

Integrali di Cauchy ed esercizi vari

Amelia Carolina Sparavigna

Dipartimento di Scienza Applicata e Tecnologia, Politecnico di Torino, Torino, Italia

L'Analisi Complessa è la parte dell'analisi che studia le funzioni di variabile complessa. Essa è utilizzata in matematica, fisica e ingegneria e, più di recente, nella teoria quantistica dei campi. Le radici di tale analisi stanno nei lavori di Eulero, Gauss, Riemann, Cauchy, Weierstrass, e poi di molti altri ricercatori del XX secolo. In questo scritto ci occuperemo in particolare degli integrali di Cauchy e dei calcoli che sono ad essi legati. Si discuteranno alcuni problemi di fisica che usano tale tecnica d'integrazione. Vari esercizi di calcolo saranno proposti.

Parole chiave: Matematica per la Fisica

Variabili e funzioni complesse

Gli integrali di Cauchy servono per affrontare il calcolo di molti integrali utili in problemi di fisica ed ingegneria. Quindi, oltre ad essere importanti in matematica, essi sono importanti per le loro applicazioni. Prima di affrontare questi integrali, vediamo alcune informazioni sulle variabili e le funzioni complesse.

Per "variabile complessa" si intende $z = x + iy$, dove x e y sono reali ed i è tale che il suo quadrato è pari a -1 . Lo stesso numero complesso si rappresenta anche come $z = |z|e^{i\theta}$, dove $|z|$ è il modulo e θ l'argomento. Questa è la rappresentazione del numero tramite le coordinate polari nel piano complesso (chiamato anche piano di Argand-Gauss). Se si scrivono i numeri con modulo e argomento è facile dimostrare molte delle proprietà dei numeri complessi. Ad esempio si può vedere immediatamente che l'argomento del prodotto di due numeri è la somma degli argomenti.

Una funzione complessa è una funzione da numeri complessi a numeri complessi. In altre parole, è una funzione che ha un sottoinsieme dei numeri complessi come dominio e dei numeri complessi come codominio. Per qualsiasi funzione complessa, i valori z del dominio e le loro immagini $f(z)$ possono essere separati in parti reali e immaginarie:

$$z = x + iy ; f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

dove $u(x, y)$, $v(x, y)$ sono funzioni reali.

Ricordiamo che una funzione $f(z)$ della variabile z è una prescrizione che associa ad ogni

valore z uno o più numeri complessi; nel primo caso si parla di funzione monodroma, e nel caso di una funzione a più valori, si parla di funzione polidroma. Ad esempio: la funzione $f(z)=z^2$ è monodroma, mentre $f(z)=z^{1/2}$ è polidroma, potendo assumere tanto il valore $|z|^{1/2} e^{i\theta/2}$, che il valore $-|z|^{1/2} e^{i\theta/2}=|z|^{1/2} e^{i\pi} e^{i\theta/2}$ dove, nella definizione, si è usato modulo e argomento.

Alcune proprietà delle funzioni complesse (come la continuità) non sono altro che le proprietà corrispondenti di funzioni con variabili reali. Altri concetti, come ad esempio la differenziabilità, sono generalizzazioni dirette di concetti simili per funzioni reali, ma possono avere proprietà molto diverse. In particolare, ogni funzione complessa differenziabile è analitica¹, e due funzioni differenziabili uguali in un intorno di un punto sono uguali nell'intersezione del loro dominio (se i domini sono connessi). Quest'ultima proprietà è alla base del principio di continuazione analitica. Molte funzioni complesse di base e speciali vengono definite in questo modo, comprese le funzioni esponenziali, logaritmiche e trigonometriche.

Radice

Prima di procedere con la discussione verso gli integrali di Cauchy, parliamo della radice in campo complesso, come fatto da G. Tironi, nei suoi "Appunti del corso di metodi matematici per l'ingegneria", in <https://web.archive.org/web/20200922105409/https://dmi.units.it/~tironi/MetodiMatematici.pdf>

Consideriamo in \mathbb{C} l'equazione $w^2 - z = 0$. Se $z = |z|e^{i\phi} = r e^{i\phi}$, le due soluzioni dell'equazione sono:

$$w_1 = \sqrt{r} e^{i\phi/2}, \quad w_2 = \sqrt{r} e^{i(\phi/2+\pi)} = -\sqrt{r} e^{i\phi/2}.$$

Anche nel campo reale, se $z \geq 0$, ci sono due soluzioni $w_1 = \sqrt{z}$ e $w_2 = -\sqrt{z}$. Potremmo scegliere una delle due, per es. $w_1(z)$, come definizione di radice del numero complesso z . Ma questo non funziona nel campo complesso. Immaginiamo di scegliere un certo punto $z = 0$ e di percorrere un giro lungo una circonferenza di centro l'origine e raggio $r = |z|$. Se scegliamo come radice di z il numero $w_1(z)$, quando avremo percorso un intero giro della nostra circonferenza l'argomento di z sarà aumentato di 2π e quindi il valore di $w_1(z)$, che si è prolungato per continuità lungo la circonferenza, diventerà:

$$\sqrt{r} e^{i(\phi+2\pi)/2} = -\sqrt{r} e^{i\phi/2},$$

che è però anche il valore di $w_2(z)$ prima dell'inizio del giro. Si vede così che, facendo un giro intorno all'origine i valori di $w_1(z)$ e di $w_2(z)$ si scambiano fra di loro. Non è

1 Una funzione analitica è una funzione localmente espressa da una serie di potenze convergente.

possibile attribuire a uno dei due un significato privilegiato.

Si procede allora facendo un "taglio" lungo l'asse reale negativo fino allo zero. Si prendono due copie del piano complesso così tagliato. I due piani saranno detti rispettivamente piano 1 e piano 2. I piani 1 e 2 si possono rappresentare come:

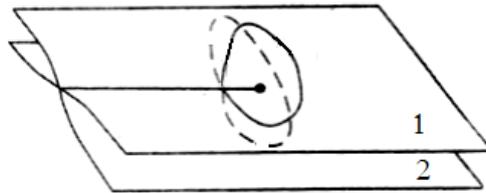
$$C^*_1 = \{(z, 1): z = \rho \cdot e^{i\phi}, \pi > \phi \geq -\pi\}$$

$$C^*_2 = \{(z, 2): z = \rho \cdot e^{i\phi}, \pi > \phi \geq -\pi\}.$$

Ai punti di $(z, 1) \in C^*_1$ sono assegnati i valori $w_1(z)$ mentre ai punti $(z, 2) \in C^*_2$ sono assegnati i valori $w_2(z)$.

Trasformiamo i due piani in una superficie di Riemann, saldando il bordo superiore del piano 1 con quello inferiore del piano 2 e viceversa. Operiamo quindi una sutura particolare che permette di spostarsi da un piano all'altro.

Scegliamo un punto $z \in \mathbb{C}$ e un valore iniziale dell'argomento per esempio $-\pi \leq \arg(z) < \pi$. Scegliamo anche un valore della sua radice quadrata, per es. $w_1(z)$. Seguendo una variazione di z continua, attorno a 0 per esempio, sulla superficie di Riemann, si trovano i valori della radice sulle singole falde della superficie. Dopo due giri intorno all'origine si ritorna al valore iniziale della radice. L'origine e il punto all'infinito del piano complesso si dicono "punti di diramazione" algebrica, in questo caso di ordine 2.



Consideriamo ora l'equazione $w^n = z$. Se $z = \rho e^{i\vartheta}$, essa ha soluzioni $w_1(z) = \rho^{1/n} e^{i\vartheta/n}$, $w_2(z) = \rho^{1/n} e^{i(\vartheta+2\pi)/n}$, ..., $w_n(z) = \rho^{1/n} e^{i(\vartheta+2(n-1)\pi)/n}$. La superficie di Riemann della radice n -esima è fatta da n copie del piano complesso \mathbb{C} tagliato lungo il semiasse reale negativo.

Abbiamo visto un taglio del piano dallo 0 all'infinito. Ora facciamo un esempio di taglio limitato ad un intervallo dell'asse reale. Prendiamo la funzione:

$$f(z) = \sqrt{-(z-a)(z-b)}$$

Siano a e b reali e maggiori di 0. Scriviamo la funzione sotto radice come:

$$e^{i\pi} \rho_a e^{i\phi_a} \rho_b e^{i\phi_b} \quad (*)$$

$$-1 = e^{i\pi} ; (z-a) = \rho_a e^{i\phi_a} ; (z-b) = \rho_b e^{i\phi_b}$$

$\rho_a, \phi_a, \rho_b, \phi_b$ sono legati dalla variabile z . Ma in questo modo possiamo studiare l'argomento della funzione quando ci muoviamo intorno ai punti a e b . Facciamo un taglio del piano tra questi due punti e valutiamo gli argomenti. Vincoliamoci a restare solo su un foglio di Riemann.

Prendiamo in punto z sull'asse reale tra a e b , che sia appena sopra il taglio. Valutiamo l'argomento di (*). Esso è pari a 2π ($\phi_a = 0, \phi_b = \pi$). L'argomento della funzione $f(z)$ è π , e quindi essa ha segno negativo. Infatti:

$$f(z) = e^{i\pi/2} \sqrt{(\rho_a)} e^{i\phi_a/2} \sqrt{(\rho_b)} e^{i\phi_b/2}$$

Ora passiamo al corrispondente punto, ma che sia sotto il taglio. In questo caso si deve girare in senso antiorario di 2π attorno al punto a . L'argomento di (*) è pari a 4π , quello della funzione $f(z)$ a 2π e la funzione è positiva. Se si volesse continuare con un altro giro, per tornare al valore di partenza della funzione, si dovrebbe passare sull'altro foglio di Riemann.

Ancora un esempio. Sia la funzione $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$. La funzione ha due punti di diramazione in $z=1$, $z=-1$. Si usino come prima le funzioni $z-1 = \rho_1 e^{i\phi_1}$ e $z+1 = \rho_2 e^{i\phi_2}$ e quindi: $f(z) = (\rho_1 \rho_2)^{1/2} e^{i(\phi_1 + \phi_2)/2}$. Ogni percorso circolare che circonda solo uno dei punti di diramazione ci porta da uno all'altro foglio di Riemann, Un percorso circolare che invece circonda entrambi i punti di diramazione, ci porta al valore della funzione iniziale.

Esponenziale e logaritmo

Si dice esponenziale la funzione definita dalla serie:

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

La definizione è ben posta poiché la serie di potenze converge in modo assoluto per ogni x (sia reale che complesso). Per ogni numero complesso valgono le seguenti proprietà:

- Il numero $\exp(z) = e^z$ è diverso da zero.
- La funzione $f(z) = \exp(z)$ è uguale alla sua derivata.
- La restrizione della funzione $f(z) = \exp(z)$ all'asse reale è una funzione monotona positiva.
- Esiste un numero π tale che $\exp(i\pi/2) = i$ e $\exp(z) = 1$ se e solo se $\frac{z}{2\pi i}$ è intero.
- La funzione $f(z) = \exp(z)$ è periodica con periodo $2\pi i$.
- La funzione che associa al numero reale t il numero $\exp(it)$ parametrizza il cerchio unitario.
- Per ogni numero complesso w diverso da zero, esiste un numero z tale che $w = \exp(z)$.

Una volta che abbiamo l'esponenziale, con esso possiamo scrivere le funzioni trigonometriche ed iperboliche. Per esempio:

$$\begin{aligned}\cos(z) &= (\exp(iz) + \exp(-iz))/2 \\ \sin(z) &= (\exp(iz) - \exp(-iz))/2i\end{aligned}$$

Parliamo ora del logaritmo, in una discussione come fatta da Gino Tironi, 2002.

