СУЧАСНІ ТА ПЕРСПЕКТИВНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЦІ

Монографія

У 2 частинах

Частина 2

За ред. д-ра екон. наук, проф. А.О. Єпіфанова

Суми
ДВНЗ “УАБС НБУ”
2008

К ВОПРОСАМ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОПИСАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ*

Развитие экономической теории на основе сведений о технологических процессах дало повод к разработке производственных функций с использованием технических достижений инженерной науки. Подход к производственной функции на технической основе обладает значительными преимуществами. Во-первых, известна область применимости производственных функций, а во-вторых, он позволяет относительно легко использовать результаты технического прогресса.

---

*_О. М. Пигнастый_, канд. техн. наук, НПФ "Технология", Харьков; _В. Я. Заруба_, д-р экон. наук, проф., академик АН Технической кибернетики Украины, НТУ "ХПИ"

Основной предмет изучения, производственный процесс, определяется так, как это удобно с точки зрения инженерного анализа. Первой задачей является перевод технических единиц в величины, более подходящие для экономического анализа. Вторая и наиболее важная задача заключается в том, чтобы путем объединения этих процессов на отдельном предприятии получить производственную функцию предприятия.

Традиционная производственная функция описывает эффективные технические способы производства, при которых производится максимум желаемого товара при заданных затратах ресурсов. Процесс поиска технических способов производства в экономической теории не рассматривается. Долгие годы эти вопросы считались задачами управления, выходящими за рамки экономики. Основные ограничения инженерных данных подобны ограничениям данных бухгалтерских затрат.

Действительно, эти два набора данных часто очень тесно связаны. Бухгалтеры оценивают товарные затраты, разделяя производство на отдельные операции, и описывают затраты каждой операции, оценивая вложения труда, сырья, материалов и т.п. Инженерные данные, подобно цифрам бухгалтерских калькуляций, относятся к процессам. Одна из трудностей перевода этих результатов в функции затрат для некоторых отраслей заключается в том, что процессы и затраты на эти процессы могут взаимодействовать друг с другом и могут не быть сепарабельными. Однако на практике это может служить вполне достаточным приближением для множества разных отраслей. Второй главной трудностью является произвольность распределения комплексных затрат. Кажется, именно это послужило причиной того, что существует очень мало синтетических или инженерных исследований затрат многопродуктовых фирм.

Важным шагом в применении экономистами синтетического подхода к исследованию затрат стали работы Мейера, Пека, Стенасона и Цвика [1]. Несмотря на все возражения, которые могут быть высказаны против синтетического подхода к затратам, во многих случаях он оказывается единственным приемлемым методом. Кроме того, построение новых моделей производственных систем тесно связано с экспериментальным изучением организации и технологии производства [2-5] и вызвано требованиями пятого этапа развития экономической теории [6]. Для построения таких моделей необходимо использовать известные общие принципы механики и физики, например термодинамические соотношения [7]. Полезным оказывается использование вариационных принципов [8]. Большая разнообразность и сложность технологии изготовления конечного продукта производственной системы требует строить теорию функционирования производственной системы на базе представления о производственной системе предприятия как совокупности предметов труда, находящихся в разных стадиях технологической обработки [4, 9]. Однако следить за поведением каждого предмета труда (базового продукта производственной системы) из-за их весьма большого количества и вероятностного характера воздействия на базовый продукт технологического оборудования невозможно.

Одним из общих методов подхода к исследованию поведения больших систем является довольно развитый аппарат статистической механики. В нем применяется вероятностный подход к изучаемым явлениям и вводятся средние по большому ансамблю частиц характеристики. Данный подход позволяет получить путем агрегирования микропараметров рассматриваемого производства модель функционирования производственной системы с конкретным технологическим процессом в рамках существующего на предприятии производственного оборудования [10], исключить подбор из существующих моделей описания производственных систем такую модель, которая наиболее близко соответствует рассматриваемому объекту. При этом с практической точки зрения интересно получить характерные числа для функционирования производственных систем, позволяющие обосновать выбор соответствующей модели описания реального производственного объекта.

Инженерно-производственная функция производственной системы

Функционирование современного производства может быть представлено в виде процесса, в ходе которого производственная система переходит из одного своего состояния в другое. Состояние системы можно определить как состояние общего числа N базовых продуктов производственной системы [4, с. 178]. Под базовым продуктом [5, с. 183] понимается элемент производственной системы, на который происходит перенос стоимости живого труда, сырья, материалов и орудий труда при его движении по операционной цепочке технологических карт. В ходе такого движения происходит целенаправленное превращение исходного сырья и материалов (межоперационной заготовки) в готовый продукт путем целенаправленного воздействия общественно-полезного труда. Состояние j-го базового продукта может быть описано микроскопическими величинами (производственно-технологическими параметрами) $\left(S_j, м_j\right)$ [10], где S_j (грн.) и $м_j = \lim_{Дt \to 0} \frac{ДS_j}{Дt}$ (грн./час) соответственно сумма общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенные производственной системой на j-й базовый продукт, $0 < j \le N$. Рассматриваемую производственную систему будем характеризовать функцией $J_П\left(t, S_1, S_2, \ldots, S_N, м_1, м_2, \ldots, м_N, S_0, м_0\right)$ [8]. Через переменные S_0 и $м_0$ задана технология производства базового продукта [11] в фазовом технологическом пространстве (S, μ). Переменные S_0 и $м_0$ в этом пространстве определяют для производственного процесса нормативную технологическую траекторию

$$S_0 = S_0(t),\ м_0 = \frac{dS_0(t)}{dt}. \tag{1}$$

Нормативная технологическая траектория является детерминированной. Детерминированность нормативной технологической траектории вытекает из однозначности заданной технологии изготовления базового продукта. Каждая технологическая операция имеет нормативные технологические параметры производства базового продукта и допустимые отклонения от нормативных технологических параметров. Технологическая операция, выполненная с превышением значений предельных отклонений, приводит к нарушению технологического процесса, и как следствие, к появлению бракованной заготовки. Пусть технологический процесс на каждой m-ой технологической операции задан k технологическими факторами $Z_{m,k}$ с определяющими их параметрами

$$\left\langle Z_{m,k} \right\rangle - ДZ_{2\,m,k} \le Z_{m,k} \le \left\langle Z_{m,k} \right\rangle - ДZ_{1\,m,k}\ ,\ m = 1..\ N_m\ ,\ к = 1..\ N_k\ , \tag{2}$$

где N_m и N_k соответственно, количество технологических операций и количество технологических факторов, которое допускается технологической операцией. Каждый технологический фактор $Z_{m,k}$ является случайной величиной с математическим ожиданием (нормативным значением) $\left\langle Z_{m,k} \right\rangle$. Верхние и нижние допуски $ДZ_{1m,k}$ и $ДZ_{2m,k}$ определяют позволяемые технологией изготовления базового продукта верхние и нижние отклонения параметров технологического процесса от заданной нормативной технологической траектории. При изготовлении базового продукта с технологическими параметрами в пределах допустимых технологией производства верхних $ДZ_{1\,m,k}$ и нижних $ДZ_{2\,m,k}$ отклонений от нормативных значений считается, что базовый продукт изготавливается в соответствии с заданной технологией. Тогда с использованием аппарата теории случайных процессов [12] могут быть получены значения технологических параметров $\mu_{0\,m} - \sigma_{\mu_{0\,m}} \le \mu_m \le \mu_{0\,m} - \sigma_{\mu_{0\,m}}$ для m -ой технологической операции [12, стр.294]

$$м_{0\,m} = м_{0\,m}\left(Z_{m,k}, ДZ_{1\,m,k}, ДZ_{2\,m,k}\right), \tag{3}$$

$$у_{м_{0\,m}} = у_{м_{0\,m}}\left(Z_{m,k}, ДZ_{1\,m,k}, ДZ_{2\,m,k}\right),\ к = 1..\ N_k\,.$$

При большом количестве технологических операций $N_m >> 1$ удобен переход от дискретного описания значений технологического процесса через величины $м_{0\,m}$, $у_{м_{0\,m}}$ к непрерывному описанию через функции $м_0(t)$, $у_м(t)$ [10]. Значения технологического процесса $S_0(t)$, $у_S(t)$ могут быть получены путем интегрирования технологических параметров $м_0(t)$, $у_м(t)$ [12, с. 287]. Каждый j -й базовый продукт в процессе технологической обработки переходит из своего начального состояния (начальной заготовки) в конечное состояние (готовое изделие) в соответствии с заданной технологией производства базового продукта и образует в фазовом технологическом пространстве $(S, м)$ технологическую траекторию. Данная технологическая траектория является реализацией технологического процесса для j -го базового продукта. Технологический процесс реализуется в окрестности известной технологии производства базового продукта, которая ограничивается зоной допустимых технологических траекторий (рис.1). Производственный процесс определяется совокупностью состояний базовых продуктов. Если известно все о состоянии каждого базового продукта в любой момент времени, то разумно полагать, что все известно и о состоянии производственной системы. Изменение во времени свойств каждого базового продукта производственной системы может быть представлено в виде движения базового продукта в фазовом пространстве $(S, м)$, а закон движения может быть получен с помощью методов вариационного исчисления. Если в моменты времени t_1 и t_2 система находится соответственно в состояниях $J_П\left((t_1, S_1(t_1), S_2(t_1), ..., S_N(t_1), м_1(t_1), м_2(t_1), ..., м_N(t_1), S_0(t_1), м_0(t_1)\right)$ и $J_П\left((t_2, S_1(t_2), S_2(t_2), ..., S_N(t_2), м_1(t_2), м_2(t_2), ..., м_N(t_2), S_0, м_0\right)$, тогда между этими положениями реализация технологического процесса должна осуществляться таким образом, чтобы целевой функционал

$$I = \int_{t_1}^{t_2} J_{П}\big((t, S_1(t), S_2(t), ..., S_N(t), \mu_1(t), \mu_2(t), ..., \mu_N(t), S_0(t), \mu_0(t)\big)dt \qquad (4)$$

имел минимум по отношению к возможным отклонениям от нормативной технологии.

