* 29 (2009), 1294–1304.
- [283] RICHARDS, B. G., AND CHAN, C. Y. Prediction of pore pressures in earth dams. *Proc. 7th ICSMFE* 2 (1969), 355–362.
- [284] RICHARDS, L. A. Capillary conduction of liquids through porous medium. *Journal of Physics* 1 (1931), 318–333.
- [285] RIZOS, D., AND KARABALIS, D. An advanced direct time domain BEM formulation for general 3D elastodynamic problems. *Computational Mechanics* 15 (1994), 249–269.
- [286] ROLLINS, R. L., SPANGLER, M. G., AND KIRKHAM, D. Movement of soil moisture under a thermal gradient. *Highway Research Board Special report* 33 (1954), 492–508.
- [287] SANCHEZ-SESMA, F. J. Diffraction of elastic SH-waves in wedges. *Bulletin of the Seismological Society of America* 75(5) (1985), 1435–1446.
- [288] SANCHEZ-SESMA, F. J. Elementary solutions for the response of a wedge-shaped medium to incident SH and SV waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 80 (1990), 737–742.

- [289] SANCHEZ-SESMA, F. J., RAMOS-MARTINEZ, J., AND CAMPILLO, M. An indirect boundary element method applied to simulate the seismic response of alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 22 (1993), 279–295.
- [290] SCHANZ, M. A boundary element formulation in time domain for viscoelastic solids. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 15 (1999), 799–809.
- [291] SCHANZ, M. Application of 3D time domain boundary element formulation to wave propagation in poroelastic solids. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 25 (2001), 363–376.
- [292] SCHANZ, M. *Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua : A Boundary Element Approach*. Springer Berlin Heidelberg, 2001.
- [293] SCHANZ, M., AND ANTES, H. Application of 'operational quadrature methods' in time domain boundary element methods. *Meccanica* 32(3) (1997), 179–186.
- [294] SCHANZ, M., AND ANTES, H. A new visco- and elastodynamic time domain boundary element formulation. *Computational Mechanics* 20(5) (1997), 452–459.
- [295] SCHANZ, M., AND DIEBELS, S. A comparative study of Biot's theory and the linear theory of porous media for wave propagation problems. *Acta Mechanica* 161(3-4) (2003), 213–235.
- [296] SCHANZ, M., AND PRYL, D. Dynamic fundamental solutions for compressible and incompressible modeled poroelastic continua. *International Journal of Solids and Structures* 41(15) (2004), 4047–4073.
- [297] SCHANZ, M., RÜBERG, T., AND STRUCKMEIER, V. Quasi-static poroelastic boundary element formulation based on the convolution quadrature method. *Computational Mechanics* 37 (2005), 70–77.
- [298] SCHANZ, M., AND STRUCKMEIER, V. Wave propagation in a simplified modelled poroelastic continuum : Fundamental solutions and a time domain boundary element formulation. *International journal for numerical methods in engineering* 64(13) (2005), 1816–1839.
- [299] SCHIFFMAN, R. L., CHEN, A. T. F., AND JORDAN, J. C. An analysis of consolidation theories. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division* 95(SM1) (1969), 285–312.
- [300] SCHNEEBELI, G. *Hydraulique souterraine*. 1966.
- [301] SCHREFLER, B., X.Y., Z., AND L., S. A coupled model for water flow , air flow and heat flow in deformable porous media. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow* 5 (1995), 531–547.
- [302] SCHREFLER, B. A., SIMONI, L., XIKUI, L., AND ZIENKIEWICZ, O. C. *Numerical methods and constitutive modeling in geomaterials, CISM Courses and Lectures*. Springer, New York, 1990, ch. Mechanics of partially saturated porous media, pp. 169 – 209.