Dato un numero complesso, $z = \rho e^{i\vartheta}$, diremo logaritmo di z (ossia $\log z$) ogni numero complesso $w = u + iv$, tale che:

$$e^{u+iv} = z = \rho e^{i\vartheta}$$

Deve quindi essere $e^u = \rho$, cioè $u = \log \rho = \log |z|$ e $v = \vartheta + 2k\pi$. Dunque ogni numero complesso z diverso da 0 ha infiniti logaritmi: $\log z = \log |z| + i(\vartheta + 2k\pi)$, dove ϑ è un argomento di z . Se per l'argomento di z si sceglie un numero compreso in un assegnato intervallo di ampiezza 2π , si può isolare un solo argomento di z . Le scelte più comuni sono:

$$-\pi \leq \vartheta = \arg(z) < \pi \quad \text{oppure} \quad 0 \leq \vartheta = \arg(z) < 2\pi;$$

in questo caso si dice che il valore scelto dell'argomento è il valore principale dell'argomento.

Le due scelte corrispondono a “tagliare” il piano complesso lungo il semiasse reale negativo, o, rispettivamente, lungo il semiasse reale positivo.

Notiamo ancora che la potenza può essere scritta come: $z^\alpha = \exp(\alpha \ln z)$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Punti di ramificazione

Usiamo la funzione logaritmo per sottolineare, ancora una volta, l'esistenza dei punti che sono definiti punti di ramificazione. Come già visto:

$$\ln z = \ln |z| + i(\theta + 2\pi n)$$

con n uguale a 0 intero negativo o positivo.

Prendiamo un punto z_0 nel piano complesso e giriamo attorno allo 0 in senso antiorario. Dopo un giro completo:

$$(\ln z_0)_{finale} = (\ln z_0)_{iniziale} + 2\pi i$$

Il valore del logaritmo dopo un giro è diverso dal valore iniziale. Il punto 0 è un punto di ramificazione del logaritmo, così come lo è l'infinito.

Derivate

Sia f una funzione di una singola variabile complessa. La derivata di f al punto z_0 nel suo dominio è definita come limite:

$$(1) \quad f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

E questa è la stessa definizione della derivata della funzione reale, tranne che le quantità in gioco sono complesse. Ora però la variabile, invece di essere sulla retta reale, è nel piano complesso. Il limite è quindi preso quando il numero complesso z tende a z_0 ma deve avere lo stesso valore per qualsiasi sequenza di valori complessi con cui z si avvicina a z_0 sul piano complesso. Se il limite esiste, diciamo che f è differenziabile in modo complesso nel punto z_0 . Questo concetto di differenziabilità complessa condivide diverse proprietà con la differenziabilità reale: è lineare e obbedisce alla regola del prodotto, alla regola del quoziente e alla regola della derivazione a catena.

Ci sono funzioni che non hanno derivata. Facciamo un esempio. Sia la funzione: $f(z) = \bar{z}$,
 ossia la funzione che prende z e lo trasforma nel suo complesso coniugato. Sia $u = h + ik$

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + u) - f(z_0)}{u} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0 + u} - \bar{z}_0}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\bar{z}_0 + \bar{u} - \bar{z}_0}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\bar{u}}{u} = \lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{h - ik}{h + ik} \end{aligned}$$

Supponiamo che questo limite esista. Muoviamoci lungo l'asse x:

$$\lim_{\substack{h+ik \rightarrow 0 \\ k=0}} \frac{h - ik}{h + ik} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

Mentre lungo l'asse y:

$$\lim_{\substack{h+ik \rightarrow 0 \\ h=0}} \frac{h - ik}{h + ik} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-ik}{ik} = -1$$

Essendo questi valori diversi, la derivata della funzione $f(z) = \bar{z}$ non esiste.

La funzione $f(z) = z^2$ è invece derivabile.

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + u) - f(z_0)}{u} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(z_0 + u)^2 - z_0^2}{u} \\ &= \lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{((x_0 + h) + i(y_0 + k))^2 - (x_0 + iy_0)^2}{h + ik} \\ &= \lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{((x_0 + iy_0) + (h + ik))^2 - (x_0 + iy_0)^2}{h + ik} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{(x_0 + iy_0)^2 + (h + ik)^2 + 2(x_0 + iy_0)(h + ik) - (x_0 + iy_0)^2}{h + ik} \\
 &= \lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{(h + ik)^2 + 2(x_0 + iy_0)(h + ik)}{h + ik} = \\
 &= \lim_{h+ik \rightarrow 0} (h + ik) + 2(x_0 + iy_0) = 2(x_0 + iy_0) = 2z_0 = f'_z(z_0)
 \end{aligned}$$

Ed ecco che il risultato è indipendente dal percorso fatto. Il risultato è infatti una funzione di z .

Le relazioni di Cauchy - Riemann

Partiamo da (1):

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Riscriviamo:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} \\
 &\quad + i \cdot \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y}
 \end{aligned}$$

Si faccia tendere a zero parte reale e parte immaginaria come $(\Delta x, 0) \rightarrow (0,0)$:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\
 &= \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = u_x(x_0, y_0) + i \cdot v_x(x_0, y_0)
 \end{aligned}$$

Facciamo poi tendere parte reale ed immaginaria come $(0, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i \Delta y} + i \cdot \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i \Delta y} \\ &= -i \cdot \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} = -i \cdot u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Devono quindi essere soddisfatte le due seguenti condizioni:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{relazioni (o equazioni) di Cauchy - Riemann.}$$

"In the field of complex analysis in mathematics, the Cauchy–Riemann equations, named after Augustin Cauchy and Bernhard Riemann, consist of a system of two partial differential equations which, together with certain continuity and differentiability criteria, form a necessary and sufficient condition for a complex function to be complex differentiable, that is, holomorphic. This system of equations first appeared in the work of Jean le Rond d'Alembert (d'Alembert 1752). Later, Leonhard Euler connected this system to the analytic functions (Euler 1797). Cauchy (1814) then used these equations to construct his theory of functions. Riemann's dissertation (Riemann 1851) on the theory of functions appeared in 1851." https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy–Riemann_equations

Esempi - La funzione $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ non soddisfa le condizioni di Cauchy - Riemann. Infatti esiste $u(x, y) = x^2 + y^2$, ma si ha $v(x, y) = 0$. Anche la funzione $f(z) = \exp(i \Im z)$ non soddisfa tali condizioni, come si può verificare con $u(x, y) = -\sin y$ e $v(x, y) = \cos y$. Le relazioni sono verificate invece dalla funzione $f(z) = z^2 = (x + iy)(x + iy) = x^2 + y^2 + 2i xy$. Idem per $f(z) = z^{-2}$ per z diverso da 0.

Funzioni olomorfe

Se f è una funzione differenziabile in ogni punto z_0 in un insieme aperto U , allora diciamo che f è funzione olomorfa su U . La definizione di funzione olomorfa si basa quindi sulla sua derivazione.

Se una funzione complessa $f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ è olomorfa, allora u e v hanno derivate parziali rispetto a x e y , che soddisfano le equazioni di Cauchy - Riemann. Quindi,

se si identifica \mathbf{C} con \mathbf{R}^2 , allora le funzioni olomorfe coincidono con quelle funzioni che hanno le derivate che soddisfano le relazioni di Cauchy–Riemann.

Ogni funzione olomorfa, separata in parte reale ed immaginaria, ha tali parti che soddisfano l'equazione di Laplace su \mathbf{R}^2 :

$$\nabla^2 f = 0 \quad \text{o} \quad \Delta f = 0$$

In altre parole, scritta $f(z)$ come $u(x, y) + i v(x, y)$, sia u che v sono funzioni armoniche, dove v è l'armonica coniugata di u .

Sia data una funzione $u(x, y)$. Si può usare quanto detto sopra per trovare una funzione $v(x, y)$ tale che $u(x, y) + i v(x, y)$ sia olomorfa.

Ad esempio sia $u(x, y) = xy$. Usiamo le relazioni di Cauchy - Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = y &\rightarrow v(x, y) = \frac{y^2}{2} + c(x) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -x &\rightarrow v(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \text{costante} \end{aligned}$$

La funzione è: $f(z) = u + iv = xy + i\left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \text{costante}\right) = -\frac{i}{2}z^2 + \text{costante}$

Ricordate sempre che: $z^2 = z \cdot z = (x + iy)(x + iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$.

Mappe conformi

Per ogni punto z dove la funzione f è olomorfa e la sua derivata è diversa da zero, la mappa

$$z \rightarrow w = f(z)$$

è conforme, ossia preserva gli angoli. Si veda <https://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html>

Funzione olomorfa, sinonimo di analitica

Una proprietà fondamentale delle funzioni olomorfe è quella di essere analitiche. Quindi, "olomorfia e analiticità sono sinonimi", secondo B. van Geemen, "Sulla teoria delle funzioni

di una variabile complessa", <http://www.mat.unimi.it/users/geemen/IntroAnalisiComplessa.pdf> o al seguente link <https://web.archive.org/web/20191029090946/http://www.mat.unimi.it/users/geemen/IntroAnalisiComplessa.pdf>

Una funzione è analitica in un aperto U di \mathbb{C} se, per ogni punto ζ di U , c'è un disco Δ di centro ζ , la cui chiusura è contenuta in U e tale che, in Δ , la funzione f può esprimersi in serie di potenze:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \zeta)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}.$$

Una funzione f analitica in un aperto $U \subset \mathbb{C}$ è anche olomorfa in tale aperto. Infatti, dato $\zeta \in U$ si può sviluppare f in serie di potenze vicino a ζ , quindi in una somma di termini del tipo dato sopra. Ognuno di questi termini soddisfa le equazioni di Cauchy - Riemann, e i teoremi sulla convergenza uniforme assicurano che anche la sommatoria soddisfi tali equazioni. Per dimostrare che una funzione olomorfa è analitica serve il teorema di Stokes. Però prima è bene vedere l'integrazione nel piano complesso.

L'integrazione lungo un cammino nel piano complesso

Sia data una funzione $f(z) = u + iv$ lungo un cammino Γ nel piano complesso. Si calcoli:

$$I = \int_{\Gamma} f(z) dz$$

Suddividiamo la curva Γ in tanti piccoli archi $(z_{k-1}, z_k), k = 1, \dots, n$. Costruiamo la somma:

$$S_n = \sum_{k=1}^n (z_{k-1}, z_k) f(\zeta_k), \quad \zeta_k \in (z_{k-1}, z_k)$$

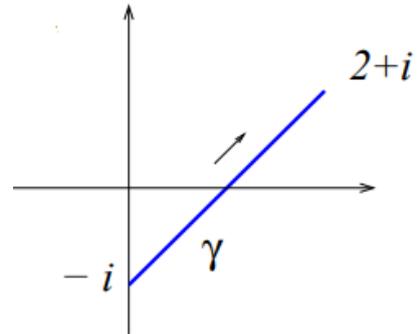
Se facciamo la suddivisione sempre più fine, facciamo tendere la sommatoria S_n al valore I .

Possiamo anche scrivere:

$$I = \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\Gamma} (v dx + u dy)$$

Ecco un esempio dalle note <https://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/FrancescoHautmann/ComplexVariable/> di Francesco Hautmann.

Esempio - Si calcoli l'integrale $I = \int_{\gamma} z^2 dz$ sulla curva in figura.



La curva viene scritta in modo parametrico come: $x(t)=t$ ed $y(t)=t-1$, con t compreso tra zero e 2 inclusi.

Abbiamo: $z=t+i(t-1)$ e $dz=dx+idy=(1+i)dt$.

$$I = \int_{\gamma} z^2 dz = \int_{\gamma} (x^2 - y^2 + 2ixy)(dx + idy) = \int_0^2 dt(1+i)[t^2 - (t-1)^2 + 2it(t-1)]$$

$$I = (1+i)[-2 + 2(1-i)2^2/2 + 2i2^3/3] - (1+i)[-0 + 2(1-i)0^2/2 + 2i0^3/3] = 2(1+5i)/3$$

Disuguaglianza di Darboux

La disuguaglianza di Darboux è una disuguaglianza relativa all'integrazione sul piano complesso: essa afferma che il modulo dell'integrale di una funzione, lungo una curva del piano complesso, è sempre minore o uguale del massimo valore in modulo della funzione, moltiplicato per la lunghezza della curva. In maniera più formale, per l'integrale curvilineo di una funzione $f(z)$ lungo la curva γ nel piano complesso, la disuguaglianza di Darboux è la seguente:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| dz \leq M \cdot l$$

dove M è il massimo valore in modulo assunto dalla funzione lungo la curva, e l è la lunghezza della curva.