Рис. 1. Зона допустимых технологических траекторий

Такой подход, который при построении законов движения механических систем называется принципом наименьшего действия, используется в построении экономических теорий производственных систем [8]. Вариация целевого функционала (4) позволяет определить уравнения движения каждого отдельно взятого базового продукта в фазовом пространстве (S, μ). Интегрируя уравнения движения базовых продуктов, получаем сведения о параметрах состояния каждого базового продукта, а значит и сведения о состоянии производственной системы в целом. Так как все известно о состоянии каждого базового продукта, то известно все и о состоянии производственной системы. В большинстве случаев целевой функционал (4) содержит параметры, которые описывают случайные факторы реализации технологического процесса. В таком случае при вариации целевого функционала (4) получаются уравнения движения базового продукта, включающие в себя случайные функции реализации технологического процесса. В результате интегрирования уравнений движения получается технологическая траектория для j-го базового продукта, которая является реализацией технологического процесса.

Пусть нормативная технологическая траектория (1) изготовления базового продукта в фазовом пространстве $(S,м)$ определяется функцией возрастания затрат при движении базового продукта вдоль технологической цепочки. Функция возрастания затрат строится на основании операционных карт технологического процесса, которые определяют последовательность операций производства базового продукта и необходимые производственные ресурсы для выполнения технологических операций (сырье, трудовые ресурсы, электроэнергия и т.д.) [10]. Функция возрастания затрат описывает процесс накопления затрат в соответствии с выбранной технологией изготовления базового продукта. Потребуем, чтобы целевой функционал (4) имел для производственного процесса с нормативной технологией производства базового продукта экстремальное значение (рис. 2) на множестве возможных траекторий $S_j(t,\alpha)$. Целевой функционал (4), вычисленный вдоль конкретной технологической траектории, представляет собою функцию параметра α :

$$I(б(= \int_{t_1}^{t_2} J_П\left((t,S_1(t,б),S_2(t,б),\ldots,S_N(t,б),м_1(t,б),м_2(t,б),\ldots,м_N(t,б),S_0(t),м_0(t)\right)dt. \quad (5)$$

Вычислим вариацию функционала (4), т.е. дифференциал по α функционала (5):

$$\partial I = \int_{t_1}^{t_2} \partial J_П dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial J_П}{\partial S_j}\cdot\partial S_j + \frac{\partial J_П}{\partial м_j}\cdot\partial м_j\right)dt = \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial J_П}{\partial м_j}\cdot\partial S_j\,\Big|_{t_1}^{t_2} +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial J_П}{\partial S_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial J_П}{\partial м_j}\right)\partial S_j dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial J_П}{\partial S_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial J_П}{\partial м_j}\right)\partial S_j dt. \quad (6)$$

Интеграл преобразован при помощи интегрирования по частям, с использованием для этого перестановочности операций варьирования ∂ и дифференцирования по времени $\frac{d}{dt}$:

$$\partial м_j = \partial\frac{d}{dt}S_j(t,б) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial б}S_j(t,б)\cdot\partial б = \frac{d}{dt}\partial S_j\,. \quad (7)$$

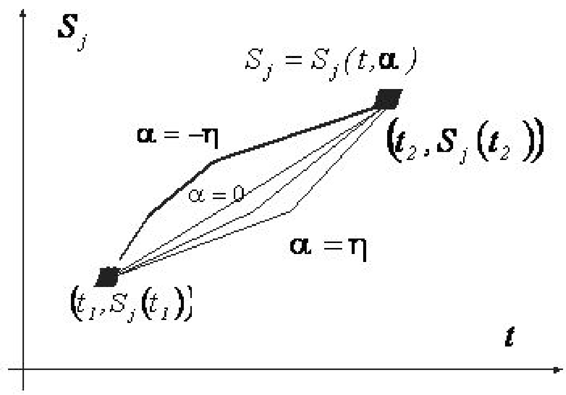

Рис. 2. Вариация целевого функционала производственной системы

Технологические траектории $S_j(t,б)$ для отдельного j-го базового продукта производственной системы имеют общее начало $(t_1, S_j(t_1))$ и общее окончание $(t_2, S_j(t_2))$. Поэтому при $t = t_1$ и при $t = t_2$ вариации ∂S_j равны нулю и проинтегрированная часть обращается в ноль.

Так как реализация технологического процесса должна осуществляться таким образом, чтобы целевой функционал (4) для производственного процесса имел минимум, следует равенство нулю вариации целевого функционала (5)

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial J_П}{\partial S_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J_П}{\partial м_j} \right) \partial S_j dt = 0, \tag{8}$$

которое определяет уравнения Эйлера для каждого отдельного базового продукта

$$\frac{\partial J_П}{\partial S_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J_П}{\partial м_j} = 0, \quad \frac{\partial J_П}{\partial S_j} = f_j(t,S), \quad f(t,S) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f_j(t,S), \tag{9}$$

где $f(t,S)$ – инженерно-производственная функция, характеризующая установленный на предприятии технологический процесс изготовления продукции в соответствии с производственным планом, наличием трудовых ресурсов и оборудования.

Для производственных систем известна как технология производства базового продукта, так и критерии, характеризующие отклонения технологических параметров базового продукта при его движении вдоль технологической цепочки. Последнего достаточно, чтобы построить функцию Лагранжа $J_{П}(t, S_1, S_2, ..., S_N, м_1, м_2, ..., м_N, S_0, м_0)$ в явном виде и записать уравнения Эйлера (9) для каждого отдельного базового продукта, определяющие состояния базового продукта при его движении от одной технологической операции к другой.

Уравнения Эйлера для каждого отдельного базового продукта (9) могут быть получены и при помощи дифференциальных уравнений движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки. Однако, между дифференциальными уравнениями и вариационными принципами имеется одно принципиальное различие: дифференциальные уравнения выражают некоторую зависимость, связывающую между собой положение базовых продуктов вдоль технологической цепочки производственной системы, скорости переноса затрат и ускорения переноса затрат на базовый продукт в момент времени t. Вариационный же принцип характеризует нормативный технологический процесс в целом. Он формулирует стационарное свойство целевого функционала для заданного технологического процесса. Вариационный принцип имеет более обозримую и компактную форму и часто используется в качестве фундамента для построения новых методов описания систем.

При движении базовых продуктов производственной системы вдоль технологической цепочки в фазовом пространстве $(S, м)$ сущесвуют функции $(S_j, м_j)$ экономических величин $S_j, м_j$, которые сохраняют при движении системы постоянные значения, зависящие только от начальных условий. Такие функции будем называть первыми интегралами движения производственной системы. Если функция Лагранжа производственной системы не зависит явно от времени, то полная производная от нее может быть записана в виде:

$$\frac{dJ_{П}}{dt} = \sum_{j=1}^{N_1}\left[\frac{\partial J_{П}}{\partial S_j}\cdot\frac{dS_j}{dt}\right] + \sum_{j=1}^{N_1}\left[\frac{\partial J_{П}}{\partial м_j}\frac{dм_j}{dt}\right]. \qquad (10)$$

В силу уравнений Эйлера (9) заменяем производные $\frac{\partial J_{П}}{\partial S}$ на их значения $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_{П}}{\partial м_j}\right)$, получаем

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N_2}\left[\left(\frac{\partial J_{П}}{\partial м_j}\right)\frac{dS_j}{dt} - J_{П}\right] = 0\,. \qquad (11)$$

Откуда величина

$$\sum_{j=1}^{N_2}\left[\left(\frac{\partial J_П}{\partial м_j}\right)\frac{dS_j}{dt}-J_П\right]=\text{const} \tag{12}$$

является постоянной при движении базовых продуктов вдоль технологической цепочки. Системы, имеющие интеграл указанного вида, называются консервативными. Интеграл движения (12) имеет экономическую интерпретацию: потребляемые в единицу времени оборудованием на технологической операции ресурсы (сырье, материалы, трудовые затраты ….) полностью переносятся на базовые продукты. Интенсивность переноса затрат на базовые продукты в пределах межоперационных технологических заделов равна потреблению ресурсов в единицу времени технологическим оборудованием.