- [303] SCOTT, R. F. Principles of soil mechanics. *Addison-Wesley, Massachusetts* (1963).
- [304] SEMBLAT, J. F., KHAM, M., PARARA, E., BARD, P.-Y., PITILAKIS, K., MAKRA, K., AND RAPTAKIS, D. Seismic wave amplification : Basin geometry vs soil layering. *Soil dynamics and earthquake engineering* 25 (2005), 529–538.
- [305] SHENG, D., SLOAN, S., AND GENS, A. A constitutive model for unsaturated soils : thermomechanical and computational aspects. *Computational Mechanics* 33(6) (2004), 453–465.
- [306] SMITH, W. D. The application of finite element analysis to body wave propagation problems. *International Journal of Geophysics* 44 (1975), 747–768.
- [307] SMITH, W. O. Thermal transfer of moisture in soils. *Transaction, American Geophysical Union* 24 (1943), 511–523.
- [308] SOHRABI-BIDAR, A., KAMALIAN, M., AND JAFARI, M. K. Time-domain BEM for three-dimensional site response analysis of topographic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79(12) (2009), 1467–1492.
- [309] SOMMERFELD, A. *Partial Differential Equations in Physics*. Academic Press, New York, 1949.
- [310] SOPHOCLEOUS, M. Analysis of water and heat flow in unsaturated-saturated porous media. *Water Resources Research* 15(5) (1979), 1195–1206.
- [311] STAKGOLD, I. *Green's functions and boundary value problems, Pure and Applied Mathematics*. John Wiley & Sons, 2nd edition, New York, 1998.
- [312] STROUD, A. H., AND SECREST, D. *Gaussian Quadrature Formulas*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N.J.), 1966.
- [313] TAYLOR, S. A., AND CARY, J. W. Linear equations for the simultaneous flow of matter and energy in a continuous soil system. *Soil Science Society of America Journal* 28 (1964), 167–172.
- [314] TAYLOR, S. A., AND CAVAZZA, L. The movement of soil moisture in response to temperature gradients. *Soil Science Society of America Journal* 18 (1954), 351–358.
- [315] TELFORD, T. Inland navigation. *Edinburgh Encyclopedia* 15 (1821), 209–315.
- [316] TELLES, J. C. F. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. 959–973.
- [317] THOMAS, H. Modelling two-dimensional heat and moisture transfer in unsaturated soils, including gravity effects. *International Journal of Analytical Methods in Geomechanics* 9 (1985), 573–588.
- [318] THOMAS, H., AND HE, Y. Analysis of coupled heat, moisture and air transfer in a deformable unsaturated soil. *Géotechnique* 40(4) (1995), 677–689.
- [319] THOMAS, H. R., AND KING, S. Coupled temperature/capillary potential variations in unsaturated soil. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 117(11) (1991), 2475–2491.

- [320] THOMAS, H. R., AND LI, C. L. W. Modelling transient heat and moisture transfer in unsaturated soil using a parallel computing approach. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 19 (1995), 345–366.
- [321] TOPP, G. C., AND MILLER, E. E. Hysteretic moisture characteristics and hydraulic conductivities for glass-bead media. *Proceedings - Soil Science Society of America* 30 (1966), 156–162.
- [322] TOSHINAWA, T., AND OHMACHI, T. Love wave propagation in a three-dimensional sedimentary basin. *Bulletin of the Seismological Society of America* 82 (1992), 1661–1667.
- [323] TRIFUNAC, M. Scattering of plane SH waves by a semi-elliptical canyon. *Earthquake engineering and structural dynamics* 1 (1973), 267–281.
- [324] TRIFUNAC, M. D. Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 61 (1971), 1755–1770.
- [325] TRUESDELL, C., AND TOUPIN, R. *The Classical Field Theories, Handbook der Physik*, vol. Vol. III/1. Springer, Berlin, 1960.
- [326] TUCKER, B., AND KING, J. L. Dependence of sediment-filled valley response on input amplitude and valley properties. *Bulletin of the seismological society of america* 74 (1984), 153–166.
- [327] VAN BAVEL, C. H. M. Gaseous diffusion and porosity in porous medium. *Soil Science Society of America Journal* 73 (1952), 91–104.
- [328] VAUNAT, J., ROMERO, E., AND JOMMI, C. An elastoplastic hydromechanical model for unsaturated soils. in : Experimental evidence and theoretical approaches in unsaturated soils. In *proceedings of the international workshop on unsaturated soil, Trento, Italy, Balkema, Rotterdam* (2000), pp. 121–138.
- [329] VILLAR, M., CUEVAS, J., FERNANDEZ, A., AND MARTIN-MARTIN, P. Effects of the interaction of heat and water compacted bentonite. *Preliminary results. CIEMAT and UAM. International Workshop on Thermomechanics of Clays and Clay Barriers* (1993).
- [330] VILLAR, M., AND MARTIN, P. Suction controlled oedometric tests in montmorillonite clay. *Proc. 29th Annual Conference of the Engineering Group of the Geological Society of London* (1993), 337–342.
- [331] VISUAL NUMERICS. *IMSL User's Manual*, vol. 2. Houston, TX, 1994.
- [332] WEAST, R. C., ASTLE, M. J., AND BEYER, W. H. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. 66th ed., CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, 1985.
- [333] WEI, C., AND MURALEETHARAN, K. A continuum theory of porous media saturated by multiphase fluids : I. linear poroelasticity. *International Journal of Engineering Science* 40 (2002), 1807–1833.