Suddividiamo la curva in tanti piccoli archi $(z_{k-1}, z_k), k=1, \dots, n$. Costruiamo la sommatoria (che al limite diventa l'integrale):

$$S_n = \sum_{k=1}^n (z_{k-1}, z_k) f(\xi_k), \xi_k \in (z_{k-1}, z_k)$$

$$|S_n| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| |z_k - z_{k-1}| \leq M \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}|$$

Se facciamo la suddivisione sempre più fine, abbiamo la disuguaglianza di Darboux.

Lemma di Jordan

Data una funzione $f(z)$ continua, sia γ_R un arco di circonferenza centrato nell'origine del piano di Gauss e di raggio R la cui ascissa curvilinea si estenda tra θ_1 e θ_2 , angoli tali che $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$. Se

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \max_{\theta \in [\theta_1; \theta_2]} |f(Re^{i\theta})| = 0,$$

allora

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\omega z} dz = 0,$$

dove ω è un qualunque numero reale positivo.

L'integrale di Cauchy

Finalmente arriviamo al nostro argomento principale. Il teorema integrale di Cauchy afferma che, data una funzione olomorfa f , definita su un dominio A semplicemente connesso², **per ogni curva** chiusa e regolare a tratti γ vale l'equazione:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione.

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \oint_{\gamma} [v(x, y) dx + u(x, y) dy],$$

Si sfrutta il teorema di Gauss - Green:

2 Un insieme aperto connesso E si dice semplicemente connesso se, data una qualsiasi curva γ semplice e chiusa con sostegno contenuto in E , allora anche l'interno di γ è contenuto in E . Una curva semplice è una curva che non ha intersezioni con se stessa.

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \iint_E \left[-\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] dx dy + i \iint_E \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right] dx dy = 0;$$

dove E è la regione interna alla curva γ . Poiché la funzione è olomorfa, valgono le relazioni di Cauchy - Riemann e quindi si dimostra che l'integrale è nullo.

Verifiche in modo diretto

Sebastiano Seatzu. 2010, propone alcune verifiche in <http://tex.unica.it/~seatzu/ancomplexa.pdf> archiviato <https://web.archive.org/web/20170517130055/http://tex.unica.it/~seatzu/ancomplexa.pdf>

Verificare in modo diretto che

$$\oint_C (z+2) dz = 0$$

dove la curva di integrazione C è una ellisse data da $x(\theta) = 4 \cos(\theta)$ e $y(\theta) = 3 \sin(\theta)$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Poiché la funzione è olomorfa in tutto il piano e la curva è chiusa, l'integrale è zero per Cauchy. Verifichiamo però col calcolo diretto.

$$\begin{aligned} \oint_C (z+2) dz &= \int_0^{2\pi} [(4 \cos \theta + 2) + i 3 \sin \theta] (-4 \sin \theta + i 3 \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \{ [-16 \cos \theta \sin \theta - 8 \sin \theta - 9 \sin \theta \cos \theta] + i [3 \cos \theta (4 \cos \theta + 2) - 12 \sin^2 \theta] \} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{25}{2} \sin 2\theta - 8 \sin \theta + i(12 \cos 2\theta + 6 \cos \theta) \right] d\theta \\ &= \left[-\frac{25}{4} \cos 2\theta - 8 \sin \theta + 6i(\sin 2\theta + \sin \theta) \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Calcolare $\oint_C (2z + \bar{z}) dz$ dove $|z| = 1$. Poiché la funzione non è analitica, non è vero che

l'integrale deve essere nullo. Ed infatti:

$$\begin{aligned} \oint_C (2z + \bar{z}) dz &= \int_0^{2\pi} (2e^{i\theta} + e^{-i\theta}) e^{i\theta} i d\theta = i \int_0^{2\pi} [2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + 1] d\theta \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

Il teorema di Gauss - Green

Sia C una curva chiusa nel piano, liscia a tratti, e sia D la regione limitata da C . Siano L e M funzioni di (x, y) definite in una regione aperta contenente D e aventi ivi derivate parziali continue, allora:

$$\oint_C (L dx + M dy) = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy$$

C è percorsa in senso antiorario.

Questo verso di percorrenza del contorno di una regione è quello che si considera come positivo. Tal verso tiene sempre a sinistra l'area racchiusa. E' anche il verso che si incontra in Fisica, ad esempio quando si discute il verso del vettore velocità angolare del moto circolare.

La formula di Cauchy

Sia $f(z)$ una funzione olomorfa definita su un insieme A aperto del piano complesso \mathbb{C} . Sia γ una curva semplice chiusa contenuta in A . Sia S la regione racchiusa da γ percorsa in senso antiorario e sia z un punto qualsiasi interno ad S dove la funzione è definita, che non sia sulla curva γ , allora vale la relazione:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

La formula di Cauchy esprime quindi il valore di una funzione in ogni punto del dominio S mediante un integrale di linea.

Si consideri un cerchio C_ε centrato in z di raggio ε che sia interamente contenuto in S . Per il teorema integrale di Cauchy sono uguali i due integrali:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Introduciamo la sostituzione di variabile: $\xi - z = \varepsilon e^{i\theta}$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

Infatti: $d\xi = d(\xi - z) = d(\varepsilon e^{i\theta}) = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$.

Sempre per il teorema di Cauchy, l'integrale sul cerchio è indipendente dal raggio, pertanto si può calcolare per qualunque ε , in particolare si può far tendere ε a 0, e siccome $f(z)$ è continua si ottiene:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta = \frac{f(z)}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = f(z),$$

In definitiva:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z).$$

Corollario

Mettiamo in evidenza un passaggio che abbiamo fatto prima. Esso costituisce un semplice corollario che dice che una funzione si può scrivere come:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta f(z + \rho e^{i\theta})$$

La condizione è che la funzione sia analitica (vedi dopo) entro un cerchio di centro z e raggio ρ .

Derivate ed integrali di Cauchy

Si consideri un incremento Δz . Utilizzando la rappresentazione integrale si ha:

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z - \Delta z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{\Delta z}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)(\xi - z - \Delta z)}. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)(\xi - z - \Delta z)},$$

Passiamo al limite per Δz che tende a 0.

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1} f(z)}{dz^{n+1}} &= \frac{d}{dz} \left[\frac{d^n f(z)}{dz^n} \right] \\ &= \frac{d}{dz} \left[\frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \right] = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\xi) \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(\xi - z)^{n+1}} \right] d\xi \\ &= \frac{n!(n+1)}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{(n+1)+1}} d\xi = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{(n+1)+1}} d\xi. \end{aligned}$$

Esempi - https://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/FrancescoHautmann/ComplexVariable/s1_11_sl6.pdf

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|z-1|=2} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i \cos 0 = 2\pi i \\ I &= \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i e^2 \end{aligned}$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \left[\frac{d^3}{dz^3} \cosh z \right]_{z=0} = 0$$

Olomorfa significa analitica

Torniamo a Bert van Geemen, "Sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa".

Sia f una funzione olomorfa in un aperto $U \subset \mathbf{C}$. Sia $z_0 \in U$, e sia Δ un disco di centro z_0 la cui chiusura è contenuta in U . Usando la formula integrale di Cauchy e gli usuali teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale, otteniamo, per $\zeta \in \Delta$ ($\partial \Delta$ è il contorno di Δ):

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} \frac{f(z)}{z-z_0-(\zeta-z_0)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} \frac{f(z)}{(z-z_0)[1-(\zeta-z_0)/(z-z_0)]} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} \frac{f(z)}{z-z_0} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0} \right)^n dz = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right) (\zeta-z_0)^n. \end{aligned}$$

E quindi la funzione olomorfa è sviluppabile in serie. E tutto grazie all'integrale di Cauchy.

Teorema di Liouville

Questo teorema dice che se una funzione è analitica in tutto il piano complesso, ed è inoltre limitata in modulo in tutto il piano complesso, allora essa è necessariamente una costante.

Prendiamo l'espressione:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z'-z)^2} dz'$$

essendo la curva C una qualunque curva che circonda il punto z .

Nell'ipotesi del teorema, esiste un numero M tale che $|f(z)| < M$ per ogni z .

Segue quindi che:

$$|f'(z)| < \frac{M}{2\pi} \left| \oint_C \frac{1}{|z'-z|^2} dz' \right|$$

Scegliendo come cammino di integrazione un cerchio di raggio ρ intorno al punto z , da questa si ottiene:

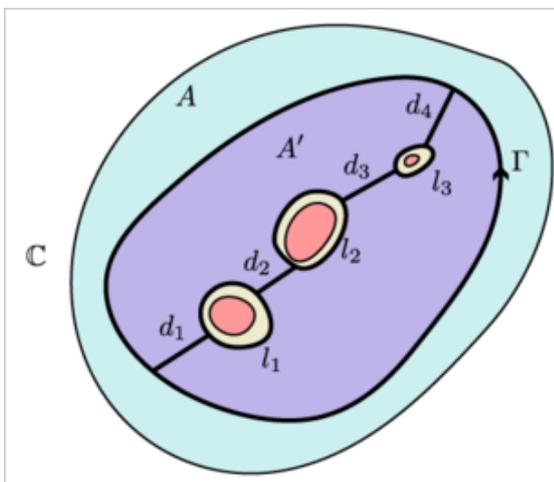
$$|f'(z)| < \frac{M}{\rho}$$

e poiché ρ si può scegliere arbitrariamente grande, ne segue che $|f'(z)|$ è minore di un numero arbitrariamente piccolo, il che è possibile solo se

$$|f'(z)| = 0 .$$

Se, per ogni z , $f'(z) = 0$, ne segue che $f(z) = \text{costante}$, che è appunto quello che si doveva dimostrare.

Una funzione che sia analitica in tutto il piano complesso si dice intera. Il teorema di Liouville assicura dunque che, a parte il caso banale delle costanti, tutte le funzioni intere necessariamente divergono in modulo per $|z| \rightarrow \infty$ in qualche direzione del piano complesso (si noti che le funzioni intere, essendo analitiche, sono necessariamente limitate per ogni valore finito di z). Esempi di funzioni intere sono i polinomi, la funzione esponenziale, le funzioni circolari (seno e coseno; si noti che anche queste divergono in modulo, per $|z| \rightarrow \infty$, lungo l'asse immaginario).



Generalizzazione del teorema di Cauchy

Image Courtesy: Gurchet, Wikipedia
<https://it.wikipedia.org/wiki/File:Cauchy2.png>

Il teorema integrale di Cauchy può essere generalizzato anche a domini a connessione multipla.

Sia data la funzione $f(z)$ in un dominio A (in azzurro) qualsiasi con all'interno (in rosa in figura) delle zone non appartenenti a tale dominio.

Tracciamo una curva orientata Γ interna ad A ma che contiene tutte le zone disconnesse A' (in viola). Intorno a queste tracciamo le curve l_1, l_2, l_3 unite alla curva Γ dai tratti d_1, d_2, d_3, d_4 . Tutte le curve sono percorse in modo da lasciare a sinistra il dominio (in viola).

Allora:

$$\oint_{\Gamma} f(z) d\zeta + \sum_{i=1}^4 \int_{d_i} f(z) d\zeta + \sum_{j=1}^3 \int_{-l_j} f(z) d\zeta - \sum_{i=1}^4 \int_{d_i} f(z) d\zeta = 0.$$

Poiché le curve d_i vengono percorse nei due sensi opposti, esse danno contributi all'integrale che si annullano, mentre le curve l_j vengono percorse in senso inverso a Γ . Quindi:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz + \sum_{j=1}^3 \int_{-l_j} f(z) dz = 0,$$

Ossia:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{i=0}^3 \oint_{l_i} f(z) dz$$

Teorema dei residui

Nell'analisi complessa, il teorema dei residui, a volte chiamato teorema dei residui di Cauchy, è uno strumento utile per valutare gli integrali di linea di funzioni analitiche su curve chiuse. Può essere utilizzato anche per calcolare integrali reali e serie infinite. Generalizza il teorema integrale di Cauchy e la formula integrale di Cauchy.

