Uniciencia Vol. 35(2), pp. 1-18, July-December, 2021
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470

Comparación de probabilidades en urnas: Un estudio con estudiantes de Educación Primaria

Comparing urn probabilities: A study with elementary students

Comparação de probabilidades nas urnas: um estudo com estudantes do ensino fundamental

Luis Armando Hernández-Solís[2] • Carmen Batanero[1] • María M. Gea[1] • Rocío Álvarez-Arroyo [1]

Received: *Aug/2/2020* • Accepted: *Set/14/2020* • Published: *Jul/31/2021*

Resumen

El objetivo del estudio fue explorar las estrategias que emplean niños y niñas de 6º curso de educación primaria costarricenses al comparar probabilidades en contextos de urnas. La muestra participante fue intencional y estuvo formada por 55 estudiantes de primaria. La investigación tiene un enfoque interpretativo, donde se analizan sus respuestas a un cuestionario formado por cinco ítems de comparación de probabilidades, tomados de investigaciones previas, que tienen en cuenta diferentes niveles de razonamiento proporcional. Los resultados indican que el estudiantado de la muestra resuelve con facilidad los problemas que corresponden a los primeros niveles de razonamiento proporcional, y aumentan su dificultad en los niveles superiores. Predominan las estrategias de una variable, en que se comparan solo los casos favorables o desfavorables de las dos urnas, y aunque aparecen estrategias de correspondencia, es poca la cantidad de estudiantes que muestran un razonamiento proporcional completo. Los resultados son similares, con ligeras variaciones, a los estudios previos, lo que indica que en esta tarea influye más la maduración del alumnado que la enseñanza recibida.

Palabras clave: Comparación de probabilidades; Razonamiento proporcional; Educación primaria; Educación Estadística; Urnas; Costa Rica.

Abstract

The study aimed to explore the strategies used by Costa Rican primary school students when comparing urn probabilities. The sample was intentional and consisted of 55 6th graders. Using an interpretive approach, we analyzed the children's responses to a questionnaire of five probability comparison items taken from previous studies, including different levels of proportional reasoning. Results indicate that problems in the first levels of proportional reasoning were solved easily by students, while problems at higher levels increased in difficulty. One-variable strategies, which compare only the favorable or unfavorable cases in

Luis Armando Hernández-Solís lhernandezcr@correo.ugr.es, https://orcid.org/0000-0003-2956-8102
Carmen Batanero batanero@ugr.es, https://orcid.org/0000-0002-4189-7139
María M. Gea mmgea@ugr.es, https://orcid.org/0000-0002-5229-0121
Rocío Álvarez-Arroyo rocioaarroyo@ugr.es, https://orcid.org/0000-0002-3201-8542
1 Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, España.
2 Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Estatal a Distancia, San José, Costa Rica.

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470

both urns, are predominant; although there are correspondence strategies, few students show complete proportional reasoning. Aside from slight variations, results are similar to previous studies, which suggests that this task is influenced more by the child's level of maturity than the instruction received.

Keywords: Probability comparison; proportional reasoning; primary education; statistical education; urns; Costa Rica.

Resumo

O estudo teve como objetivo explorar as estratégias aplicadas por estudantes do 6º ano do ensino fundamental costarriquenho ao comparar probabilidades no contexto das urnas. A amostragem participativa foi intencional e composta por 55 meninos e meninas do ensino fundamental. A pesquisa tem uma abordagem interpretativa, em que são analisadas as respostas desse público em um questionário conformado por cinco itens de comparação de probabilidades, coletados de pesquisas prévias que levam em consideração diferentes níveis de raciocínio proporcional. Os resultados indicam que os estudantes da amostra solucionam facilmente problemas que correspondem aos primeiros níveis de raciocínio proporcional, e aumentam a dificuldade em níveis superiores. São predominantes as estratégias de uma variável, nos quais são comparados somente os casos favoráveis ou desfavoráveis das duas urnas e, ainda que aparecem estratégias de correspondência, é pouca a quantidade de estudantes que demonstram um raciocínio proporcional completo. Os resultados são semelhantes, com ligeiras variações, aos estudos prévios, indicando que nesta tarefa a maturidade da infância influencia mais do que o ensino recebido.

Palavras-chave: comparação de probabilidades; raciocínio proporcional; ensino fundamental; educação estatística; urnas; Costa Rica.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la enseñanza de la probabilidad adquiere una gran relevancia al considerarse necesaria una cultura probabilística para la ciudadanía (Batanero, 2006; Gal, 2005). Además de ser una parte relevante de la matemática y aplicarse en otros temas curriculares, la probabilidad es necesaria hoy en muchos campos de las ciencias, donde permite describir sus leyes en fenómenos de tipo aleatorio (Borovcnik, 2011).

Una consecuencia importante y reconocida de esta es la inclusión de contenidos de probabilidad en el currículo de la Educación Primaria en países como España (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014) o Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

En Costa Rica, los actuales programas escolares de Matemática dan mayor valor a la estadística y probabilidad (MEP, 2012). Específicamente, se indican las siguientes expectativas sobre lo que el estudiantado debe aprender a lo largo de la Educación Primaria en relación con la probabilidad (MEP, 2012):

- *Primer ciclo (1º a 3º curso):* Identificar situaciones aleatorias y seguras dentro de la cotidianidad y eventos asociados con ellas. Clasificar eventos aleatorios en más o menos probables para situaciones o experimentos particulares. Identificar eventos de acuerdo con los resultados simples que están vinculados con ellos (p. 147).

UNICIENCIA Vol. 35, N°. 2, pp. 1-18. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470

- *Segundo ciclo (4º a 6º curso):* Identificar eventos más probables, menos probables o igualmente probables de acuerdo con el número de resultados simples pertenecientes a cada evento. Determinar probabilidades elementales vinculadas con eventos particulares. Plantear y resolver problemas vinculados con situaciones aleatorias (p. 247).