- [334] WEI, C. F. Static and dynamic behavior of multi-phase porous media : Governing equations and finite element implementation. *PhD. Dissertation, University of Oklahoma, Norman* (2001).
- [335] WHEELER, S., SHARMA, R., AND BUISSON, M. Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behaviour in unsaturated soils. *Geotechnique* 53(1) (2003), 41–54.
- [336] WHEELER, S., AND SIVAKUMAR, V. A critical state framework for unsaturated soil. In *Proceedings of the 7th International Conference Expansive Soils (ICES92)* (Dalla, 1992), pp. 167–172.
- [337] WHEELER, S., AND SIVAKUMAR, V. An elasto-plastic critical state framework for unsaturated soil. *Géotechnique* 45 (1995), 35–53.
- [338] WHITE, W., VALLIAPPAN, S., AND LEE, I. Unified boundary for finite dynamic models. *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*. 103 (1977), 949–963.
- [339] WIEBE, T., AND ANTES, H. A time domain integral formulation of dynamic poroelasticity. *Acta Mechanica* 90 (1991), 125–137.
- [340] WINTERKORN, H. Mass transport phenomenon in moist porous systems as reviewed from the thermo-dynamics of irreversible processes. *Highw. Res. Bd Bull* 40 (1959).
- [341] WONG, H. L., AND TRIFUNAC, M. D. Scattering of plane SH waves by semi-elliptical canyons. *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 3 (1974a), 157–169.
- [342] WONG, H. L., AND TRIFUNAC, M. D. Surface motion of semielliptical alluvial valley for incident plane SH wave. *Bulletin of the Seismological Society of America* 64 (1974b), 1389–1408.
- [343] YANG, D. Q., RAHARDJO, H., LEONG, E. C., AND CHOA, V. Coupled model for heat, moisture, air flow, and deformation problems in unsaturated soils. *Journal of Engineering Mechanics* 124 (1998), 1331–1338.
- [344] YOSHIMI, Y., AND OSTERBERG, J. O. Compression of partially saturated cohesive soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE* 89 (1964), 1–24.
- [345] YU, G., MANSUR, W., CARRER, J., AND GONG, L. A linear  $\theta$  method applied to 2D time domain BEM. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 14 (1998), 1171–1179.
- [346] YU, G., MANSUR, W., CARRER, J., AND GONG, L. Time weighting in time domain BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 22 (1998), 175–181.
- [347] YU, G., MANSUR, W., CARRER, J., AND GONG, L. Stability of galerkin and collocation time domain boundary element methods as applied to the scalar wave equation. *Computers & Structures* 74(4) (2000), 495–506.
- [348] YU, G., MANSUR, W. J., AND CARRER, J. A. M. The linear  $\theta$  method for 2D elasto-dynamic BE analysis. *Computational Mechanics* 24 (1999), 82–89.

- [349] ZHANG, C. Transient elastodynamic antiplane crack analysis in anisotropic solids. *International Journal of Solids and Structures* 37 (2000), 6107–6130.
- [350] ZHANG, C., SLADEK, J., AND SLADEK, V. Effects of material gradients on transient dynamic mode-III stress intensity factors in a FGM. *International Journal of Solids and Structures* 40(20) (2003), 5251–5270.
- [351] ZHANG, J., AND ZHAO, J. X. Response spectral amplification ratios from 1- and 2-dimensional nonlinear soil site models. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 29 (2009), 563–573.
- [352] ZIENKIEWICZ, O., CHANG, C., AND BETTESS, P. Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils. *Géotechnique* 30(4) (1980), 385–395.
- [353] ZIENKIEWICZ, O., HUMPHESON, C., AND LEWIS, R. *A Unified Approach to Soil Mechanics Problems (Including Plasticity and Viscoplasticity)*. John Wiley and Sons, 1977.
- [354] ZIENKIEWICZ, O., PAUL, D., AND CHAN, A. Unconditionally stable staggered solution procedure for soil-pore fluid interaction problems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 26 (1988), 1039–55.
- [355] ZIENKIEWICZ, O., AND SHIOMI, T. Dynamic behaviour of saturated porous media, the generalized Biot formulation and its numerical solution. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 8 (1984), 71–96.
- [356] ZIENKIEWICZ, O. C. *The Finite Element Method*. McGraw Hill, 1977.
- [357] ZIENKIEWICZ, O. C., AND BETTES, P. *Soil mechanics-transient and cyclic loads*. Wiley, New York, 1982, ch. Soils and other saturated media under transient, dynamic conditions. General formulation and the validity of various simplifying assumptions, pp. 1–16.
- [358] ZIENKIEWICZ, O. C., AND XIE, Y. M. Analysis of the lower San Fernando dam failure under earthquake. *Dam Engineering II(4)* (1991), 307–322.
- [359] ZIENKIEWICZ, O. C., XIE, Y. M., SCHREFLER, B. A., LEDESMA, A., AND BICANIC, N. Static and dynamic behavior of soils : a rational approach to quantitative solutions. II semi-saturated problems. *Proceedings of the Royal Society A* 429 (1990), 311–321.