Sia U un sottoinsieme aperto semplicemente connesso del piano complesso contenente un elenco finito di punti a_1, \dots, a_n , e f una funzione definita e olomorfa su $U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Sia γ una curva rettificabile³ chiusa in U che non incontra nessuno dei punti a_k , e denotiamo

3 Si parla della lunghezza di un arco, che è un numero reale positivo che misura l'estensione di un arco o di una curva. "Benché la definizione di lunghezza di un segmento o di un cammino poligonale sia chiara da tempo, una definizione generale soddisfacente di lunghezza d'arco è relativamente recente. Questo problema, chiamato anche rettificazione, è stato prima affrontato per curve specifiche, e quindi risolto grazie al calcolo

il numero di avvolgimenti di γ attorno ad a_k con $I(\gamma, a_k)$. L'integrale di linea di f lungo γ è uguale a $2\pi i$ volte la somma dei residui di f nei dati punti, ciascuno contato tante volte quante γ si avvolge attorno al punto stesso.

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n I(\gamma, a_k) \text{Res}(f, a_k)$$

Sia la curva γ orientata positivamente⁴, e sia $I(\gamma, a_k) = 1$ se a_k è dentro γ e 0 se è fuori:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}(f, a_k)$$

La somma è sui punti a_k che sono dentro γ .

Definiamo il residuo

Supponiamo di avere una funzione f olomorfa. Il residuo $\text{Res}(f, c)$ di f al punto c è il coefficiente a_{-1} del termine $(z-c)^{-1}$ dello sviluppo di Laurent di f nell'intorno di c .

$$\text{Res}(f, c) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$$

dove γ è un cerchio attorno a c percorso in senso antiorario.

La serie di Laurent di una funzione complessa nell'intorno di c , è:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

dove a_n e c sono costanti, con a_n definite tramite l'integrale generalizzato di Cauchy:

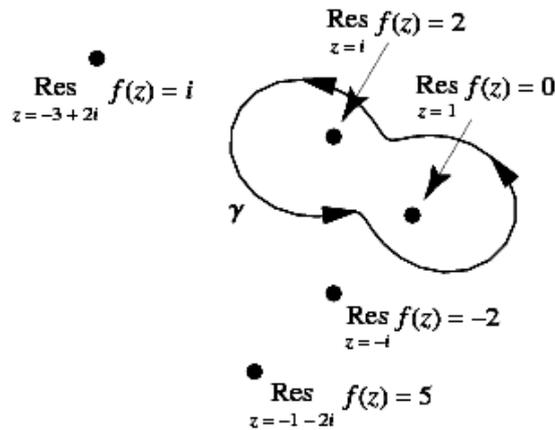
infinitesimale. La definizione risultante, accettata adesso da tutti i matematici, funziona per un insieme molto vasto di curve, dette rettificabili". https://it.wikipedia.org/wiki/Lunghezza_di_un_arco

4 Una curva orientata positivamente è una curva planare semplice chiusa (cioè una curva nel piano il cui punto di partenza è anche il punto finale e che non ha altre auto-intersezioni) tale che quando si viaggia su di essa si ha sempre la curva l'interno a sinistra (e di conseguenza, la curva esterna a destra). Se nella definizione precedente si scambia sinistra e destra, si ottiene una curva orientata negativamente.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz.$$

An amazing theorem

Alla pagina <https://mathworld.wolfram.com/ResidueTheorem.html> il teorema dei residui è definito come "amazing", ed è vero. E si propone un diagramma.



Prendiamo il contorno γ e la funzione:

$$f(z) = \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-i} - \frac{2}{z+i} + \frac{i}{z+3-2i} + \frac{5}{z+1+2i}.$$

Solo i poli a 1 e i sono contenuti nel contorno. L'integrale vale:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i(0+2) = 4\pi i$$

E non abbiamo dovuto fare integrali.

Esercizio n.1

Calcolare il residuo di un monomio: $\oint_C z^k dz$.

Dato che il percorso, per Cauchy, può essere qualsiasi, prendiamo un cerchio di raggio 1 e facciamo un cambiamento di variabile: $z \rightarrow e^{i\theta}$, $dz \rightarrow ie^{i\theta} d\theta$

$$\oint_C z^k dz = \int_0^{2\pi} i e^{i(k+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi i & \text{if } k = -1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Esercizio n.2

Calcoliamo ora l'integrale: $\oint_C \frac{e^z}{z^5} dz$ dove C è una curva chiusa semplice attorno a 0.

Si usi lo sviluppo dell'esponenziale.

$$\begin{aligned} & \oint_C \frac{1}{z^5} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \right) dz \\ & \oint_C \left(\frac{1}{z^5} + \frac{z}{z^5} + \frac{z^2}{2! z^5} + \frac{z^3}{3! z^5} + \frac{z^4}{4! z^5} + \frac{z^5}{5! z^5} + \frac{z^6}{6! z^5} + \dots \right) dz \\ & = \oint_C \left(\frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{2! z^3} + \frac{1}{3! z^2} + \frac{1}{4! z} + \frac{1}{5!} + \frac{z}{6!} + \dots \right) dz. \end{aligned}$$

Per via del risultato precedente, rimane solo un termine:

$$\oint_C \frac{1}{4! z} dz = \frac{1}{4!} \oint_C \frac{1}{z} dz = \frac{1}{4!} (2\pi i) = \frac{\pi i}{12}.$$

Il valore $1/4!$ è il residuo di $f = e^z/z^5$ a $z = 0$, e si scrive:

$$\text{Res}_0 \frac{e^z}{z^5}, \text{ or } \text{Res}_{z=0} \frac{e^z}{z^5}, \text{ or } \text{Res}(f, 0) \text{ for } f = \frac{e^z}{z^5}.$$

Zeri, poli e funzioni meromorfe

Gli zeri delle funzioni olomorfe, che sono punti z dove $f(z) = 0$, giocano un ruolo importante.

Per le funzioni meromorfe, in particolare, esiste una dualità tra zeri e poli.

Una funzione f di variabile complessa z è meromorfa nell'intorno di un punto z_0 se f o la sua funzione reciproca $1/f$ è olomorfa in qualche intorno di z_0 (cioè, se f o $1/f$ è

differenziabile in un intorno di z_0). Se z_0 è uno zero di $1/f$, allora è un polo di f .

Si definisce funzione meromorfa su un sottoinsieme aperto D del piano complesso, una funzione che è olomorfa su tutto D ad esclusione di un insieme di punti isolati che sono poli della funzione stessa. Ogni funzione meromorfa su D può essere espressa come rapporto di due funzioni olomorfe (con la funzione denominatore diversa dalla costante 0) definite sull'intero D : i poli della funzione meromorfa si ritrovano allora come zeri del denominatore.

Ma che cosa è un "polo"?

Ecco che cosa troviamo in Wikipedia.

In analisi complessa, per polo di una funzione olomorfa $f(z)$, si intende una singolarità isolata z_0 , della funzione per cui, al limite per z che tende a z_0 , la funzione ha come limite l'infinito. Il polo si distingue dalla singolarità eliminabile e dalla singolarità essenziale, per le quali tale limite rispettivamente è finito e non esiste. "La conoscenza delle caratteristiche dei poli di una funzione olomorfa consente di determinare molte delle sue caratteristiche; inoltre lo studio dei poli è fondamentale nel calcolo dei residui".

Un polo è una singolarità isolata. Ma che cosa è una "singolarità isolata"?

In analisi complessa, una singolarità isolata è un punto in cui una funzione olomorfa non è definita mentre risulta definita in ogni altro punto vicino. La funzione olomorfa può avere nel punto essenzialmente tre tipi di comportamenti diversi, e a seconda del comportamento la singolarità è detta eliminabile, polo o essenziale.

Il polo è in sostanza un tipo di singolarità di funzione, vicino alla quale la funzione si comporta in modo relativamente regolare, in contrasto con singolarità essenziali, come 0 per la funzione logaritmo, e i punti di diramazione.

Una definizione equivalente di polo può essere data tramite serie di Laurent. Una singolarità isolata z_0 è un polo se e solo se lo sviluppo locale in serie di Laurent è del tipo:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \dots + \frac{b_k}{(z - z_0)^k},$$

con $b_k \neq 0$, per qualche $k > 0$.

Per un polo semplice:

$$\text{Res}(f, c) = \lim_{z \rightarrow c} (z - c) f(z).$$

Per un polo di ordine n :

$$\text{Res}(f, c) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow c} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - c)^n f(z)).$$

Vediamo per completezza anche come definire le singolarità eliminabili ed essenziali.

Sia z_0 un punto contenuto in un insieme aperto A del piano complesso. Una funzione

$$f : A \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

La singolarità z_0 è **eliminabile** se esiste il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}.$$

E le condizioni seguenti sono equivalenti:

- I termini negativi della serie di Laurent sono tutti nulli, cioè $a_n = 0$ per ogni $n < 0$.
- Il modulo $|f(z)|$ è limitato in un intorno di z_0 .
- La funzione si estende ad una funzione continua su tutto A ,
- La funzione si estende ad una funzione olomorfa su tutto A .

Esempi di singolarità eliminabili:

Esempio: la funzione $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ presenta una singolarità eliminabile in $z = 0$.

Esempio: la funzione $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$ presenta un polo di ordine 2 ($n = 2$), detto anche polo doppio, in $z = 1$.

Per quanto riguarda la singolarità essenziale, possiamo dire questo.

Una singolarità essenziale è una singolarità che non rientra nei casi precedenti, cioè che non sia né una singolarità eliminabile né un polo. Le condizioni seguenti sono equivalenti a questa:

- Esiste un numero infinito di termini negativi non nulli della serie di Laurent.
- Il modulo della funzione non ha limite per z tendente a z_0 .

Esempio di singolarità essenziale:

La funzione $f(z) = \exp(1/z)$ definita nel piano complesso tranne lo zero, ha una singolarità essenziale in 0. Infatti lo sviluppo di Laurent è:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$$

che ha infiniti termini negativi non nulli.

Anche il fatto che la funzione $|f(z)|$ non ammetta limite per z che tende a 0 è sufficiente per dimostrare l'essenzialità della singolarità.

Corollario

Ogni funzione $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, scritta come rapporto di due polinomi, sia definita nell'aperto A ottenuto rimuovendo da \mathbb{C} le radici del polinomio q . Se queste non sono anche radici di del polinomio p , in ogni punto che è radice di q la funzione ha un polo, il cui ordine è pari alla molteplicità della radice.

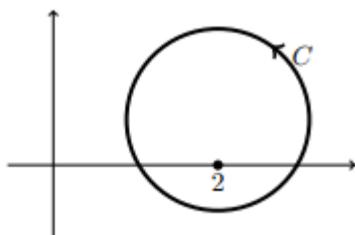
Esercizi facili

Ecco alcuni esempi dalle belle note di Jeremy Orloff <https://math.mit.edu/~jorloff/18.04/notes/topic4.pdf> archiviato <https://web.archive.org/web/20200516181914/https://math.mit.edu/~jorloff/18.04/notes/topic4.pdf>

Ricordiamo la formula:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw$$

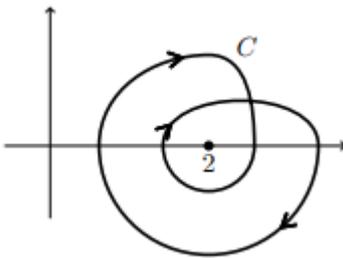
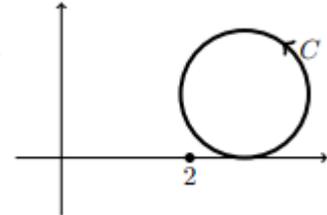
Calcoliamo un po' di integrali facili da svolgere.



Calcolare $\oint_C \frac{\exp(z^2)}{(z-2)} dz$ sulla curva in figura a sinistra. Il polo è in 2.