Es importante, entonces, analizar si el niño o la niña cuentan con las competencias necesarias para abordar con éxito estos contenidos, así como sus posibles dificultades, para que el profesorado las pueda tener en cuenta en su planificación educativa. Hasta ahora no se había realizado investigación sobre el razonamiento probabilístico de estudiantes costarricenses de esta edad, y aunque hay estudios previos en otros países, estos se hicieron con alumnado sin instrucción en este tema. Esto toma gran relevancia en la situación de implementación curricular actual, donde, específicamente la probabilidad tiene un peso mayor en toda la educación primaria. Por ello, consideramos que este trabajo puede brindar una primera información sobre los significados personales que asignan los niños y las niñas costarricenses a los conceptos probabilísticos desarrollados a partir de la aprobación del currículo actual.

En consecuencia, el objetivo de este estudio exploratorio es aportar información sobre las estrategias que los niños y niñas aplican al comparar probabilidades en dos urnas y la dificultad que para este grupo etario tiene esta tarea en función del nivel de razonamiento proporcional requerido. Nos centramos en estudiantes de 6º curso de educación primaria (edades entre 11 y 12 años) al ser el curso donde finaliza esta etapa educativa. Además, los sujetos participantes han seguido el currículo actual de Matemática, que se aplicó de forma completa en todos los niveles educativos a partir del año 2015. Un segundo objetivo es comparar nuestros resultados con los de la investigación previa sobre el tema.

MARCO TEÓRICO

Nuestro trabajo se fundamenta principalmente en los estudios de Piaget e Inhelder (1951) sobre la comparación de probabilidades. Piaget (1975) describe el proceso de aprendizaje de la niñez por medio de la acción y la asimilación-acomodación. Cuando un niño o niña afronta un problema matemático, lo intenta resolver (acción) mediante los conocimientos que ya posee, usando esquemas conceptuales existentes que le permiten anticiparse y emplear estrategias y representaciones que conoce. Si no es capaz de resolverlo, se le presenta un conflicto cognitivo que aborda mediante los procesos de asimilación y acomodación. La asimilación consiste en la incorporación (aceptación), por parte del sujeto, de los datos o ideas nuevas, y la acomodación es el cambio o reestructuración de los ya existentes. Los autores sugieren que el conocimiento progresa en etapas de desarrollo que tienen un orden establecido, aunque la edad en que se alcanza una de estas puede variar. Piaget (1975) indicó, además, que los sujetos que están en una misma fase tienen un razonamiento similar.

Para estudiar la capacidad y razonamiento de niños y niñas al comparar probabilidades sencillas, Piaget e Inhelder (1951) utilizaron experimentos con fichas blancas, marcadas o no con una cruz, de las que introdujeron un pequeño número de fichas de cada tipo en urnas transparentes. Pidieron a

UNICIENCIA Vol. 35, N°. 2, pp. 1-18. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

los niños y a las niñas elegir, entre dos urnas de este tipo, aquella que era preferible para obtener una ficha marcada. Los autores fueron cambiando el número de fichas marcadas (casos favorables) y blancas (casos desfavorables) en las dos urnas y realizaron entrevistas mediante este juego a estudiantes desde los 3 años y medio hasta los 13-14 años. Comparando las respuestas similares de grupos de la misma edad, obtuvieron una descripción de tres estadios en el desarrollo de su razonamiento sobre este tipo de situaciones problemas.

El primer estadio (I) se divide en dos niveles. El nivel IA se caracteriza porque en esa edad no se tienen los esquemas lógicos que les permitan comprender la inclusión de la parte en un todo, ni la disyunción entre dos tipos de elementos o la conservación de las cantidades (por ejemplo, cuando separamos fichas unas de otras). Por ello, solo son capaces de resolver problemas de comparación de dos probabilidades en los casos donde existe doble imposibilidad (todas las fichas son blancas en las dos urnas), doble certeza (todas están marcadas) o certeza - imposibilidad (una urna con fichas blancas y otra con fichas marcadas). Ello se explica porque solo compara los casos favorables, sin tener en cuenta todos los posibles. En el nivel IB, comparan solo un tipo de fichas (favorables, o bien, desfavorables), y todavía no logran concebir los casos favorables como parte de los casos posibles (comparación de la parte con el todo); tampoco son capaces de comparar los casos favorables con los desfavorables (comparación parte-parte). Sin embargo, comienzan a comprender que la probabilidad depende del número de casos favorables o desfavorables.

El segundo estadio (II) también se divide en dos subniveles. En el nivel IIA los niños y las niñas pueden resolver problemas de comparación de probabilidades que implican una sola variable, es decir, cuando se necesita comparar solo los casos favorables o desfavorables. Utilizan para ello comparaciones aditivas (por ejemplo, restando el número de casos favorables a los desfavorables, o viceversa, en cada urna y comparando las diferencias). Comienzan a comprender la disyunción (cada caso es favorable o desfavorable), pero dan soluciones erróneas en los casos en que la composición de casos favorables y desfavorables en las dos urnas es proporcional, pues a esta edad no han adquirido la idea de fracción o de proporción. En el nivel IIB comienzan a resolver el problema cuando la composición de las urnas es proporcional. Para ello establecen una correspondencia entre los casos favorables y desfavorables en una urna (por ejemplo, hay dos favorables por cada desfavorable) y la comparan con la correspondencia que existe en la otra urna.

En el estadio III, el niño y la niña son capaces de resolver fácilmente el caso de proporcionalidad y logran pensar una solución general, si el número de casos favorables y desfavorables es pequeño y la razón entre ellos es sencilla (por ejemplo, doble, triple, etc.), solución que va generalizando con la edad cuando adquiere suficiente conocimiento de fracciones.