Следующий интеграл движения производственной системы возникает вследствие однородности фазового технологического пространства. Как следствие однородности фазового пространства по координате S потребуем, чтобы функция Лагранжа $J_П(t, S_1, S_2,..., S_N, \mu_1, \mu_2,..., \mu_N, S_0, \mu_0)$ замкнутой системы осталась неизменна при переносе системы как целого на отрезок δS. Изменение целевой функции вследствие малого перемещения по фазовой координате S:

$$\partial J_П(t,S_j м_j)=\sum_{j=1}^{N_1}\left[\frac{\partial J_П}{\partial S_j}\cdot\partial S\right]=\partial S\cdot\sum_{j=1}^{N_1}\frac{\partial J_П}{\partial S_j}\ . \tag{13}$$

В силу произвольности δS следует $\delta J_П = 0$. Последнее означает, что сумма всех технологических воздействий на базовые продукты производственной системы равна нулю.

$$\sum_{j=1}^{N_1}\frac{\partial J_П}{\partial S_j}=0. \tag{14}$$

Тогда в силу уравнений Эйлера (9) получаем

$$\sum_{j=1}^{N_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_П}{\partial м_j}\right)=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N_1}\left(\frac{\partial J_П}{\partial м_j}\right)=0,\ C_S=\sum_{j=1}^{N_1}\left(\frac{\partial J_П}{\partial м_j}\right)=const. \tag{15}$$

Исходя из (15), следует, что параметры работы технологического оборудования не зависят от суммарных затрат, перенесенных на базовые продукты, находящиеся в межоперационном заделе. Производственные ресурсы (сырье, материалы, труд, электроэнергия …) от технологического оборудования воспринимаются полностью общим количеством базовых продуктов, находящихся в межоперационном технологическом заделе.

Еще один интеграл движения производственной системы возникает вследствие однородности фазового пространства по фазовой скорости

$$\sum_{j=1}^{N_1} \frac{\partial J_П}{\partial м_j} = 0 \tag{16}$$

и является необходимым условием экстремума микропараметров производственной системы.

Характерные числа в моделях описания производственных систем

Обширные разделы теории организации, планирования и управления производственным предприятием развиты в рамках простых моделей [2, 3, 5, 13]. Однако не всегда поведение реальных производственных систем может быть с достаточной точностью описано с помощью этих простейших моделей [6, 14-16]. Различные производственные системы при одних и тех же внешних условиях ведут себя по-разному. Следовательно, одних и тех же уравнений, даже с добавлением соответствующих граничных условий, недостаточно для описания функционирования конкретной производственной системы [9]. Этот факт проявляется в том, что число уравнений меньше числа входящих в них неизвестных, система уравнений незамкнута. Построение замкнутой системы уравнений, описывающей функционирование рассматриваемой производственной среды, связано с поисками дополнительных соотношений между параметрами данной производственной среды. Построить замкнутую систему уравнений – это значит построить математическую модель изучаемой производственной среды. Тот факт, что функция Лагранжа производственной системы $J_П(t, S_1, S_2,..., S_N, м_1, м_2,..., м_N, S_0, м_0)$ содержит только $S_j(t)$, $м_j(t)$, но не более высокие производные, является выражением утверждения, что состояние производственной системы предприятия полностью определяется знанием координат $S_j(t)$ и их скоростей изменения во времени $м_j(t)$. Состояние системы в некоторый момент времени будет определено, если определены микроскопические величины $(S_1, м_1; .... S_N, м_N)$, а в любой другой момент времени найдено из уравнений состояния базовых продуктов (9). Однако если количество базовых продуктов N много больше единицы, то решить систему (9) из $2 \cdot N$-уравнений практически невозможно. Последнее уточнение требует перехода от микроскопического описания производственной системы к макроскопическому с элементами вероятностной природы. Вместо того, чтобы рассматривать состояние производственной системы с микровеличинами $(S_1, м_1; .... S_N, м_N)$, введем соответствующим образом нормированную функцию распределения числа N базовых продуктов $ч(t,S,м)$ в фазовом пространстве $(S,м)$. Каждая точка в данном пространстве будет задавать состояние базового продукта. В силу того, что величина $ч(t,S,м) \cdot dЩ$ представляет собой число базовых продуктов в бесконечно малой ячейке $ДЩ$ фазового технологическом пространства $(S,м)$, можно по изменению фазовой координаты S и фазовой скорости $м$ базового продукта со временем судить и об изменении самой функции $ч(t,S,м)$ [10]:

$$\frac{\partial ч}{\partial t} + \frac{\partial ч}{\partial S} \cdot м + \frac{\partial ч}{\partial м} \cdot f(t,S) = J_{gen}(t,S,м) \qquad (17)$$

Уравнение (17) есть кинетическое уравнение для функции распределения $ч(t,S,м)$. Скорость изменения затрат μ базового продукта и функция $f(t,S)$ может быть найдена из системы уравнений состояния центрального базового продукта (9) [8]:

$$\frac{\partial J_П}{\partial S_0} = f(t,S_0), \qquad (18)$$

$$f(t,S) = \left(\frac{[ч]_{1ш} \cdot k_ш}{[ч]_0} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{[ч]_{1ш} \cdot k_ш}{[ч]_0} \right) + 0 \left(\frac{P \cdot [ч]_0}{([ч]_{1ш} \cdot k_ш)^2} \right),$$

где $[ч]_{1ш}$ –производительность работы технологического оборудования, усредненная по единичному производственному участку; $k_ш$ – коэффициент загрузки оборудования [5,10]; $0 \left(\frac{P \cdot [ч]_0}{([ч]_{1ш} \cdot k_ш)^2} \right)$ – члены более высокого порядка малости, определяемые отношением величины дисперсии P потока базовых продуктов плотности $[ч]_0$ к производительности работы $[ч]_{1ш} \cdot k_ш$ технологического оборудования.

Генераторная функция $J_{gen}(t,S,м)$ определяется плотностью размещения оборудования вдоль технологической цепочки и его техническими характеристиками [9], стремится при $t \to \infty$ свести начальное распределение базовых продуктов по скоростям изменения затрат к состоянию с равновесной функцией распределения в соответствии с технологическим процессом. Функция $\chi(t,S,\mu)$ является нормированной [9]:

$$\int\limits_0^\infty dS \cdot \int\limits_0^\infty dм \cdot ч(t,S,м) = N\,. \tag{19}$$

Условие нормировки (19) представляет собой закон сохранения количества базовых продуктов, находящихся в производственном процессе. Инженерно-производственная функция $f(t,S)$ определяется из сводного графика технологического процесса. По своему смыслу инженерно-производственная функция представляет собой некий аналог силы, перемещающий базовый продукт вдоль технологической цепочки производственного процесса. При таком перемещении на базовый продукт оказывается воздействие со стороны орудий труда (оборудования). Таким образом, происходит увеличение затрат, перенесенных на базовый продукт при его движении вдоль технологической цепочки производственного процесса. Оборудование воздействует на базовый продукт, изменяя его качественно и количественно. Можно говорить только о вероятности того, что после воздействия со стороны технологического оборудования базовый продукт будет находиться в том или ином состоянии. Процесс воздействия со стороны технологического оборудования на базовый продукт обозначаем как $[м \to \widetilde{м}]$, где $м$ и $\widetilde{м}$ – соответственно, скорости изменения затрат, которые несет базовый продукт до и после воздействия. Полное же количество базовых продуктов, находящихся в единице объема фазового пространства и испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования, можно написать в виде произведения потока базовых продуктов $ч(t,S,м) \cdot м$ на вероятность для каждого из них испытать воздействие $[м \to \widetilde{м}]$ в некотором малом элементе $dЩ$ фазового технологического пространства $(S,м)$. Что касается вероятности испытать воздействие $[м \to \widetilde{м}]$, то можно, по крайней мере, утверждать, что такая вероятность пропорциональна плотности расположения оборудования $л_{оборуд}$ вдоль технологической цепочки. Таким образом, число базовых продуктов, испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования и принявших значения в пределах $(\widetilde{м};\widetilde{м}+d\widetilde{м})$, можно записать в виде

$$ш[м \to \tilde{м}] \cdot л_{оборуд} \cdot м \cdot ч(t,S,м) \cdot d\tilde{м} \cdot dS \cdot dм, \qquad (20)$$

где $ш[м \to \tilde{м}]$ – функция, определяемая паспортными данными работы технологического оборудования. Некоторые свойства этой функции могут быть получены из весьма общих соображений, если представить, что полная вероятность перехода в любое состояние равна единице:

$$\int_0^\infty ш[м \to \tilde{м}] \cdot d\tilde{м} = 1 \text{ (нулевой момент функции } ш[м \to \tilde{м}]\text{)}, \qquad (21)$$

а производительность работы оборудования $[\chi]_{1\psi}$ и среднеквадратичное отклонение σ_ψ^2 могут быть определены через первый и второй моменты функции работы технологического оборудования $ш[м \to \tilde{м}]$:

$$\int_0^\infty ш[м \to \tilde{м}] \cdot \tilde{м} \cdot d\tilde{м} = м_ш = \left(\frac{[ч]_{1ш} \cdot k_ш}{[ч]_0} \right) \text{ (первый момент функции } ш[м \to \tilde{м}]\text{)},$$

$$\int_0^\infty ш[м \to \tilde{м}] \cdot \tilde{м}^2 \cdot d\tilde{м} = м_ш^2 + у_ш^2 \text{ (второй момент функции } ш[м \to \tilde{м}]\text{)}. \qquad (22)$$

Первый момент функции работы технологического оборудования $ш[м \to \tilde{м}]$ характеризует зависимость скорости изменения затрат при прохождении базовым продуктом единицы технологического оборудования, второй – среднеквадратичное отклонение скорости изменения затрат при прохождении базовым продуктом единицы технологического оборудования от своего среднего значения $м_ш$, определяемого характеристиками оборудования и особенностями технологического процесса.