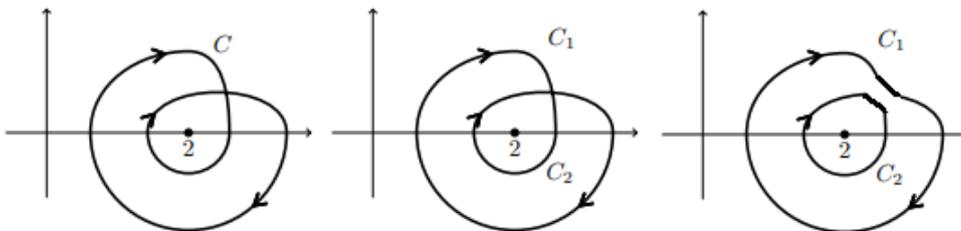
Per $f(w)$ prendiamo $\exp(z^2)$. Per la formula data prima, l'integrale I è pari a $I = 2\pi i e^4$.

Ripetere il calcolo per il contorno in figura, che escluda il polo in 2.
 Il teorema di Cauchy dice che l'integrale è pari a zero.



Cambiamo ora il cammino e poniamo come C.
 In questo caso si gira due volte attorno al punto 2.

Per la soluzione prendiamo due curve come in figura.



Entrambe girano attorno al punto 2 in senso orario. Il verso porta ad un segno negativo.

$$\int_C \frac{f(z)}{z-2} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-2} dz + \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-2} dz = -2\pi i f(2) - 2\pi i f(2) = -4\pi i f(2).$$

Ricordiamo che c'è anche la formula relativa alle derivate:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Calcolare $I = \oint_C \frac{\exp(2z)}{z^4} dz$ su un contorno circolare di raggio 1 attorno all'origine, percorso in verso antiorario. La funzione $f(w)$ sia $\exp(2z)$.

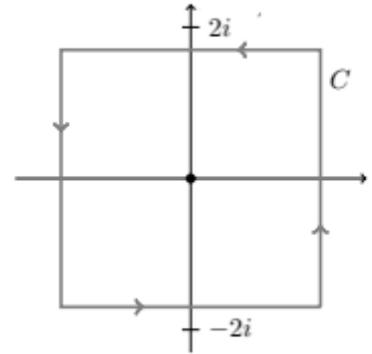
$$I = \oint_C \frac{\exp(2z)}{z^4} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} f'''(0) = \frac{8}{3} \pi i$$

Calcolare $I = \oint_C \frac{\cos(z)}{z(z^2+8)} dz$ sul contorno C dato in figura.

Prendiamo $f(z) = (\cos z)/(z^2+8)$.

Ricordando la rappresentazione di Cauchy:

$$I = \oint_C \frac{(\cos z)/(z^2+8)}{z} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \frac{1}{8} = \frac{\pi i}{4}$$

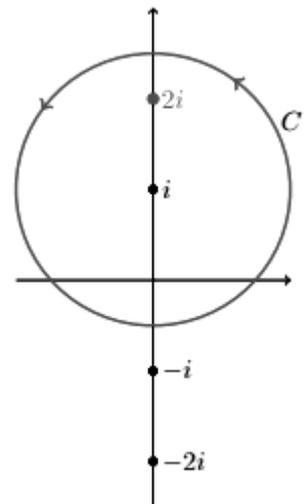


Calcolare l'integrale $\oint_C \frac{1}{(z^2+4)^2} dz$ sul contorno in figura a destra.

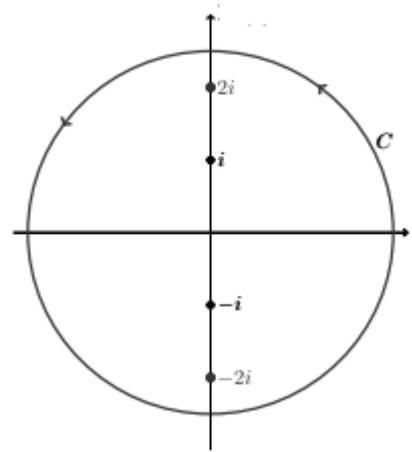
Scriviamo $\frac{1}{(z^2+4)^2} = \frac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2}$. Sia: $f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2}$.

Per la formula della derivata:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{(z^2+4)^2} dz &= \int_C \frac{f(z)}{(z-2i)^2} dz = 2\pi i f'(2i) \\ &= 2\pi i \left[\frac{-2}{(z+2i)^3} \right]_{z=2i} = \frac{4\pi i}{64i} = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

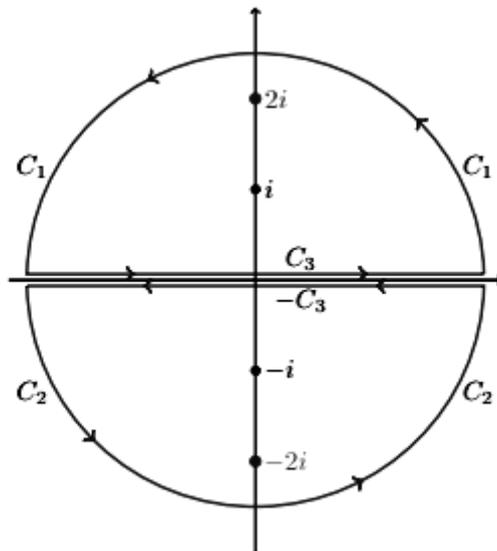


Calcolare l'integrale $\oint_C \frac{z}{z^2+4} dz$ sulla curva C a destra.



Le singolarità sono in $2i$ e $-2i$. Ci serviremo di due funzioni che si riferiscano ai due poli.

Si divide la curva in due pezzi.



Le due singolarità possono essere riferibili alle seguenti due funzioni:

$$f_1(z) = \frac{z}{z+2i}; f_2(z) = \frac{z}{z-2i} \quad \text{e quindi:} \quad \frac{z}{z^2+4} = \frac{f_1(z)}{z-2i} = \frac{f_2(z)}{z+2i}$$

L'integrale diventa:

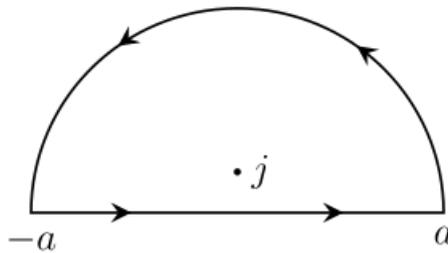
$$\int_C \frac{z}{z^2+4} dz = \int_{C_1+C_3-C_3+C_2} \frac{z}{z^2+4} dz = \int_{C_1+C_3} \frac{f_1(z)}{z-2i} dz + \int_{C_2-C_3} \frac{f_2(z)}{z+2i} dz$$

Si ha così: $2\pi i(f_1(2i)+f_2(-2i))=2\pi i(1/2+1/2)=2\pi i$.

Esercizio n.3

Calcolare l'integrale: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1} dx$.

Supponiamo il parametro $t > 0$ e definiamo un contorno C che segua la linea reale da $-a$ ad a e poi giri in senso antiorario lungo un semicerchio centrato in 0 da a a $-a$.



Sia il raggio del semicerchio maggiore di 1, affinché l'unità immaginaria sia racchiusa nella curva.

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_C f(z) dz = \int_C \frac{e^{itz}}{z^2+1} dz.$$

La funzione ha singolarità quando (z^2+1) è zero. Si ha però che: $z^2+1 = (z+i)(z-i)$, e la singolarità capita solo per $z = i$ o $z = -i$. Solo uno di questi punti è nella regione che ha come contorno C .

Riscriviamo la funzione:

$$\frac{e^{itz}}{z^2+1} = \frac{e^{itz}}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) = \frac{e^{itz}}{2i(z-i)} - \frac{e^{itz}}{2i(z+i)},$$

Il residuo della funzione a $z = i$ è:

$$\text{Res}_{z=i} f(z) = \frac{e^{-t}}{2i}.$$

Per il teorema dei residui:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \frac{e^{-t}}{2i} = \pi e^{-t}.$$

Dividiamo l'integrale lungo C in due parti:

$$\int_{\text{retta}} f(z) dz + \int_{\text{arco}} f(z) dz = \pi e^{-t}$$

Quindi:

$$\int_{-a}^a f(z) dz = \pi e^{-t} - \int_{\text{arco}} f(z) dz.$$

Valutiamo il contributo sull'arco (con una maggiorazione):

$$\left| \int_{\text{arco}} \frac{e^{itz}}{z^2 + 1} dz \right| \leq \pi a \cdot \sup_{\text{arco}} \left| \frac{e^{itz}}{z^2 + 1} \right| \leq \pi a \cdot \sup_{\text{arco}} \frac{1}{|z^2 + 1|} \leq \frac{\pi a}{a^2 - 1},$$

Di conseguenza:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\pi a}{a^2 - 1}$$

E quindi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-t}$$

Esercizio n.4

Calcolare l'integrale proposto in Cutri, A. (2013) in "Teorema dei residui: applicazioni".

www.mat.uniroma2.it/~cutri/lezionemmi16_12_13.pdf OVVERO

https://web.archive.org/web/20200922110509/http://www.mat.uniroma2.it/~cutri/lezionemmi16_12_13.pdf

$$\oint \frac{z^2 - 2z}{(x+1)^2(z^2+4)^2} dz \quad \text{lungo la curva: } \gamma = \frac{3}{2}e^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

La funzione f ha singolarità isolate: $z_0 = -1, z_1 = 2i, z_2 = -2i$

Solo la prima delle singolarità è contenuta nella curva d'integrazione. Calcoliamo il residuo:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -1) &= \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{z^2 - 2z}{(z^2 + 4)^2} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(2z - 2)(z^2 + 4) - 4z(z^2 - 2z)}{(z^2 + 4)^3} = -\frac{8}{125} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\oint \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z^2 + 4)^2} dz = -\frac{16i\pi}{125}$$

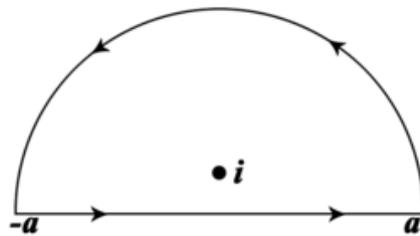
Si veda in Cutri, A. (2013) anche il calcolo dell'integrale $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin t} dt$

Esercizio n.5

Consideriamo il calcolo dell'integrale: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$.

Per valutare questo integrale, guardiamo alla funzione a valori complessi: $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$

La funzione ha singolarità in $i, -i$. Scegliamo un contorno che racchiuda l'integrale reale; è conveniente un semicerchio con diametro limite sulla linea reale (che va da, diciamo, $-a$ ad a). Si chiami tale contorno C .



Utilizziamo il metodo dei residui. Notiamo che:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2} = \frac{1}{(z + i)^2(z - i)^2}$$

L'unico polo che c'è nella curva chiusa è quello in i .

Si consideri la serie di Laurent di $f(z)$ su i , che è l'unica singolarità che dobbiamo considerare. Allora abbiamo:

$$f(z) = \frac{-1}{4(z-i)^2} + \frac{-i}{4(z-i)} + \frac{3}{16} + \frac{i}{8}(z-i) + \frac{-5}{64}(z-i)^2 + \dots$$

Usiamo il residuo:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{1}{(z^2+1)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Non è però questo l'integrale che vogliamo, che è invece $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

L'integrale sul contorno C è fatto da due contributi, uno lungo l'asse reale e l'altro lungo la semicirconferenza. Se mandiamo il raggio all'infinito, il contributo lungo la semicirconferenza tende a zero e resta solo il contributo lungo l'asse reale e quindi $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio n.6

Si calcoli $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$. Ecco come *Ifrin*, amministratore del sito youmath.it, risolve l'integrale.

La funzione ha quattro poli: $z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_1 = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_3 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$

La funzione si può scrivere come: $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$

La funzione è pari e quindi: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$. Lavoriamo con $\oint \frac{1}{1+z^4} dz$.

Prendiamo la curva C nel piano complesso tale che:

$$C = [-R, R] \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}.$$

Solo due delle singolarità sono dentro la curva C e sono $z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_1 = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, se $R > 1$.