En la exposición anterior se observa que el éxito en la comparación de probabilidades, en el caso general, supone un adecuado razonamiento proporcional, cuyas etapas de desarrollo han sido analizadas en varios estudios (p. ej., Karplus, Pulos y Stage, 1983; Noelting, 1980a; 1980b) y que se resumen en Behr, Harel, Post y Lesh (1992) y Ben-Chaim, Keret e Ilany (2012). El trabajo más relevante para nuestro estudio es el de Noelting (1980a; 1980b), quien, a partir de un problema de comparación de dos mezclas

UNICIENCIA Vol. 35, N°. 2, pp. 1-18. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470

(de agua y zumo de naranja), analiza las etapas que propusieron Piaget e Inhelder (1951) para la comparación de probabilidades y las extiende a problemas sobre proporcionalidad. Como conclusión de su trabajo, considera una etapa inicial (2 años) en la que se identifican los elementos de la fracción; y subdividen aún más algunas de las etapas descritas por Piaget e Inhelder (1951):

- La etapa intuitiva se subdivide en tres niveles: inferior (IA), medio (IB) y superior (IC), según los términos de la fracción que se comparan (primer término; segundo término con el primer término igual; o se establece una relación interna entre términos, bien de una fracción con la otra como entre fracciones, respectivamente).
- La etapa operacional concreta se subdivide en dos niveles, según la clase de equivalencia de las fracciones que se comparan sea de razón 1 (etapa IIA) o cualquier clase de equivalencia (etapa IIB).
- La etapa operacional formal se subdivide en dos niveles, según la proporcionalidad entre los términos de la fracción. Se determina un nivel inferior cuando los términos son múltiplos (IIIA) y un nivel superior cuando se trate de cualquier razón (IIIB).

Otro trabajo que tendremos en cuenta es el de Pérez Echeverría, Carretero y Pozo (1986), quienes adaptaron las tareas de Noelting (1980a; 1980b) y las pasaron a 20 estudiantes de Educación General Básica (13 años), además de a 20 estudiantes de Bachillerato (16 años). Definieron diferentes niveles de dificultad en los problemas, de acuerdo con la estrategia requerida:

- Nivel 1: problemas donde la cantidad de casos favorables o la cantidad de casos desfavorables, en las dos urnas, es la misma; por tanto, no se requiere el uso de fracciones para resolverlo.
- Nivel 2: problemas donde existe proporcionalidad entre los casos favorables y desfavorables de una misma urna o entre casos favorables y desfavorables de las dos urnas. Se pueden resolver estableciendo una correspondencia en una urna y observando que la relación es la misma en la otra urna.
- Nivel 3: problemas que presentan proporcionalidad únicamente entre los casos favorables de ambas agrupaciones (o urnas en nuestro caso) o solo entre los casos desfavorables, o bien entre casos favorables y desfavorables de una sola agrupación. Una vez establecida la razón entre casos favorables o desfavorables, se puede comparar, si la existente entre los otros términos es menor o mayor.
- Nivel 4: Problemas donde no existe relación alguna de proporcionalidad entre los cuatro miembros (casos favorables y desfavorables de cada agrupación). Requiere operar con fracciones, pasándolas a común denominador.

Antecedentes

La investigación de Piaget e Inhelder (1951) inspiró una serie de trabajos sobre el razonamiento probabilístico de los niños y las niñas que se describen con detalle en Jones, Langrall y Mooney (2007) y Langrall y Mooney (2005). A continuación, resumimos los más relacionados con nuestro estudio.

Falk, Falk y Levin (1980) propusieron a menores entre 4 y 11 años comparar probabilidades variando el número de casos

UNICIENCIA Vol. 35, N°. 2, pp. 1-18. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

UNICIENCIA Vol. 35, N°. 2, pp. 1-18. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

favorables y posibles, y utilizando dos contextos: urnas con bolas y ruletas. Consideran nueve tipos de tarea, teniendo en cuenta las siguientes variables: a) el número de casos favorables es menor, mayor o igual en el conjunto de mayor probabilidad; b) el número de casos favorables es menor, mayor o igual en el conjunto de menor probabilidad; c) los dos conjuntos son equiprobables y el número de casos favorables es menor, mayor o igual en un conjunto. Un error sistemático fue elegir siempre el conjunto con más casos favorables.

Truran (1994) realizó una investigación con 32 estudiantes de 8 a 15 años sobre comparación de probabilidades en urnas. Sus resultados identifican nuevas estrategias que amplían las descritas en la investigación de Piaget e Inhelder (1951), como la descripción del contenido de la urna sin hacer una elección, dar una respuesta acertada sin justificación, preferencia por el número menor del total de bolas, comparación con proporciones sencillas conocidas y comparación entre razones de posibilidades a favor y en contra.

El estudio de mayor relevancia en el tema fue llevado a cabo por Green (1982), quien hizo una evaluación del razonamiento probabilístico en niños y niñas ingleses de 11 a 16 años con un test que reproducía en papel y lápiz los experimentos de Piaget e Inhelder (1951). Algunos de sus ítems planteaban la comparación de probabilidades en contextos de urnas, en los cuales encontraron las siguientes estrategias: a) escoger la urna con mayor número de casos posibles; b) escoger la de mayor número de casos favorables; c) elegir la urna que proporciona la mayor diferencia entre casos favorables y desfavorables; d) elegir la urna en que haya mayor proporción entre casos favorables y desfavorables.

Cañizares (1997) elaboró un estudio con 320 estudiantes españoles de 10 a 14 años y, entre otros problemas, propone los de comparación de probabilidades en contexto de urnas. Cañizares y Batanero (1997) en un estudio con 134 estudiantes de 10 a 14 años consideran tareas que corresponden a los niveles I a IIIB descritos por Noelting (1980a; 1980b). Anotaron las estrategias utilizadas por los niños y niñas, clasificándolas en estrategias de una y dos variables. Las estrategias de una variable son aquellas en que se comparan solo casos favorables, desfavorables o posibles; y las de dos variables cuando se comparan de forma aditiva o multiplicativa los casos favorables y posibles. Cañizares (1997) deduce que los niveles más frecuentes de razonamiento de estudiantes de su muestra son del IB al IIB, siendo pocos los que alcanza el IIIB. Algunas variables que influyen en la respuesta son la composición de las urnas (número de casos favorables y posibles) y la existencia de posibles sesgos en el contexto (por ejemplo, creencias sobre la equiprobabilidad).