Наряду с переходом базовых продуктов $[м \to \tilde{м}]$ в элемент объема $dS \cdot dм$ поступают базовые продукты из объема $dS \cdot d\tilde{м}$ посредством обратного перехода $ш[\tilde{м} \to м]$ в количестве

$$ш[\tilde{м} \to м] \cdot л_{оборуд} \cdot \tilde{м} \cdot ч(t,S,\tilde{м}) \cdot d\tilde{м} \cdot dS \cdot dм, \qquad (23)$$

а общее число базовых продуктов в элементе объема $dЩ$ изменяется в единицу времени на величину

$$dЩ\, J = dЩ \cdot л_{оборуд} \cdot \int_0^\infty \{ш[\tilde{м} \to м] \cdot \tilde{м} \cdot ч(t,S,\tilde{м}) - ш[м \to \tilde{м}] \cdot м \cdot ч(t,S,м)\} d\tilde{м}. \qquad (24)$$

Принимая во внимание нормировочное свойство (21) функции $\psi[\mu \to \tilde{\mu}]$, уравнение (17) можно представить в виде

$$\frac{\partial ч}{\partial t}+\frac{\partial ч}{\partial S}\cdot м+\frac{\partial ч}{\partial м}\cdot f(t,S)=л_{оборуд}\cdot\left\{\int_0^{\infty}\left[ш\left[\tilde{м}\to м\right]\cdot\tilde{м}\cdot ч(t,S,\tilde{м})\right]\cdot d\tilde{м}-м\cdot ч\right\} \quad (25)$$

В большинстве интересных с практической точки зрения случаев функция $ш\left[\tilde{м}\to м\right]$ не зависит от состояния базового продукта до испытания воздействия $\tilde{м}$ со стороны технологического оборудования, что приводит к упрощению интегро-дифференциального уравнения (25):

$$\frac{\partial ч}{\partial t}+\frac{\partial ч}{\partial S}\cdot м+\frac{\partial ч}{\partial м}\cdot f(t,S)=л_{оборуд}\cdot\left\{ш\left[\tilde{м}\to м\right]\cdot\left[ч\right]_1-м\cdot ч\right\}. \quad (26)$$

Нулевой $\int_0^{\infty}dм\cdot ч(t,S,м)=\left[ч\right]_0$ и первый $\int_0^{\infty}dм\cdot м\cdot ч(t,S,м)=\left[ч\right]_1$ моменты функции распределения имеют простую производственную интерпретацию: заделы базовых продуктов и их темп движения вдоль технологической цепочки. С помощью моментов функции распределения можно записать систему уравнений для описания макровеличин производственной системы.

Решение уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $ч(t,S,м)$ в фазовом технологическом пространстве $(S,м)$ связано со значительными трудностями, и первый шаг анализа должен состоять в исследовании порядка величин различных слагаемых уравнения (25).

Обозначим через $ф$, $з$, $о$ характерные время, скорость изменения затрат и шаг по переменной S. Введем безразмерные переменные t, S, $м$, связанные с переменными $ф$, $з$, $о$ следующим образом:

$$t=ф\cdot t\,;\ S=о\cdot S\,;\ м=о\cdot м;\ J_{gen}(ччч)=\left\langle л_{оборуд}\right\rangle\cdot з\cdot J_{gen}(ччч), \quad (27)$$

где $\left\langle л_{оборуд}\right\rangle$ – характерная плотность расположения оборудования вдоль технологической цепочки производственного процесса. Тогда кинетическое уравнение производственной системы принимает вид

$$\left[\frac{\partial\chi}{\tau\cdot\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi}{\xi\cdot\partial\hat{S}}\cdot\eta\cdot\hat{\mu}+\frac{\partial\chi}{\eta\cdot\partial\hat{\mu}}\cdot\frac{\eta\cdot d\hat{\mu}}{\tau\cdot\partial\hat{t}}\right]=\left\langle л_{оборуд}\right\rangle\cdot з\cdot J_{gen}(ччч). \quad (28)$$

Разделим слагаемые выше написанного приближенного равенства на $з\cdot о^{-1}$:

$$\frac{з}{о\cdot\left\langle л_{оборуд}\right\rangle}\cdot\left[\frac{о\cdot\partial ч}{з\cdot ф\,\partial t}+\frac{\partial ч}{\partial S}\cdot м+\frac{о\cdot\partial ч}{з\cdot ф\,\partial м}\cdot\frac{dм}{\partial t}\right]=з\cdot J_{gen}(ччч), \quad (29)$$

и после сокращения на η получим

$$\frac{1}{о\cdot\left\langle л_{оборуд}\right\rangle}\cdot\left[\frac{о\cdot\partial ч}{з\cdot ф\,\partial t}+\frac{\partial ч}{\partial S}\cdot м+\frac{о\cdot\partial ч}{з\cdot ф\,\partial м}\cdot\frac{dм}{\partial t}\right]=J_{gen}(ччч). \qquad (30)$$

Введем обозначения

$$K_v=\frac{\left[\dfrac{1}{\left\langle л_{оборуд}\right\rangle}\right]}{о},\; P_m=\frac{о}{ф\cdot з}, \qquad (31)$$

с учетом которых кинетическое уравнение производственной системы (25) примет вид

$$K_v\cdot\left[P_m\cdot\frac{\partial ч}{\partial t}+\frac{\partial ч}{\partial S}\cdot м+P_m\cdot\frac{\partial ч}{\partial м}\cdot\frac{dм}{\partial t}\right]=J_{gen}(ччч). \qquad (32)$$

В предельных случаях вид кинетического уравнения производственной системы (32) представлен в табл. 1.

Таблица 1

Вид кинетического уравнения производственной системы в нулевом приближении по малому параметру $\varepsilon(K_v,P_m)\to 0$ относительно равновесного состояния производственной системы

	$P_m\to 0$	$P_m\to 1$	$P_m\to\infty$
$K_v\to 0$ $e\approx K_v$	$\frac{\partial ч}{\partial S}\cdot м=0$, $J_{gen}(ччч)=0$	$\frac{\partial ч}{\partial t}+\frac{\partial ч}{\partial S}\cdot м+\frac{\partial ч}{\partial м}\cdot\frac{dм}{\partial t}=0$, $J_{gen}(ччч)=0$	$\frac{\partial ч}{\partial t}+\frac{\partial ч}{\partial м}\cdot\frac{dм}{\partial t}=0$ $J_{gen}(ччч)=0$
$K_v\to 1$	$\frac{\partial ч}{\partial S}\cdot м=J_{gen}$	$\frac{\partial ч}{\partial t}+\frac{\partial ч}{\partial S}\cdot м+\frac{\partial ч}{\partial м}\cdot\frac{dм}{\partial t}=J_{gen}$	$\frac{\partial ч}{\partial t}+\frac{\partial ч}{\partial м}\cdot\frac{dм}{\partial t}=J_{gen}$
$K_v\to\infty$ $e\approx 1K_v$	$\frac{\partial ч}{\partial S}\cdot м=0$	$\frac{\partial ч}{\partial t}+\frac{\partial ч}{\partial S}\cdot м+\frac{\partial ч}{\partial м}\cdot\frac{dм}{\partial t}=0$	$\frac{\partial ч}{\partial t}+\frac{\partial ч}{\partial м}\cdot\frac{dм}{\partial t}=0$

Умножив кинетические уравнения в табл. 1 соответственно на 1, $м$, $\frac{м^2}{2}$ и проинтегрировав по всему диапазону $м$, получим уравнения балансов макропараметров производственной системы [16] в нулевом приближении по малому параметру $e(K_v,P_m)\to 0$ относительно равновесного состояния, которые представлены в табл. 2. Данная таблица показывает, что вид уравнений макропараметров производственной системы, описывающих функционирование технологического процесса, зависит от характерных чисел производственной системы.