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_C \frac{1}{z^4 + 1} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{z^4 + 1} + \int_{C_R} \frac{1}{z^4 + 1} = 2\pi i \sum_{k=0}^1 \operatorname{Res}_f(z_k)$$

dove:

$$\operatorname{Res}_f(z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z)$$

Si usano: $(z - z_0) f(z) = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}$ e $(z - z_1) f(z) = \frac{1}{(z - z_0)(z - z_2)(z - z_3)}$ e

quindi:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{z^4 + 1} dz &= \int_{-R}^R \frac{1}{z^4 + 1} dz + \int_{C_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^1 \operatorname{Res}_f(z_k) = \\ &= 2\pi i \left(-\frac{i}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Però, quello che si vuol calcolare è:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(z) dz$$

Concentriamoci sul contributo all'integrale lungo la semicirconferenza di raggio R:

$$\int_{C_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz$$

Su questo pezzo del contorno:

$$|f(Re^{i\theta})| = \left| \frac{1}{(R^4 e^{4i\theta}) + 1} \right| \leq \frac{1}{|R^4 e^{4i\theta}| - 1} = \frac{1}{R^4 - 1} \leq \frac{2}{R^4}$$

Il modulo dell'integrale è quindi più piccolo di una quantità che tende a zero per R che tende all'infinito:

$$\left| \int_{C_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz \right| \leq \frac{2}{2R^4} \int_0^{2\pi R} d\theta = \frac{2\pi}{R^3}$$

Quando $R \rightarrow \infty$, $\frac{2\pi}{R^3} \rightarrow 0$ da cui $\left| \int_{C_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz \right| \rightarrow 0$

Di conseguenza:

$$\int_{C_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz \rightarrow 0 \quad \text{per } R \rightarrow \infty$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C \frac{1}{z^4 + 1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{z^4 + 1} dz + \int_{C_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{z^4 + 1} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^4 + 1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{z^4 + 1} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

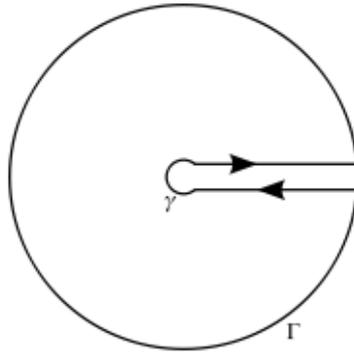
da cui:

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{1}{z^4 + 1} dz = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$

Esercizio n.7

Consideriamo l'integrale: $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 6x + 8} dx$. Usiamo il complesso: $I = \oint_C \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 6z + 8} dz$

Useremo la relazione $\sqrt{z} = \exp(1/2 \log z)$. Per calcolare l'integrale usiamo un contorno "a serratura".



Il contorno C consiste in un cerchio piccolo di raggio ε intorno all'origine, due segmenti antiparalleli tra loro, uno sopra all'asse reale positivo e uno sotto, e un cerchio grande. Si noti che $z = -2$ e $z = -4$ stanno dentro al cerchio grande. Questi sono i due poli rimanenti, ottenibili fattorizzando il denominatore della funzione da integrare. Il punto di diramazione in $z = 0$ è evitato girando intorno all'origine.

Sia γ il cerchio piccolo di raggio ε , Γ il più grande, con raggio R , allora

$$\int_C = \int_{\varepsilon}^R + \int_{\Gamma} + \int_R^{\varepsilon} + \int_{\gamma}$$

Si può far vedere che gli integrali lungo Γ e γ tendono entrambi a 0 per $\varepsilon \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$.

Si scriva $\sqrt{z} = \exp(1/2 \log z)$, sul contorno fuori dal taglio. L'argomento varia di 2π lungo γ . Allora, quando ci muoviamo sul tratto sotto il taglio:

$$\begin{aligned} \int_R^{\varepsilon} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 6z + 8} dz &= \int_R^{\varepsilon} \frac{e^{\frac{1}{2} \text{Log } z}}{z^2 + 6z + 8} dz = \int_R^{\varepsilon} \frac{e^{\frac{1}{2}(\log |z| + i \arg z)}}{z^2 + 6z + 8} dz \\ &= \int_R^{\varepsilon} \frac{e^{\frac{1}{2} \log |z|} e^{\frac{1}{2}(2\pi i)}}{z^2 + 6z + 8} dz = \int_R^{\varepsilon} \frac{e^{\frac{1}{2} \log |z|} e^{\pi i}}{z^2 + 6z + 8} dz \\ &= \int_R^{\varepsilon} \frac{-\sqrt{z}}{z^2 + 6z + 8} dz = \int_{\varepsilon}^R \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 6z + 8} dz. \end{aligned}$$

$$\int_C \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 6z + 8} dz = 2 \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 6x + 8} dx.$$

Usando il teorema dei residui e la formula integrale di Cauchy, e considerando:

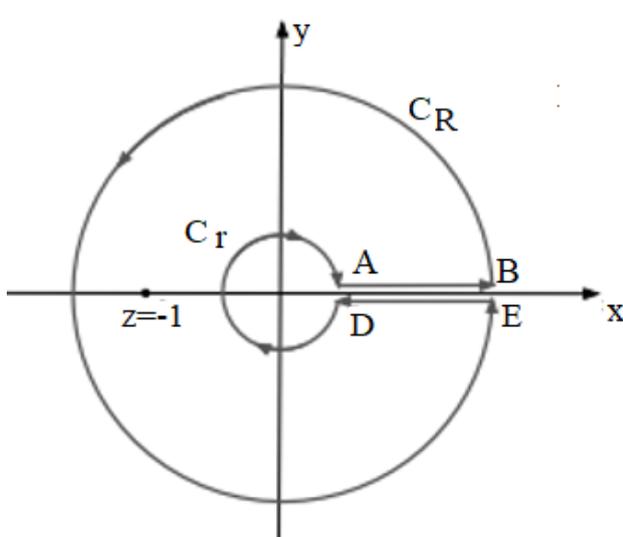
$$\frac{\sqrt{x}}{(x+4)(x+2)} = \frac{\sqrt{x}/(x+4)}{(x+2)} = \frac{\sqrt{x}/(x+2)}{(x+4)}$$

$$\pi i \left(\frac{i}{\sqrt{2}} - i \right) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 6x + 8} dx = \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Esercizio n.8

Questo è un problema proposto negli "Appunti di Metodi Matematici della Fisica", Rodolfo Figari e Raffaele Carlone, 5 giugno 2018. <https://www.docenti.unina.it/webdocenti-be/allegati/materiale-didattico/677827> oppure <https://web.archive.org/web/20200922111627/> <https://www.docenti.unina.it/webdocenti-be/allegati/materiale-didattico/677827>

Calcolare l'integrale: $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$



La funzione si comporta come $x^{-1/2}$ nell'intorno dell'origine e come $x^{-3/2}$ all'infinito, quindi l'integrale converge.

Per il calcolo prendiamo la funzione:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}(1+z)}$$

Eliminiamo la semiretta reale da 0 ad infinito dal piano complesso. L'asse reale è quindi separato in un asse superiore, che corrisponde all'argomento $\theta=0$ ed un asse inferiore dove l'argomento ha valore $\theta=2\pi$.

Prendiamo un percorso come quello nella figura.

C'è un polo nel punto $z = -1 = e^{i\pi}$. Si calcola l'integrale:

$$\oint_C \frac{1}{\sqrt{z}(z+1)} dz = \int_{C_R} + \int_{ED} + \int_{C_r} + \int_{AB} = 2\pi i \sum_k \text{Res}_{z_k}(f) = 2\pi i \text{Res}_{-1}(f)$$

Per il contributo lungo i due segmenti AB ed ED, si deve tener conto che su AB si ha $z = x e^{i0}$ e su ED si ha $z = x e^{i2\pi}$.

$$\int_{ED} = \int_R^r \frac{(x e^{2\pi i})^{-1/2}}{x e^{2\pi i} + 1} e^{2\pi i} dx = \int_r^R \frac{x^{-1/2}}{x+1} dx$$

$$\int_{AB} = \int_r^R \frac{x^{-1/2}}{x+1} dx$$

Per i cerchi grande e piccolo si ha che gli integrali si annullano quando quello grande tende a infinito e quello piccolo a zero. Infatti $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$.

Nel limite per r che tende a zero e R che tende ad infinito, si ottiene:

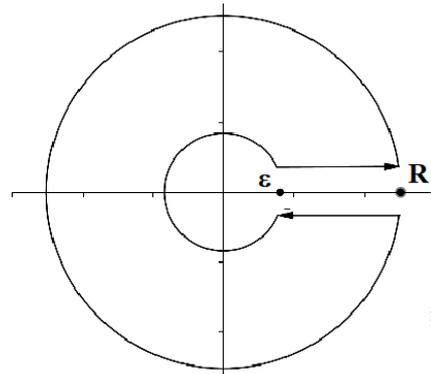
$$2 \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = 2\pi i \text{Res}_{-1}(f) = 2\pi$$

Esercizio n.9

Da https://it.wikitolern.org/Corso:Analisi_complessa_per_la_fisica/Risoluzione_di_integrali/Introduzione OVVVERO https://web.archive.org/web/20200922112238/https://it.wikitolern.org/Corso:Analisi_complessa_per_la_fisica/Risoluzione_di_integrali/Introduzione

Si calcoli: $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$.

Si estenda la funzione al piano complesso.



Si usi la curva data sopra per l'integrazione nel piano complesso.

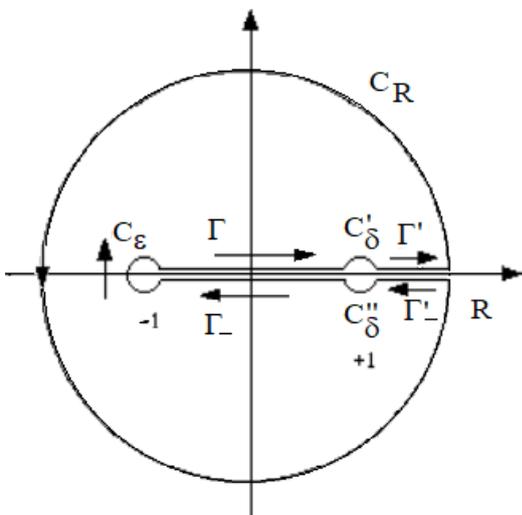
$$\oint_{\Gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z^2} dz = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[\int_{\epsilon}^R f(z) dz + \oint_{C_R} f(z) dz + \int_R^{\epsilon} f(z) dz + \oint_{C_{\epsilon}} f(z) dz \right].$$

Studiando i limiti, si può vedere che l'integrale lungo il cammino all'infinito e quello intorno allo zero sono nulli. Restano solo i due tratti orizzontali.

$$\oint_{\Gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z^2} dz = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[\int_{\epsilon}^R f(z) dz + \int_R^{\epsilon} f(z) dz \right].$$

La radice di z è una funzione polidroma, pertanto il limite della quantità dentro la parentesi quadra tende a $2I$.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z^2} dz = \frac{1}{2} \left[2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f; z_k) \right].$$



Esercizio n.10

Svolgiamo un esercizio che troviamo nel testo di Gino Tironi, 2002.

Si calcoli l'integrale:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} \quad \text{con } a \text{ reale e } < -1.$$

La funzione $f(z)$ ha un polo semplice in $z = a$ e ha due punti di diramazione in $z = \pm 1$. Se nel piano della variabile z eseguiamo un taglio da

-1 a 1, impediamo a z di compiere un cammino circolare intorno ai punti $z = -1$ e $z = 1$, separatamente. Limitiamo gli argomenti di $(z-1)$ e di $(z+1)$ tra 0 e 2π .