METODOLOGÍA

El enfoque de la investigación es interpretativo, ya que se centra en comprender los fenómenos educativos (en nuestro caso los razonamientos probabilísticos de la niñez) a través del análisis de elementos cuantitativos y cualitativos reflejados en las respuestas a un cuestionario (Cerrón, 2019; Gil, León, y Morales, 2017). La investigación es de tipo exploratorio, pues la muestra es intencional y moderada en tamaño; y de acuerdo con Bisquerra (1989), es una investigación aplicada, ya que busca utilizar la teoría desarrollada por otras investigaciones (Cañizares,1997; Fischbein y Gazit, 1984; Green, 1982) en el contexto de Costa Rica,

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

con la finalidad de proporcionar conocimiento que oriente la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad a este nivel.

La muestra utilizada fue no aleatoria (con selección intencionada) y estuvo formada por 55 niños y niñas de 6º curso de educación primaria, 40 con 11 años y 15 con 12 años, 29 realizaban sus estudios en una institución privada y 26 en una institución pública de la provincia de Cartago, Costa Rica. El personal docente a cargo de la asignatura de Matemática indicó que los niños y las niñas estudiaron el área de estadística y probabilidad de acuerdo con los programas de estudio MEP (2012) a partir del año 2016. El tratamiento del tema se basó en el libro de texto, y no hay evidencias suficientes de actividades realizadas con experimentos de forma física.

Se diseñó un cuestionario (Anexo), a partir de algunos ítems empleados en la investigación de Green (1982), que también utilizó Cañizares (1997). Se pretende utilizar ítems tomados de cuestionarios validados y comparar el razonamiento probabilístico de los niños y las niñas costarricenses con estudiantes de una etapa educativa similar en otros países. Green (1982) realizó, en primer lugar, un estudio de la validez de contenido de su cuestionario, con ayuda de la validación de equipos expertos y el análisis de los ítems incluidos. Analizó también la fiabilidad del instrumento, mediante el coeficiente Alfa de Crombach, y obtuvo un valor A=0,88.

Cañizares (1997) realizó un análisis factorial de las respuestas de su muestra al cuestionario de Green, y logró un total de 15 factores. Por ello, calculó el coeficiente de fiabilidad theta de Carmines que es preferible al alfa de Crombach cuando los datos del análisis factorial, como en su caso, muestran una estructura multidimensional. Su resultado fue un valor T= 0,8242. Todos los ítems plantean experimentos de urnas con bolas negras y blancas, y piden seleccionar una de entre dos urnas dadas, donde el suceso "sacar una bola negra" sea más probable, variando en los distintos ítems la composición de las urnas.

El ítem 1 corresponde al nivel intuitivo inferior (IA) descrito por Noelting (1980a; 1980b), ya que en las dos urnas hay el mismo número de casos desfavorables y un número desigual de casos favorables. En el ítem 2 hay igualdad de casos favorables y desigualdad de casos desfavorables, por lo que corresponde al nivel intuitivo medio (IB), según Noelting (1980a; 1980b). Por tanto, en estos dos ítems no es necesario usar los cuatro datos del enunciado, pues basta comparar o bien el número de casos favorables (ítem 1) o desfavorables (ítem 2). Estos dos ítems corresponden al primer nivel de dificultad descrito por Pérez Echeverría *et al*. (1986), puesto que no requieren razonamiento proporcional.

En los ítems 3 a 5 el número de casos favorables es múltiplo al de casos desfavorables. En el ítem 3 (nivel operacional concreto inferior "IIA", según Noelting 1980a; 1980b), el número de casos favorables y desfavorables es el mismo en las dos urnas; en el ítem 5 (nivel operacional concreto superior "IIB", según Noelting 1980a; 1980b), en las dos urnas el cociente entre casos favorables y desfavorables es 3; y en el ítem 4 (nivel operacional formal inferior "IIIA", según Noelting 1980a; 1980b), este cociente es 3 en una urna y 2 en la otra. En estos tres últimos ítems es necesario usar los cuatro datos del enunciado y el razonamiento proporcional para establecer una razón en una de las urnas y comparar con la otra. Los ítems 3 y 5 son de nivel 2 en la clasificación de Pérez Echeverría *et al*. (1986), pues existe proporcionalidad entre los casos favorables y desfavorables en cada urna o entre casos favorables y desfavorables de las dos urnas. El ítem

UNICIENCIA Vol. 35, N°. 2, pp. 1-18. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

4 es de nivel 3 en esta clasificación, pues hay una relación sencilla en la primera urna (3 casos favorables por cada desfavorable) que se puede comparar con la existente en la otra (dos a uno). Una diferencia en nuestro estudio, en comparación con los de Green (1982) y Cañizares (1997), es que dimos la representación gráfica de las urnas en los ítems 4 y 5, que no se dio en estos estudios.

En la Tabla 1 se resume la clasificación de los ítems de acuerdo con el nivel de razonamiento proporcional requerido para su resolución, según Noelting (1980a; 1980b), y su nivel de dificultad según Pérez Echeverría *et al*. (1986). En esta Tabla se presenta también la composición de las dos urnas que se comparan (a_1,b_1) y (a_2,b_2), siendo "a" los casos favorables y "b" los casos desfavorables en los experimentos propuestos en los ítems.

Consideramos que la Tabla 1 nos ayudará a analizar las estrategias de los niños y niñas, confrontándolas con lo que se espera en un problema de comparación de fracciones del mismo nivel de dificultad (Pérez Echeverría *et al*., 1986) en la categorización de Noelting (1980a; 1980b).

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Con las respuestas al cuestionario se realizó un análisis de contenido, el cual, según Krippendorff (2013), nos permite establecer categorías que emergen de modo objetivo como resultado del análisis sistemático realizado. Este análisis se complementa con información numérica, que se muestra mediante tablas para el porcentaje de respuestas correctas y para porcentajes de cada estrategia en cada ítem.