В качестве $ф$, $о$, $з$ (характерные время, шаг по переменной S и скорость изменения затрат) могут быть взяты время производственного цикла T_d, $ф = T_d$, средняя себестоимость базового продукта S_d, $\xi = S_d$, и средняя скорость изменения затрат за период производственного цикла $з_d$, $з_d = з$. Величина $\dfrac{1}{\langle л_{оборуд} \rangle} = L_d$ есть среднее перенесение затрат на базовый продукт между единицами оборудования (или длина свободного перемещения базового продукта между технологическими воздействиями). Тогда характерные числа производственной системы примут вид:

$$K_v = \frac{L_d}{S_d}, \; P_m = \frac{S_d}{T_d \cdot з_d} \tag{33}$$

Подстановка значений времени производственного цикла T_d, средней себестоимости базового продукта S_d, средней скорости изменения затрат за период производственного цикла $з_d$ и средней плотности расположения оборудования вдоль технологической цепочки $\langle л_{оборуд} \rangle$ в выражения для характерных чисел производственной системы (33) дает возможность обосновать выбор модели описания функционирования производственной системы. Данную оценку следует воспринимать скорее как качественную, чем количественную. Однако такой подход обладает тем преимуществом, что позволяет легко сравнивать результаты, соответствующие различным микромоделям, так как уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $ч(t,S,м)$ (17) в фазовом технологическом пространстве $(S,м)$, будучи выраженное через макроизмеряемые величины $ф$, $о$, $з$, не зависит от вида интеграла

$$л_{оборуд} \cdot \int_0^{\infty} \left[ш\left[\tilde{м} \to м\right] \cdot \tilde{м} \cdot ч(t,S,\tilde{м}) - ш\left[м \to \tilde{м}\right] \cdot м \cdot ч(t,S,м) \right] \cdot d\tilde{м}$$

и может быть представлено в виде уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат через макроизмеряемые величины $ф$, $о$, $з$:

$$\frac{\partial ч}{\partial t} + \frac{\partial ч}{\partial S} \cdot м + \frac{\partial ч}{\partial м} \cdot f(t,S) \approx л_{оборуд} \cdot з \cdot \left[ч - ч_0 \right]. \tag{34}$$

Таблица 2

Вид уравнений балансов макропараметров производственной системы в нулевом приближении по малому параметру $e(K_v, P_m) \to 0$ относительно равновесного состояния производственной системы

	$P_m \to 0$	$P_m \to 1$	$P_m \to \infty$
$K_v \to 0$ $\varepsilon \approx K_v$	$\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}=0,$ $\frac{\partial[\chi]_2}{\partial S}=0,$ $\frac{\partial[\chi]_3}{\partial S}=0$	$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}=0,$ $\frac{\partial[\text{ч}]_1}{\partial t}+\frac{\partial[\text{ч}]_2}{\partial S}=$ $=f(t,S)\cdot[\text{ч}]_0$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\chi]_2}{\partial t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\chi]_3}{\partial S}=$ $=f(t,S)\cdot[\text{ч}]_1$	$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}=0,$ $\frac{\partial[\chi]_1}{\partial t}=f(t,S)\cdot[\chi]_0,$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\chi]_2}{\partial t}=f(t,S)\cdot[\chi]_1$
	$J_{gen}(\text{чч})=0 \Rightarrow \{\text{ш}[\tilde{\text{м}} \to \text{м}]\cdot[\text{ч}]_1 - \text{м}\cdot\text{ч}\}=0$		
$K_v \to 1$	$\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}=\int_0^\infty d\text{м}J_{gen}$ $\frac{\partial[\text{ч}]_2}{\partial S}=\int_0^\infty d\text{мм}J_{gen}$ $\frac{\partial[\text{ч}]_3}{\partial S}=\int_0^\infty d\text{мм}^2 J_{gen}$	$\frac{\partial[\text{ч}]_0}{\partial t}+\frac{\partial[\text{ч}]_1}{\partial S}=\int_0^\infty d\text{м}J_{gen}$ $\frac{\partial[\text{ч}]_1}{\partial t}+\frac{\partial[\text{ч}]_2}{\partial S}=$ $=f(t,S)\cdot[\text{ч}]_0+\int_0^\infty d\text{мм}J_{gen}$ $\frac{\partial[\text{ч}]_2}{\partial t}+\frac{\partial[\text{ч}]_3}{\partial S}=$ $=2\cdot f(t,S)\cdot[\text{ч}]_1+$ $\int_0^\infty d\text{мм}^2 J_{gen}$	$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}=\int_0^\infty d\text{м}J_{gen}$ $\frac{\partial[\chi]_1}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_2}{\partial S}=\int_0^\infty d\text{мм}J_{gen}$ $\frac{\partial[\chi]_2}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_3}{\partial S}=\int_0^\infty d\text{мм}^2 J_{gen}$
$K_v \to \infty$ $\varepsilon \approx 1/K_v$	$\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}=0,$ $\frac{\partial[\chi]_2}{\partial S}=0,$ $\frac{\partial[\chi]_3}{\partial S}=0$	$\frac{\partial[\text{ч}]_0}{\partial t}+\frac{\partial[\text{ч}]_1}{\partial S}=0,$ $\frac{\partial[\text{ч}]_1}{\partial t}+\frac{\partial[\text{ч}]_2}{\partial S}=$ $=f(t,S)\cdot[\chi]_0$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\chi]_2}{\partial t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\chi]_3}{\partial S}==$ $f(t,S)\cdot[\text{ч}]_1$	$\frac{\partial[\text{ч}]_0}{\partial t}=0,$ $\frac{\partial[\text{ч}]_1}{\partial t}=f(t,S)\cdot[\text{ч}]_0,$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\text{ч}]_2}{\partial t}=f(t,S)\cdot[\text{ч}]_1$
	Функция распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\text{ч}(t,S,\text{м})$ в нулевом приближении по $e(K_v, P_m) \to 0$ не зависит от функции $\text{ш}[\tilde{\text{м}} \to \text{м}]$, описывающей работу технологического оборудования		

При $\left[ч - ч_0\right] = 0$ имеем случай равновесного состояния производственной системы, для которого справедливо тождество

$$J_{gen}(ч_0, ч_0) = 0\,. \tag{35}$$

Значение характерного числа K_v изменяется в пределах от нуля до бесконечности, и предусматривают два предельных случая: $K_v \to 0$ и $K_v \to \infty$. Эти два случая описывают ситуации, относящиеся к предельно малым и предельно большим изменениям затрат базового продукта между двумя основными операциями.

Класс производственных систем, для которых качественная оценка состояния дает значения коэффициентов $K_v << 1$, $P_m \approx 1$, соответствует плотному потоку базовых продуктов вдоль технологической цепочки производственного процесса с высокой концентрацией технологического оборудования. Случай $K_v >> 1$, $P_m \approx 1$ соответствует производственному процессу, у которого, как правило, малая плотность обрабатывающего оборудования $\left(л_{оборуд} \to 0\right)$ вдоль цепочки технологического процесса изготовления базового продукта. Тем самым, базовый продукт проходит большой путь между основными операциями, находясь в свободном, необрабатывающемся состоянии, свободно перемещается вдоль технологической цепочки. Под свободным перемещением будем понимать такое движение базового продукта вдоль технологической цепочки производственного процесса, при котором перенос затрат на базовый продукт происходит наперед заданным способом, определяемым инженерно-производственной функцией технологического процесса $f(t, S)$ без наличия отклонения скорости изменения затрат от своего среднего значения. Такой перенос характеризуется функцией $ш[м \to \widetilde{м}] = ш[м \to м]$, т.е. после технологической обработки скорость изменения затрат, отнесенных на базовый продукт, может принимать только значение, определенное паспортом оборудования, без каких-то отклонений от паспортной величины.

Таким образом, модель функционирования производственных систем может быть оценена характерными числами. Характерные числа дают качественную оценку функционирования производственного процесса, позволяют подобрать для описания реальной производственной системы соответствующую систему уравнений балансов макроскопических параметров производственной системы (см. табл. 2). Конкретный вид генераторной функции функционирующей производственной системы в случае, близком к равновесному состоянию, может быть заменен через значения времени производственного цикла

T_d, средней себестоимости базового продукта S_d, средней скорости изменения затрат за период производственного цикла $з_d$ и средней плотности расположения оборудования вдоль технологической цепочки $\left\langle л_{оборуд} \right\rangle$ характерных чисел производственной системы. Такой подход дает возможность обосновать выбор модели описания функционирования производственной системы. Оценку выбора модели следует воспринимать скорее как качественную, чем количественную. Однако такой подход обладает тем преимуществом, что позволяет легко сравнивать результаты, соответствующие различным микромоделям.

Применение функции Лагранжа производственной системы для расчета продолжительности производственного цикла прямоточной линии предприятия с серийным или массовым выпуском продукции

Одним из основных календарно-плановых нормативов оперативного планирования производства является продолжительность производственного цикла изготовления базового продукта T_d [5, с. 161]. Нормативная продолжительность производственного цикла изготовления базового продукта T_d имеет вид [5, с. 170]:

$$T_d = \sum_{m=1}^{N_m} \frac{\left(\dfrac{Дф_{иOm}}{c_m} + Дф_{иCC} \right)}{s_m q_m} K_{парт} + Дф_{иеест} \qquad (36)$$

где $Дф_{иOm}$ – среднее операционное время;

$Дф_{иCC}$ – межоперационное время;

c_m – число рабочих мест, параллельно занятых на выполнении операции;

s_m – число рабочих смен в сутках;

q_m – длительность рабочей смены;

$K_{парт}$ – коэффициент параллельности;

$Дф_{иеест}$ – время естественных процессов соответственно для m-й технологической операции ($m = 1, N_m$).