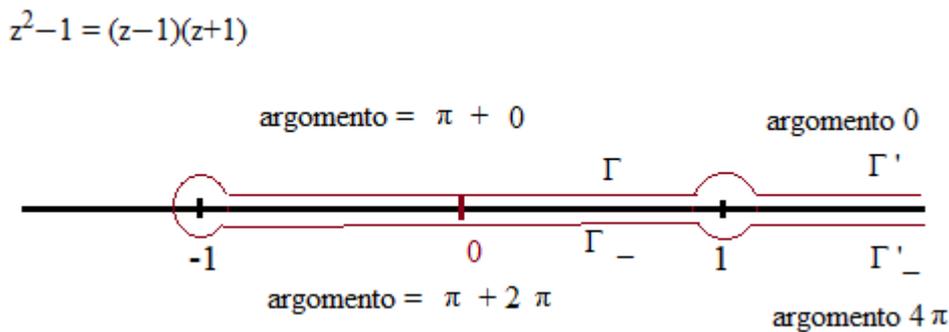
Il cammino d'integrazione che si usa $\Gamma_{\epsilon,\delta,R}$ è mostrato nella figura precedente. Sul cammino mostrato in figura si integra la funzione $f(z) = \frac{1}{(z-a)\sqrt{1-z^2}}$.

Il residuo in a è pari a $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$. Rimane quindi:

$$\int_{C_R} f(z) dz + \int_{\Gamma'_-} + \int_{C''_\delta} + \int_{\Gamma_-} + \int_{C_\epsilon} + \int_{\Gamma} + \int_{C'_\delta} + \int_{\Gamma'} = \frac{2\pi i}{\sqrt{a^2-1}}$$

Gli integrali lungo i cammini Γ' e Γ'_- si elidono. Sia $z^2-1 = (z-1)(z+1)$. Lungo Γ' si ha che z^2-1 ha modulo x^2-1 ed argomento pari a 0 ; lungo Γ'_- il modulo è sempre x^2-1 , mentre l'argomento è 4π . Per valutare l'argomento si usi proprio l'espressione $z^2-1 = (z-1)(z+1)$. I contributi all'integrale, calcolati lungo due cammini orientati in verso opposto si elidono.

Lungo Γ_- , $(z-1)$ ha modulo pari a $(1-x)$ e argomento π ; $(z+1)$ ha modulo $(x+1)$ e argomento 2π . Dunque $(z^2-1)^{1/2} = \sqrt{(1-x^2)} \cdot e^{i 3\pi/2}$ lungo Γ_- . Invece lungo Γ si ha, con considerazioni analoghe, $\sqrt{(z^2-1)} = \sqrt{(1-x^2)} \cdot e^{i \pi/2}$.



Tenuto conto di questi calcoli si ha (attenzione che le radici sono al denominatore):

$$\int_{C_R} f(z) dz + \int_{C'_\delta} + e^{-\frac{3\pi}{2}} \int_{1-\delta}^{-1+\varepsilon} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} + \int_{C_\varepsilon} +$$

$$+ e^{-\frac{\pi}{2}} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\delta} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} + \int_{C'_\delta} = \frac{2\pi i}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Con considerazioni uguali a quelle già fatte in esempi precedenti, si può mostrare che per $R \rightarrow \infty$, tende a zero anche l'integrale su C_R ; analogamente C_ε tende a zero per $\varepsilon \rightarrow 0$ e pure gli integrali sulle semicirconferenze di raggio δ che hanno limite 0 per $\delta \rightarrow 0$. Passando al limite per $R \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, rimane

$$-2i \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\pi i}{\sqrt{a^2-1}},$$

e quindi:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

Residuo all'infinito

Ci occupiamo ora del residuo all'infinito. Aiutiamoci con il testo che troviamo al link https://it.wikitollearn.org/Corso:Analisi_complessa_per_la_fisica/Funzioni_nel_piano_complesso/Il_teorema_dei_residui ovvero

https://web.archive.org/web/20170416182726/https://it.wikitollearn.org/Corso:Analisi_complessa_per_la_fisica/Funzioni_nel_piano_complesso/Il_teorema_dei_residui

Ci sono delle funzioni che possono ammettere punti di singolarità all'infinito; dunque è necessario definire il concetto di residuo all'infinito per poter calcolare integrali di funzioni siffatte.

Innanzitutto inquadrano il problema che ci poniamo di analizzare: sia f una funzione analitica in una regione $\Omega \subset \mathbb{C}$ illimitata, tranne che in un numero finito di singolarità z_1, z_2, \dots, z_n al finito e possibilmente in $z = \infty$. In particolare si richiede che pure la singolarità nel punto all'infinito sia isolata, ovvero che essa non sia un punto di accumulazione per le singolarità della $f(z)$. Ad esempio, la funzione $f(z) = 1/\sin(z)$ non sarà parte della discussione, dato che essa presenta all'infinito un punto di accumulazione per le singolarità.

Se si hanno singolarità isolate, sarà possibile determinare una curva chiusa Γ tale che il suo esterno non contenga altre singolarità se non, al più (nel caso in cui essa lo sia), l'infinito. Sia Ω' la porzione illimitata di Ω che non contiene punti di singolarità al finito.

Prendiamo la sfera di Riemann. Essa è una particolare superficie di Riemann, definita aggiungendo un "punto all'infinito" al piano complesso. È anche chiamata piano complesso esteso, in simboli $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$. Consideriamo ora un generico cammino chiuso Γ che ruota in senso antiorario, come da convenzione, attorno ai punti di singolarità al finito della funzione $f(z)$. Se si usa la sfera di Riemann, si ha che Γ vista dal polo nord viene percorsa in verso orario.

Ponendoci in questa condizione diamo la seguente definizione.

Si definisce residuo all'infinito della funzione f la quantità:

$$\mathcal{R}es(f; z = \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\gamma} f(z) dz.$$

Ci si può chiedere se è possibile vedere tale residuo come uno dei coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent della funzione f , così come per le singolarità al finito. A questa domanda è possibile rispondere positivamente.

Si definisce:

$$\mathcal{R}es(f; z = \infty) = a'_1$$

dove:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n z^n.$$

da cui:

$$a'_1 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz \equiv \mathcal{R}es(f; z = \infty).$$

In sostanza: sia f una funzione analitica su Ω sottoinsieme illimitato di \mathbb{C} con l'infinito, tranne che, al più, in un numero finito di singolarità z_1, z_2, \dots, z_n . Sia γ un cammino chiuso in Ω che gira attorno ad alcuni dei punti di singolarità al finito. Allora si ha che:

$$\oint f(z) dz = - \oint_{-\gamma} f(z) dz = -2\pi i \sum_k \mathcal{R}es(f; z_k) - 2\pi i \mathcal{R}es(f; z = \infty)$$

(senso orario)

Ove la sommatoria è estesa a tutti i punti di singolarità esterni alla curva γ . Quindi, se diciamo L la curva chiusa che circola attorno all'infinito in senso antiorario:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = -2\pi i \sum_k \text{Res}(f; z_k) + \oint_L f(z)dz$$

Una applicazione: uso dei residui nella quantizzazione di Bohr-Sommerfeld

Vediamo ora un'applicazione del discorso che abbiamo fatto sugli integrali nel piano complesso alla meccanica quantistica. Prendiamo dai Rif. [3,4].

Discutere il moto dell'elettrone attorno al nucleo. Trovare i livelli d'energia di un elettrone che si muove in orbita ellittica attorno ad un nucleo di carica Ze .

Il moto dell'elettrone è descritto da due coordinate, r, ϕ con momenti generalizzati

$$p_r = m\dot{r}, p_\phi = m r^2 \dot{\phi}$$

In un campo centrale si hanno due integrali del moto, il momento angolare nel piano di rotazione e l'energia totale:

$$p_\phi = m r^2 \dot{\phi} = L$$

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m r^2 \dot{\phi}^2}{2} - \frac{Ze^2}{r} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r}$$

Da questa relazione si ha che:

$$p_r = \sqrt{2mE + \frac{2mZe^2}{r} - \frac{L^2}{r^2}}$$

I valori estremi del raggio sono quelli per cui \dot{r} è nullo. Sono r_1, r_2

La quantizzazione di Bohr-Sommerfeld richiede che:

$$\oint p_\phi d\phi = 2\pi L = n_\phi h \quad \text{da cui:} \quad L = n_\phi h / 2\pi = n_\phi \hbar \quad \text{e} \quad \oint p_r dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} p_r dr = n_r h$$

Il secondo integrale è del tipo: $I = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}} dr$, dove $B = me^2$ con $Z=1$,
 $A = 2mE$, $C = -L^2$. Introduciamo la funzione complessa:

$$f(z) = \sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}}$$

dove z è la variabile complessa. Si taglia il piano tra le due radici, r_1, r_2 e si assume la radice positiva sotto il taglio e negativa sopra il taglio. Si calcoli l'integrale (si veda anche la discussione fatta in seguito), dove la curva Γ contorna il taglio in senso antiorario, così da avere:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{r_1}^{r_2} |f| dr + \int_{r_2}^{r_1} [-|f|] dr = 2I$$

In definitiva, si ha che:

$$\oint p_r dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} p_r dr = 2\pi i (B/\sqrt{(A)} - \sqrt{(C)}) = n_r h$$

da cui:

$$2\pi i \left(\frac{me^2}{i\sqrt{(2m|E|)}} + in_{\phi} \hbar \right) = n_r h$$

Introducendo poi la quantità $n = n_{\phi} + n_r$, si ha $E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$.

Ecco la discussione in dettaglio dell'integrale [5]:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{r_1}^{r_2} |f| dr + \int_{r_2}^{r_1} [-|f|] dr = 2I$$

ossia di

$$I = \int_{z'}^z \sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz \quad (*)$$

La funzione da integrare è polidroma. Si suppone che i coefficienti del trinomio:

$$A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}$$

siano reali e le radici distinte e reali, con $0 < z_1 < z_2$. Sia $A < 0$; siccome $A = 2mE$ allora vuol dire che $E < 0$ e che il sistema deve essere legato. Ne segue che il trinomio è positivo per $z_1 < z < z_2$.

L'integrazione (*) viene fatta sull'asse reale. Il radicando è supposto positivo su questo intervallo:

$$A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2} = \frac{A(z-z_1)(z-z_2)}{z^2} = C \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_1} \right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_2} \right)$$

Si avrà in z_1, z_2 i punti di ramificazione del primo ordine. Tagliando il piano lungo il segmento (z_1, z_2) dell'asse reale, la funzione diventa olomorfa e monodroma nel piano T, ossia tagliato.

Supponiamo che sia il radicale positivo sul bordo inferiore del taglio. Per passare al bordo superiore dobbiamo girare attorno ad uno dei punti di ramificazione. Sopra il taglio, il radicando sarà negativo. Calcoliamo l'integrale (*) facendo un cammino chiuso Γ che contorni il taglio, girando in senso positivo, ossia antiorario. Da z_1 a z_2 , si ha la prima parte dell'integrale; da z_2 a z_1 si ha la seconda parte che ha verso opposto alla prima. L'integrale cambia quindi segno, ma la funzione è negativa. Quindi i due pezzi dell'integrale contribuiscono con una quantità uguale.

$$\oint_{\Gamma} \sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz = 2 \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz$$

A questo punto ci si aiuta col teorema di Cauchy, che vale per le funzioni olomorfe.

Senza cambiare il valore dell'integrale, possiamo deformarlo Γ in modo continuo in Γ' , senza abbandonare il dominio dove la funzione è olomorfa. Lasciamo $z = 0$ fuori dal contorno. Prendiamo due curve che contornino l'infinito L e lo zero L' :

$$\oint_L \sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz = \oint_{\Gamma'} \sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz + \oint_{L'} \sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz$$

Definiamo il seguente integrale:

$$I = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma'} \sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz$$

Consideriamo gli intorno di $z = \infty$ e $z = 0$, e i relativi sviluppi in serie locali.