En la Tabla 2 se presentan los porcentajes de respuestas correctas obtenidas en los ítems del cuestionario; considera, además, los resultados obtenidos con estudiantes de

Tabla 1. *Nivel de razonamiento proporcional* (Noelting, 1980a; 1980b) *y nivel de dificultad* (Pérez Echeverría et al., 1986) *requerido en los ítems*

Etapa	Nivel de razonamiento proporcional	Ítem	Composición (a_1,b_1) vs (a_2,b_2)	Nivel de dificultad
IA	Intuitiva inferior	1	(3,1) vs (2,1)	1
IB	Intuitiva media	2	(5,2) vs (5,3)	1
IIA	Operacional concreta inferior	3	(2,2) vs (4,4)	2
IIB	Operacional concreta superior	5	(3,1) vs (6,2)	2
IIIA	Operacional formal inferior	4	(12,4) vs (20,10)	3

Tabla 2. *Porcentaje de respuestas correctas en los ítems de nuestro trabajo y los obtenidos por Cañizares (1997) y Green (1982) con estudiantes de 6º curso (11-12 años)*

Ítem n.º	Costa Rica (Presente estudio)	España (Cañizares, 1997)	Reino Unido (Green, 1982)
1	83,6	70,3	88,0
2	72,7	67,6	55,0
3	41,8	54,1	43,0
4	50,9	27,0	38,0
5	16,4	-	20,0

UNICIENCIA Vol. 35, N° 2, pp. 1-18. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

la misma edad en investigaciones previas: Cañizares (1997) en España y Green (1982) en Reino Unido. Se trata de ítems de comparación de probabilidades simples en contexto de urnas, donde lo único que varía es la composición de estas.

Los ítems 1 y 2 resultaron relativamente sencillos para los sujetos del estudio, pues más de dos terceras partes realizó correctamente la tarea. Estos ítems son de nivel de dificultad 1 en Pérez Echeverria *et al*. (1986) y niveles IA y IB, respectivamente, según Noelting (1980a; 1980b), por lo que la mayor parte de la muestra ha alcanzado estos primeros niveles. Estos ítems pueden resolverse correctamente con solo comparar los casos favorables o desfavorables (estrategias de una variable).

El ítem 4, correspondiente al nivel de razonamiento proporcional IIIA (Noelting, 1980a; 1980b) y nivel de dificultad 3, según Pérez Echeverría *et al*. (1986), tuvo una dificultad moderada (50,9 % lo resuelven correctamente), por lo que la mitad de estudiantes alcanzó este nivel. Los más difíciles fueron los ítems 3 y 5, ambos de nivel de dificultad 2, según Pérez Echeverría *et al*. (1986); en este último (nivel IIB en la clasificación de Noelting 1980a; 1980b) solo el 16,4 % de estudiantes respondió correctamente.

Hay una inversión en la dificultad esperada en el ítem 5, que teóricamente debiera ser más sencillo que el ítem 4, según la categorización por niveles de Pérez Echeverría *et al*. (1986) (Tabla 1), pero resulta más difícil al alumnado. Pensamos que para los niños y las niñas ha sido más sencillo comparar la igualdad entre casos favorables (ítem 2) y desfavorables (ítem 1). La comparación de dos razones similares (3/1 y 6/2, ítem 5) se ha visto dificultada por el hecho de que el grupo ha tenido también en cuenta el número de casos favorables, que es mayor en la segunda urna. Al comparar con los estudios previos, el nivel de dificultad de cada ítem fue parecido, aunque un poco mejores nuestros resultados en los ítems 1, 2 y 4 a los obtenidos en Cañizares (1997) y mejores que los de Green (1982) en los ítems 2 y 4. En el ítem 3, los resultados fueron peores que los de Cañizares (1997) pero similares a los de Green (1982); el ítem 5 fue muy difícil también en la investigación previa.

Estrategias del estudiantado

A partir del análisis de los argumentos de estudiantes al justificar sus respuestas, se clasificaron las estrategias empleadas tomando como base la clasificación establecida por Cañizares y Batanero (1997). Estas estrategias fueron las siguientes:

A: Comparar los casos posibles de cada una de las dos urnas. Aunque podría circunstancialmente generar respuestas correctas, carece de base lógica y está originada por la imposibilidad de comparar el conjunto total con un subconjunto (parte-todo).

> E38: "Hay más fichas que en el E" (respuesta B, ítem 3).

B. Comparar los casos favorables en cada una de las dos urnas, eligiendo la que tiene mayor número. Genera respuestas correctas cuando hay igualdad de casos desfavorables, como en el ítem 1.

> E8: "Porque hay mayoría de bolas negras en el A que en el B" (respuesta A, ítem 1).

C. Comparar casos desfavorables en las dos urnas, eligiendo la que tiene menos casos desfavorables. Supone un avance respecto a la estrategia B, pues reconoce que el número de casos desfavorable empeora la probabilidad de ganar. Genera respuestas

UNICIENCIA Vol. 35, N°. 2, pp. 1-18. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470

correctas cuando hay igualdad de casos favorables, como en el ítem 2.

> E54: "Porque hay una ficha blanca menos que la otra" (respuesta A, ítem 2).

Aunque existe preferencia por las estrategias anteriores, que son estrategias de una variable, propias de la etapa preoperacional, se emplearon otras estrategias de dos variables.

D. Comparación aditiva de casos favorables y desfavorables. Consiste en comparar la diferencia entre casos favorables y desfavorables en las dos urnas. En el ejemplo que sigue, la diferencia sería cero.

> E16: "Porque en las dos cajas hay una misma cantidad de blancas que de negras" (respuesta C, ítem 3).

E. Estrategia de correspondencia. Se establece un criterio de proporcionalidad en una fracción para aplicarlo a la otra. Este tipo de razonamiento es propio de un nivel superior de desarrollo y, según Piaget e Inhelder (1951), se asocia al período de operaciones formales, aunque podría aparecer en el periodo de operaciones concretas en casos más sencillos de composición proporcional de bolas de urnas. Algunos ejemplos son:

> E7: "La misma posibilidad porque si duplicamos la E x2 sale el mismo resultado de F" (respuesta C, ítem 3).

> E14: "Porque la caja E tiene la misma cantidad de fichas negras que de fichas blancas y la caja F también" (respuesta C, ítem 3).