Определение межоперационного времени базового продукта $Дф_{иCC}$ является наиболее сложным элементом в расчете длительности производственного цикла T_d и его часто устанавливают без должного обоснования [5, с. 170]. Как правило, нормативы среднего межоперационного времени базового продукта $Дф_{иCC}$ рассчитывается с учетом особенностей производственных участков и характера обрабатываемых продуктов. Для этого используется обработка обширных статистических наблюдений методом множественной корреляции. Наиболее точно длительность производственного цикла может быть установлена на основании планов-графиков работы производственных участков, представляющих собою расписание прохождения базового продукта вдоль технологической цепочки. При наличии таких графиков длительность производственного цикла T_d и его структура для каждой партии базовых продуктов устанавливается в органическом сочетании с процессами изготовления других партий, обрабатываемых на том же производственном участке с учетом пропускной способности рабочих мест [1, с. 171].

В аналитическом виде движение базового продукта вдоль центральной технологической траектории может быть описано с помощью целевой функции производственной системы в нулевом приближении относительно отклонений технологических параметров производственного процесса от параметров, заданных центральной технологической траекторией [8]:

$$J_{ш0}(S_ш, м_ш) = \frac{1}{2} \cdot \left(м_ш - б_{шV}(S_{шV}) \cdot \frac{[ч]_{1ш}}{[ч]_0} - б_{шC}(S_{шV}) \cdot k_{шC}(S_{шV}) \right)^2, \quad (37)$$

где $S_ш$ (грн) и $\mu_\psi = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S_\psi}{\Delta t}$ (грн./час) соответственно усредненная сумма общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенных производственной системой на центральный базовый продукт; $[ч]_{1ш}(S_{шV})$ (шт./час) – производительность технологического оборудования; $[ч]_0(S_{шV})$ (шт./грн) – плотность межоперационных заделов; $k_{шC}(S_{шV})$ (грн./час) – средняя интенсивность переноса условно-постоянных затрат за среднее межоперационное время $Дф_{шC}(S_{шV})$, в течение которого базовый продукт находится в межоперационном заделе между (m-1)-й и m-й технологическими операциями; $б_{шV}(S_{шV})$, $б_{шC}(S_{шV})$ – коэффициенты пропорциональности между интенсивностью переноса затрат производственным оборудованием на элементы производственной системы и интенсивностью потребления затрат базовым продуктом при его обработке на m-й технологической операции [9]. Каждая технологическая операция характеризуется средним использованием производственных ресурсов $ДS_ш(S_{шV})$ (грн.), необходимых для осуществления воздействия над базовым продуктом, и средней интенсивностью переноса данных ресурсов $k_ш(S_{шV})$(грн./час) производственным оборудованием на базовый продукт в соответствии с заданным технологическим процессом. Общая сумма средних затрат $ДS_ш(S_{шV})$, перенесенных на базовый продукт на технологической операции с межоперационным заделом $N_ш(S_{шV})$ может, быть представлена в виде суммы условно-переменных $ДS_{шV}(S_{шV})$ и условно-постоянных $ДS_{шC}(S_{шV})$ затрат [17, с. 364]:

$$ДS_ш(S_{шV}) = ДS_{шV}(S_{шV}) + ДS_{шC}(S_{шV}). \tag{38}$$

Таким образом, технология производства представлена в виде центральной технологической траектории $S_ш = S_ш(t)$, определяющей среднюю величину и последовательность переноса ресурсов производственной системы на базовый продукт при его движении в технологическом пространстве $(S, м)$:

$$S_{шm} = \sum_{k=1}^{m} ДS_{шk} = \sum_{k=1}^{m} \left(б_{шVm} k_{шVm} Дф_{шOm} + б_{шCm} k_{шCm} Дф_{шCC} \right) \tag{39}$$

Функция Лагранжа производственной системы (37) соответствует минимуму целевого функционала.

Соответствующее функции Лагранжа уравнение Эйлера (9) интегрируется в общем виде. При этом нет даже необходимости выписывать само уравнение Эйлера, а следует исходить сразу из его интеграла движения (12)

$$H_{ш0} = м_ш \cdot \frac{\partial J_{ш0}(, S_ш, м_ш)}{\partial м_ш} - J_{ш0}(, S_ш, м_ш) = \frac{1}{2} \cdot \mu_\psi{}^2 -$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(б_{шV}(S_{шV}) \cdot \frac{[ч]_{1ш}}{[ч]_0} + б_{шC}(S_{шV}) \cdot k_{шC}(S_{шV}) \right)^2 \tag{40}$$

Функция Лагранжа определена с точностью до константы. Если, например, в качестве константы принять максимальное значение $C_1 = Max\left[\frac{1}{2} \cdot м_ш{}^2 \right]$ вдоль технологической цепочки, то равенство (40) приобретет вид

$$H_{ш0_C} = \frac{1}{2} \cdot м_ш{}^2 + П(S_{шV}) \tag{41}$$

$$П(S_{шV}) = C_1 - \frac{1}{2} \cdot \left(б_{шV}(S_{шV}) \cdot \frac{[ч]_{1ш}}{[ч]_0} + б_{шC}(S_{шV}) \cdot k_{шC}(S_{шV}) \right)^2 > 0,$$

$$H_{ш0_C} = H_{ш0} + Max\left[\frac{1}{2} \cdot м_{ш^2} \right] \qquad (42)$$

Интегрируя (42) его путем разделения переменных, имеем

$$м_ш = \frac{dS_ш}{dt} = \sqrt{2 \cdot \left(H_{ш0} + \frac{1}{2} \cdot \left(б_{шV}(S_{шV}) \cdot \frac{[ч]_{1ш}}{[ч]_0} + б_{шC}(S_{шV}) \cdot k_{шC}(S_{шV}) \right)^2 \right)} \qquad (43)$$

откуда

$$dt = \frac{dS_ш}{\sqrt{2 \cdot \left(H_{ш0} + \frac{1}{2} \cdot \left(б_{шV}(S_{шV}) \cdot \frac{[ч]_{1ш}}{[ч]_0} + б_{шC}(S_{шV}) \cdot k_{шC}(S_{шV}) \right)^2 \right)}} \qquad (44)$$

Производя интегрирование вдоль всей технологической цепочки производственного процесса базового продукта, находим длительность производственного цикла T_d

$$T_d = \int_0^{T_d} dt = \int_0^{S_d} \frac{dS_\psi}{\sqrt{2 \cdot \left(H_{\psi 0} + \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha_{\psi V}(S_{\psi V}) \cdot \frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} + \alpha_{\psi C}(S_{\psi V}) \cdot k_{\psi C}(S_{\psi V}) \right)^2 \right)}} \qquad (45)$$

Рассматривая случай, при котором производственные ресурсы передаются от технологического оборудования к базовым продуктам без потерь, положим $H_{ш0}$=0. Последнее дает приближенное выражение для длительности производственного цикла T_d и средней скорости потребления затрат $м_ш$.

$$T_d = \int_0^{S_d} \frac{dS_ш}{\left(б_{шV}(S_{шV}) \cdot \frac{[ч]_{1ш}}{[ч]_0} + б_{шC}(S_{шV}) \cdot k_{шC}(S_{шV}) \right)} \qquad (46)$$

$$м_ш = \frac{dS_{шV}}{dt} = \left(б_{шV}(S_{шV}) \cdot \frac{[ч]_{1ш}}{[ч]_0} + б_{шC}(S_{шV}) \cdot k_{шC}(S_{шV}) \right) \qquad (47)$$

Для большинства производственных систем с массовым выпуском продукции условно-постоянные затраты значительно меньше условно-переменных, откуда следует выражение

$$T_d \approx \int\limits_0^{S_d} \frac{dS_ш}{б_{шV}(S_{шV})\cdot\frac{[ч]_{1ш}}{[ч]_0}}, \quad м_ш \approx б_{шV}(S_{шV})\cdot\frac{[ч]_{1ш}}{[ч]_0} \qquad (48)$$

Заменив процедуру интегрирования суммированием и используя выражение для плотности межоперационных заделов

$$[ч]_{0m} = \frac{N_{шm}}{ДS_{шm}}; \qquad (49)$$

получаем

$$T_d \approx \sum_{m=1}^{M}\frac{ДS_{шm}}{б_{шVm}\frac{[ч]_{1шш}}{[ч]_{0m}}}\sum_{m=1}^{M}\frac{N_{шm}}{б_{шVm}[ч]_{1шш}}. \qquad (50)$$

Производительность технологического оборудования $[ч]_{1ш}(S_{шV})$ обратно пропорционально среднему операционному времени $Дф_{шOm}$

$$[ч]_{1ш}(S_{шV})=\frac{c_m}{Дф_{шOm}} \qquad (51)$$

Для центральной технологической траектории в случае серийного или массового производства справедливо соотношение

$$\left(\frac{Дф_{шOm}}{c_m}+Дф_{шCC}\right)=H_{шm}\cdot\frac{Дф_{шOm}}{c_m} \qquad (52)$$