Intorno a $z = \infty$:

$$\sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} = \sqrt{A} \left[1 + \left(2\frac{B}{Az} + \frac{C}{Az^2} \right) \right]^{1/2}$$

Con la formula del binomio di Newton:

$$\sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} = \sqrt{A} \left(1 + \frac{B}{Az} + \dots \right) .$$

E' necessario ora discutere il valore di \sqrt{A} . Seguiamo la discussione in [4]. Prendiamo la funzione nella forma:

$$f = \frac{\sqrt{A(z-z_1)(z-z_2)}}{z} .$$

Quando si passa da $z < r_2$, dove la funzione f è > 0 ed ha argomento nullo, ad un punto $z > r_2$, il fattore $(z-z_2)$ ha l'argomento che varia di π , mentre quello di $(z-z_1)$ resta invariato. L'argomento di f cambia di $\pi/2$. Per i punti dell'asse (z_2, ∞) la funzione ha valori immaginari positivi. Di conseguenza \sqrt{A} deve essere un immaginario positivo. Dato che l'argomento di $\left(1 + \frac{B}{Az} + \dots \right)$ è nullo, allora $\sqrt{A} = +i|\sqrt{A}|$.

Si sviluppa poi la funzione attorno allo zero.

$$\sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} = \frac{\sqrt{C}}{z} \left[1 + 2\frac{Bz}{C} + \frac{Az^2}{C} \right]^{1/2} = \frac{\sqrt{C}}{z} \left(1 + \frac{Bz}{C} + \dots \right)$$

Quando passiamo dai punti $z > r_1$ sul lato inferiore del taglio, ai punti $z < r_1$, l'argomento

decrese di π , dato che il moto avviene nella direzione positiva (oraria). L'espressione della funzione è un immaginario negativo sul segmento $(0, z_1)$: $\sqrt{C} = -i|\sqrt{C}|$.

Per il teorema di Cauchy e dei residui:

$$\oint_L \sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz = \oint_{\Gamma'} \sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz + \oint_{L'} \sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz$$

dove L, L' sono, come già detto, curve chiuse percorse in senso antiorario attorno all'infinito ed allo zero rispettivamente, si ha che:

$$\oint_L \sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz = \sqrt{A} \oint_L \left(1 + \frac{B}{Az} + \dots\right) dz = i 2\pi \frac{B}{\sqrt{A}}$$

$$\oint_{L'} \sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz = \sqrt{C} \oint_{L'} \left(1 + \frac{Bz}{C} + \dots\right) dz = i 2\pi \sqrt{C}$$

In definitiva:

$$I = \frac{1}{2} \left\{ \oint_L \sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz - \oint_{L'} \sqrt{A + \frac{2B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz \right\} = i\pi \left(\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C} \right).$$

Ricordiamo che, nel problema quantistico, $B = me^2$, $A = 2mE$, $C = -L^2$.

Applicazione: gli integrali di Fresnel

Aiutiamoci con la pagina https://www.wikiwand.com/it/Integrale_di_Fresnel

Gli integrali di Fresnel, $S(x)$ e $C(x)$, sono due funzioni speciali trascendenti introdotte in ottica dall'ingegnere francese Augustin-Jean Fresnel per studiare i fenomeni della diffrazione.

$$S(x) := \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$$

$$C(x) := \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$$

Proprietà:

- $S(x)$ e $C(x)$ sono **funzioni dispari**.
- $C(iz) = iC(z)$
- $S(iz) = -iS(z)$

Gli integrali di Fresnel non possono essere calcolati in forma chiusa in termini di funzioni elementari, salvo casi particolari. Infatti essi convergono all'infinito e si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \frac{1}{2}.$$

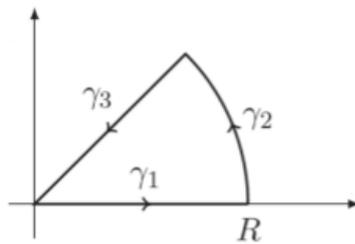
Vediamo di dimostrare tale limite. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Prendiamo:

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx\right).$$

Per calcolare il secondo integrale si sfrutta il teorema di Cauchy scegliendo come cammino chiuso di integrazione la curva chiusa γ suddivisibile nei tre tratti γ_1 , γ_2 e γ_3 come in figura:



$$\oint_{\gamma} e^{iz^2} dz = \int_{\gamma_1} e^{iz^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz + \int_{\gamma_3} e^{iz^2} dz = 0.$$

Scriviamo $z = r e^{i\theta}$. Il tratto della curva γ_3 formi un angolo di $\pi/4$ con l'asse orizzontale.

Il calcolo è dato in dettaglio alla pagina https://www.wikiwand.com/it/Integrale_di_Fresnel

Sia l'inclinazione del segmento della curva γ_3 pari a $\pi/4$.

Si ha:

$$\int_{\gamma_3} e^{iz^2} dz = \int_R^0 e^{-r^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dr,$$

Per R che tende all'infinito:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_R^0 e^{-r^2} dr = -e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

L'integrale su γ_2 per R che tende all'infinito diventa nullo.

Poiché l'integrale sul cammino chiuso deve essere nullo:

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \int_{\gamma_1} e^{iz^2} dz = - \int_{\gamma_3} e^{iz^2} dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

L'integrale diventa:

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx\right) = \Re\left(e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Integrale in parte principale

Il valore principale di Cauchy o integrale in parte principale è un metodo per assegnare un valore ad integrali impropri altrimenti indefiniti, permettendo ad esempio di definire la funzione logaritmo integrale.

Il valore principale di Cauchy è definito come l'integrale generalizzato di una funzione effettuato su intervalli simmetrici rispetto ad una singolarità, oppure, nel caso di integrali effettuati su tutto l'asse reale esteso, su intervalli simmetrici rispetto all'origine. In base al dominio di integrazione ed al tipo di singolarità della funzione integranda, il valore principale di Cauchy è definito come segue.

Per un integrale doppiamente infinito:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx$$

P.V. significa "principal value". Se la funzione integranda ha una singolarità in c nell'intervallo aperto tra a e b , allora:

$$\text{P.V.} \int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right]$$

Nel caso che tale integrale sia doppiamente infinito:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{c-\frac{1}{\varepsilon}}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{c+\frac{1}{\varepsilon}} f(x)dx \right]$$

Facciamo un esempio di uso della parte principale.

Ci permette di proporre il seguente calcolo:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-a} \frac{dx}{x} + \int_a^1 \frac{dx}{x} \right) = 0,$$

Questa è la parte principale secondo Cauchy dell'integrale $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$, altrimenti mal definito.

Logaritmo integrale

Il logaritmo integrale, detto anche funzione logaritmica integrale, è una funzione matematica molto utile nella teoria analitica dei numeri. Per x diverso da 1, il logaritmo integrale è definito come:

$$\text{li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln(y)} dy$$

dove $\ln(x)$ è il [logaritmo naturale](#) di x e con l'[integrale](#) si intende il [valore principale](#):

$$\text{li}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dy}{\ln(y)} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dy}{\ln(y)} \right)$$

La funzione $\text{li}(x)$ ha un solo zero positivo, che si presenta per $x= 1,4513692348\dots$; tale numero è noto come costante di Ramanujan-Soldner.

Relazioni di Kramers-Kronig

Vediamo anche un'applicazione degli integrali visti in precedenza. Questa applicazione riguarda le relazioni di Kramers-Kronig che legano la parte reale e la parte immaginaria di una funzione complessa. Prendono il loro nome da Hendrik Anthony Kramers e da Ralph Kronig.

Queste relazioni hanno una notevole importanza in fisica. Esse vengono usate nell'ambito dello studio dei materiali dispersivi, in particolare per avere l'indice di rifrazione espresso come funzione complessa della lunghezza d'onda [1]. La parte reale di tale funzione descrive il fenomeno della dispersione, mentre la parte immaginaria descrive il fenomeno dell'assorbimento. Parte reale ed immaginaria sono legate dalla relazione di cui ora si parlerà (relazioni di Kramers-Kronig). L'andamento della dispersione può quindi essere determinato con misure di assorbimento. Inoltre, è sempre per via delle relazioni di Kramers-Kronig si può stabilire che l'assorbimento è inevitabile in ogni mezzo che presenti dispersione e viceversa.

Sia $\chi(\omega) = \chi_1(\omega) + i\chi_2(\omega)$ una funzione complessa di variabile complessa ω e $\chi_1(\omega), \chi_2(\omega)$ siano funzioni reali. Si ponga che $\chi(\omega)$ sia analitica nel semipiano superiore di ω e che si annulli più velocemente di $1/\omega$ per il modulo di ω tendente all'infinito. Le relazioni di Kramers-Kronig hanno la forma [2]:

$$\chi_1(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_2(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' ; \quad \chi_2(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_1(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

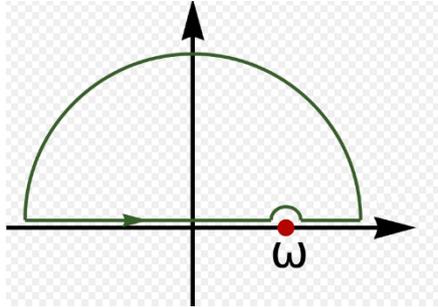
dove P indica il valore principale di Cauchy.

La parte reale ed immaginaria non sono indipendenti fra loro, e l'intera funzione si può costruire a partire da una qualsiasi di esse.

Applichiamo il teorema dei residui all'integrale: $\oint \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = 0$

Si sceglie un contorno della regione di integrazione che si sovrappone all'asse reale eccetto che nel polo in ω' , che viene circondato come mostrato nella figura data sotto, e si estende per tutto il semipiano. Si trasformi l'integrale sul cammino chiuso come la somma di integrali sui vari pezzi del cammino. Ricordiamo anche che si è scelta una funzione $\chi(\omega)$ che si annulla più velocemente di $1/\omega$ per il modulo di ω tendente all'infinito. Sopravvivono solo i contributi lungo l'asse reale e la curva che circonda il polo, e pertanto l'integrale diventa [2]:

$$(2) \quad \oint \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' - i\pi \chi(\omega) = 0$$



The contour for the derivation of Kramers-Kronig relations. 2008. Courtesy: Everett Y. You for Wikipedia. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Contour_of_KKR.svg

Nella formula (2), il secondo termine è ottenuto utilizzando la teoria del calcolo dei residui. Riscrivendo la precedente relazione si ottiene la forma compatta delle relazioni di Kramers-Kronig:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

Separando parte reale e parte immaginaria si hanno le relazioni date inizialmente.

In molti sistemi fisici si ha che $\chi(-\omega) = \chi^*(\omega)$. Di conseguenza, $\chi_1(\omega)$ è una funzione pari mentre $\chi_2(\omega)$ è dispari.

Considerando la prima relazione di Kramers-Kronig, si moltiplichi il numeratore ed il denominatore dell'integrando per $\omega' + \omega$. Si ha:

$$\chi_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' \chi_2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + \frac{\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Essendo $\chi_2(\omega)$ dispari:

$$\chi_1(\omega) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \chi_2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

In modo analogo:

$$\chi_2(\omega) = -\frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega \chi_1(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' = -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\chi_1(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Queste sono le relazioni solitamente usate per descrivere la risposta di un sistema fisico.

E così, la costante dielettrica complessa relativa può essere descritta dalle relazioni:

$$\epsilon_1(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' \epsilon_2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' ; \quad \epsilon_2(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_1(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Si ringraziano tutti coloro che si sono occupati di realizzare e modificare le pagine di Wikipedia, in Italiano ed in Inglese, relative ai vari argomenti trattati. Si ringraziano anche tutti coloro che hanno contribuito a <https://www.youmath.it>.

References

- [1] Pionna, E., & Sparavigna, A. (2009). POLARIZZAZIONE ED OTTICA NON LINEARE: Approccio Classico. Lulu, ISBN: 978-1-4092-5547-5
- [2] John D Jackson, Classical Electrodynamics, 3rd Edition, Wiley, 1999, ISBN 0-471-30932-X.
- [3] Sparavigna, A. C. (2020, March 11). Problemi di Meccanica Quantistica nelle formulazioni di Bohr-Sommerfeld e di Schrödinger. Zenodo. <http://doi.org/10.5281/zenodo.3706628>
- [4] Grechko, L.G., Sugakov, V.I., Tomasevich, O.F., & Fedorchenko, A.M. (1977). Problems in Theoretical Physics. Mir Publishers, Moscow.
- [5] Vladimir I. Smirnov (1978). Corso di Matematica Superiore III. Editori Riuniti.