En los anteriores ejemplos se aprecia que el estudiantado establece un criterio de proporcionalidad en una de las cajas para aplicarlo a la otra; esto resulta natural cuando aún no se cuenta con los conocimientos para el cálculo con fracciones. Según Noelting (1980a; 1980b), este tipo de estrategias está asociado a la etapa IIA, donde el niño o la niña relaciona internamente los términos de la fracción, diferenciando los conceptos de razón y cantidad. El autor hace la distinción de estrategias "entre" e "intro" para comparar dos fracciones (a_1/b_1 vs a_2/b_2), por lo que es importante identificar que E7 realiza una estrategia "entre", al comparar los términos de una fracción con los de otra (a_1 con a_2 y b_1 con b_2), mientras que E14 emplea una estrategia "intro", porque compara los términos dentro de una misma fracción para establecer una razón ($a_1/b_1 = 1/1$) y luego lo compara con la razón en la otra fracción ($a_2/b_2 = 1/1$).

F. Estrategias multiplicativas (comparar razones). Se relaciona el número de casos favorables con el número de casos posibles, es decir, la parte con el todo, o también fracciones formadas por el número de casos favorables y desfavorables para después compararlas aplicando la regla de Laplace. Pocos sujetos del grupo de estudio usan estrategias multiplicativas, que sin duda son las más elaboradas y requieren del dominio de cálculo con fracciones:

> E14: "Porque la caja J tiene un tercio de fichas blancas que de fichas negras y la K también" (respuesta A, ítem 5).

> E17: "Porque la caja H tiene la mitad de fichas blancas que de fichas negras y la G tiene 1 tercio de fichas blancas que de fichas negras" (respuesta B, ítem 4).

Se puede apreciar que E14 establece la fracción 1/3 del número de bolas blancas (casos desfavorables) y negras (casos favorables) para compararla con la otra urna. E17, para el ítem 4, realiza una comparación de fracciones

UNICIENCIA Vol. 35, N° 2, pp. 1-18. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

y se apoya en la representación gráfica expuesta en la Figura 1, donde agrupa los casos favorables y los desfavorables para establecer de forma más clara una comparación "intro" mediante una relación "parte-parte".

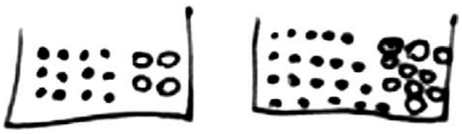


Figura 1. *Representación gráfica elaborada por E17 en el ítem 4.*
Fuente propia de la investigación.

G. Sesgo de equiprobabilidad. Cuando se consideran todos los sucesos de un experimento aleatorio como equiprobables, conocido como "sesgo de la equiprobabilidad" (Lecoutre, 1992).

> E27: "Porque en ambas cajas hay la misma probabilidad de sacar una ficha blanca o una ficha negra" (respuesta C, ítem 1).

> E30: "Puede salir cualquiera" (respuesta C, en los ítems 1, 2 y 3).

H. Disposición de las fichas. Asimismo, hay un porcentaje notable de argumentos asociados a creencias que relacionan la disposición espacial de las fichas en la representación gráfica en el ítem con la probabilidad del evento, también identificadas en Cañizares y Batanero (1997). Esto se dio en todos los ítems por diferentes estudiantes:

> E52: "Tiene la ficha negra a los 8 lados" (respuesta A, ítem 1).

> E39: "Porque también la negra está en la parte superior" (respuesta B, ítem 3).

> E48: "Porque la bola negra está de primera y es mucho mucho más posibilidad de la negra que salga" (respuesta C, ítem 5).

I. Otras: Otros argumentos, por ejemplo, hacen referencia a la suerte o la forma en que se saca la ficha, como mostramos en el siguiente ejemplo:

> E32: "Pero también puede salirte la blanca, ya que todo depende de cómo la coja la mano" (respuesta A, ítem 1).

En la Tabla 3 se resumen las estrategias en los diferentes ítems. En el ítem 1, poco más de tres cuartas partes realizaron justificaciones asociadas a estrategias pertinentes, siendo la estrategia B la más utilizada (72,7

Tabla 3. *Porcentaje de estrategias empleadas en cada ítem (las estrategias correctas se han subrayado)*

	Ítem				
Estrategia	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
A. Comparar casos posibles	3,6	1,8	20,0	12,7	10,9
B. Comparar casos favorables	72,7	21,8	12,7	23,6	32,7
C. Comparar casos desfavorables	5,5	41,8	5,5	10,9	12,7
D. Comparar casos favorables y desfavorables	5,5	16,4	32,7	29,1	23,6
E. Correspondencia	0,0	0,0	1,8	3,6	7,3
F. Multiplicativas (comparar razones)	1,8	1,8	3,6	1,8	1,8
G. Sesgo de equiprobabilidad	3,6	1,8	1,8	0,0	0,0
H. Disposición de fichas	1,8	10,9	7,3	10,9	7,3
I. Otras	5,5	3,6	10,9	7,3	3,6
No responde	0,0	0,0	3,6	0,0	0,0

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 35, N°. 2, pp. 1-18. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470

%) debido a la igualdad de casos desfavorables. En Cañizares y Batanero (1997), aproximadamente dos terceras partes de la misma edad obtuvieron argumentos pertinentes, también la comparación de casos favorables fue la más utilizada (48,6 %), pero con mayor porcentaje en estrategias que consideran dos variables (10,8 %).

En el ítem 2, el 60 % de estudiantes empleó estrategias pertinentes, donde la C resultó la más utilizada (41,8 %), lo que es natural por haber igual número de casos favorables. Cañizares y Batanero (1977) obtuvieron un porcentaje menor de argumentos pertinentes (54,0 %), donde aproximadamente el 40 % comparó el número de casos desfavorables, como en nuestro estudio.

Para el ítem 3 se obtuvo un 38,1% de argumentos pertinentes, un poco menor que el 48,6 % obtenido en Cañizares y Batanero (1997); y mientras nuestro estudiantado se centró en la estrategia D (32,7 %), el de Cañizares y Batanero (1997) lo hizo en la E (43,2 %), que requiere un mayor nivel de razonamiento proporcional.