Подставляя (10) и (11), получаем привычный вид для расчета длительности производственного цикла T_d технологического процесса в пренебрежении временем естественных процессов $Дф_{шест}$

$$T_d \approx \sum_{m=1}^{M}\frac{\frac{Дф_{шOm}}{c_m}+Дф_{шCC}}{б_{шVm}} \approx \sum_{m=1}^{N_m}\frac{\left(\frac{Дф_{шOm}}{c_m}+Дф_{шCC}\right)}{s_m q_m}K_{парт} \qquad (53)$$

Коэффициент пропорциональности $б_{шVm}$ несет следующий технологический смысл

$$б_{шVm} = \frac{s_m q_m}{K_{парт}} \qquad (54)$$

Для технологического процесса с серийным или массовым выпуском продукции количество базовых продуктов, находящихся в межоперационном заделе, много больше единицы, $H_{шm} >> 1$, откуда из (52) вытекает соотношение

$$\left(1 + \frac{Дф_{шCC}}{\left(\frac{Дф_{шOm}}{c_m} \right)} \right) = H_{шm} , \; \frac{Дф_{шCC}}{Дф_{шOm}} \frac{H_{шm}}{c_m} >> 1 \qquad (55)$$

Таким образом, длительность производственного цикла T_d (53) технологического процесса с серийным или массовым выпуском продукции определяется межоперационным временем $Дф_{шCC}$ пребывания базового продукта на m-й технологической операции. Как уже подчеркивалось ранее, межоперационное время пребывания базового продукта на m-й технологической операции $Дф_{шCC}$ является наиболее сложным элементом в расчете длительности производственного цикла T_d, часто устанавливается без должного обоснования [5, с. 170], связано с количеством базовых продуктов, находящихся в межоперационном заделе, приближенным соотношением (52). Изменение количества базовых продуктов, находящихся в межоперационном заделе, может быть представлено через производительность работы технологического оборудования

$$\frac{dH_{шm}(t)}{dt} = \left[ч \right]_{1ш(m-1)} \partial_{(m-1)}(t, t_{1(m-1)}, t_{2(m-1)}) - \left[ч \right]_{1шш} \partial_m(t, t_{1m}, t_{2m}),$$

$$m = 1, N_m , \qquad (56)$$

$$\left[ч \right]_{1шш} = \frac{c_m}{Дф_{шOm}} , \; (0 \le t_{1m} < t_{2m} T_d)$$

с начальными условиями для количества базовых продуктов, находящихся в межоперационном заделе

$$H_{шm}(0) = H_{шm0} , \; m = 1, N_m \qquad (57)$$

Функция $\partial_m(t, t_{1m}, t_{2m})$ определяет членение периода производственного цикла T_d на фазы [5, с.206] с временами начала t_{1m} и окончания t_{2m} технологической обработки базового продукта на m-й технологической операции:

$$\partial_m(t,t_{1m},t_{2m}) = 1 \text{ при } t_{1m} \le t \le t_{2m} \qquad (58)$$
$$\partial_m(t,t_{1m},t_{2m}) = 0 \text{ при } 0 \le t < t_{1m} \text{ или } t_{2m} < t \le T_d$$

Добавив систему уравнений (56) с начальными условиями (57) к выражению для определения длительности производственного цикла T_d (50), получаем полную систему уравнений расчета длительности производственного цикла T_d

$$T_d \approx \sum_{m=1}^{M} \frac{N_{шт}}{б_{шVm}[ч]_{1шш}}, \; m = 1, N_m, \; H_{шт}(0) = H_{шт0}, \qquad (59)$$

$$\frac{dH_{шт}(t)}{dt} = [ч]_{1ш(m-1)}\partial_{(m-1)}(t,t_{1(m-1)},t_{2(m-1)}) - [ч]_{1шш}\partial_m(t,t_{1m},t_{2m}).$$

Система уравнений (59) дает условия стационарности производственного процесса

$$\frac{dH_{шт}(t)}{dt} = [ч]_{1ш(m-1)}\partial_{(m-1)}(t,t_{1(m-1)},t_{2(m-1)}) - [ч]_{1шш}\partial_m(t,t_{1m},t_{2m}) = 0, \qquad (60)$$

которые могут быть выражены в виде равенств

$$H_{шт}(t) = H_{шт0} = const \qquad (61)$$

или используя свойства (58) функции $\partial_m(t,t_{1m},t_{2m})$

$$[ч]_{1ш(m-1)} = [ч]_{1шш} \qquad (62)$$

Используя (51), условие стационарности (или синхронизации) можно записать в более привычном для управления производством виде [5, с. 192, формула (XXXIV-5)]

$$\frac{Дф_{шO1}}{c_1} = \frac{Дф_{шO2}}{c_2} = \frac{Дф_{шO3}}{c_3} = \ldots = \frac{Дф_{шOm}}{c_m} = \ldots = \frac{Дф_{шON_m}}{c_{N_m}} \qquad (63)$$

Условие стационарности (63) используется для расчета работы поточных технологических линий. Для того, чтобы работа поточной линии осуществлялась бесперебойно в заданном темпе, необходимо насыщение всех стадий производственного процесса заделами, уровень которых должен быть строго регламентирован. Постоянное значение операционных заделов (61) в течение всего производственного цикла позволяет без особых трудностей определить длительность производственного цикла T_d :

$$T_d \approx \sum_{m=1}^{M} \frac{H_{шт0}}{б_{шVm}\left[ч\right]_{1шш}}, \; m = 1, N_m \, . \tag{64}$$

Величина межоперационных заделов $H_{шт0}$ определяется ограничениями, связанными с особенностями технологического процесса, размерами транспортных партий, страховыми заделами и т.д.

Условие стационарности (63) в общем случае построения технологического процесса производственных систем трудно реализуемо. На практике используется методика членения периода производственного цикла T_d на фазы [5, с. 206]. Величина межоперационных заделов $H_{шт}(t)$ представляется в виде периодичной функции с периодом колебания T_d. Полная система уравнений для расчета длительности производственного цикла T_d представляется в виде

$$T_d \approx \sum_{m=1}^{M} \frac{N_{шт}}{б_{шVm}\left[ч\right]_{1шш}}, \; m = 1, N_m \, , \; H_{шт}(0) = H_{шт0} \, , \tag{65}$$

$$\int_0^{T_d} \frac{dH_{шт}(t)}{dt} dt \int_0^{T_d} \left(\left[ч\right]_{1ш(m-1)} \partial_{(m-1)}(t, t_{1(m-1)}, t_{2(m-1)}) - \left[ч\right]_{1шш} \partial_m(t, t_{1m}, t_{2m}) \right) dt 0 \, .$$

Система уравнений (65) дает условия квазистационарности производственного процесса

$$\int_0^{T_d} \left(\left[ч\right]_{1ш(m-1)} \cdot \partial_{(m-1)}(t, t_{1(m-1)}, t_{2(m-1)}) - \left[ч\right]_{1шш} \partial_m(t, t_{1m}, t_{2m}) \right) dt 0 \tag{66}$$

Произведя интегрирование по периоду производственного цикла T_d, и учитывая, что характеристики работы производственного оборудования $\left[ч\right]_{1ш(m-1)}$ и $\left[ч\right]_{1шш}$ за период производственного цикла не меняются со временем, получаем условия квазистационарности производственного процесса (условия синхронизации производственного процесса).

$$\left[ч\right]_{1ш(m-1)} \cdot (t_{2(m-1)} - t_{1(m-1)}) - \left[ч\right]_{1шш}(t_{2m} - t_{1m}) \approx 0$$

$$\left[ч\right]_{1ш(m-1)} \cdot (t_{2(m-1)} - t_{1(m-1)}) \approx \left[ч\right]_{1шш}(t_{2m} - t_{1m}) \text{ или}$$

$$\frac{t_{2(m-1)} - t_{1(m-1)}}{\left[ч\right]_{1шш}} \frac{t_{2m} - t_{1m}}{\left[ч\right]_{1ш(m-1)}} \tag{67}$$