En los ítems 4 y 5 no se alcanzó ni el 10 % de estrategias correctas, se centró en estrategias de una variable, en la comparación de casos favorables y desfavorables, lo cual no es oportuno, debido a que el número de casos favorables o desfavorables no coincide. Esto mismo ocurrió con el ítem 4 en Cañizares y Batanero (1997), donde apenas se obtuvo un 2,7 % de estrategias pertinentes en menores de igual edad que en nuestro estudio. Hay que recordar que este ítem presenta un nivel de razonamiento proporcional superior, correspondiente a la etapa IIIA (Noelting, 1980a; 1980b). No se relaciona el ítem 5 con el estudio de Cañizares y Batanero (1997), pues utilizaron un ítem distinto para su estudio.

CONCLUSIONES

Al analizar las respuestas de los niños y las niñas de la muestra en la comparación de probabilidades en contexto de urnas, obtuvimos resultados similares a los de otros estudios previos con menores de la misma edad, que fueron realizados en un periodo en que no se impartía ningún tipo de enseñanza de la probabilidad elemental en las escuelas. Es verdad que, en el momento de pasar el cuestionario, los niños y las niñas todavía no habían estudiado la parte de probabilidad de 6º curso, pero sí la de los cursos anteriores. Aunque no habían estudiado la cuantificación de probabilidades usando la regla de Laplace, esto no es vinculante con el éxito en los ítems propuestos en el cuestionario, pues el uso de la herramienta no es necesario para establecer la comparación de probabilidades pedidas, como sucedió en investigaciones previas con estudiantes de igual edad. Por otro lado, el alumnado no estaba acostumbrado a comparar dos experimentos diferentes como demandan las tareas propuestas, pues había trabajado sucesos de un mismo experimento. Por todo ello, sería importante ampliar nuestro estudio e incluir otro grupo de 7º curso, para asegurar que haya realizado tareas de comparación de probabilidades similares y, así, analizar el efecto de la instrucción.

No obstante, nuestra conjetura es que la mayor dificultad de algunos ítems es debida a que solo parte de la muestra han alcanzado el correspondiente nivel de razonamiento proporcional en la clasificación de Noelting (1980a; 1980b). En el 5º curso, el alumnado costarricense estudia fracciones propias e impropias, homogéneas y heterogéneas, y realiza actividades de comparación de fracciones. Pero no se suele utilizar el contexto de probabilidad para completar su estudio de fracciones y realizar comparaciones.

UNICIENCIA Vol. 35, N°. 2, pp. 1-18. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470

Nuestra recomendación, entonces, es completar el trabajo en probabilidad en la Educación Primaria con problemas similares a los mostrados en los ítems del cuestionario, donde, primero, únicamente sea necesario el trabajo con una variable y el razonamiento proporcional requerido sea solo de los primeros niveles (ítems 1 y 2). Además, en el estudio de fracciones se pueden completar con comparaciones de tipo parte-parte, ya que actualmente predominan las comparaciones parte-todo, y aplicar la proporcionalidad a situaciones problema de comparación de probabilidades.

Aunque Piaget e Inhelder (1951) señalan que la población infantil trata de comparar en primer lugar los casos posibles (estrategia A), esta estrategia no apareció con frecuencia en nuestro estudio. Coincidimos con Cañizares y Batanero (1997) en que los problemas donde los casos favorables son explícitamente distinguibles de los desfavorables, el estudiantado primero compara los casos favorables (estrategia B) antes que los posibles, ya que existe una percepción inicial "parte-parte". Esto queda evidenciado en todos los ítems de nuestro cuestionario (excepto el 3), donde los porcentajes de estrategia B fueron superiores a los de estrategia A. Queda claramente reflejado en el ítem 1, donde casi las tres cuartas partes optan por la estrategia B, que solo genera respuestas correctas en este ítem.

Es importante, no obstante, que el alumnado pase a las siguientes estrategias en problemas más elaborados. Pensamos que este paso se facilita trabajando con los niños y las niñas con material manipulativo, donde puedan recrear la situación planteada, exponer sus creencias iniciales y, con ayuda del personal docente, corregirlas con la experiencia. De acuerdo con Pratt (2000), son muchos los materiales a nuestro alcance que pueden servir de recursos para apoyar la construcción de intuiciones correctas sobre el azar. Esta recomendación sigue el principio de que el conocimiento es construido activamente por el sujeto y no recibido pasivamente del entorno (Piaget e Inhelder, 1951); de ahí surge la importancia de una enseñanza activa por parte de los niños, también en el campo de la probabilidad.

Nuestro estudio es limitado, debido al tamaño de la muestra y su carácter intencional, por lo que nuestro propósito es ampliarlo para poder obtener conclusiones más generalizables. No obstante, a pesar de estas limitaciones, pensamos que la información obtenida puede contribuir a la formación de docentes que han de impartir el tema.

Como apuntan Alpízar *et al.* (2012) y Alpízar, Chavarría y Oviedo (2015), una parte de la muestra de docentes de primaria manifiesta inseguridad al enseñar la probabilidad, debido a su débil formación didáctica de la probabilidad o por no tener experiencia en su enseñanza. Por ello, queremos destacar el valor de la información que proporciona esta investigación, y más en un contexto de implementación curricular como el que está viviendo este país.

Este trabajo puede ayudar en los procesos de capacitación docente y cursos de formación del profesorado, apoyar la reflexión sobre las demandas cognitivas de las tareas planteadas a los niños y las niñas, sus formas de razonamiento y posibles sesgos, y cómo estos elementos podrían orientar la planificación educativa.

RECONOCIMIENTOS

Trabajo elaborado en el marco del proyecto de investigación: PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

UNICIENCIA Vol. 35, N°. 2, pp. 1-18. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470

DECLARACIÓN DE LA CONTRIBUCIÓN DEL AUTOR Y AUTORAS

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: L.H. 50 %, C.B. 20 %, M.G. 20 %, RA 10 %

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE LOS DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor L.H., previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Alpízar, M., Barrantes, J., Bolaños, H., Céspedes, M., Delgado, E., Freer, D., Padilla, E. y Víquez, M. (2012). Aspectos relevantes sobre la formación docente en I y II ciclos en los temas probabilidad y estadística. *EDUCARE*, *16*(2), 113-129. https://doi.org/10.15359/ree.16-2.7

Alpízar, M., Chavarría, L. y Oviedo, K. (2015). Percepción de un grupo de docentes de I y II ciclo de educación general básica de escuelas públicas de Heredia sobre los temas de estadística y probabilidad. *Actualidades Investigativas en Educación, 15*(1), 1-23.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*, 1-17. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales. CD ROM.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. En D. D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). Macmillan.