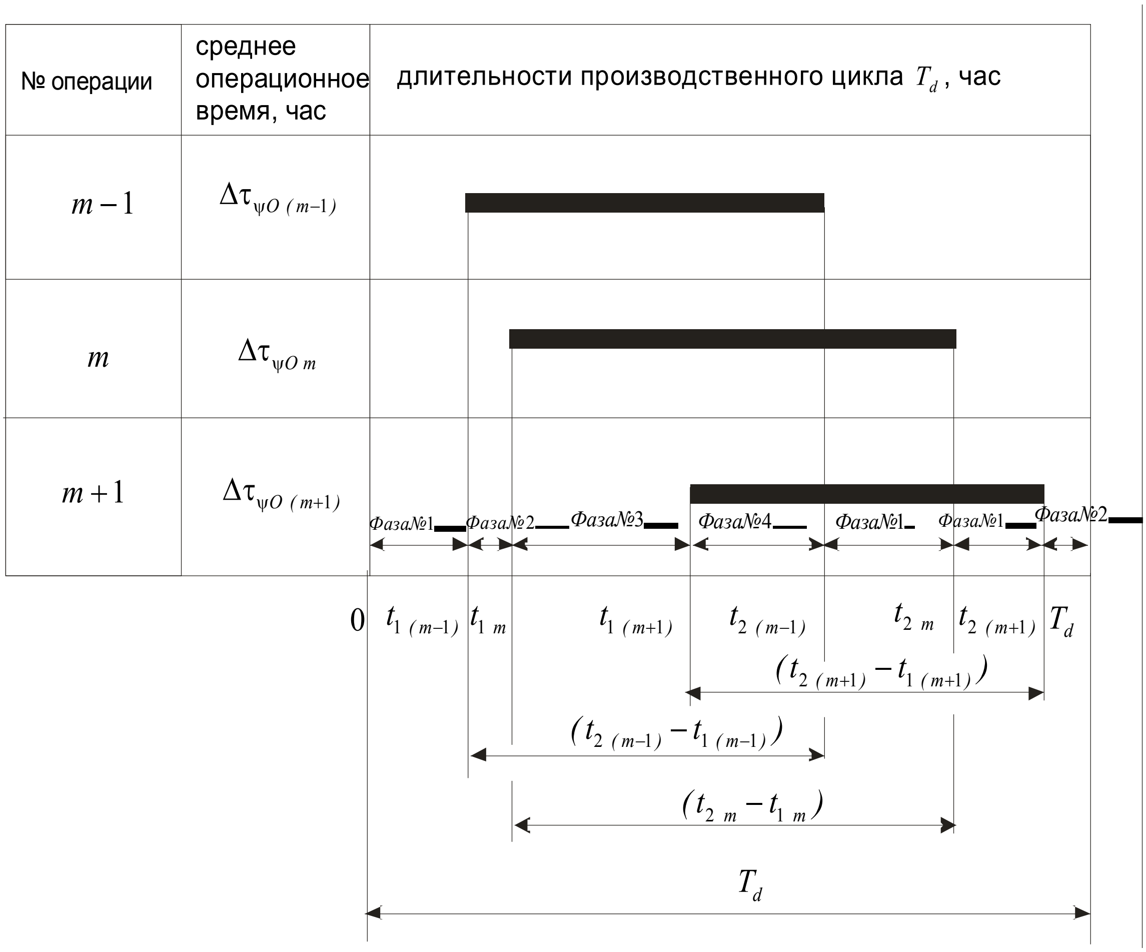

Рис. 3. Разделение производственного цикла на фазы при расчете межоперационных заделов базовых продуктов

Условия (67) можно с учетом (51) $\left[ч\right]_{1шш}) = \frac{c_m}{Дф_{шОm}}$ выразить через основное операционное время

$$\frac{(t_{2(m-1)}-t_{1(m-1)})\cdot c_{(m-1)}}{Дф_{шО(m-1)}} \frac{(t_{2m}-t_{1m})\cdot c_m}{Дф_{шОm}} \qquad (68)$$

Расчет изменений межоперационного задела за период производственного цикла T_d по фазам может быть представлен в привычном для управления производством виде [5, с.206, формула (XXXIV-11)]

$$H_{шт}(T_d) - H_{шт}(0) \approx \frac{(t_{2(m-1)}-t_{1(m-1)})\cdot c_{(m-1)}}{Дф_{шО(m-1)}} - \frac{(t_{2m}-t_{1m})\cdot c_m}{Дф_{шОm}} \qquad (69)$$

Для определения длительности производственного цикла T_d нестационарного значения величины межоперационных заделов технологической цепочки производственного процесса воспользуемся системой уравнений (59).

Как говорилось ранее, для большинства производственных систем с массовым выпуском продукции условно-постоянные затраты значительно меньше условно-переменных. Принимая это во внимание и дополняя равенство (39) выражением для плотности межоперационных заделов

$$T_d \approx \int_0^{S_d} \frac{dS_{шV}}{б_{шV}(S_{шV}) \cdot \dfrac{[ч]_{1ш}}{[ч]_0}}$$

$$\frac{\partial[ч]_0}{\partial t} = -\frac{\partial[ч]_{1ш}}{\partial S_{шV}} \partial_ш(t, S_{шV}, t_1(S_{шV}), t_2(S_{шV})) = \frac{\partial И(t, S_{шV})}{\partial t} \qquad (70)$$

получаем систему уравнений для нестационарного состояния межоперационных заделов вдоль технологической цепочки производственного процесса.

Произведение $\dfrac{\partial[ч]_{1ш}}{\partial S_{шV}} \cdot \partial_ш(t, S_{шV}, t_1(S_{шV}), t_2(S_{шV}))$ есть наперед заданная табличная функция от времени t и координаты $S_{шV}$, определяющая последовательность работы оборудования. Произведя интегрирование выражения (70), получаем

$$[ч]_0(t, S_{шV}) = И(t, S_{шV}) - И(0, S_{шV}) = [ч]_0(0, S_{шV}) + И(t, S_{шV}). \qquad (71)$$

Подставляя (71) в выражение (70)

$$T_d \approx \int_0^{S_d} \frac{dS_{шV}}{б_{шV}(S_{шV}) \cdot \dfrac{[ч]_{1ш}}{[ч]_0(0, S_{шV}) + И(t, S_{шV})}} \approx \int_0^{S_d} \frac{[ч]_0(0, S_{шV}) + И(t, S_{шV})}{б_{шV}(S_{шV}) \cdot [ч]_{1ш}} dS_{шV}$$

$$\int_0^{S_d} \frac{[ч]_0(0, S_{шV})}{б_{шV}(S_{шV}) \cdot [ч]_{1ш}} dS_{шV} + \int_0^{S_d} \frac{И(t, S_{шV})}{б_{шV}(S_{шV}) \cdot [ч]_{1ш}} dS_{шV}. \qquad (72)$$

Выражение для определения длительности производственного цикла T_d содержит два слагаемых. Первое слагаемое соответствует длительности производственного цикла при условии сохранения неизменным первоначального состояния межоперационных заделов (64), второе слагаемое представляет собой поправку к длительности производственного цикла T_d за счет наличия нестационарного состояния межоперационных заделов вдоль технологической цепочки.**

Список литературы

1. Meyer J. R. The Economies of Competition in the Transportation Industries / J. R. Meyer, M. J. Peck, J. Stenason, C. Zwick. – Harvard, 1959. – 381 c.
2. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия / Дж. Форрестер. – М. : Прогресс, 1961. – 341 с.
3. Леонтьев В. В. Исследование структуры американской экономики / В. В. Леонтьев. – М. : Гос. стат. изд-во, 1958. – 640 с.
4. Прыткин Б. В. Технико-экономический анализ производства / Б. В. Прыткин. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 399 с.
5. Летенко В. А. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием / В. А. Летенко, Б. Н. Родионов : В 2 ч. – М. : Высш. шк., 1979; Ч. 2: Внутризаводское планирование. – 232 с.
6. Занг В.-Б. Синергетическая экономика / В.-Б. Занг. – М. : Мир, 1999. – 335 с.
7. Юхновский И. Р. Термодинамические аналогии в экономике / И. Р. Юхновский // Тез. докл. Междунар. конф. НАНУ "Статистическая физика: Общие проблемы и новые применения". – Л., 2005. – С. 51.
8. Пигнастый О. М. О построении целевой функции производственной системы / О. М. Пигнастый // Доповіді Національної академії наук України, 2007. – № 5. – С. 50–55.
9. Демуцкий В. П. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок / В. П. Демуцкий, В. С. Пигнастая, О. М. Пигнастый. – Х. : ХНУ, 2003. – 272 с.
10. Демуцкий В. П. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции / В. П. Демуцкий, В. С. Пигнастая, О. М. Пигнастый // Доп. Нац. акад. наук України. – 2005. – № 7. – С. 66–71.
11. Шананин А. А. Обобщенная модель чистой отрасли производства / А. А. Шананин // Математическое моделирование, 1997, том 9, № 9. – С. 117–127.
12. Венцель Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е. С. Венцель, Л. А. Овчаров. – М. : Высшая школа, 2000. – 383 с.
13. Балашевич В. А. Математические методы в управлении производством / В. А. Балашевич. – Минск : Вышэйш. шк., 1976. – 334 с.
14. Рушицький Я. Я. Модифікована модель Філіпса-Лоренца для економічної системи (корпорації фірм) із стабільним капіталом / Я. Я. Рушицький, Т. С. Мілованов // Доп. Нац. акад. наук України. – 1996. – № 12. – С. 36–40.
15. Гончар Н. С. Информационная модель в экономике / Н. С. Гончар // Тез. докл. Междунар. конф. НАНУ "Статистическая физика: Общие проблемы и новые применения". – Л., 2005. – С. 33.
16. Чернавский Д. С. О проблемах физической экономики / Д. С. Чернавский, Н. И. Старков, А. В. Щербаков // Успехи физических наук. – 2002. – Т. 172. – № 12. – С. 1045–1066.
17. Савицкая Г. В. Анализ хозяйственной деятельности предприятия / Г. В. Савицкая. – Мн. : Новое знание, 2002. – 704 с.

**Авторы искренне признательны и благодарны профессорам ХНУ им. В. Н. Каразина В. Г. Михаленко, Н. П. Дидиченко, А. А. Дубровину, В. П. Демуцкому и В. Д. Ходусову за обсуждение материалов и ценные замечания при подготовке статьи.