Ben-Chaim, D., Keret, Y. e Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Sense Publisher. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-784-4_2

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. P.P.U.

Borovcnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 71-83). Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_11

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias* [Tesis Doctoral]. Universidad de Granada, España.

Cañizares, M. J. y Batanero, C. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO, 14*, 99-114.

Cerrón, W. (2019). La investigación cualitativa en educación. *Horizonte de la Ciencia, 9*(17), 1-8. https://doi.org/10.26490/uncp.horizonteciencia.2019.17.510

Falk, R., Falk, R. y Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 181-204. https://doi.org/10.1007/BF00304355

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 1-24. https://doi.org/10.1007/BF00380436

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 39-63). Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3

Gil, J., León, J. y Morales, M. (2017). Los paradigmas de investigación educativa, desde una perspectiva crítica. *Conrado, 13*(58), 72-74.

Green, D. R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11-16 years* [Tesis doctoral]. University of Loughborough, Reino Unido.

Jones, G., Langrall, C. y Mooney, E. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 909-955). Information Age Publishing y NCTM.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. (1983). Early adolescents proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics,* 14, 219-233. https://doi.org/10.1007/BF00410539

UNICIENCIA Vol. 35, N°. 2, pp. 1-22. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Krippendorff, K. (2013). *Content analysis: An introduction to its methodology.* SAGE.

Langrall, C. W. y Mooney, E. S. (2005). Characteristics of elementary school students' probabilistic thinking. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning* (pp. 95-119). Dordrech, Holanda. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_5

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568. https://doi.org/10.1007/BF00540060

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I, II y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. The Council.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I - Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(2), 217-253. https://doi.org/10.1007/BF00304357

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II - problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(3), 331-363. https://doi.org/10.1007/BF00697744

Pérez Echeverría, M. P., Carretero, M. y Pozo, J. I. (1986). Los adolescentes ante las matemáticas: Proporción y probabilidad. *Cuadernos de Pedagogía,* 133, 9-13.

Piaget, J. (1975). *Psicología de la inteligencia*. Buenos Aires: Psique.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. Presses Universitaires de France.

Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 602-625. https://doi.org/10.2307/749889

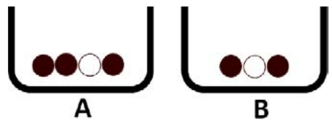
Truran, J. (1994). Examination of a relationship between children's estimation of probabilities and their understanding of proportion. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII PME* (pp. 337-344). Universidad de Lisboa.

UNICIENCIA Vol. 35, N°. 2, pp. 1-18. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470

ANEXO: CUESTIONARIO

Ítem 1a: En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. (Mira el dibujo)

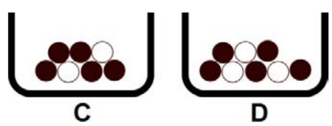


Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál caja elegirías para hacer la extracción? Señala la respuesta correcta:

(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra.
(B) La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha negra.
(C) Las dos cajas dan la misma posibilidad.
(D) No lo sé.

Ítem 1b: ¿Por qué?

Ítem 2a: Otras dos cajas tienen en su interior algunas fichas negras y algunas fichas blancas (Mira el dibujo):



- Caja C: 5 negras y 2 blancas.
- Caja D: 5 negras y 3 blancas.

¿Qué caja (la C o la D) da más posibilidades de sacar una ficha negra? ¿O, por el contrario, dan las dos la misma posibilidad?

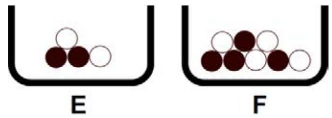
(A) Caja C.
(B) Caja D.
(C) La misma posibilidad.
(D) No lo sé.

Ítem 2b: ¿Por qué?

UNICIENCIA Vol. 35, N°. 2, pp. 1-18. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470

Ítem 3a: Otras dos cajas distintas tienen también fichas negras y blancas (Mira el dibujo):



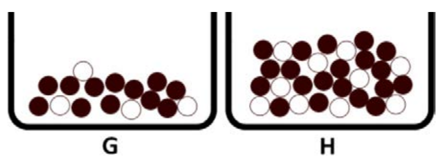
- Caja E: 2 negras y 2 blancas.
- Caja F: 4 negras y 4 blancas.

¿Qué caja da mejor posibilidad de obtener una ficha negra?

(A) Caja E.
(B) Caja F.
(C) La misma posibilidad.
(D) No lo sé.

Ítem 3b: ¿Por qué?

Ítem 4a: Otras dos cajas distintas tienen fichas negras y blancas (Mira el dibujo):



- Caja G: 12 negras y 4 blancas.
- Caja H: 20 negras y 10 blancas.

¿Qué caja da mejor posibilidad de sacar una ficha negra?

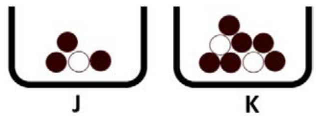
(A) La misma posibilidad.
(B) Caja G.
(C) Caja H.
(D) No lo sé.

Ítem 4b: ¿Por qué?

UNICIENCIA Vol. 35, N°. 2, pp. 1-18. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9
E-ISSN: 2215-3470

Ítem 5a: Otras dos cajas distintas de las anteriores tienen fichas negras y blancas (Mira el dibujo):



- Caja J: 3 negras y 1 blanca.
- Caja K: 6 negras y 2 blancas.

¿Qué caja da mejor posibilidad de obtener una ficha negra?

(A) La misma posibilidad.
(B) Caja J.
(C) Caja K.
(D) No lo sé.

Ítem 5b: ¿Por qué?

UNICIENCIA Vol. 35, N°. 2, pp. 1-18. July-December, 2021 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr